Мальцевские чтения
Новосибирск (2005)
Тезисы докладов

Об изоморфизме линейных групп

А. С. Исмагилова

В работе исследован изоморфизм линейных групп над ассоциативными кольцами с четырьмя плотными идемпотентами.

Пусть R и S — ассоциативные кольца с единицей. Пусть в R определена полная система матричных единиц $\{e_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 4\}$, $\sum_{i=1}^{4} e_{ii} \neq 1$, $Re_{ii}R = R$. Пусть в S определен идемпотент g, $g^2 = g$, $SgS = S$, $S(1-g)S = S$. Обозначим через $U(R)$ группу обратимых элементов, через $E(R)$ — ее подгруппу, порожденную элементами $1 + e_{ii}r(1-e_{ii})$, $1 + (1-e_{ii})re_{ii}$, $r \in R$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с единицей, $\varphi : U(R) \to U(S)$ — изоморфизм групп. Пусть $\Lambda_1 = \left\{3^k \mid k \in Z, k > 0\right\}$, $S_1 = S\Lambda_1^{-1}$ — кольцо частных кольца S относительно мультипликативной системы Λ_1, $\tau : S \to S_1$ - канонический гомоморфизм, $R' = \left\{\sum_{i=1}^{4} e_{i1}re_{1i} \mid r \in R\right\}$, $M_4(R')$ — кольцо (4×4)-матриц. Тогда существует идемпотент f кольца S_1, кольцевой гомоморфизм $\theta_1 : M_4(R') \to fS_1f$ и кольцевой антигомоморфизм $\theta_2 : M_4(R') \to (1-f)S_1(1-f)$ такие, что*

$$\tau\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2\left(A^{-1}\right) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1) \text{ для всех } A \in E_n(R).$$

Теорема 1. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с единицей, $\varphi : U(R) \to U(S)$ — изоморфизм групп, $R' = \left\{\sum_{i=1}^{4} e_{i1}re_{1i} \mid r \in R\right\}$, $M_4(R')$ — кольцо (4×4)-матриц . Тогда существует идемпотент f кольца S, кольцевой гомоморфизм $\theta_1 : M_4(R') \to fSf$ и кольцевой антигомоморфизм $\theta_2 : M_4(R') \to (1-f)S(1-f)$ такие, что*

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2\left(A^{-1}\right) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1) \text{ для всех } A \in E_n(R).$$

Основным результатом является следующая

Теорема 2. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с единицей, $\varphi : U(R) \to U(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец R и S соответственно, кольцевой изоморфизм $\theta_1 : eR \to fS$ и кольцевой антиизоморфизм $\theta_2 : (1-e)R \to (1-f)S$ такие, что*

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2\left((1-e)A^{-1}\right) \text{ для всех } A \in E_n(R).$$

Отметим, что в доказательстве утверждений рассмотрены кольца частных и применен метод инволюций.

23 сентября 2005

Список литературы

[1] Golubchik I. Z. Isomorphisms of the General Linear Group $GL_n\ (R)$, $n \geqslant 4$ over an Associative Ring // Amer. Math. Soc. – 1992. – V. 131. Part 1. – P. 123-136. bibitemLit2 Автоморфизмы классических групп (сб. переводов с англ. и франц.). M.: Мир, 1976. – 264 с.

[2] Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами (сб. переводов с англ.). M.: Мир, 1980. – 272 с.

E-mail: IsmagilovaAS@rambler.ru