Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Плотные подсистемы в системах троек Штейнера

Е. В. Антосяк

Напомним, что если S — непустое конечное множество, элементы которого мы будем называть *точками* и $\mathcal{B}(S)$ — семейство подмножеств из S, элементы которого мы будем называть *блоками*, то множество S вместе с выделенной системой блоков $\mathcal{B}(S)$ называют [1] *системой троек Штейнера*, если выполняются следующие два условия:

(STS1) любой блок состоит из трех точек,

(STS2) любые две различные точки содержатся в единственном блоке.

Определение 1. Непустое множество H из системы троек Штейнера S мы будем называть *подсистемой* в S, если любой блок из $\mathcal{B}(S)$, содержащий хотя бы две различные точки из H, полностью содержится в H. Подсистему H из S мы будем называть *собственной подсистемой* в S, если $H \neq S$.

Определение 2. Подмножество P из системы троек Штейнера S мы будем называть *плотным* в S, если любой блок системы S содержит хотя бы одну точку из P. Плотное подмножество P, которое одновременно является собственной подсистемой в S, мы будем называть *плотной подсистемой* в S (и обозначать $P \lhd S$).

Теорема 1. *Пусть H — собственная подсистема в системе троек Штейнера S. Тогда*

$$|S| \geq 2|H| + 1.$$

Если $|S| = 2|H| + 1$, то H — плотная подсистема в S.

Теорема 2. *Пусть P — плотное подмножество в системе троек Штейнера S. Тогда*

$$|S| \leq 2|P| + 1.$$

Если $|S| = 2|P| + 1$, то P — плотная подсистема в S.

Пусть H — плотная подсистема в системе троек Штейнера S. Тогда

$$|S| = 2|H| + 1.$$

Теорема 3. *Если система троек Штейнера S содержит плотную подсистему, то $|S| \equiv 3(mod 12)$ или $|S| \equiv 7(mod 12)$.*

Теорема 4. *Пусть* H_1 *и* H_2 *— различные плотные подсистемы в системе троек Штейнера* S*. Тогда*

(1) теоретико-множественное дополнение в S *симметрической разности* H_1 *и* H_2 *также образует плотную подсистему в* S*;*

(2) $H_1 \cap H_2$ *является плотной подсистемой в* H_1 *и в* H_2*.*

Далее мы будем говорить, что подсистема H из системы троек Штейнера S *почти плотно вложена* в S или, короче, H *— почти плотная подсистема* в S, если найдется такая последовательность подсистем

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_m = S,$$

в которой H_i является плотной подсистемой в H_{i+1} для $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Новое понятие почти плотной подсистемы позволяет с помощью теоремы 4 получить следующие утверждения:

Следствие. *Пересечение двух плотных подсистем в системе троек Штейнера* S *является почти плотной подсистемой в* S*.*

Теорема 5. *Пересечение двух почти плотных подсистем в системе троек Штейнера* S *является также почти плотной подсистемой в* S*.*

Автор выражает благодарность профессору В. В. Беляеву за помощь при создании работы.

[1] М. Холл, Комбинаторика, М., Мир, 1970.

E-mail: `Eygenya@ya.ru`