Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

Об одной гипотезе В. Д. Мазурова

В. А. Антонов и С. Г. Чеканов

Пусть p, q и r — различные простые числа. Группу $G = P\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle)$, в которой P является p-группой, $|x| = q$, $|y| = r$, и каждая из подгрупп $P\lambda\langle x\rangle$ и $\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle$ является группой Фробениуса, назовем двойной группой Фробениуса типа (p, q, r).

В.Д. Мазуров высказал следующую гипотезу: если в двойной группе Фробениуса типа (p, q, r) подгруппа $C_P(y)$ имеет экспоненту p, то и $\mathrm{Exp}(P) = p$. В работе [1] авторами была доказана справедливость этой гипотезы в случае двойных групп Фробениуса типа $(3, 5, 2)$. Отметим, что из этого результата следует неразрешимость группы, изоспектральной (т.е. имеющей то же множество порядков элементов) группе $S_4(3)$.

Контрпримером к гипотезе является группа

$$G = [(\langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle \times \langle z_3\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle)\lambda(\langle b_1\rangle \times \langle b_2\rangle \times \langle b_3\rangle)]\lambda(\langle x\rangle\lambda\langle y\rangle),$$
$$z_i^2 = a_i^2 = b_i^2 = 1 \text{ для } i = 1, 2, 3, \ \ x^7 = y^3 = 1, \ x^y = x^2,$$
$$z_1^x = z_2, \ z_2^x = z_3, \ z_3^x = z_1 z_3, \ z_1^y = z_2 z_3, \ z_2^y = z_2, \ z_3^y = z_1 z_3,$$
$$a_1^x = a_2, \ a_2^x = a_3, \ a_3^x = a_1 a_2, \ a_1^y = a_1, \ a_2^y = a_3, \ a_3^y = a_2 a_3,$$
$$b_1^x = b_2, \ b_2^x = b_3, \ b_3^x = b_1 b_2, \ b_1^y = b_1, \ b_2^y = b_3, \ b_3^y = b_2 b_3,$$
$$[z_i, a_j] = [z_i, b_j] = [a_i, b_i] = 1 \ \text{ для всех } i, j = 1, 2, 3,$$
$$[a_1, b_2] = [a_2, b_1] = z_1, \ [a_2, b_3] = [a_3, b_2] = z_2, \ [a_3, b_1] = [a_1, b_3] = z_2 z_3.$$

В этой группе $C_P(y) = \langle z_2\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle b_1\rangle$ имеет экспоненту 2, а экспонента P равна 4.

При построении контрпримера важную роль играло то, что группа экспоненты 2 обязательно абелева. В связи с этим естественно возникает вопрос о справедливости гипотезы В.Д. Мазурова в случае $p \neq 2$. В частности, при $r = 2$. Отметим, что в [1] показано, что если G — контрпример типа $(p, q, 2)$, то группа P не является регулярной p-группой. В частности, ступень нильпотентности группы P не меньше p.

Список литературы

[1] Антонов В.А., Чеканов С.Г. О двойных группах Фробениуса// Труды инст. мат. и мех. УрО РАН, 2007, Т. 13, № 1, С. 1–8.

Южно-Уральский госуниверситет
E-mail: ava@susu.ac.ru и chekanovs@yandex.ru