

## Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Мура

А. А. Махнев

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $a$ , то есть, подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Положим  $[a] = \Gamma_1(a)$ ,  $a^\perp = \{a\} \cup [a]$ .

Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  ( $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений*  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ , если значения  $b_i(u, w)$  и  $c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  для любого  $i = 0, \dots, d$ .

*Графом Тервиллигера* называется неполный граф, в котором пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, является  $\mu$ -кликкой. *Графом Мура* называется многоугольник с нечетным числом вершин или сильно регулярный граф, в котором  $\lambda = 0$  и  $\mu = 1$ . Хорошо известно, что степень графа Мура равна 2, 3, 7 или 57. Для каждой из степеней 2, 3 или 7 существует единственный сильно регулярный граф Мура — это пятиугольник, граф Петерсена и Граф Хофмана-Синглтона соответственно. Существование графа Мура степени 57 неизвестно.

Каждый из известных дистанционно регулярных графов Тервиллигера с  $\mu > 1$  является локально графом Мура. Связный локально пятиугольный граф является графом икосаэдра. По теореме Д. Холла [1] имеется точно 3 связных локально петерсеновских графа:  $\bar{T}(7)$ , граф Конвея-Смита (единственный дистанционно регулярный граф на 63 вершинах с массивом пересечений  $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$ ) и граф Доро (единственный дистанционно регулярный граф на 65 вершинах с массивом пересечений  $\{10, 6, 4, 1, 2, 5\}$ ). Неизвестно существование графов, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона, зато имеется

**Гипотеза.** *Дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона, имеет массив пересечений*

$$\{50, 42, 1; 1, 2, 50\} \text{ или } \{50, 42, 9; 1, 2, 42\}.$$

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00046), РФФИ-ГФЕН Китая (грант 05-01-39000), программы отделения математических наук РАН и программы совместных исследований с Сибирским отделением РАН.

В данной работе доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона имеет  $\mu = 2$  (т.е. является графом Тервиллигера).

**Теорема.** Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона. Тогда  $\mu(\Gamma) = 2$ .

### Литература

1. Hall J.I. Locally Petersen graphs, J. Graph Theory 4(1980), 173-187.

Институт математики и механики УРО РАН  
E-mail: [makhnev@imm.uran.ru](mailto:makhnev@imm.uran.ru)