Институт математики им. С. Л. Соболева
Новосибирский государственный университет

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

посвященная 100-летию со дня рождения
Анатолия Ивановича Мальцева
24–28 августа 2009 г.

Тезисы докладов

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 09–01–06080–г)

Новосибирск • 2009

Sobolev Institute of Mathematics
Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

dedicated to the 100th anniversary
of Anatoliĭ Ivanovich Mal'tsev
August 24–28, 2009

Collection of Abstracts

РФФИ Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 09–01–06080)

Novosibirsk • 2009

Содержание

I. Пленарные доклады

Методы теории моделей в теории колец: элементарная эквивалентность; ортогональная полнота

Е. И. Бунина, А. В. Михалев

Доклад посвящен развитию идей и результатов А. И. Мальцева, связанных с применением методов теории моделей в алгебре.

1) Вопросы элементарной эквивалентности различных алгебраических систем (например, групп, колец) были впервые изучены А. И. Мальцевым в 1961 году. Он показал, что две линейных группы $G(n, K)$ и $G(m, L)$, где $G = GL, PGL, SL, PSL$, K, L — поля, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Эта теорема А. И. Мальцева инициировала активно развивающееся новое направление "Элементарная эквивалентность производных алгебраических структур". Теоремы, аналогичные теореме Мальцева, были доказаны для линейных групп над телами и ассоциативными кольцами, для линейных унитарных групп над телами и кольцами, для групп Шевалле над полями и локальными кольцами, для полугрупп неотрицательных обратимых матриц над упорядоченными ассоциативными кольцами, для обобщенных колец инцидентности над телами, для целочисленных групповых колец над абелевыми p-группами.

В некоторых случаях элементарная эквивалентность производных структур равносильна эквивалентности исходных в логике большего порядка (второго порядка или некоторого усеченного варианта логики второго порядка). Авторами доказаны такого рода теоремы для колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов абелевых p-групп, категорий модулей над ассоциативными кольцами, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга над ассоциативными кольцами, и других подобных алгебраических структур.

2) Под несомненным влиянием работ А. И. Мальцева по теории моделей была создана теория Бейдара — Михалева ортогональной полноты на основе рассмотрения полупервичных колец как булевых произведений первичных колец. Вторая часть доклада посвящена развитию и обобщению теории ортогональной полноты.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: helenbunina@yandex.ru

Развитие идей А. И. Мальцева в теории вычислимых моделей

С. С. Гончаров

В докладе обсуждаются проблемы инициированные в работах А. И. Мальцева по исследованию проблем существования вычислимых моделей, существования вычислимых представлений для различных алгебраических структур и вопросы автоустойчивости и алгоритмической размерности алгебраических систем и новые результаты в этих направлениях. А также связи теории вычислимых нумераций и вычислимых нумераций для различных иерархий с проблемами теории вычислимых моделей.

Список литературы

[1] Mal'tsev A. I. Constructible algebras. I. Usp. Mat. Nauk, 16 (1961), No. 3, 3–60.
[2] Mal'tsev A. I. Algebraic Systems. Berlin: Springer Verlag, 1976.
[3] Mal'tsev A. I. Algorithms and Recursive Functions. Groningen: Wolters-Noordoff, 1970.
[4] Ash C. J., Knight J. F. Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Elsevier Science, 2000.
[5] Ershov Yu. L., Goncharov S. S. Constructive Models. In: Siberian school of algebra and logic, vol. 6, New York: Kluwer Academic/Plenum Press, Consultants bureau, 2000.
[6] Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., McCoy C., Miller R. G., Solomon R. Enumerations in computable structure theory. Annals of Pure and Applied Logic, 136 (2005), N 3, 219–246.
[7] Goncharov S. S. Computability and Models. In: Mathematical Problems from Applied Logic II. International Mathematical Series, Springer. 2007. V. 5, P. 99–216.
[8] Soare R. Recursively Enumerable Sets and Degrees. New York: Springer-Verl., 1987.

