Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

О графах без 5-циклов с некоторыми условиями регулярности

А. Л. Гаврилюк

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначим подграф, индуцированный в Γ на множестве всех вершин, смежных с a. Положим $a^\perp = [a] \cup \{a\}$. Для подграфа Σ графа Γ через $\Sigma^\perp$ обозначим $\cap_{a\in\Sigma} a^\perp$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т.е. $k_a = |[a]|$. Граф Γ *регулярен степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины $a \in \Gamma$. Подграф $[a]\cap[b]$ назовем *μ-подграфом* (λ-подграфом), если $d(a,b) = 2$ (a, b смежны), положим $\mu_{ab} = |[a]\cap[b]|$ ($\lambda_{ab} = |[a]\cap[b]|$). Скажем, что $\mu(\Gamma) = \mu$, если $\mu_{ab} = \mu$ для любых вершин a, b на расстоянии 2, и будем называть такой граф *μ-регулярным*. Регулярный степени k граф Γ диаметра 2 на v вершинах называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), если он μ-регулярен и $\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра $\{a, c\}$.

Кликовым (α-кликовым) расширением графа Γ называется граф, полученный заменой каждой вершины a графа Γ на клику (на клику порядка α) (a), и вершины клик (x) и (y), смежны тогда и только тогда, когда вершины x и y смежны в Γ.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный многодольный граф с n долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Граф $K_{1,3}$ называется 3-*лапой*, граф $K_{1,1,m}$ называется *m-короной*. Пусть X и Y — множества и $|X| = m$, $|Y| = n$. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$m \times n$-решеткой*, если пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ или $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$.

На строение графа сильное влияние оказывает условие отсутствия в нем определенных подграфов. В серии работ В.В. Кабанова, А.А. Махнева, Д.В. Падучих и автора изучались граф с различного рода запрещенными подграфами (3-лапы, 3-короны, 4-короны) и условиями на μ-подграфы. Например, μ-регулярный граф без 4-циклов имеет регулярные подграфы $[x] - [x]^\perp$ для любой своей вершины x ([1],[2]).

Пусть $C = \{a, c, d\}$ — 3-коклика из графа Γ. Коклику C назовем t-связной, если $|C^\perp| = t$.

Теорема. *Пусть Γ — связный μ-регулярный граф диаметра 2, не содержащий 5-циклов. Если в Γ найдется хотя бы одна t-связная 3-коклика, $t \leq 1$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00046).

(1) $t = 0$, *и граф* Γ *является* $\mu/2$-*кликовым расширением* $m \times n$-*решетки для некоторых натуральных* $n > 2, m > 2$;

(2) $t = 1$, *граф* $\Gamma - \Gamma^{\perp}$ *является* $(\mu - 1)/2$-*кликовым расширением* $m \times n$-*решетки для некоторых натуральных* $n > 2, m > 2$, *либо объединением изолированных клик и* $\mu = 1$.

Следствие. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда* Γ *является* $n \times n$-*решеткой.*

Ввиду полученных результатов, автору представляется интересной

Проблема. Описать μ-регулярные графы Γ диаметра 2 без 5-циклов с t-связными 3-кокликами при $t \geq 2$. Верно ли, в частности, что сильно регулярный граф без 5-циклов — это либо $n \times n$-решетка, либо полный многодольный граф?

В качестве комментария к сформулированной проблеме заметим, что условие отсутствия 5-циклов в графах сохраняется и при операциях дополнения графа и взятия реберного графа. При этом реберным графом полного двудольного графа является решетка, а при числе долей, большем двух, реберный граф полного многодольного графа не является μ-регулярным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1989.

2. *Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.* О проблеме регулярности в графах Терриллигера // принята к печати в журнале "Доклады РАН".

E-mail: berkut2004_84@mail.ru