Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Билинейные уравнения над свободной антикоммутативной алгеброй

Э. Ю. Даниярова

Аннотация. На докладе будет представлена структура решения билинейного уравнения $x_1y_1+\ldots+x_ny_n=0$ над свободной антикоммутативной алгеброй A, а также – уравнений, сводящихся к билинейным, например, $xy=uv$, где $u,v\in A$, или $x_1u_1+\ldots+x_nu_n=0$, $u_i\in A$. Решения таких уравнений образуют ограниченные с параметрами алгебраические множества над алгеброй A.

Пусть A – свободная конечно порождённая антикоммутативная алгебра над полем k ранга r и L – свободная алгебра Ли над полем k ранга r.

В 2005 году вышла статья [1] Э. Ю. Данияровой и В. Н. Ремесленникова "Ограниченная алгебраическая геометрия над свободной алгеброй Ли" (Алгебра и логика, 44(3), 269–304). В данной работе были определены и классифицированы так называемые ограниченные алгебраические множества над алгеброй L. Определение ограниченных алгебраических множеств мы дали тремя способами: непосредственно на языке алгебраических множеств, на языке радикалов и на языке координатных алгебр. Восстановим первое из них.

Алгебраическое множество $Y=\mathrm{V}(S)$, $S=S(x_1,\ldots,x_n)$, над алгеброй L называется *ограниченным*, если оно содержится в конечномерном k" линейном подпространстве n" мерного аффинного пространства L^n. Другими словами, множество Y ограничено, если найдутся такие элементы $v_1,\ldots,v_m\in L$, что $Y=\{(\alpha_{11}v_1+\ldots+\alpha_{1m}v_m,\ \ldots,\ \alpha_{n1}v_1+\ldots+\alpha_{nm}v_m)\,|\,\alpha_{ij}\in k\}$. Здесь коэффициенты поля α_{ij} пробегают какое-то подмножество в k^{nm}. Нами было показано, что *существует взаимно однозначное соответствие между алгебраическими множествами над полем k и ограниченными алгебраическими множествами над алгеброй Ли L*.

Ограниченные алгебраические множества составляют широкий пласт в категории всех алгебраических множеств над алгеброй L. Так оказалось, что все результаты упомянутой выше работы [1] без изменений переносятся с алгебры Ли L на антикоммутативную алгебру A. Этот факт стал основанием для того, чтобы в дальнейшем изучать алгебраическую геометрию над алгебрами L и A параллельно.

В 2006 году В. Н Ремесленников и Р. Штёр написали работу [2] "The equation $[x,u]+[y,v]=0$ in free Lie algebras" (http://eprints.ma.man.ac.uk/272/). В

ней исследованы решения уравнений $[x,u]+[y,v]=0$ $(u,v\in L)$ над алгеброй Ли L. Как оказалось, такие уравнения решаются сложно, а их решения не являются ограниченными множествами.

Недавно мы приступили к изучению подобных уравнений над свободной антикоммутативной алгеброй A. Выяснилось, что над алгеброй A подобные линейные уравнения решаются значительно проще, чем над алгеброй L, а их решения образуют ограниченные множества.

Более общо, мы рассмотрели билинейные уравнения $x_1y_1+\ldots+x_ny_n=0$, а также ряд уравнений, сводящихся к билинейным, нашли их решения, показали, что решения являются ограниченными с параметрами множествами.

Формально понятие ограниченного с параметрами множества мы определяем на языке координатных алгебр: алгебраическое множество Y над алгеброй A называется *ограниченным с параметрами*, если существуют такие параметры $t_1,\ldots,t_s$, что множество Y ограничено (в смысле данного выше определения) над алгеброй $A[t_1,\ldots,t_s]$. Алгебра $A[t_1,\ldots,t_s]$ является свободным расширением алгебры A с помощью новых независимых порождающих $t_1,\ldots,t_s$, то есть свободной антикоммутативной алгеброй ранга $r+s$.

Приведём примеры ограниченных с параметрами алгебраических множеств над алгеброй A. В их число входят основные результаты данного доклада.

