Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Группы центральных единиц целочисленных групповых колец диэдральных, кватернионных и полудиэдральных групп

Е. О. Шумакова

В работе найдены ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец диэдральных D_{2n}, кватернионных Q_{4t} и полудиэдральных S_{8t} групп; найдены порождающие элементы группы центральных единиц целочисленных групповых колец групп D_{10}, D_{20}, D_{16} и D_{24} в терминологии классовых сумм и минимальных центральных идемпотентов.

Теорема 1

Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы диэдра $D_{2n} = \left\langle a, b \mid a^2 = b^n = 1\ , aba = b^{-1} \right\rangle$ имеет вид

$$U(Z(\mathbb{Z}D_{2n})) = \langle -1 \rangle \times Z(D_{2n}) \times V,$$

где V — прямое произведение циклических групп бесконечного порядка, и:
1) ее ранг равен $r(U(Z(\mathbb{Z}D_{2n}))) = m + 1 - \nu(n)$, где $\nu(n)$ — число всех натуральных делителей n, $n = 2m$ либо $n = 2m + 1$,
2) порождающие элементы группы V в терминологии классовых сумм имеют вид $v = \sum\limits_{i=0}^{m} \gamma_i y(b^i)$, где γ_i — целые числа, $y(b^i)$ — классовые суммы.

Пусть $e(\chi_0) = e_0$; $e(\chi_1) = e_1$; $\cdots$; $e(\chi_{m+2}) = e_{m+2}$ — базис $E(D_{2n})$ из минимальных центральных идемпотентов в соответствии с таблицами характеров в [2].

Теорема 2

1) $U(Z(\mathbb{Z}D_{10})) = \langle -1 \rangle \times \langle u \rangle$, причем
$u = -1 + y(b^2) = e_0 + e_1 - \omega^2 e_2 - \omega^{-2} e_3$ с обратным
$u^{-1} = -1 + y(b) = e_0 + e_1 - \omega^{-2} e_2 - \omega^2 e_3$, где $\omega = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

2) $U(Z(\mathbb{Z}D_{16})) = \langle -1 \rangle \times \langle b^4 \rangle \times \langle u \rangle$, где
$u = 2 + y(b) - y(b^3) - y(b^4) = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + (3 + 2\sqrt{2})e_4 + e_5 + (3 - 2\sqrt{2})e_6$
$u^{-1} = 2 - y(b) + y(b^3) - y(b^4) = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + (3 - 2\sqrt{2})e_4 + e_5 + (3 + 2\sqrt{2})e_6$,

3) $U(Z(\mathbb{Z}D_{24})) = \langle -1 \rangle \times \langle b^6 \rangle \times \langle u \rangle$, где

$$u = 3 + 2y(b) + y(b^2) - y(b^4) - 2y(b^5) - 2y(b^6) = \\ = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_5 + e_6 + e_7 + (7 + 4\sqrt{3})e_4 + (7 - 4\sqrt{3})e_8$$

$$u^{-1} = 3 - 2(b) + (b^2) - y(b^4) + 2y(b^5) - 2y(b^6) = \\ = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_5 + e_6 + e_7 + (7 - 4\sqrt{3})e_4 + (7 + 4\sqrt{3})e_8,$$

4) $U(Z(\mathbb{Z}D_{20})) = \langle -1\rangle \times \langle b^5\rangle \times \langle v\rangle \times \langle u\rangle$, где

$$v = -3 - y(b) + 3y(b^2) + 3y(b^3) - y(b^4) - 4y(b^5) = \\ = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_6 - \omega^6 e_5 - \omega^{-6} e_7,$$

$$u = 2 + y(b) - y(b^2) - y(b^3) + y(b^5) = \\ = e_0 + e_1 - e_2 - e_3 + \omega^2 e_4 + \omega^4 e_5 + \omega^{-2} e_6 + \omega^{-4} e_7$$

с обратными

$$v^{-1} = -3 + 3y(b) - y(b^2) - y(b^3) + 3y(b^4) - 4y(b^5) = \\ = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_6 - \omega^{-6} e_5 - \omega^6 e_7,$$

$$u^{-1} = 2 - y(b) + y(b^3) - y(b^4) + y(b^5) = \\ = e_0 + e_1 - e_2 - e_3 + \omega^{-2} e_4 + \omega^{-4} e_5 + \omega^2 e_6 + \omega^4 e_7.$$

Теорема 3

Группа центральных единиц целочисленного группового кольца группы кватернионов $Q_{4t} = \left\langle a, b \mid a^2 = b^t,\ a^{-1}ba = b^{-1}\right\rangle$ имеет вид

$$U(Z(\mathbb{Z}Q_{4t})) = \langle -1\rangle \times Z(Q_{4t}) \times V,$$

где V — прямое произведение циклических групп бесконечного порядка, и:
1) ее ранг равен $r(U(Z(\mathbb{Z}Q_{4t}))) = t + 1 - \nu(2t)$, где $\nu(t)$ — число всех натуральных делителей t,
2) порождающие элементы группы V в терминологии классовых сумм имеют вид $v = \sum\limits_{i=0}^{t} \gamma_i y(b^i)$, где γ_i — целые числа, $y(b^i)$ — классовые суммы.

Теорема 4

Группа центральных единиц целочисленного группового кольца полудиэдральной группы $S_{8t} = \left\langle a, b \mid a^2 = b^{4t} = 1,\ aba = b^{2t-1}\right\rangle$ имеет вид

$$U(Z(\mathbb{Z}S_{8t})) = \langle -1\rangle \times Z(S_{8t}) \times V,$$

где V — прямое произведение циклических групп бесконечного порядка, и:
1) ее ранг равен $r(U(Z(\mathbb{Z}S_{8t}))) = \frac{3}{2}t + \{\frac{t}{2}\} + 1 - \nu(4t)$, где $\nu(t)$ — число всех натуральных делителей t,
2) порождающие элементы группы V в терминологии классовых сумм имеют вид $v = \sum\limits_{i=0}^{2t} \gamma_i y(b^i)$, где γ_i — целые числа, $y(b^i)$ — классовые суммы.

Доказательства указанных фактов основаны на использовании результатов [1] — [3].

Литература

1. Алеев Р.Ж. Хигмановская теория центральных единиц, группы единиц целочисленных гупповых колец конечных циклических групп и числа Фибоначчи. Деп. ВИНИТИ, 1304-В92, 16.04.1992.
2. Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. — Свердловск, 1990.
3. Кэртис Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр: пер. с англ. — М: Наука, 1969.

ЧелГУ, ЧГПУ
E-mail: shumakov11@chelcom.ru