Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Нестандартный форсинг

В. А. Ганов, Р. В. Дегтерева

В данной работе рассматриваются нестандартные способы определения форсинга, при которых вынуждаемы одновременно пары противоречивых суждений вида: ($\forall n\, A(n)$ и $\neg A(n_0)$) или ($B(n_1)$ и $\neg \exists n\, B(n)$).

Наглядно идею форсинга можно интерпретировать следующим способом. Пусть предстоит определить некоторое понятие P, которое не имеет четкого содержания, например, вкусная еда, красивая женщина, лидер коллектива, и т. п. Тогда о смысле такого понятия можно судить лишь на основании мнений некоторых экспертов. Считаем, что имеется некоторое сообщество экспертов, и каждый из них обследует какие-то объекты и высказывает свое мнение о соответствии этих объектов понятию P. Мнение эксперта это конечное непротиворечивое множество, составленное из простейших высказываний вида $P(a)$ или $\neg P(a)$, где a — рассматриваемые объекты. Такие множества называются вынуждающими условиями. Другие свойства объектов записываются формулами некоторой непротиворечивой формальной системы T, содержащей символ P. На основе своего мнения эксперт может оценивать более сложные формулы системы T. Это оценивание называется вынуждением и осуществляется по определенным правилам. Предполагаем, что по мере расширения опыта мнение эксперта может изменяться, но при этом такое изменение не должно противоречить ранее высказанному мнению. Пусть процесс оценивания продолжается достаточно долго, поэтому на каком-то этапе может возникнуть ситуация, когда по правилам форсинга эксперт может дать оценку любому суждению системы T. Суждения, получившие положительные оценки всех экспертов, называются общепринятыми. И если в некоторой модели системы T истинные суждения совпадают с общепринятыми суждениями, то предикат P называется генерическим. В таких случаях общепринятые суждения согласованы с известными тавтологиями логики предикатов.

Заметим, что если мы исследуем рекурсивный предикат P, то указанная генеричность желательна. А вот когда речь идет о нечетких понятиях, то генеричность будет помехой. Поэтому определенный интерес представляет форсинг, когда истинные суждения не совпадают с общепринятыми. Естественный шаг в этом направлении — это добиться, чтобы некоторые логические тавтологии были, по меньшей мере, не всегда вынуждаемы. Один из способов решения этой проблемы рассмотрен в данной работе. Основные понятия форсинга определяем применительно к арифметическому языку. В качестве указанной выше системы T рассматриваем систему $Z(P)$, являющуюся консервативным расширением арифметики Пеано. Каждому вынуждающему условию Q ставим в соответствие множество $S(Q)$, состоящее из вынуждающих условий, расширяющих Q и удовлетворяющих следующим условиям:

$$1) Q' \in S(Q) \& Q'' \in S(Q') \Rightarrow Q" \in S(Q); \qquad 2) Q' \in S(Q) \& Q \subseteq Q" \subseteq Q' \Rightarrow Q" \in S(Q).$$

Отношение вынуждения $Q \Vdash \varphi$ определяем как в [1], с одним дополнением: в качестве допустимых расширений вынуждающего условия Q рассматриваем только элементы $S(Q)$. Содержательно это означает, что если некий эксперт высказал мнение Q, то дальнейшие его оценки должны быть согласованы не только с Q, но и с некоторыми дополнительными общепринятыми установками $S(Q)$, соответствующими рангу этого эксперта. Основные свойства отношения $Q \Vdash \varphi$ совпадают со свойствами классического вынуждения. но возникает новое понятие:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вынуждающее условие Q называется полным для системы $Z(P)$, если для любой замкнутой формулы φ этой системы выполняется одно из отношений: $Q \Vdash \varphi$ или $Q \Vdash \neg\varphi$.

ТЕОРЕМА 1. Если для вынуждающего условия Q системы $Z(P)$ множество $S(Q)$ конечное, то существует полное условие Q^*, принадлежащее $S(Q)$.

ТЕОРЕМА 2. Вынуждающее условие Q является полным для системы $Z(P)$ тогда и только тогда, когда $S(Q) = Q$.

Пусть Q - полное условие для $Z(P)$, тогда определяем следующее множество: $P(Q) = \{n \in N/Q \Vdash P(n)\}$. Обозначим через $Z(N, P(Q))$ стандартную модель системы $Z(P)$, в которой $P(Q)$ интерпретирует символ P, и пусть запись $Z(N, P(Q)) \vDash \varphi$ обозначает отношение: "формула φ истинна в $Z(N, P(Q))$".

ТЕОРЕМА 3. Если вынуждающее условие Q - полное для $Z(P)$, то для любой замкнутой формулы φ системы $Z(P)$ верно соотношение: $Q \Vdash \varphi \Leftrightarrow Z(N, P(Q)) \vDash \varphi$.

Далее,показывается, что множества $S(Q)$ можно определить так, что для некоторых формул $A(n)$ и $B(n)$ верны утверждения:

ТЕОРЕМА 4. а). $\emptyset \Vdash \forall n A(n)$.

б). Существуют n_0, Q_0 такие, что $Q_0 \Vdash \neg A(n_0)$.

ТЕОРЕМА 5. а). $\emptyset \Vdash B(n_1)$ для некоторого n_1.

б). Существует Q_1 такое,что $Q_1 \Vdash \neg\exists n B(n)$.

Парадоксальность этих утверждений в следующем. Согласно принятой здесь интерпретации форсинга, отношение $\emptyset \Vdash \forall n A(n)$ описывает положительное мнение всех экспертов о суждении $\forall n A(n)$, т.е. это суждение является общепринятым. Тогда по законам логики для каждого n суждение $A(n)$ также должно быть общепринятым. Но в данном случае общепринятость не совпадает с истинностью, и потому существуют n_0 и Q_0 такие, что $Q_0 \Vdash \neg A(n_0)$. Другими словами, несмотря на общепринятое мнение всех экспертов, некий эксперт Q_0 имеет противоположное мнение об объекте n_0. Аналогичное истолкование имеет второе утверждение.

ЛИТЕРАТУРА.

1. П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум-гипотеза. "Мир", М., 1969.

Алтайский государственный университет
E-mail: ganov@math.asu.ru