Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Градуированные алгебры и конструкция Кокса

И. В. Аржанцев

Данное сообщение основано на совместных результатах с Ю. Хаусеном (Тьюбинген, Германия). Пусть A – конечно порожденная (коммутативная, ассоциативная) алгебра с единицей и без делителей нуля над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$. Предположим, что алгебра A градуирована решеткой $M \cong \mathbb{Z}^d$, т.е.

$$A = \bigoplus_{u \in M} A_u$$

и $A_u \cdot A_v \subseteq A_{u+v}$. Естественно спросить, для каких пар $(u, v) \in M^2$ отображение умножения $A_u \otimes A_v \to A_{u+v}$ сюрьективно. При такой постановке вопроса ответ будет сильно зависить от структуры градуированной алгебры A.

Пример 1. Пусть $d = 1$ и $A_u = 0$ при $u < 0$. Может оказаться, что отображение $A_u \otimes A_v \to A_{u+v}$ несюрьективно для сколь угодно больших u и v. (Достаточно рассмотреть $A = \Bbbk[T_1, T_2]$ с $\deg(T_1) = 1$, $\deg(T_2) = 2$, а u и v положить нечетными.) Однако, если определить s-е разряжение алгебры A как $A^s = \oplus_{n \geq 0} A_{ns}$, то число s можно подобрать так, что алгебра A^s порождается своими нулевой и первой компонентами. Отсюда следует, что $A_u \otimes A_v \to A_{u+v}$ сюръективно для любых $u, v \in s\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Данный пример мотивирует следующее определение: пару элементов $(u, v) \in M^2$ будем называть *порождающей*, если найдется такое $m > 0$, что для любого $k > 0$ отображение $A_{kmu} \otimes A_{kmv} \to A_{km(u+v)}$ сюръективно. Наш основной результат показывает, что множество порождающих пар допускает (почти) полное описание в терминах так называемого GIT-веера, который сопоставляется любой градуированной алгебре. Такой веер впервые возник в работе [**3**] в рамках геометрической теории инвариантов.

Напомним необходимые определения. M-градуировка алгебра A однозначно определяет действие алгебраического тора $T := \operatorname{Spec}(\Bbbk[M])$ на аффинном алгебраическом многообразии $X := \operatorname{Spec}(A)$: для любого $u \in M$ элементы $f \in A_u$ суть полуинварианты веса $\chi^u \colon T \to \Bbbk^*$, т.е. каждый $f \in A_u$ удовлетворяет $f(t \cdot x) := \chi^u(t) f(x)$. Под *весовым конусом* градированной алгебры A мы будем понимать выпуклый полиэдральный конус $\omega(A) \subseteq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, порожденный весами $u \in M$, такими что $A_u \neq 0$. Определим *орбитный* конус точки $x \in X$ как выпуклый полиэдральный конус $\omega(x) \subseteq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, порожденный

Работа поддержана грантом INTAS YS 05-109-4958.

весами $u \in \omega(A)$, для которых имеется $f \in A_u$, такая что $f(x) \neq 0$. Множество орбитных конусов конечно, и с каждым элементом $u \in \omega(A)$ мы можем связать еще один выпуклый полиэдральный конус, который будем называть *GIT-конусом* точки u:

$$\lambda(u) \quad := \quad \bigcap_{\substack{x \in X, \\ u \in \omega(x)}} \omega(x).$$

GIT-конуса покрывают весовой конус $\omega(A)$, и, как показано в [**3**, Thm. 3.11], их совокупность $\Lambda(A)$ образует веер: если $\lambda \in \Lambda(A)$, то каждая грань λ также лежит в $\Lambda(A)$, и для $\tau, \lambda \in \Lambda(A)$ пересечение $\tau \cap \lambda$ есть грань как λ, так и τ. Заметим, что в этом определении допускаются конуса, содержащие прямые.

Теорема 2. [**2**, Thm. 1]

1. *Если пара $u, v \in \omega(A) \cap M$ является порождающей, то веса u, v лежат в общем GIT-конусе $\lambda \in \Lambda(A)$.*
2. *Если $u, v \in \omega(A) \cap M$ лежат в общем GIT-конусе $\lambda \in \Lambda(A)$ и вес u содержится в относительной внутренности λ° конуса λ, то пара (u, v) является порождающей.*

Если веса $u, v \in \omega(A) \cap M$ попали на границу общего GIT-конуса $\lambda \in \Lambda(A)$, то пара (u, v) может оказаться как порождающей, так и нет. Первую возможность продемонстрировать легко, а вторую подтверждает следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим кольцо многочленов $A := \Bbbk[T_1, T_2, T_3, T_4]$ и определим $\mathbb{Z}^2$-градуировку на A как

$$\deg(T_1) := (4,1), \quad \deg(T_2) := (2,1), \quad \deg(T_3) := (1,2), \quad \deg(T_4) := (1,3).$$

Любой конус в $\mathbb{Q}^2$, порожденный подмножеством множества весов образующих, является орбитным конусом, и потому имеются три GIT-конуса максимальной размерности. Пара $u := (2,1)$ и $v := (1,2)$ содержится в общем GIT-конусе, но порождающей не является: можно проверить, что мономы

$$T_1 T_2^{n-2} T_3^{n-1} T_4 \in A_{n(u+v)}$$

не могут быть получены перемножением элементов из A_{nu} и A_{nv}.

Получена также геометрическая характеризация порождающих пар [**2**, Thm. 2]. В обосновании этих результатов используются методы геометрической теории инвариантов и конструкция однородного координатного кольца (кольца Кокса) алгебраического многообразия, обобщающая конструкцию Кокса [**4**] из торической геометрии. Нужные нам свойства конструкции Кокса были получены в [**1**].

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev and J. Hausen, *On embeddings of homogeneous spaces with small boundary*, J. Algebra **304:2**, 2006, 950-988.

[2] I. V. Arzhantsev and J. Hausen, *On the multiplication map of a multigraded algebra*, preprint `arXiv:math.AC/0607819`.

[3] F. Berchtold and J. Hausen, *GIT-equivalence beyond the ample cone*, to appear in Michigan Math. J. `arXiv:math.AG/0503107`.

[4] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 17-50.

Россия, 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры

E-mail: arjantse@mccme.ru