Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

Алгоритм модификации полиномиальной формы, построенной по пучку операторов

И. А. Занин

Последовательность символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такая что $a_i \in \{e, p, d\}$ при $i = \overline{1, n}$, называется оператором и обозначается a, ее члены называются компонентами оператора, а число n – длиной оператора. Оператор a длины n задает отображение из F_n в F_n по правилу $af(\tilde{x}) = f_n(\tilde{x})$, где $f_n(\tilde{x})$ определяется по индукции следующим образом: $f_0(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$,

$$f_i(\tilde{x}) = \begin{cases} f_{i-1}(\tilde{x}), & \text{если } a_i = e; \\ \hat{f}_{i-1}(\tilde{x}), & \text{если } a_i = p; \\ f_{i-1}(\tilde{x}) \oplus \hat{f}_{i-1}(\tilde{x}), & \text{если } a_i = d; \end{cases}$$

где $\hat{f}_{i-1}(\tilde{x}) = f_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Множество, состоящее из 2^n операторов длины n называется пучком операторов, а число n будем называть размерностью этого пучка операторов.

Пусть A – пучок размерности n, $g \in F_n$ – булева функция, тогда полиномиальной формой Φ, построенной по A и g будет называться выражение:

$$\Phi \equiv \sum_{\tilde{\sigma}} \alpha_{\tilde{\sigma}} \cdot a^{\tilde{\sigma}} g(\tilde{x}),$$

где $\alpha_{\tilde{\sigma}} \in \{0, 1\}$.

Возьмем множество операторов $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ некоторой фиксированной длины n и для определенности назовем это множество шаблоном. Причем все операторы, входящие в шаблон, должны состоять из двух компонент, т.е. $t_{ij} \in \{e, d\}$.

Рассматривается способ модификации операторной полиномиальной формы такой, чтобы количество операторов в получившейся форме было по возможности наименьшим. Для решения этой задачи будем использовать шаблон операторов. Если у нас получится любую операторную полиномиальную форму выразить через операторы шаблона, то количество операторов в шаблоне будет верхней оценкой сложности.

Алгоритм модификации операторной полиномиальной формы состоит в следующем. На основе шаблона мы составляем операторную форму, которая будет эквивалентна исходной. Для этого выбираем оператор из шаблона, в полиномиальной форме находим операторы, которые отличаются от него в одной компоненте, заменяем в этом операторе компоненту e на p и добавляем получившийся оператор к модифицированной полиномиальной форме.

Алгоритм.

1. По шаблону T построим полиномиальную операторную форму Φ. Упорядочим операторы в T по убыванию количества вхождений компоненты e.

2. Возьмем некоторую операторную форму Ψ, которую мы хотим модифицировать. Заменим все вхождения компоненты p на $e+d$, по дистрибутивному закону раскроем скобки и сократим одинаковые слагаемые.

3. Далее построим $\Gamma = \Phi \oplus \Psi$, приводя подобные слагаемые.

4. Если в Γ присутствует оператор $ee\dots e$, то мы этот оператор удаляем из Γ и включаем в операторную форму Λ.

5. Далее по алгоритму будем повторять шаги 6 и 7.

6. На этом шаге положим оператор $S = t_i$. Далее для всех $l = \overline{1,n}$ смотрим, входит ли в Γ слагаемое, которое отличается от оператора t_i в одной компоненте l. Если да, то заменяем l-ую компонету в операторе S на p.

7. Добавляем S к Λ, а $S + t_i$ к Γ.

После выполнения всех шагов операторная полиномиальная форма Λ будет эквивалентна исходной операторной форме Ψ.

Список литературы.

[1] Кириченко К.Д. Верхняя оценка функции Шеннона сложности булевых функций (статья)/К.Д.Кириченко – Труды $\underline{XII}$ Байкальской международной конференции ,,Методы оптимизации и их приложения.'' Том 5. Дискретная математика. – Иркутск: РИО Ирк. ун-та, 2001 – с.66-70.

[2] Избранные вопросы теории булевых функций. Под ред. С.Ф.Винокурова и Н.А.Перязева.–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.– с.67-139

Иркутский государственный педагогический университет
E-mail: `ardenix@mail.ru`