1. Рассмотрим уравнение $S_0\ :\ xu=0$, где $u\in A$. Если $u\neq 0$, то решение $\mathrm{V}(S_0)=\{\alpha u|\alpha\in k\}$ является ограниченным множеством. Если u=0, то $\mathrm{V}(S_0)=\{t\,|\,t\in A\}$ – ограниченное с параметром t множество; параметр t пробегает множество всех элементов алгебры A.
2. Пусть $S_1\ :\ xu+yv=0$, где $u,v\in A$. Если элементы u и v линейно независимы, то решение
$$\mathrm{V}(S_1)\ =\ \{x=\alpha u+\beta v,\ y=\beta u+\gamma v\ |\ \alpha,\beta,\gamma\in k\}\quad -$$
ограниченное множество. Если элементы u и v линейно зависимы (скажем, $v=\lambda u$), то $S_2\ :\ (x+\lambda y)\,v=0$ и решение
$$\mathrm{V}(S_1)\ =\ \{x=\alpha u-\lambda t,\ y=t\ |\ \alpha\in k,\ t\in A\}$$
ограничено с параметром t.
3. Обобщением уравнения S_1 является уравнение
$$S_2\ :\ x_1u_1+\ldots+x_nu_n=0,\quad u_1,\ldots,u_n\in A.$$
Если элементы $u_1,\ldots,u_n$ линейно независимы, то решение
$$\mathrm{V}(S_2)\ =\ \{(x_1,\ldots,x_n)=(u_1,\ldots,u_n)\cdot C\ |\ C\in\mathrm{M}_n(k),C^T=C\}\quad -$$
ограниченное множество. Если, например, элементы $u_1,\ldots,u_m$, $m<n$, линейно независимы и $u_{m+i}=\lambda_{i1}u_1+\ldots+\lambda_{im}u_m$ для любого $i=1,\ldots,s$, $s=n-m$, то
$$\mathrm{V}(S_2)\ =\ \{(x_1,\ldots,x_n)=(u_1,\ldots,u_m,t_1,\ldots,t_s)\cdot\left(\begin{array}{cc} C & 0\\ D & E\end{array}\right)\ |$$
$$C\in\mathrm{M}_m(k),\ C^T=C,\ D_{ij}=-\lambda_{ij},\ t_1,\ldots,t_s\in A\}.$$

4. Рассмотрим билинейное уравнение $S_3 \;:\; x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0$. Его решение имеет вид
$$\mathrm{V}(S_3) \;=\; \{(x_1,\ldots,x_n) = (t_1,\ldots,t_n)\cdot B, (y_1,\ldots,y_n) = (t_1,\ldots,t_n)\cdot C \mid B, C \in \mathrm{M}_n(k),\; BC^T = CB^T,\; t_1,\ldots,t_n \in A\}$$
и является ограниченным с параметрами $t_1,\ldots,t_n$ множеством.
5. Поставив константы на места некоторых переменных в билинейном уравнении, получим уравнение
$$S_4 \;:\; x_1y_1 + \ldots + x_ny_n + z_1w_1 + \ldots + z_mw_m + u_1v_1 + \ldots + u_lv_l = 0,$$
где $w_1,\ldots,w_m,u_1,\ldots,u_l,v_1,\ldots,v_l \in A$. Будем считать, что множество констант линейно независимо в совокупности (этого всегда можно добиться). Пусть $s = n - l$. Если $s < 0$, то $\mathrm{V}(S_4) = \emptyset$. Если $s = 0$, то $\mathrm{V}(S_4)$ – ограниченное множество. Если $s > 0$, то
$$\mathrm{V}(S_4) \;=\; \{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m \in \mathrm{lin}_k\{w_1,\ldots,w_m,u_1,\ldots,u_l, v_1,\ldots,v_l,t_1,\ldots,t_s\} \mid t_1,\ldots,t_s \in A\},$$
где коэффициенты поля, участвующие в разложении, пробегают некоторое алгебраическое множество над полем k. Частными случаями уравнения S_4 являются уравнения S_5, S_6 ниже.
6. $S_5 \;:\; xy + zw = 0$, где $w \in A$, $w \neq 0$ (здесь $s = 1$). Тогда
$$\mathrm{V}(S_5) \;=\; \{(x,y) = (u,t)\cdot B,\; z = \alpha u + \det(B)\cdot t \mid B \in \mathrm{M}_2(k), \alpha \in k,\; t \in A\}.$$
7. $S_6 \;:\; xy = uv$, где u, v – линейно независимые элементы алгебры A (здесь $s = 0$). Ранее уже предпринимались попытки решения данного уравнения над алгеброй Ли L, но о каких-либо положительных результатахнам не известно. Над антикоммутативной же алгеброй A решение уравнения S_6 находится довольно просто: имеет вид
$$\mathrm{V}(S_6) \;=\; \{(x,y) = (u,v)\cdot B \mid B \in \mathrm{Sl}_2(k)\}$$
и является ограниченным множеством.
8. Решение уравнения $S_7 \;:\; (xy)z = 0$ сводится к решению уравнения S_6. Алгебраическое множество
$$\mathrm{V}(S_7) \;=\; \{(x,y) = (t_1,t_2)\cdot B,\; z = \alpha t_1t_2 \mid B \in \mathrm{Sl}_2(k), \alpha \in k,\; t_1,t_2 \in A\}$$
ограничено с параметрами t_1, t_2.

Омский филиал ИМ СО РАН
E-mail: evelina.omsk@list.ru