

Не элементарная эквивалентность классов низких в.п. и низких 2-в.п. степеней

М. М. Ямалеев

Пусть (тьюринговы) степени \mathbf{a} и \mathbf{b} такие, что $\mathbf{0} < \mathbf{b} < \mathbf{a}$.

Определение. Степень \mathbf{b} называется *недополняемой до степени \mathbf{a} в классе степеней \mathcal{C}* , если не существует такой степени $\mathbf{w} \in \mathcal{C}$, что $\mathbf{w} < \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cup \mathbf{w}$.

Определение. Степень \mathbf{b} называется *сильно недополняемой до степени \mathbf{a} в классе степеней \mathcal{C}* , если не существует такой степени $\mathbf{w} \in \mathcal{C}$, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{w}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cup \mathbf{w}$.

Пусть \mathbf{R} и \mathbf{D}_2 — это классы всех в.п. и всех 2-в.п. степеней, соответственно. Хорошо известны две следующие теоремы, доказанные в 1980-ых годах.

Теорема (Купер и Ейтс). *Существует невычислимая в.п. степень, которая недополняема до $\mathbf{0}'$ в классе \mathbf{R} .*

Теорема (Арсланов). *Для любой невычислимой 2-в.п. степени \mathbf{a} существует неполная 2-в.п. степень \mathbf{d} , что $\mathbf{0}' = \mathbf{a} \cup \mathbf{d}$.*

В качестве следствия имеем, что классы \mathbf{R} и \mathbf{D}_2 не являются элементарно эквивалентными.

Обозначим через \mathbf{R}^{low} и \mathbf{D}_2^{low} классы низких в.п. и низких 2-в.п. степеней, соответственно. В конце 1980-ых была доказана теорема.

Теорема (Купер, Лемп и Уотсон). *Для любой высокой в.п. степени \mathbf{h} , для любой невычислимой n -в.п. ($n \geq 1$) степени $\mathbf{a} \leq \mathbf{h}$ существует низкая 2-в.п. степень \mathbf{d} , что $\mathbf{h} = \mathbf{a} \cup \mathbf{d}$.*

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Существуют низкие невычислимые в.п. степени $\mathbf{b} < \mathbf{a}$, что степень \mathbf{b} строго не дополняема до степени \mathbf{a} в классе \mathbf{R} .*

Поскольку $\mathbf{R}^{low} \subset \mathbf{R}$, то теорема будет верна и в случае, если вместо \mathbf{R} рассмотреть \mathbf{R}^{low} . Таким образом, как следствие двух последних теорем получаем, что классы \mathbf{R}^{low} и \mathbf{D}_2^{low} не являются элементарно эквивалентными. Этот вопрос до сих пор оставался открытым и ставился в ряде публикаций.

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
E-mail: marsiam2@yandex.ru