Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Категория модулей над общей линейной супергруппой как категория со старшим весом

А. Н. Зубков

Концепция категории со старшим весом появилась в основополагающей работе [**1**] как обобщающее понятие для некоторых типичных свойств широкого спектра теорий, таких, например, как теория представлений алгебраических групп, групп и алгебр Ли, квазинаследственных алгебр и др. Наличие у данной абелевой категории структуры категории со старшим весом несет существенную информацию о группах расширений (любой степени), дает возможность локально изучать нашу категорию в терминах представлений подходящей конечномерной квазинаследственной алгебры. Последнее понятие появилось в работах специалистов по теории представлений артиновых алгебр (см. [**2**]). Было обнаружено, что квазинаследственность артиновой алгебры A эквивалентна тому, что категория $A - \mathrm{mod}$ является категорией со старшим весом [**1**]! Кроме того, понятие квазинаследственности оказалось исключительно полезным для описания структурных свойств и представлений многих классических объектов, например, алгебр Шура общих линейных групп, и даже обобщенных алгебр Шура редуктивных алгебраических групп [**3**].

В последнее время для многих классических объектов были построены квантовые аналоги и суператалоги. Естественно возникает вопрос о том, не будут ли соответствующие им категории модулей и супермодулей категориями со старшим весом? Оказалось, что для квантовых алгебр Шура и квантовых классических групп ответ положителен (с некоторыми ограничениями на параметр квантования q, см. [**4, 5**]), однако случай суперbegin алгебр Шура и общих линейных супергрупп преподнес неожиданный сюрприз! Именно, оказалось, что суперbegin алгебра Шура $S(m|n,r)$, $m,n \geqslant 1$, общей линейной супергруппы $GL(m|n)$, квазинаследственна тогда и только тогда, когда она полупроста [**6**]. Последнее имеет место только в одном из следующих случаев:

1. основное поле имеет нулевую характеристику;
2. основное поле имеет характеристику $p > 0$ и либо $p > r$, либо $m = n = 1$ и p не делит r.

С другой стороны, представления $S(m|n,r)$ — это однородные полиномиальные представления $GL(m|n)$, степени r. Было бы естественно ожидать, что категория (рациональных) $GL(m|n)$-модулей тоже не является категорией со старшим весом. Тем не менее верна следующая

Теорема 1. *Категория рациональных $GL(m|n)$-супермодулей с четными морфизмами является категорией со старшим весом.*

Для доказательства этого результата мы развиваем супераналог теории модулей с хорошей фильтрацией и двойственной теории модулей с фильтрацией Вейля (см. [**7**, часть II]). При этом мы показываем, что инъективная оболочка произвольного простого супермодуля со старшим весом λ имеет хорошую фильтрацию, все факторы которой, кроме первого, индуцированные супермодули со старшими весами строго большими λ. Первый фактор имеет старший вес λ. Кратность вхождений индуцированных супермодулей вычисляется при помощи двойственности Брауэра — Хамфри.

К сожалению, категория $GL(m|n) - \mathrm{mod}$ слишком "большая" для того, чтобы в нее переносились все свойства категории $GL(m)$. Например, любое насыщенное множество доминантных весов супергруппы $GL(m|n)$ бесконечно. Поэтому в $GL(m|n) - \mathrm{mod}$, скорее всего, невозможно построить теорию так называемых "tilting" модулей, то есть модулей имеющих одновременно и хорошую фильтрацию и фильтрацию Вейля. Даже существование таких модулей — открытый вопрос, ответ на который, вероятнее всего, отрицательный.

Далее, классическая теорема Донкина — Матье утверждает, что тензорное произведение двух G-модулей с хорошей фильтрацией, где G произвольная редуктивная группа, снова имеет хорошую фильтрацию относительно диагонального действия. В суперслучае эта теорема неверна. В связи с тем, что суперaлгебры Шура оказались достаточны далеки по своим свойствам от общих линейных супергрупп, возникает интересная проблема найти полные подкатегории в $GL(m|n) - \mathrm{mod}$, соответствующие конечным множествам доминантных весов, которые бы оставались категориями со старшим весом. Желательно при этом, чтобы они были замкнуты относительно расширений.

Мы обсудим эти, и многие другие, проблемы теории представлений классических супергрупп, а так же пути их решения.

Список литературы

[1] E.Cline, B.Parshall and L.Scott, *Finite dimensional algebras and highest weight categories*, J. Reine Angew. Math., 391(1988), 85-99.
[2] V.Dlab and C.M.Ringel, *Quasi-hereditary algebras*, Illinois J.Math., 33(1989), N2, 280-291.
[3] S.Donkin, *On Schur algebras and related algebras I*, J.Algebra, 104(1986), N2, 310-328.
[4] B.Parshall and J.Wang, *Quantum linear groups*, Mem.Amer.Math. Soc., 439, 1991.
[5] S.Donkin, *The q-Schur algebras*, London Math.Soc., Lect. Note Ser. 253, 1998.
[6] F.Marko and A.N.Zubkov, *Schur superalgebras in characteristic p, II*, to appear in Bulletin of London Math.Soc.
[7] J.Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press, Inc., 1987.

Омский государственный педагогический университет
E-mail: zubkov@iitam.omsk.net.ru