

Ручные и дикие автоморфизмы свободных алгебр

И. П. Шестаков

Пусть A_n — алгебра многочленов либо свободная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0 от порождающих x_1, \dots, x_n , и $\text{Aut } A_n$ — ее группа автоморфизмов. Автоморфизм $\phi \in \text{Aut } A_n$ называется *элементарным*, если он имеет вид

$$\phi : (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, \lambda x_i + f, \dots, x_n),$$

где $0 \neq \lambda \in F$ и элемент f принадлежит подалгебре, порожденной $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Подгруппа, порожденная всеми элементарными автоморфизмами обозначается $\text{Tame } A_n$; ее элементы называются *ручными* автоморфизмами.

В 1942 Юнг доказал, что для алгебр многочленов $\text{Aut } A_2 = \text{Tame } A_2$. В начале 70-х, Макара-Лиманов и Чернякиевич доказали, что это верно и для свободных ассоциативных алгебр. В обоих случаях остался открытым вопрос о справедливости аналогичного результата для $n \geq 3$.

В 1972 Нагата построил некоторый автоморфизм алгебры многочленов A_3 и высказал гипотезу, что этот автоморфизм не является ручным (т. е. является *диким*). Позднее Аника построил автоморфизм, претендующий на роль дикого автоморфизма в свободной ассоциативной алгебре от 3-х порождающих.

В 2004 Умирбаев и Шестаков решили проблему существования диких автоморфизмов в алгебре многочленов A_3 , доказав, что автоморфизм Нагаты дикий. Недавно У. Умирбаев доказал, что диким является и автоморфизм Аника.

В нашем докладе мы подробно поговорим об этих результатах и их доказательствах и сформулируем некоторые новые результаты и гипотезы. В частности, мы приведем пример дикого автоморфизма свободной йордановой алгебры от трех порождающих.

E-mail: ivan.shestakov@gmail.com