Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

О конкретной характеризации универсальных упорядоченных автоматов

С. А. Акимова

Следуя [1], под универсальным упорядоченным полугрупповым автоматом будем понимать автомат $\mathrm{Atm}(X,Y)=(X,S,\delta,\lambda)$ с упорядоченным множеством состояний $X=(X,\leq_X)$, упорядоченным множеством выходных сигналов $Y=(Y,\leq_Y)$, полугруппой входных сигналов $S=\mathrm{End}\,X\times\mathrm{Hom}(X,Y)$ (состоящей из пар $s=(\varphi,\psi)$ эндоморфизмов φ упорядоченного множества X и гомоморфизмов ψ упорядоченного множества X в упорядоченное множество Y), функцией переходов $\delta(x,s)=\varphi(x)$ и выходной функцией $\lambda(x,s)=\psi(x)$ (здесь $x\in X$ и $s=(\varphi,\psi)$ – элемент полугруппы $S=\mathrm{End}\,X\times\mathrm{Hom}(X,Y)$).

Автомат $A=(X,S,Y,\delta,\lambda)$ называется универсально упорядочиваемым, если его можно превратить в универсальный нетривиально упорядоченный автомат $\mathrm{Atm}(X,Y)$ путем задания некоторого нетривиального порядка $\leq_X$ на множестве состояний X и некоторого порядка $\leq_Y$ на множестве выходных сигналов Y.

В заметке исследована проблема конкретной характеризации [2] универсальных упорядоченных автоматов, которая формулируется следующим образом:

при каких условиях автомат A с множеством состояний X, множеством выходных сигналов Y и полугруппой входных сигналов S будет универсально упорядочиваемым автоматом $\mathrm{Atm}(X,Y)$ для некоторых порядков $\leq_X$ и $\leq_Y$ на множестве X и Y, соответственно?

Определим для автомата $A=(X,S,Y,\delta,\lambda)$ два канонических бинарных отношения Q_X,Q_Y по формуле: пара элементов (x,y) из множества X^2 (соответственно, из Y^2) принадлежит отношению Q_X (соответственно, Q_Y), если для любых элементов $u,v\in X$, $u\neq v$ найдется такой входной сигнал $s\in S$, что отображение δ_s (соответственно, λ_s) отображает множество $\{u,v\}$ на множество $\{x,y\}$.

Теорема. Автомат $A=(X,S,Y,\delta,\lambda)$ без равнодействующих входных сигналов в том и только том случае будет универсально упорядочиваемым автоматом, если его канонические отношения Q_X,Q_Y удовлетворяют следующим схемам аксиом:

(Σ_1) для любого $x\in Z$ выполняется $(x,x)\in Q_Z$ (здесь $Z\in\{X,Y\}$);

(Σ_2) если x, y – любые элементы из X, u, v – любые элементы из Z, причем $u \neq v$ и существуют входные сигналы $s, t \in S$ такие, что s (соответственно, t) переводит (x, y) в (u, v) (соответственно, в (v, u)), то выполняется условие $(x, y) \notin Q_Z$ (здесь $Z \in \{X, Y\}$);

(Σ_3) если $(x, y) \in Q_X$, u, v, w – произвольные элементы Z, причем $(u, v), (v, w) \in Q_Z$ и существуют входные сигналы $s, t \in S$ такие, что s (соответственно, t) переводит (x, y) в (u, v) (соответственно, в (v, w)), то найдется входной сигнал $h \in S$, который переводит (x, y) в (u, w) (здесь $Z \in \{X, Y\}$);

(Σ_4) существуют такие элементы $x, y \in X$, что $x \neq y$, $(x, y) \in Q_X$;

(Σ_5) для любой пары $f = (f_1, f_2)$ отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$ из условия, что для любых $x, y \in X$, удовлетворяющих $(x, y) \in Q_X$, в полугруппе S существует элемент s, который переводит (x, y) в $(f_1(x), f_2(y))$, следует $f \in S$.

С помощью данного результата можно получить абстрактную характеристику универсального упорядоченного полуавтомата и исследовать взаимосвязь абстрактных и элементарных свойств универсальных упорядоченных автоматов и полугрупп их входных сигналов.

Список литературы

[1] Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов.-М.:Высш. шк., 1994.

[2] Jonson B., Topics in Universal Algebras. Lecture Notes, Vanderbilt University, 1970.

E-mail: akimovasa@mail.ru