Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

# Меры в группах с операторами

Л. Я. Савельев

Рассматриваются аддитивные абелевы группы с унитарными кольцами операторов, которые могут не быть коммутативными или ассоциативными. Кроме того, не предполагается ассоциативность смешанного произведения. Этим рассматриваемые группы с операторами отличаются от модулей [**1**, т.1, гл.3, §4]. Мерами называются определенные на некоторых специальных множествах линейные отображения из одних таких групп в другие. Доказывается теорема о существовании и единственности линейного продолжения меры, которая обобщает полученную раньше для ассоциативных колец [**2**, **3**].

**1.** Введем несколько понятий. Будем называть класс множеств *наследственным*, есливместе с каждым множеством ему принадлежат все части этого множества. *Базовым классом* для векторного пространства $(E, \mathbb{K})$, где $E = (E, +)$ — аддитивная абелева группа, $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ — кольцо, называется каждый непустой наследственный класс $\mathcal{B}$ линейно свободных множеств $B$ векторов из $E$ [**3**, гл.2,§1]. Множества $B$ базового класса $\mathcal{B}$ называются *базовыми множествами*. Базовые классы $\mathcal{B}$ определяют различные специальные виды линейной независимости векторов из $E$.

Базовый класс $\mathcal{B}$ определяет *класс* $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{B})$ *основных множеств* $X \subseteq E$, обладающих свойством: для каждой конечной части $A \subseteq X$ существует базовое множество $B \subseteq X$ такое, что всякий вектор из $A$ есть сумма некоторых векторов из $B$. Основные множества служат областями определения для векторных мер, которые можно линейно продолжить.

Рассмотрим векторное пространство $(E, \mathbb{K})$ с базовым классом $\mathcal{B}$ и векторное пространство $(F, \mathbb{L})$, кольцо скаляров $\mathcal{L}$ которого содержит $\mathcal{K}$ в качестве подкольца. Назовем *векторной мерой* или просто *мерой* из $E$ в $F$ каждое отображение $m : X \to F$, определенное на основном множестве $X \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$ и аддитивное на каждом конечном базовом множестве $B \in \mathcal{B}$, содержащемся в $X$, сумма $x = \sum e$ элементов которого принадлежит $X$:

$$m(X) = \sum m(e) \qquad (x = \sum e \in X, \quad e \in B \subseteq X).$$

**2.** Из определений следует, что мера $m : X \to F$ является линейным отображением. Специфика выбранной области определения меры сводит линейность меры к аддитивности на базовых множествах. По принципу линейного продолжения мера $m$ продолжается на линейную оболочку $L = L(X)$

основного множества $X$. Рассмотрим соответствие $l : L \to F$ со значениями

$$l(y) = \sum \alpha(x)m(x) \qquad (y = \sum \alpha(x)x). \tag{1}$$

Здесь $\alpha : X \to \mathbb{K}$ — произвольная финитная функция на $X$ со значениями в $\mathbb{K}$. Рассматриваются комбинации для тех $x \in X$, для которых $\alpha(x) \neq 0$. Верна

**Теорема.** *Равенство* (1) *определяет единственное линейное отображение $l : L \to F$, продолжающее меру $m : X \to F$ с основного множества $X$ на его линейную оболочку $L$.*

Если смешанное произведение не ассоциативно, то линейная оболочка $L(X)$ области определения $X$ меры $m$ может не быть подпространством и не совпадать с подпространством $E(X)$, порожденным $X$ в $E$. Ясно, что $L(X) \subseteq E(X)$. Условие для равенства формулирует

**Критерий.** *Равенство $L(X) = E(X)$ для каждого $X \subseteq E$ верно тогда и только тогда, когда равенство $\mathbb{K}(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}x$ верно для каждого $x \in E$.*

## Список литературы

[1] Общая алгебра / Под ред. Л.А. Скорнякова. - М.: Наука, 1990. 591 с.
[2] *Савельев Л.Я.* Пространства с мерами // Доклады АН, т.397, 3, 1997. С. 310–312.
[3] *Лаврентьев М. М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи // ИМ СО РАН, Новосибирск, 1999.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
*E-mail*: savelev@math.nsc.ru