

Связи конечно порожденных модулей над csp -кольцами с некоторыми условиями конечности

Е. Г. Зиновьев

В работах [1,2] появилось понятие кольца псевдорациональных чисел, что дает другой подход к изучению смешанных абелевых групп (см. также [3]). csp -кольцо является обобщением данного понятия [4]. В данном сообщении рассматриваются некоторые условия конечности для модулей над csp -кольцами.

Буква p обозначает простое число, \mathbb{Z}_{p^k} — кольцо вычетов по модулю p^k , $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p -адических чисел, \mathbb{N} — множество натуральных чисел, \mathbb{Q} — поле рациональных чисел.

Определение 1. Пусть P — некоторое бесконечное множество простых чисел. Для каждого $p \in P$ пусть $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, или $R_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$. Положим $K = \prod_{p \in P} R_p$, $T = \bigoplus_{p \in P} R_p$. Подкольцо R кольца K назовем csp -кольцом, если $T \subset R$ и R/T — некоторое поле.

Если все $R_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ и $R/T \cong \mathbb{Q}$, то R называется кольцом псевдорациональных чисел. csp -кольцо R является коммутативным кольцом с единицей, строение которого связано с полями алгебраических чисел [5].

Определение 2. Конечно порожденный R -модуль M называется приведенным, если он обладает такой системой образующих a_1, \dots, a_n , что $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ — базис R/T -пространства M/TM , где $\bar{a}_i = a_i + TM$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае систему a_1, \dots, a_n назовем стандартным базисом модуля M .

Доказано, что изучение конечно порожденных R -модулей сводится к изучению приведенных R -модулей. Для приведенного R -модуля M получены критерии разложения в прямую сумму циклических R -модулей, и когда он является свободным R -модулем.

Модуль A над некоторым кольцом называется малым, если для каждого гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} C_i$, где C_i — произвольные модули, существует конечное подмножество $J \subseteq I$ со свойством $\varphi A \subseteq \bigoplus_{j \in J} C_j$.

Теорема Малые R -модули совпадают с конечно порожденными R -модулями.

- [1] Fomin A.A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Trends in Math. — 1999. — P. 87–100.
- [2] Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. — Томск, 2000. — Т. 269. — С. 29–34.

- [3] Царев А.В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Матем. заметки. 2006. — Т. 80, 3. — С. 437–448.
- [4] Зиновьев Е.Г. *csp*-кольца, как обобщение колец псевдорациональных чисел // Фундам. и прикл. математика. 2007.
- [5] Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W. The flat dimension of mixed abelian groups as E-modules // Rocky Mountain J. Math. — 1995. — V. 25. — P. 569–590.

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
E-mail: egor_zinoviev@mail.ru