Новосибирский государственный университет, Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: gonchar@math.nsc.ru

По дороге от логики к алгебре

Ю. Л. Ершов

В докладе обсуждается влияние следующих трех статей А. И. Мальцева на развитие исследований в мировой математике:

I. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik. — Мат. сб., 1936, т. 1, № 3, 323–335.

II. Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп. — Учен. зап. Ивановского пед. ин-та, 1941, т. 1, № 1, 3–9.

III. О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей. — Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 1, 71–77.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: ershov@math.nsc.ru

Предельные алгебраические системы и алгебро-геометрическая граница

В. Н. Ремесленников

Фиксируем алгебраическую систему (алгебру) $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ (без предикатов). В статье [1] доказана следующая так называемая объединяющая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathcal{L}$ — язык без предикатов, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ — алгебраические системы языка $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{A}$ нётерова по бескоэффициентным уравнениям, а $\mathcal{C}$ конечно порождена. Тогда следующие свойства алгебраической системы $\mathcal{C}$ равносильны:*

(1) *$\mathcal{C}$ — координатная алгебраическая система неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{A}$ для системы бескоэффициентных уравнений;*
(2) $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{C})$, *то есть* $\mathcal{C} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$;
(3) $\mathrm{Th}_\exists(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Th}_\exists(\mathcal{C})$;
(4) *алгебраическая система $\mathcal{C}$ вложима в ультрастепень алгебраической системы $\mathcal{A}$;*
(5) *алгебраическая система $\mathcal{C}$ дискриминируется алгебраической системой $\mathcal{A}$;*
(6) *$\mathcal{C}$ — предельная над $\mathcal{A}$ алгебраическая система;*
(7) *$\mathcal{C}$ — алгебраическая система, определяемая полным атомарным типом теории* $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$ *языка $\mathcal{L}$.*

Обозначим через $\mathbf{U} = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ универсальное замыкание $\mathcal{A}$ и через $\mathbf{U}_\omega$ — конечно порождённую часть $\mathbf{U}$.

Как показано в [1], все координатные алгебры неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{A}$, определяемыми системами уравнений без коэффициентов, содержатся в $\mathbf{U}_\omega$. Более того, если алгебра $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям, то в силу приведённой теоремы верно и обратное включение. Поэтому проблема классификации неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ эквивалентна проблеме классификации алгебр из класса $\mathbf{U}_\omega$.

Понятие предельной алгебры (а их несколько) — это понятия, возникшие при изучении алгебр из $\mathbf{U}_\omega$ топологическими методами. Мы даём три основных определения предельной алгебры для $\mathcal{A}$. И в каждом из этих определений алгебры из $\mathbf{U}_\omega$ и только они будут предельными. С помощью одной из трёх предложенных топологических конструкций будет введена алгебро-геометрическая граница для $\mathcal{A}$ и, по определению, это будет семейство топологических пространств $\mathcal{AGB}_n$ для всех целых чисел $n \geqslant 1$.

Список литературы

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry. Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008).

Омский филиал Института математики СО РАН, Омск
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Burnside problem on periodic groups and related topics

S. I. Adian

The Burnside problem. *Fix $m \geq 2$ and consider the group*

$$B(m,n) = \langle a_1, \ldots, a_m \mid X^n = 1 \rangle$$

with the identity $X^n = 1$. Is the group $B(m,n)$ always finite?

In the monograph "History of combinatorial group theory" (Springer-Verlag, 1982), Prof. Wilhelm Magnus characterized the Burnside problem as follows:

> *Very much like Fermat's Last Theorem in number theory, Burnside's problem has acted as a catalyst for research in group theory. The fascination exerted by a problem with an extremely simple formulation which then turns out to be extremely difficult has something irresistible about it to the mind of the mathematician.*

A negative solution of the Burnside problem on periodic groups was given in joint works by P. S. Novikov and S. I. Adian published in "Izvestiya AN SSSR", 1968, vol.32. The infiniteness of free periodic groups $B(m,n)$ was proved for all exponents $n = kl$ with odd $k \geq 4381$ and $m > 1$ generators.

