Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

О классификации конечных локальных колец, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре

Е. В. Журавлев

Теорема 1. *Ассоциативное кольцо R, определяемое конструкцией B, является конечным локальным кольцом характеристики p^2, радикал Джекобсона которого имеет индекс нильпотентности четыре. Обратно, каждое такое кольцо, отличное от кольца Галуа, изоморфно одному из колец конструкции B.*

Конструкция B

Пусть $R_0 = GR(p^{2r}, p^2)$ – кольцо Галуа и $R_0/pR_0 = GF(p^r) = F$. Пусть U, V, W — R_0-модули с порождающими множествами $\{u_1, \ldots, u_{s_1}\}$, $\{v_i\}$, $\{w_j\}$ ($0 \leq i \leq s_2$, $0 \leq j \leq s_3$) соответственно, и W, кроме того, является векторным пространством над полем F. Предположим, что

$$pu_1 \neq 0, pu_2 \neq 0, \ldots, pu_s \neq 0, pu_{s+1} = 0, \ldots, pu_{s_1} = 0,$$
$$pv_1 \neq 0, pv_2 \neq 0, \ldots, pv_\lambda \neq 0, pv_{\lambda+1} = 0, \ldots, pv_{s_2} = 0$$

где s, λ – некоторые целые числа, $0 \leq s \leq s_1$, $0 \leq \lambda \leq s_2$.

Пусть $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{s_1}\}$, $\{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{s_2}\}$, $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s_3}\}$, $\sigma_0 = \theta_0 = \tau_0 = id_{R_0}$ – автоморфизмы R_0 и

$$(a^k_{ij})_{s_1\times s_1},\ k = \overline{0, s_2},$$
$$(b^k_{ij})_{s_1\times s_1},\ (c^k_{ij})_{s_1\times s_2},\ (d^k_{ij})_{s_1\times s_2},\ k = \overline{0, s_3},$$
$$(\hat{a}^k_{ij})_{s_1\times s_1},\ (\hat{b}^k_{ij})_{s_1\times s_1},\ (\hat{c}^k_{ij})_{s_1\times s_2},\ (\hat{d}^k_{ij})_{s_1\times s_2},\ k = \overline{1, s},$$
$$(\check{b}^k_{ij})_{s_1\times s_1},\ (\check{c}^k_{ij})_{s_1\times s_2},\ (\check{d}^k_{ij})_{s_1\times s_2},\ k = \overline{1, \lambda},$$

– матрицы над полем F, удовлетворяющие следующим условиям:

1. множества $\left\{(a^{k_1}_{ij})\right\}$, $\left\{(c^{k_2}_{ij})\right\}$, $\left\{(d^{k_2}_{ij})\right\}$ являются множествами линейно независимых матриц;
2. если $a^k_{ij} \neq 0$ для некоторого $0 \leq k \leq s_2$, то $\theta_k = \sigma_i\sigma_j$;
3. если $\hat{a}^k_{ij} \neq 0$ или $\hat{b}^k_{ij} \neq 0$ для некоторого $1 \leq k \leq s$, то $\sigma_k = \sigma_i\sigma_j$,
4. если $b^k_{ij} \neq 0$ для некоторого $0 \leq k \leq s_3$, то $\tau_k = \sigma_i\sigma_j$;
5. если $\check{b}^k_{ij} \neq 0$ для некоторого $1 \leq k \leq \lambda$, то $\theta_k = \sigma_i\sigma_j$,
6. если $c^k_{ij} \neq 0$ или $d^k_{ij} \neq 0$ для некоторого $0 \leq k \leq s_3$, то $\tau_k = \theta_j\sigma_i$;
7. если $\hat{c}^k_{ij} \neq 0$ или $\hat{d}^k_{ij} \neq 0$ для некоторого $1 \leq k \leq s$, то $\sigma_k = \theta_j\sigma_i$,

8. если $\check{c}_{ij}^k \neq 0$ или $\check{d}_{ij}^k \neq 0$ для некоторого $1 \leq k \leq \lambda$, то $\theta_k = \theta_j \sigma_i$.

Кроме того, пусть выполнен один из следующих наборов ограничений:

a) $1 \leq s_2 \leq s_1^2$, $1 \leq s_3 + 1 \leq s_1 s_2$, $s = \lambda = 0$, $a_{ij}^0 = \hat{a}_{ij}^k = \hat{b}_{ij}^k = \hat{c}_{ij}^k = \hat{d}_{ij}^k = 0$ $\check{b}_{ij}^k = \check{c}_{ij}^k = \check{d}_{ij}^k = 0$ и для любых чисел α, β, $\gamma = \overline{1, s_1}$ и $m = \overline{0, s_3}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^m = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^m;$$

b) $1 \leq s_2 + 1 \leq s_1^2$, $1 \leq s_3 + s \leq s_1 s_2 + s$, $\lambda = 0$, $b_{ij}^0 = c_{ij}^0 = d_{ij}^0 = \hat{a}_{ij}^k = \check{b}_{ij}^k = \check{c}_{ij}^k = \check{d}_{ij}^k = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^{m_1} = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^{m_1},$$

$$a_{\alpha\beta}^0 \delta_\gamma^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \hat{d}_{\gamma k}^{m_2} = \left(a_{\beta\gamma}^0\right)^{\sigma_\alpha} \delta_\alpha^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} \hat{c}_{\alpha k}^{m_2}$$

