Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Центральные единицы целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, q — нечетно

О. В. Митина

Пусть q — нечетно и является степенью простого числа p.
V — нормализованная группа центральных единиц группы $G = PSL_2(q)$.
Обозначим $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$; $q_1 = \frac{q-4-\varepsilon}{4}$; $q_2 = \frac{q-2+\varepsilon}{4}$; $q_3 = \frac{q-\varepsilon}{2}$; $q_4 = \frac{q+\varepsilon}{2}$;
$1, c, d, a_2, \{a^l\}_{l=1}^{q_1}, \{b^m\}_{m=1}^{q_2}$ — представители классов сопряженности, где
c, d — несопряженные элементы G порядка p; a^l — элемент порядка $\frac{q-\varepsilon}{2}$; b^m — элемент порядка $\frac{q+\varepsilon}{2}$; $a_2 = a^{(q-\varepsilon)/4} = a^{q_1+1}$ — инволюция;
$\xi_1, \xi_2, \{\chi_i\}_{i=1}^{q_1}, \{\theta_j\}_{j=1}^{q_2}$ — неприводимые комплексные характеры, где
ξ_1, ξ_2 — характеры степени q_4; χ_i — степени $2q_4$; θ_j — степени $2q_3$;
$\gamma_v(x)$ — коэффициент при классовой сумме класса x^G в разложении по базису из классовых сумм для произвольного элемента $v \in V$;
$\beta_v(\chi)$ — коэффициент при минимальном центральном идемпотенте, соответствующем характеру χ, в разложении по базису из минимальных центральных идемпотентов для произвольного элемента $v \in V$.

В работе [1] изучены центральные единицы целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, q — нечетно. В частности, доказаны:

Теорема 1. Пусть $q \equiv 3(mod\ 4)$ или $q \equiv 1(mod\ 4)$, q является квадратом. Тогда $V = A \times B$, где
$A = \{v \in V \mid \beta_v(\theta_j) = 1,$ для всех $j\} = \{v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0,$ для всех $m\}$,
$B = \{v \in V \mid \beta_v(\chi_i){=}1$ для всех $i\} = \big\{v \in V \mid \gamma_v(a_2){=}\gamma_v(a^l){=}0$ для всех $l\big\}$.
В условиях теоремы 1 по лемме 17 из [1] $\beta_v(\xi_1) = \beta_v(\xi_2) = 1\ \forall v \in V$.

Теорема 2. Пусть $q \equiv 1(mod\,4)$, q — неквадрат. Тогда $V = F \times B$, где
$F = \{v \in V \mid \beta_v(\theta_j) = 1$ для всех $j\} = \{v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0$ для всех $m\}$,
$B = \{v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = 1$ для всех $i,\ \beta_v(\xi_1) = \beta_v(\xi_2) = 1\} =$
$= \big\{v \in V | \gamma_v(a^l){=}0$ для всех $l, \gamma_v(c){=}\gamma_v(d)\big\} = \big\{v \in V | \gamma_v(a^l){=}0$ для всех $l\big\}$.

Дальнейшее изучение случая из теоремы 2 позволило получить:

Теорема 3. Пусть $q \equiv 1(mod\,4)$, q не является квадратом и

$q < 150$, $q \neq 97$, $q \neq 137$. Тогда $V = A \times B \times C$, где

$$A = \{v \in V \mid \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для всех } j,\ \beta_v(\xi_1) = \beta_v(\xi_2) = 1\} =$$
$$= \{v \in V \mid \gamma_v(b^m) = 0 \text{ для всех } m,\ \gamma_v(c) = \gamma_v(d)\};$$
$$B = \{v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = 1 \text{ для всех } i,\ \beta_v(\xi_1) = \beta_v(\xi_2) = 1\} =$$
$$= \left\{v \in V | \gamma_v(a^l){=}0 \text{ для всех } l,\ \gamma_v(c){=}\gamma_v(d)\right\} = \left\{v \in V | \gamma_v(a^l){=}0 \text{ для всех } l\right\};$$
$$C = \{v \in V \mid \beta_v(\chi_i) = \beta_v(\theta_j) = 1 \text{ для всех } i \text{ и } j\} =$$
$$= \{v \in V | \gamma_v(b^m) = 0 \text{ для всех } m, \gamma_v(a^l){=}(-1)^{l-1}\gamma_v(a) \text{ для всех } l{=}1, \dots, q_1{+}1\}.$$

Впервые все три подгруппы A, B, C нетривиальны при $q = 17$. Для этого случая получаем следующее описание группы центральных единиц.

Теорема 4. Пусть U — группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PSL_2(17)$. Тогда

$$U = \langle -1 \rangle \times A \times B \times C, \text{ где}$$

1. $A = \langle v \rangle$,
   $v = 176257y(1) + 9792(y(c) + y(d)) - 19584y(a_2) + 13848(y(a) - y(a^3))$;
2. $B = \langle v_1 \rangle \times \langle v_2 \rangle$,
   $v_1 = 56555902193y(1) - 3534743887(y(c) + y(d)) - 5415541825y(b) -$
   $-1227603669y(b^2) + 3534743887y(b^3) + 6643145494y(b^4)$,
   $v_2 = 1486659281185y(1) - 92916205074(y(c) + y(d)) - 142349823632y(b) -$
   $-32258067455y(b^2) + 92916205074y(b^3) + 174607891087y(b^4)$;
3. $C = \langle v_3 \rangle$,
   $v_3 = 145y(1) + 41y(c) - 25y(d) + 16(y(a_2) - y(a) + y(a^2) - y(a^3))$.

Литература.

1. Алеев Р.Ж., Митина О.В. Теория центральных единиц целочисленных групповых колец групп $PSL_2(q)$, q-нечётно, I, Ред. Челяб. гос. ун-та, Деп. ВИНИТИ, № 1462-В2005 11.11.05, 2005, 63 с.

Челябинский государственный университет
E-mail: ovm@csu.ru