Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле

Е. И. Бунина

Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал.

Пусть G — групповая схема Шевалле–Демазюра, ассоциированная с неприводимой системой корней; $G(R)$ — группа точек G со значениями в R; $E(R)$ — элементарная подгруппа в $G(R)$, где R — локальное коммутативное кольцо с 1. Нас интересуют автоморфизмы группы $G(R)$ (и ее подгруппы ($E(R)$)). Предположим, что ранг G больше 1, R — локальное кольцо с 1/2 такое, что если G — группа типа G_2, то в кольце R обратима тройка, а также кольцо R содержит такой обратимый элемент α, что элемент $\alpha^2 - 1$ также обратим.

Стандартным называется автоморфизм группы G, являющийся композицией внутреннего, кольцевого, графового автоморфизмов и центральной гомотетии.

Теорема 1. *При перечисленных выше условиях каждый автоморфизм группы $G(R)$ стандартен.*

Этот результат для групп Шевалле над полями был получен Р. Стейнбергом [1] для конечного случая и Дж. Э. Хамфри [2] для бесконечного. Оба эти результата содержат упомянутые выше исключения, для которых имеются некоторые нестандартные автоморфизмы. К. Судзуки [3] исследовал автоморфизмы групп Шевалле над кольцами p-адических чисел. Э. Абе [4] доказал сформулированный результат для нетеровых колец, однако класс локальный колец не содержится полностью в классе нетеровых колец, а доказательства работы [4] не проходят для произвольных локальных колец.

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$.

Первые результаты о связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были получены А.И. Мальцевым в 1961 году в работе [5]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ (где $G = GL, SL, PGL, PSL$, $n, m \geq 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Изучение этих вопросов было продолжено в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрастепени и теоремы об изоморфизме [6] К.И. Бейдар и А.В. Михалев [7] сформулировали общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур, и обобщили теорему Мальцева на случай, когда K и L — тела и ассоциативные кольца.

В 1998–2005 Е.И. Бунина продолжила изучать некоторые проблемы этого типа. (см. [8]–[11]). Результаты А.И. Мальцева были обобщены для унитарных линейных групп над телами и ассоциативными кольцами с инволюциями, а также для групп Шевалле над полями.

Благодаря теореме 1 результаты об элементарной эквивалентности групп Шевалле над полями обобщены на случай локальных колец:

Теорема 2. *Пусть* $G = G_\pi(\Phi, R)$ *и* $G' = G_{\pi'}(\Phi', R')$ *(или* $E_\pi(\Phi, R)$ *и* $E_{\pi'}(\Phi', R')$*) — две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными локальными кольцами* R *и* R' *с полями вычетом характеристик, отличных от двух (а в случае системы корней* G_2 *отличных от трех), с неразложимыми системами корней* Φ, Φ' *рангов, больших одного, с решетками весов* Λ *и* Λ' *соответственно. Пусть, кроме того, каждое из колец* R *и* R' *содержит такой обратимый элемент* α*, что элемент* $\alpha^2 - 1$ *обратим. Тогда группы* G *и* G' *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда сисстемы корней* Φ *и* Φ' *изоморфны, кольца* R *и* R' *элементарно эквивалентны, решетки* Λ *и* Λ' *изоморфны.*

Литература.

[1] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. Москва, Мир, 1975. [2] Humphreys J. F., On the automorphisms of infinite Chevalley groups, Canad. J. Math., 21, 1969, 908-911. [3] Suzuki K., On the automorphisms of Chevalley groups over p-adic integer rings, Kumamoto J. Sci. (Math.), 16(1), 1984, 39–47. [4] Абе Э. Автоморфизмы групп Шевалле над комутативными кольцами. Алгебра и анализ, 5 (1993), N3, 74–90. [5] Мальцев А.И. Об элементарных свойствах линейных групп. Проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961, 110–132. [6] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. Москва, Мир, 1977. [7] Beidar C.I. and Michalev A.V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups. Contemporary mathematics, 1992, 131, 29–35. [8] Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами. Успехи Мат. Наук, 53(2), 1998, 137–138. [9] Бунина Е.И., Элементарная эквивалентность групп Шевалле, Успехи Мат. наук, 56(1), 2001, 157–158. [10] Bunina E.I., Mikhalev A.V. Combinatorial and Logical Aspects of Linear Groups and Chevalley Groups. Acta Applicandae Mathematicae, 2005, 85(1-3), 57-74. [11] Бунина Е.И., Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства, Успехи мат. наук, 59(5), 2004, 952–953.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@yandex.ru