Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

Идеалы в вычислимых I-алгебрах

П. Е. Алаев

I-алгеброй называется структура $\mathfrak{A}$ вида $(\mathfrak{A}^*, I_1, \ldots, I_\lambda)$, где $\mathfrak{A}^*$ — булева алгебра, $I_1, \ldots, I_\lambda$ — конечный набор выделенных идеалов. I-алгебра вычислима, если её носитель — вычислимое подмножество множества натуральных чисел ω, а операции и предикаты — вычислимые функции и множества.

Если $\mathfrak{A}$ — вычислимая структура, R — отношение на $\mathfrak{A}$, то R называется наследственно вычислимым (вычислимо перечислимым, ко-в.п.) отношением, если для любой вычислимой структуры $\mathfrak{B}$ и любого изоморфизма $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ образ $f(R)$ является вычислимым (вычислимо перечислимым, ко-в.п.). Естественная релятивизация даёт следующее понятие: R называется относительно наследственно вычислимым, если для любой счётной модели $\mathfrak{B}$ и любого изоморфизма $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ образ $f(R)$ является вычислимым относительно оракула, равного диаграмме $\mathfrak{B}$.

Рассматриваемая задача связана с описанием наследственно вычислимых и в.п. идеалов в вычислимых I-алгебрах. Получено полное описание относительно наследственно вычислимых, в.п. и ко-в.п. идеалов, для наследственно вычислимых идеалов ответ найден в случае двух выделенных идеалов. Задача естественным образом связана с описанием разрешимых теорий T, выразимых элементарными логическими средствами через данные разрешимые теории $T_1, \ldots, T_\lambda$.

Пусть $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*, I_1, \ldots, I_\lambda)$ — вычислимая I-алгебра, $L_1, \ldots, L_m$ обозначает набор идеалов, состоящий из всех конечных пересечений вида $\bigcap_{t \in T} I_t$, где $T \subseteq \{1, \ldots, \lambda\}$, а также $\{0\}$ и $\mathfrak{A}$. Пусть $R \subseteq \mathfrak{A}$ — некоторый идеал. Говорим, что R — Σ-идеал, если $R = \sum_{s \in S} L_s$ для некоторого $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$ или $\{0\}$; R — Π-идеал, если $R = \bigcap_{(t,s) \in X} (L_t \to L_s) \cap L_n$ для некоторых $X \subseteq \{1, \ldots, m\}^2$ и $n \in \{1, \ldots, m\}$; R — Δ-идеал, если R является одновременно Σ-идеалом и Π-идеалом. Здесь $L_1 + L_2 = \{x + y \mid x \in L_1, y \in L_2\}$, $L_1 \to L_2 = \{x \in \mathfrak{A} \mid \forall y \leqslant x (y \in L_1 \to y \in L_2)\}$. Запись $a_1, \ldots, a_n \mid 1$ обозначает, что $a_1 + \ldots + a_n = 1$ и $a_i \cdot a_j = 0$ при $i \neq j$, $\hat{a}$ — I-алгебра, полученная сужением структуры $\mathfrak{A}$ на множество $\{x \in \mathfrak{A} \mid x \leqslant a\}$.

Теорема 1. Идеал R является относительно наследственно в.п. в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда существует набор $a_1, \ldots, a_n \mid 1$ в $\mathfrak{A}$ такой, что $R \cap \hat{a}_i$ — Σ-идеал в $\hat{a}_i$ для всех $i \leqslant n$.

Теорема 2. Идеал R является относительно наследственно ко-в.п. в $\mathfrak{A}$ тогда

и только тогда, когда существует набор $a_1, \ldots, a_n \mid 1$ в $\mathfrak{A}$ такой, что для каждого $i \leqslant n$ выполняется по крайней мере одно из утверждений:
(a) $R \cap \hat{a}_i$ — П-идеал в $\hat{a}_i$;
(b) $R \cap \hat{a}_i$ — одновременно максимальный идеал и Σ-идеал в $\hat{a}_i$.

Теорема 3. Идеал R является относительно наследственно вычислимым в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда существует набор $a_1, \ldots, a_n \mid 1$ в $\mathfrak{A}$ такой, что для каждого $i \leqslant n$ выполняется по крайней мере одно из утверждений:
(a) $R \cap \hat{a}_i$ — Δ-идеал в $\hat{a}_i$;
(b) $R \cap \hat{a}_i$ — одновременно Σ-идеал и максимальный идеал в $\hat{a}_i$.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*, I_1, I_2)$ — вычислимая I-алгебра с двумя выделенными идеалами. Идеал R является наследственно вычислимым в $\mathfrak{A} \Leftrightarrow R$ относительно наследственно вычислим (то есть удовлетворяет условиям из Теоремы 3).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: alaev@math.nsc.ru