

О полугруппах отношений с операциями замыкания

Д. А. Бредихин

Обозначим через $Rel(X)$ множество всех бинарных отношений, заданных на базисном множестве X . Относительно операции умножения отношений множество $Rel(X)$ образует полугруппу $(Rel(X), \circ)$, называемую полугруппой отношений. Наряду с операцией умножения, на множестве $Rel(X)$ могут быть заданы ряд других операций, играющих важную роль в теории отношений. Ряд таких операций был рассмотрен в фундаментальной работе В.В.Вагнера [1], посвященной общей теории бинарных отношений. В общем случае множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними образует алгебру, называемую алгеброй отношений. Таким образом, исследование полугрупп бинарных отношений с дополнительными операциями может проводиться в рамках общей теории алгебр отношений. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А.Тарского [2,3]. Обзор некоторых результатов в этом направлении можно найти в [4,5].

Обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношения с операциями из Ω . Пусть $Q\{\Omega\}$ - квамнообразие и $Var\{\Omega\}$ - многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$. Согласно А.Тарскому, одной из основных проблем при изучении алгебр отношений является проблема описания их свойств, выразимых на языке тождеств, то есть к изучению многообразий $Var\{\Omega\}$.

Нами будет рассмотрена операция прямоугольного замыкания бинарных отношений [1]. Бинарное отношение ρ называется прямоугольным, если $\rho = A \times B$ для некоторых подмножеств A и B . Множество всех прямоугольных отношений образует систему замыканий на $Rel(X)$. Соответствующую операцию замыкания обозначим через $*$. Указанная операция является диофантовой, то есть может быть задана с помощью формулы исчисления предикатов первого порядка, содержащей в своей записи лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. Этот факт позволяет применить к классу полугрупп отношений с операцией прямоугольного замыкания общую теорию многообразий и квазимногообразий алгебр отношений с диофантовыми операциями [6,7,8].

Теорема 1. *Класс $R\{\circ, *\}$ полугрупп отношений с операцией прямоугольного замыкания не является квазимногообразием, то есть $R\{\circ, *\} \neq Q\{\circ, *\}$. Квазимногообразие $Q\{\circ, *\}$ не является многообразием, то есть $Q\{\circ, *\} \neq Var\{\circ, *\}$. Многообразие $Var\{\circ, *\}$ конечно базируемо. Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, *\}$ тогда и только тогда, когда она*

удовлетворяет следующим тождествам:

$$\begin{aligned}
 (xy)z &= x(yz), \quad (x^*)^* = x, \quad xx^*x = (xx)^*, \quad xx^* = xx^*x^*, \quad xx^* = xx^*x^*, \\
 x^*x &= x^*x^*x, \quad x^*x^*x^* = x^*x^*, \quad (xy^*)^* = xy^*, \quad (x^*y)^* = x^*y, \\
 x^*yx^*zx^* &= x^*zx^*yx^*, \quad xyx^*yx^* = xyx^*, \quad x^*yx^*yx^* = x^*yx^*, \\
 x^*yx^*yx &= x^*yx, \quad x^*yx^*yx^* = x^*yx^* \quad xyxzx^*yx^* = xyxzx^*, \\
 x^*yxzx^*yx^* &= x^*yxzx^*, \quad x^*yx^*zxyx = x^*xzxxyx, \quad x^*yx^*zxyx^* = x^*xzxxyx^*.
 \end{aligned}$$

Литература

- [1] Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных преобразований. Теория полугрупп и ее приложения. Вып. 1, Саратов, 1965, С.3-197. [2] Tarski A. On the calculus of relations. J. Symbolic Logic, V.6(1941), P.73 - 89. [3] Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations. J. Symbolic Logic, V.18(1953), P.188 -189. [4] Schein В.М. Representation of reducts of Tarski relation algebras. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. V.54(1991), P.379-394. [5] Bredikhin D.A. On relation algebras with general superpositions. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. V.54(1991), P.111-124. [6] Бредихин Д.А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями. Изв. Вузов. Матем. 3(1993), С.23-30. [7] Бредихин Д.А. О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями. Сибирск. матем. журн., Т.38(1997), С. 29-41. [8] Бредихин Д.А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями. Доклады Российской Академии Наук, Т.360(1998), С.594-595.

E-mail: bredikhin@mail.ru