Мальцевские чтения
Новосибирск (2006)
Тезисы докладов

Алгебра в русле изучения и применения многообразия генетически обусловленных структур

В. П. Сизиков

Многочисленные задачи прикладных исследований, будь то разработки по обнаружению закономерностей или вычислительные методы для нелинейных моделей, сталкиваются с проблемой отсутствия достаточно универсального, аналитического инструмента описания систем. Таким инструментом вправе выступить генетически обусловленные структуры (ГО-СТ), которые уже представлялись, в частности, на конференции "Мальцевские чтения – 2005".

Пусть Γ обозначает многообразие всех ГО-СТ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ГО-СТ $\mathcal{G} \in \Gamma$ это тройка (U, P, s), где U – базовое множество, носитель структуры $\mathcal{G}$, P – некий класс операций на U, содержащий операцию тождества I: $I(u) = u$, $\forall u \in U$, а s – некое свойство для элементов из U, и при этом имеет место условие:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & ((\{u_1, \ldots, u_n\} \in U)\&(p \in P)\&(u = p(u_1, \ldots, u_n) \in U)\&(u \in s)) \Rightarrow \\
& \Rightarrow ((u_1 \in s)\& \ldots \&(u_n \in s)),
\end{aligned}
$$

где $u \in s$ обозначает, что элемент u обладает свойством s.

В лице ГО-СТ имеем рациональный инструмент по описанию и проработке сразу принципа причинности, логики синтеза и понятия системы. Необходимо изучать многообразие Γ, включая и математические закономерности в нем, и его прикладные аспекты.

Из установленных на сегодня закономерностей выделим следующие.

ТЕОРЕМА 1. Многообразие Γ инвариантно относительно процедур: (а) сужения носителя U ГО-СТ и класса операций P на нем при сохранении или ослаблении базового свойства s элементов носителя; (б) объединения классов операций и представителей базовых свойств при фиксированном носителе; (в) покомпонентного перехода к декартовым произведениям в семействе ГО-СТ с естественным определением работы новых операций и базового свойства на новом носителе; (г) факторизации носителя по алгебраической группе, наводимой на нем бинарной полугрупповой операцией из класса исходных операций; (д) факторизации всего класса операций по группе взаимно однозначных на носителе операций. Кроме того, либо сохраняется качество ГО-СТ при объединении носителей семейства ГО-СТ, имеющих общие класс операций и базовое свойство, либо это качество отсутствует при любом носителе, содержащем объединение данных носителей, т.е. актуальна проблема совместности ГО-СТ, возможности эффекта отталкивания объектов сходной природы.

Обратимся теперь к фундаментальному, возникшему в процессе разработки теории динамических информационных систем (ДИС, ТДИС), примеру ГО-СТ в лице сети ДИС-компьютеров (ДИС-*К).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ДИС-*К уровня $n \geq 0$ – это ДИС, получающаяся из фиксированной категории (понятия), выражающей суть ДИС-*К, n последовательными триадными дешифровками [www.sicpro.org].

ТЕОРЕМА 2. Пусть в $\mathcal{G} = (U, P, s)$ (1) множество U представляет набор всех ДИС-*К, класс P состоит из процедур дешифровки и свертки ДИС-*К, а условие $u \in s$ выражает факт, что в ДИС-*К $u \in U$ осмысленной является каждая подсистема типа ДИС-*К. Тогда $\mathcal{G} \in \Gamma$.

Поскольку любая ДИС может быть представлена как часть подходящего ДИС-*К, то изучение ДИС-*К является весьма важным с позиций ТДИС и ее приложений. А феномен симметричности ДИС-*К приводит к понятию процедуры его связной мутации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Связная мутация ДИС-*К как орграфа есть любая перестановка его вершин, сохраняющая геометрию ДИС-*К и топологию связей между его вершинами, но задающая новый порядок формирования этого ДИС-*К триадной дешифровкой из исходной категории.

ТЕОРЕМА 3. Набор всех связных мутаций ДИС-*К уровня $n \geq 1$ представляет группу $\mathcal{M}_n$ относительно операции их суперпозиции. При этом $\mathcal{M}_n$ разложима в произведение своих четырех подгрупп:

$$\mathcal{M}_n = (\mathcal{M}_n^{(0)} \otimes \mathcal{M}_n^{(1)} \otimes \mathcal{M}_n^{(2)})\mathcal{M}_n^{(3)},$$

где каждая из первых трех изоморфна группе перестановок на 3^{n-1} элементах, а четвертая изоморфна группе циклических перестановок на 3 элементах, и действие мутаций из четвертой группы обеспечивает циклическую перестановку первых трех групп. В частности, $|\mathcal{M}_n| = 3 \cdot (3^{n-1}!)^3$.

ТЕОРЕМА 4. В ДИС-*К уровня n содержится ровно

$$(C_{3^{n-1}}^{3^{m-1}})^3 = \left(\frac{3^{n-1}!}{3^{m-1}!(3^{n-1} - 3^{m-1})!}\right)^3$$

разных по содержанию ДИС-*К уровня m при $0 < m \leq n$ и 3^n ДИС-*К уровня 0, т.е. вершин (здесь C_k^l – число сочетаний из k элементов по l). При этом каждая конкретная развертка в ДИС-*К уровня n помечает 3^{n-m} ДИС-*К уровня m: $0 \leq m \leq n$, а порождает, с учетом мутаций,

$$\delta(n) = \frac{(3^{n-1}!)^3}{6 \cdot (3^{n-2}!)^9} \approx 3^{3^n - 3n + 0.85}$$

разных по содержанию дешифровок исходной категории в триаду.

На базе теорем 3 и 4 возникает кластерное исчисление и развитие знаний с признаками компактификации и имитации.

Омский филиал ИМ СО РАН
E-mail: sizikov@iitam.omsk.net.ru