

Алгебры операторов инвариантного дифференцирования

А. П. Чупахин

Дифференциальные инварианты групп преобразований Ли интенсивно изучаются в последнее время, особенно применительно к построению дифференциально-инвариантных решений дифференциальных уравнений (Л. В. Овсянников, П. Олвер, Н. Х. Ибрагимов и др.). Важную роль при описании множества всех дифференциальных инвариантов играет алгебра операторов инвариантного дифференцирования.

Пусть группа Ли непрерывных преобразований G_r действует в базовом пространстве $\mathbb{R}^n(\mathbf{x}) \times \mathbb{R}^m(\mathbf{u})$ и продолжена на производные $\mathbf{p}_k = \partial^k \mathbf{u} / \partial^{i_1} x^1 \dots \partial^{i_n} x^n$, $i_1 + \dots + i_n = k$ всех порядков k . Ей отвечает алгебра Ли L_r операторов $X_\alpha = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{x^i} + \eta^k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{u^k} + \zeta_i^k \partial_{u_i^k} + \dots$, $\alpha = 1, \dots, r$ в продолженном на производные \mathbf{p}_k базовом пространстве. Алгебра операторов инвариантного дифференцирования $\Delta(L_r)$ (ОИД) действует на дифференциальные инварианты алгебры L_r , повышая их порядок. Она является расширением алгебры L_r : если $\delta \in \Delta(L_r)$ и $X \in L_r$, то $[\delta, X] = 0$.

Алгебра $\Delta(L_r)$ является алгеброй Ли $[\delta_i, \delta_k] = B_{ik}^j \delta_j$, в которой структурные константы B_{ik}^j , являющиеся элементами поля дифференциальных инвариантов, удовлетворяет уравнениям

$$\delta_l B_{ik}^j + \delta_i B_{kl}^j + \delta_k B_{li}^j = B_{ik}^m B_{ml}^j + B_{kl}^m B_{mi}^j + B_{li}^m B_{mk}^j \quad (*)$$

для любых $\delta_l, \delta_i, \delta_k \in \Delta(L_r)$. Уравнение (*) следует из тождества Якоби. Доказано (А. П. Чупахин), что некоторым линейным преобразованием базиса в $\Delta(L_r)$ можно привести её к абелевой, но эти преобразования повышают порядок дифференциальных инвариантов и не могут эффективно использоваться для классификации алгебр ОИД.

Интересной и нетривиальной проблемой является алгебраическая классификация алгебр ОИД.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru