Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

Распознаваемость по спектру знакопеременных групп почти всех степеней

И. А. Вакула

Пусть G — конечная группа, и $\omega(G)$ — ее спектр, то есть множество порядков ее элементов. Говорят, что G *распознаваема* (*по спектру*), если G — единственная, с точностью до изоморфизма, группа, имеющая спектр $\omega(G)$. Группы с одинаковым спектром называются *изоспектральными.* Существенный интерес представляют группы, изоспектральные простым группам. Через A_n обозначим знакопеременную группу степени n.

Классификация конечных простых групп утверждает, что всякая неабелева конечная простая группа изоморфна либо одной из групп лиева типа, либо знакопеременной группе некоторой степени большей 4, либо одной из 26 спорадических простых групп. Известно, каждая из спорадических простых групп, за исключением группы Янко J_2, распознаваема. Также доказано, что каждая конечная группа, изоспектральная простой исключительной группе лиева типа H, имеет композиционный фактор, изоморфный H. Далее, доказано, что всякая группа, изоспектральная конечной простой неисключительной (классической) группе лиева типа, имеет единственный неабелев композиционный фактор. В [2] доказано, что при $n \geq 5$ группа H, изоспектральная группе A_n и имеющая композиционный фактор, изоморфный этой группе, обязана быть ей изоморфна. Наличие в группе, изоспектральной A_n, композиционного фактора, изоморфного A_n, доказано в работах [3] и [4] для n равного p, $p+1$ или $p+2$, где p — простое число, большее 7, или n равно 5. Вместе с результатами работы [2] это влечет распознаваемость групп указанных степеней.

В обзоре Вик.Д. Мазурова [1] в списке нерешенных вопросов под пунктом 2 значится: "Верно ли, что знакопеременная группа A_n при $n > 10$ распознаваема"? При этом известно, что группа A_n распознаваема при $11 \leq n \leq 21$. При $n = 22$, вопрос был уже открыт.

Первый шаг на пути доказательства распознаваемости конечной простой группы — проверка наличия у этой группы главного (композиционного) фактора, близкого ей по свойствам.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе A_n для некоторого $n \geq 22$. Тогда найдется такое k, что некоторый главный фактор группы G изоморфен группе A_k, число k не превосходит n, и полуинтервал $(k, n]$ не содержит простых чисел.*

5 октября 2007

Основываясь на теореме 1 и некоторых теоретико-числовых оценках, связанных с проблемой Гольдбаха и распределением простых чисел, удается получить следующий качественный результат.

Теорема 2. *Существует такое число m, что группа A_n распознаваема при любом n, большем m.*

Также на основе теоремы 1, но уже с большей долей непосредственных вычислений и использованием компьютера, установлен следующий результат.

Теорема 3. *Группа A_n распознаваема при $22 \leq n \leq 10^6$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00148а).

Список литературы.

[1] Мазуров Вик.Д. Группы с заданным спектром // Изв. Уральского гос. ун-та, Мат. и мех. 2005. Выпуск 7, № 36. С. 119–138.

[2] Заварницин А.В., Мазуров Вик.Д. О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 296–315.

[3] Кондратьев А.С., Мазуров Вик.Д. Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 360–371.

[4] Заварницин А.В. Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r+1$ и $r+2$ и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 648–661.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: vakula@dc.ru