

## Отсутствие интерполяционного свойства для временных исчислений, связанных с пространствами Ершова

В. Ф. Мурзина

В данной работе исследуется вопрос, обладают ли исчисления, связанные с топологическими пространствами Ершова [1] интерполяционным свойством Крейга. Напомним, что исчисление  $L$  обладает интерполяционным свойством, если выполняется:

Если  $L \vdash A \longrightarrow B$ , то существует формула  $C$  такая, что  $L \vdash A \longrightarrow C$ ,  $L \vdash C \longrightarrow B$  и  $C$  содержит лишь общие переменные формул  $A$  и  $B$ . Такая формула  $C$  называется интерполянтотом формулы  $A \longrightarrow B$ .

Несмотря на то, что многие известные неклассические логики обладают этим свойством, основная масса неклассических логик не имеет этого свойства. Так, например, число нормальных расширений пропозициональной модальной логики  $S4$  с интерполяционным свойством — конечно. Л.Л. Максимова также доказано, что все логики бесконечного слоя, являющиеся расширениями известной модальной логики  $K4.3$ , не имеют интерполяционного свойства Крейга [2]. Для широкого класса бимодальных временных логик, содержащих  $K4.3$ , в [3] также доказано отсутствие интерполяционного свойства.

Мы рассмотрим модальные и временные логики, связанные с пространствами Ершова ( $\alpha$ -пространствами и  $f$ -пространствами). Эти понятия были введены Ершовым Ю.Л. [1] с целью развития теории вычислимых функционалов. В [5] введено модальное исчисление  $Lf$  в языке с одной модальностью  $\Box_R$  и дополнительной константой  $\beta$ , которое является полным относительно строго линейно упорядоченных  $f$ -моделей и относительно строго линейно упорядоченных  $f_0$ -моделей. В [4] найдены временные исчисления  $L^*f$ ,  $L^*f_0$  в языке с двумя модальностями  $\Box_R$ ,  $\Box_R^*$  и константой  $\beta$ . Доказано, что  $L^*f$  является полным относительно класса всех строго линейно упорядоченных  $f$ -моделей, а исчисление  $L^*f_0$  — относительно класса всех строго линейно упорядоченных  $f$ -моделей с наименьшим элементом. В [6] найдено разрешимое полимодальное исчисление  $L\alpha$  в языке с двумя модальностями  $\Box_R$ ,  $\Box_{\prec}$  и константой  $\beta$ , полное относительно строго линейно упорядоченных  $\alpha$ -моделей. Мы рассмотрим еще одно временное исчисление  $L^*\alpha$  в языке с модальностями будущего  $\Box_R$ ,  $\Box_{\prec}$  и модальностями прошлого  $\Box_R^*$ ,  $\Box_{\prec}^*$ , и константой  $\beta$ , связанное с линейно упорядоченными  $\alpha$ -пространствами.

В данной работе доказывается, что временные исчисления  $L^*f$ ,  $L^*f_0$  и  $L^*\alpha$  не обладают интерполяционным свойством Крейга.

Хотя все рассматриваемые исчисления содержат  $K4.3$ , но отсутствие интерполяционного свойства не является тривиальным следствием [2], [3]: заметим, что язык для  $L^*f$ ,  $L^*f_0$  и  $L^*\alpha$  является более богатым, так как содержит дополнительную константу  $\beta$ , а в случае исчисления  $L^*\alpha$  — еще и дополнительные модальности. Поэтому возникает необходимость отдельного доказательства отсутствия интерполяционного свойства для рассматриваемых исчислений, что и проделано. Доказана следующая теорема:

**Теорема.** Формула  $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ , где

$$\begin{aligned}\phi_1(p_1, p_2, q_1) &= \Box_R(p_2 \rightarrow (q_1 \& \Box_R q_1)) \& \Diamond_R(p_1 \& \neg(q_1 \& \Box_R q_1)), \\ \phi_2(p_1, p_2, q_2) &= \neg(\Box_R(p_1 \rightarrow (q_2 \& \Box_R q_2)) \& \Diamond_R(p_2 \& \neg(q_2 \& \Box_R q_2)))\end{aligned}$$

выводима в исчислениях  $Lf$  и  $L\alpha$ , и не имеет интерполянта в  $L^*f_0$ ,  $L^*\alpha$ .

Так как всякая формула, выводимая в исчислении  $Lf$  является выводимой в исчислении  $L^*f$ , и всякая формула, выводимая в исчислении  $L^*f$  выводима в  $L^*f_0$ , то из теоремы 1 следует отсутствие интерполяции для исчислений  $Lf$ ,  $L^*f$  и  $L^*f_0$ . Также всякая формула, выводимая в исчислении  $L\alpha$  является выводимой в исчислении  $L^*\alpha$ . Следовательно из теоремы 1 сразу получаем отсутствие интерполяции для исчислений  $L\alpha$  и  $L^*\alpha$ .

### Список литературы

- [1] Ershov Yu.L. Theory of Domains and Nearby. Intern. Conference Formal Methods in Programming and Their Applications, Novosibirsk, Russia. Lec. Not. in Comp. Sci. 735, Springer - Verlag, 1993, 1–7
- [2] Gabbay D.M., Maksimova L. Interpolation and definability. Modal and intuitionistic logics, 2005, Oxford Science publications, 508 p.
- [3] Wolter F., A note on the interpolation property in tense logic, Journal of Philosophical Logic, 26, 1997, 545–551
- [4] Мурзина В.Ф. Временные логики, полные относительно строго линейно упорядоченных  $f$ -моделей, Вестник НГУ, Новосибирск, 2003, 61–82
- [5] Мурзина В.Ф. Модальная логика, полная относительно строго линейно упорядоченных  $f$ -моделей, Алгебра и логика, 2003, т. 42, N3, 320–337
- [6] Мурзина В.Ф. Модальная логика, полная относительно строго линейно упорядоченных  $A$ -моделей, Алгебра и логика, 2005, т. 44, N5, 560–582

*E-mail:* veta\_v@mail.ru