Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

Различие четырех классов полиномиально ограниченной иерархии

И. В. Латкин

С применением самого “обычного диагонального метода” в [4] доказывается, что язык

$$E \rightleftharpoons \{\langle cM, x\rangle \mid \textit{детерминированная машина } M, \textit{ имеющая код } cM, \textit{ допускает вход } x \textit{ не более, чем за } 2^{|x|} \textit{ шагов}\}$$

не принадлежит классу $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \sum_0^{\mathcal{P}} = \prod_0^{\mathcal{P}} = \Delta_0^{\mathcal{P}} = \Delta_1^{\mathcal{P}}$.

Теорема 1. *Язык E не принадлежит также классам* $\boldsymbol{\mathcal{NP}} = \sum_1^{\mathcal{P}}$ *и* *co*$\boldsymbol{\mathcal{NP}} = \prod_1^{\mathcal{P}}$.

В доказательстве обыгрывается тот факт, что любой язык, лежащий в классе $\boldsymbol{\mathcal{NP}}$, распознаётся некоторой уже детерминированной машиной Тьюринга с полиномиально ограниченной памятью [1]. Естественно, что здесь опять применяется диагональное построение, но уже не по временной, а по ёмкостной сложности машин Тьюринга, и конечно же, эта теорема переносится на все релятивизованные классы. А именно, для произвольного оракула Y язык E^Y, получающейся заменой в определении выше машины Тьюринга машиной с оракулом Y, не принадлежит классу $\boldsymbol{\mathcal{NP}}^Y$. Но язык E в $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-иерархию языков всё же попадает:

Теорема 2. *Язык можно E промоделировать за полиномиальное время $\prod_2^0$-формулами, истинными на булевой алгебре B из двух элементов (полиномиально трансформировать к языку $\prod_2^0$-формул, истинных на B), т. е. этот язык принадлежит $\prod_2^{\mathcal{P}}$.*

Это не противоречит существованию такого оракулы A, что $\boldsymbol{\mathcal{P}}^A = \boldsymbol{\mathcal{NP}}^A$ [3], так как даже для арифметики имитация (определимость) процесса вычисления на машинах с оракулами, вообще говоря, возможна лишь с добавлением к арифметике предикатов, которые выделяют эти оракулы, или с введением специальных кванторов вида $\forall_X, \exists_X$, т.е. осуществимо уже в другой теории [2]. Из теорем 1, 2 и следующего свойства $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-иерархии языков [5]: “если для некоторого $i \geq 1$ $\sum_i^{\mathcal{P}} = \prod_i^{\mathcal{P}}$, то для всех $j \geq i$ имеет место $\sum_j^{\mathcal{P}} = \prod_j^{\mathcal{P}} = \Delta_i^{\mathcal{P}}$” получается

Следствие 2.1 *Следующие включения — строгие*: (1) $\Delta_1^{\mathcal{P}} \subseteq \sum_1^{\mathcal{P}} \subseteq \prod_2^{\mathcal{P}}$, (2) $\Delta_1^{\mathcal{P}} \subseteq \prod_1^{\mathcal{P}} \subseteq \prod_2^{\mathcal{P}}$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М. Мир, 1979.

2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

3. *Baker Th., Gill J., Solovay R.* Relativizations of the $\mathcal{P} = ?\,\mathcal{NP}$ question // SIAM J. Comput. V. 4, 1975, P. 431-442.

4. *Lewis H. R., Papadimitriou C.H.* Elements of the theory of computation. Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, 1998.

5. *Meyer A.R., Stockmeyer L.J.* The equivalence problem for expressions with squaring requires exponential space // Proc. 13th IEEE Symposium on Switching and Automata Theory, 1972, P. 125-129.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет
E-mail: `lativan@yandex.ru`