For a solution of the Burnside problem Novikov and Adian created a new method based on a classification of periodic words and a corresponding system of defining relations for the group $B(m,n)$ by simultaneous induction on a natural parameter α called *rank*. Later in the monograph "The Burnside problem and identities in groups" (Nauka, 1975) the result was improved for any odd $k \geq 665$.

Investigations of periodic groups and solutions of many other old complicated problems in the group theory on the base of various modifications of the created method were continued during the last 40 years by S. I. Adian, his students and successors.

A survey of these results and some historical details will be given in the talk.

Steklov Mathematical Institute, Moscow
E-mail: sia@mi.ras.ru

Models-theoretic aspects of the non-computable universe

M. Arslanov

Main focus of my talk will the n-c.e. Turing degrees (the degree theoretic counterpart of the finite levels of the Ershov hierarchy). These degree structures has been closely investigated for almost forty years. Much research has been centered on the comparison between the structures of the m-c.e. and n-c.e. degrees for $1 \leq m < n$, and various similarities and differences have been found. Nevertheless, the most principal questions on the interior arrangement of these degree structures remain unanswered. The main open questions in this list are the following:

- Definability of the various levels of the n-c.e. hierarchy, both relatively and within wider local structures; more specifically, questions related to the definability of the relations of 'computably enumerable' and 'computably enumerable in';
- Decidability of the restricted fragments of theories of these structures;
- Model theoretic similarities and differences between n-c.e. degree structures for $n > 2$.

In my talk I will give a survey of the current status of these questions and discuss a number of related open questions.

General questions of definability and the role of splitting and nonsplitting, and also the description of new relationships between information content and degree theoretic structure also will be considered.

Kazan State University, Department of Mathematics, Kremlevskaja 18, Kazan 420008, Russia
E-mail: `Marat.Arslanov@ksu.ru`

Turing computable embeddings

J. F. Knight

There are approaches from different branches of logic, letting us compare classes of countable structures and to say that one is more difficult to classify, up to isomorphism. One model theoretic approach involves cardinality, up to isomorphism. For example, $\mathbb{Q}$-vector spaces are easier to classify, up to isomorphism, than undirected graphs, because there are only countably many non-isomorphic $\mathbb{Q}$-vector spaces, while there are $2^{\aleph_0}$ non-isomorphic graphs. Friedman and Stanley [1] developed an approach that involves Borel embeddings and "Borel cardinality". This approach let them say that classification is strictly simpler for fields of characteristic 0 and finite transcendence degree, and for Abelian p-groups, than for graphs, even though each of these classes has $2^{\aleph_0}$ non-isomorphic structures.

Borel cardinality does not allow us to distinguish among classes with just $\aleph_0$ non-isomorphic structures. In [2], there is a related approach, involving Turing computable embeddings and "effective cardinality". This approach lets us make some distinctions. For example, the effective cardinality for number fields is strictly smaller than that for $\mathbb{Q}$-vector spaces. We can make further distinctions. For a completion T of PA, $Mod(T)$ has maximal Borel cardinality, but it does not have maximal effective cardinality.

Results in [3] suggest a uniform way of looking for non-embeddability results. To locate a given class in relation to others, we consider the form of the sentences that distinguish among non-isomorphic members. In particular, we may re-work in this way the result of Friedman and Stanley showing non-embeddability of graphs in Abelian p-groups [4]. We say that a class K has "Ulm type" if non-isomorphic members of K can be distinguished by infinitary sentences lying in the thinnest admissible set that contains the ordinals computable from the structures.

References

[1] Friedman H., Stanley L. A Borel reducibility theory for classes of countable structures. J. Symb. Logic, 54 (1989), 894–914.

[2] Calvert W., Cummins D., Knight J. F., Miller S. Comparing classes of finite structures. Algebra and Logic, 43 (2004), 365–373.

[3] Knight J. F., Miller S., Vanden Boom M. Turing computable embeddings. J. Symb. Logic, 73 (2007), 901–918.

[4] Fokina E., Knight J. F., Maher C., Melnikov A., Quinn S. M. Classes of Ulm type, and relations between the class of rank-homogeneous trees and other classes, preprint.

