Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

Операторы типа ветвящегося времени на конечных псевдобулевых алгебрах

А. Д. Яшин

Оператором *ветвящегося времени* называют одноместную связку β, которая в интуиционистских моделях Крипке интерпретируется следующим образом: $x \Vdash \beta(A) :\Leftrightarrow$ на любом пути, выходящем вверх из x, найдётся точка y, такая, что $y \Vdash A$.

При указанной интерпретации общезначимы следующие формулы:
$p \to \beta(p)$, $\beta(p \to q) \to (\beta(p) \to \beta(q))$, $\beta(\beta(p)) \to \beta(p)$, $\beta(p) \to \neg\neg p$.
Известно, что эти четыре аксиомы адекватно характеризуют оператор ветвящегося времени в классе деревьев высоты $\leqslant \omega$ с конечным ветвлением.

Оператором *типа ветвящегося времени* на псевдобулевой алгебре (п.б.а.) $(\mathrm{B}; \sqcup, \sqcap, \sqsupset, -; \leqslant)$ будем называть отображение $\Phi\colon \mathrm{B} \to \mathrm{B}$, удовлетворяющее условиям $X \leqslant \Phi(X)$, $\Phi(X \sqsupset Y) \leqslant (\Phi(X) \sqsupset \Phi(Y))$, $\Phi(\Phi(X)) \leqslant \Phi(X)$ для всех $X, Y \in \mathrm{B}$.

Шкала — непустое частично упорядоченное множество $(W, \geq)$. *Конус* в шкале — подмножество, замкнутое относительно увеличения. Пример конуса — $W^x := \{y \in W \mid y \geq x\}$. Множество $\mathrm{Con}\, W$ конусов шкалы W является примером п.б.а. с набором операций $(\cup, \cap, \supset, -)$. Здесь $X \supset Y := \{x \in W \mid X \cap W^x \subseteq Y \cap W^x\}$ и $-X := \{x \in W \mid X \cap W^x = \varnothing\}$ — относительное псевдодополнение и псевдодополнение, а $\cup$ и $\cap$ — обычные объединение и пересечение.

Для п.б.а. $\mathrm{Con}\, W$ всех конусов шкалы W оператор типа ветвящегося времени можно задать с помощью т.н. *подмножества отмеченных точек*. Зафиксируем подмножество $\mathcal{D} \subseteq W$ и определим отображение $\Psi\colon \mathrm{Con}\, W \to \mathrm{Con}\, W$ следующим образом: $\Psi(X) := \{x \in W \mid W^x \cap \mathcal{D} \subseteq X\}$.

Теорема 1. *Каждое подмножество отмеченных точек $\mathcal{D} \subseteq W$ задаёт оператор типа ветвящегося времени на $\mathrm{Con}\, W$; разным подмножествам отмеченных точек соответствуют разные операторы.*

Примеры: (а) если $\mathcal{D} = W$, то $\Psi(X) = X$ (тождественный оператор);
(б) если $\mathcal{D} = \varnothing$, то $\Psi(X) = W$ (единичный оператор);
(в) если в конечной шкале в качестве $\mathcal{D}$ взято множество максимальных точек, то $\Psi(X) = --X$ (двойное псевдодополнение).

Теорема 2. *Для конечной шкалы W всякий оператор типа ветвящегося времени на $\mathrm{Con}\, W$ определяется некоторым подмножеством отмеченных точек $\mathcal{D} \subseteq W$.*

24 сентября 2007

Замечание. Для бесконечных шкал теорема 2 в общем случае не выполняется. Можно привести пример бесконечной древовидной шкалы, на которой стандартный оператор ветвящегося времени не определяется никаким подмножеством отмеченных точек.

Московский городской психолого-педагогический университет
E-mail: yashin_aleksandr@list.ru