для любых чисел α, β, $\gamma = \overline{1, s_1}$ и $m_1 = \overline{1, s_3}$, $m_2 = \overline{1, s}$, причем

$$\delta_\gamma^m = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma > s \text{ или } \gamma \neq m, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}, \quad \delta_\alpha^m = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > s \text{ или } \alpha \neq m, \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

c) $1 \leq s' + s_2 \leq (1 + s_1)^2$, $1 \leq s - s' + \lambda + s_3 \leq (1 + s_1)(s' + s_2)$, $a_{ij}^0 = b_{ij}^0 = c_{ij}^0 = d_{ij}^0 = 0$ и $\hat{b}_{ij}^1 = \ldots = \hat{b}_{ij}^{s'} = 0$, $\hat{c}_{ij}^1 = \ldots = \hat{c}_{ij}^{s'} = 0$, $\hat{d}_{ij}^1 = \ldots = \hat{d}_{ij}^{s'} = 0$, $\hat{a}_{ij}^{s'+1} = \ldots = \hat{a}_{ij}^s = 0$ где $0 \leq s' \leq s$, и

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^{m_1} = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^{m_1},$$

$$\sum_{k=1}^{s} \left(\hat{a}_{\alpha\beta}^k\right) a_{k\gamma}^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \check{d}_{\gamma k}^{m_2} = \sum_{k=1}^{s} \left(\hat{a}_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} a_{\alpha k}^{m_2} + \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} \check{c}_{\alpha k}^{m_2},$$

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k \hat{d}_{\gamma k}^{m_3} = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} \hat{c}_{\alpha k}^{m_3}$$

для любых чисел α, β, $\gamma = \overline{1, s_1}$, $m_1 = \overline{1, s_3}$, $m_2 = \overline{1, \lambda}$, $m_3 = \overline{1, s}$.

Далее, рассмотрим прямую сумму $R = F \oplus U \oplus V \oplus W$ и определим умножение на R по правилу

$$\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{s_1} \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{s_2} \beta_k v_k + \sum_{k=1}^{s_3} \gamma_k w_k\right) \cdot \left(\alpha_0' + \sum_{k=1}^{s_1} \alpha_k' u_k + \sum_{k=1}^{s_2} \beta_k' v_k + \sum_{k=1}^{s_3} \gamma_k' w_k\right) =$$

$$= \alpha_0 \alpha_0' + p \left(\sum_{i,j=1}^{s_1} \left(a_{ij}^0 + b_{ij}^0\right) \left[\alpha_i \left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} \left(c_{ij}^0 \left[\alpha_i (\beta_j')^{\sigma_i} + pR_0\right] + d_{ij}^0 \left[\beta_j (\alpha_i')^{\theta_j} + pR_0\right]\right) \right),$$

$$\sum_{k=1}^{s_1}\left(\alpha_0\alpha_k' + \alpha_k(\alpha_0')^{\sigma_k} + p\left(\sum_{i,j=1}^{s_1}\left(\hat{a}_{ij}^k + \hat{b}_{ij}^k\right)\left[\alpha_i\left(\alpha_j'\right)^{\sigma_i} + pR_0\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\left(\hat{c}_{ij}^k\left[\alpha_i(\beta_j')^{\sigma_i} + pR_0\right] + \hat{d}_{ij}^k\left[\beta_j(\alpha_i')^{\theta_j} + pR_0\right]\right)\right)\right)u_k,$$

$$\sum_{k=1}^{s_2}\left(\alpha_0\beta_k' + \beta_k\left(\alpha_0'\right)^{\theta_k} + \sum_{i,j=1}^{s_1}\dot{a}_{ij}^k\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i} + \right.$$

$$\left. + p\left(\sum_{i,j=1}^{s_1}\check{b}_{ij}^k\left[\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i} + pR_0\right] + \sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\left(\check{c}_{ij}^k\left[\alpha_i(\beta_j')^{\sigma_i} + pR_0\right] + \check{d}_{ij}^k\left[\beta_j(\alpha_i')^{\theta_j} + pR_0\right]\right)\right)\right)v_k,$$

$$\sum_{k=1}^{s_3}\left([\alpha_0 + pR_0]\gamma_k' + \gamma_k[\alpha_0' + pR_0]^{\tau_k} + \right.$$

$$\left.\sum_{i,j=1}^{s_1} b_{ij}^k\left[\alpha_i(\alpha_j')^{\sigma_i} + pR_0\right] + \sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\left(c_{ij}^k\left[\alpha_i(\beta_j')^{\sigma_i} + pR_0\right] + d_{ij}^k\left[\beta_j(\alpha_i')^{\theta_j} + pR_0\right]\right)\right)w_k$$

где $\alpha_0,\ \alpha_0',\ \alpha_k,\ \alpha_k',\ \beta_k,\ \beta_k' \in K_0,\ \gamma_k,\ \gamma_k' \in R_0/pR_0,\ \dot{a}_{ij}^k \in K_0,\ \dot{a}_{ij}^k + pR_0 = a_{ij}^k$.

Список литературы

[1] Журавлев Е.В. Конечные локальные кольца порядка p^6 и характеристики p, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре // Известия Алтайского государственного университета. - 2006. 1 (49). - С. 17-32.

[2] Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. - 2006. Том 3. - С. 15-59. - Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

[3] Gorbas B., Williams G.D. Rings of order p^5. Part 2. Local rings // Journal of Algebra. 2000. V. 231.

[4] Chikunji C. J. On a Class of Finite Rings // Communication in Algebra. 1999. V. 27(10).

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: `evzhuravlev@mail.ru`