Mathematics Department, University of Notre Dame, USA
E-mail: `knight.1@nd.edu`

Recent applications of proof theory to core mathematics

U. Kohlenbach

In recent years specially designed forms and novel extensions of functional interpretations have been used to establish general logical metatheorems ([3, 4, 1]) that guarantee the extractability of highly uniform effective bounds from large classes of proofs in nonlinear analysis, metric fixed point theory, ergodic theory and topological dynamics. 'Uniform' here means that the bounds do not depend on parameters from abstract metric, hyperbolic, normed or Hilbert spaces as long as local metric bounds are given whereas no compactness is assumed. For such strong uniformity results to hold it is crucial that the underlying abstract spaces are not assumed to be separable.

The approach has led to numerous applications with new (both qualitative as well as quantitative) results in the above mentioned areas of mathematics. In particular, one obtains explicit uniform versions of so-called metastability results in the sense of T. Tao.

We will report on recent new applications to fixed point theory ([6]) and ergodic theory ([7]).

Most recently, it has been shown that proofs in nonseparable Hilbert space theory that are heavily based on weak compactness arguments are covered as well ([5]). As an example we will report on an analysis of a proof due to F. Browder ([2]) which might well serve as a model for the treatment of many other uses of weak compactness.

References

[1] Briseid E. M. Logical aspects of of rates of convergence in metric spaces. To appear in: J. Symbolic Logic.

[2] Browder F. E. Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces. Arch. Rational Mech. Anal., 24 (1967), 82–90.

[3] Gerhardy P., Kohlenbach U. General logical metatheorems for functional analysis. Trans. Amer. Math. Soc., 360 (2008), 2615–2660.

[4] Kohlenbach U. Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics. Springer Monographs in Mathematics. Springer Heidelberg-Berlin, 2008.

[5] Kohlenbach U. On the logical analysis of proofs based on nonseparable Hilbert space theory. To appear in: Festschrift for Grigori Mints.

[6] Kohlenbach U., Leuştean L. Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces. To appear in: J. European Math. Soc.

[7] Kohlenbach U., Leuştean L. A quantitative mean ergodic theorem for uniformly convex Banach spaces. To appear in: Ergodic Theory and Dynamical Systems.

Dept. of Mathematics, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt (Germany)
E-mail: kohlenbach@mathematik.tu-darmstadt.de

Algebraic approach to non-classical logics

L. L. Maksimova

Study of non-classical logics in Novosibirsk started in 60-th due to initiative and by supervision of A. I. Maltsev. His interest to this area was stimulated by the existence of an adequate algebraic semantics for the most known non-classical logics.

In the present paper inter-connections of syntactic properties of non-classical logics and categorial properties of appropriate classes of algebras are investigated. We consider such fundamental properties as the interpolation property, the Beth definability property, joint consistency property and their variants. In the case of modal, superintuitionistic and related logics the mentioned properties of logics proved to be equivalent to appropriate variants of the amalgamation property or epimorphism surjectivity [1, 3]. It allows to solve, for instance, interpolation problem for some important classes of logical calculi and, at the same time, amalgamation problem for varieties. In particular, the following problems are decidable:

- Craig's interpolation property and deductive interpolation property for superintuitionistic and positive calculi and for modal calculi over the modal S4 logic,
- amalgamation and super-amalgamation properties for subvarieties of Heyting algebras, implicative lattices and closure algebras,
- projective Beth property and restricted interpolation property over the intuitionistic logic and over the Grzegorczyk logic,
- strong epimorphisms surjectivity for subvarieties of Heyting algebras, implicative lattices and of Grzegorczyk algebras,
- weak interpolation property over the modal K4 logic [2],
- weak amalgamation property for varieties of transitive modal algebras.

References

[1] Gabbay D. M., Maksimova L. Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.

[2] Karpenko A. V. Weak interpolation property in extensions of the logics S4 and K4. Algebra and Logic, 47 (2008), no. 6, 705–722.

[3] Maksimova L. L. Definability and interpolation in non-classical logics. Studia Logica, 82 (2006), 271-291.

Sobolev Institute of Mathematics, 630090, Novosibirsk (Russia)
E-mail: `lmaksi@math.nsc.ru`

Automorphism spectra of computable structures

A. S. Morozov

This is a joint work together with Valentina Harizanov (George Washington University, Washington DC) and Russell Miller (CUNY, New York). We define and study the automorphism spectra of computable structures, prove their general properties, and prove that certain sets of Turing degrees can be realized as automorphism spectra, while certain others cannot.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
E-mail: morozov@math.nsc.ru

Computations and functionals of finite types

D. Normann

The Church—Turing Thesis suggests that there is an absolute concept of computability for (partial) functions taking natural numbers or words in a finite alphabet as arguments.

If we extend the idea of computations to arguments from other domains, the picture is not so clear. In particular, if we want to study computations relative to functionals of finite types, there seems to be a freedom both in which functionals we want to consider as inputs and in which principles of computation we may permit.

In this talk, I will give a survey of elements of the history of computable functionals of finite types with an emphasis on the diversity both in approaches and in the applicability of the theory.

Towards the end, I will discuss some recent results on partial, sequential functionals obtained jointly with V. Sazonov.

The University of Oslo, Oslo (Norway)
E-mail: dnormann@math.uio.no

Isotyped algebras

B. Plotkin

Let a variety of algebras Θ be fixed. For every finite set of variables X we consider the free in Θ algebra $W(X)$ and a special algebra of first order formulas $\Phi(X)$. The precise definition of $\Phi(X)$ is given in terms of algebraic logic. Each ultrafilter T in $\Phi(X)$ is called X-type. A type T is called an X-type of the algebra H in Θ if it can be presented as a logical kernel of a point in the affine space H^X. For every algebra $H \in \Theta$ consider all X-types of the algebra H. The set of such types is denoted by $S^X(H)$.

Definition. *Algebras H_1 and H_2 are called isotyped if for every X we have*

$$S^X(H_1) = S^X(H_2).$$

In the talk we consider a geometric approach to this model-theoretic notion. This approach leads to new results and various problems.

Hebrew University, Jerusalem
E-mail: `plotkin@macs.biu.ac.il`

Algebraic geometry over solvable groups

N. S. Romanovskiĭ

Algebraic geometry over groups is a new theory which was recently used in solving well-known Tarski problems. As in the classical case one can define the Zariski topology on affine space G^n for any group G. This topology is good (noetherian) if and only if the group G is equationally noetherian, i.e., any system of equations over $x_1, \ldots, x_n$ is equivalent to some finite subsystem. For example, free groups are equationally noetherian. We describe a wide class of solvable groups, so-called rigid groups, which contains free solvable groups, and study algebraic geometry over such groups. We prove that any rigid group is equationally noetherian and develop the dimension (Krull) theory over rigid groups. Furthermore, we introduce divisible rigid groups and describe the coordinate groups of their irreducible algebraic sets. Some results are joint with Kanta Gupta and Alexei Miasnikov.

Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
E-mail: `rmnvski@math.nsc.ru`

Mixing modality and probability

D. S. Scott

Orlov first [1928] and Gödel later [1933] pointed out the connection between the Lewis System S4 and Intuitionistic Logic. McKinsey and Tarski gave an algebraic formulation and proved completeness theorems for propositional systems using as models topological spaces with the interior operator corresponding to the necessitation modality. Earlier, Tarski and Stone had each shown that the lattice of open subsets of a topological space models intuitionistic propositional logic. Expanding on a suggestion of Mostowski about interpreting quantifiers, Rasiowa and Sikorski used the topological models to model many first-order logics.

After the advent of Solovey' s recasting of Cohen' s independence proofs as using Boolean-valued models, topological models for modal higher- order logic were studied by Gallin and others. For Boolean-valued logic, the complete Boolean algebra $M = \mathrm{Meas}([0,1])/\mathrm{Null}$ of measurable subsets of the unit interval modulo sets of measure zero gives every proposition a probability. Perhaps not as well known is the observation that the measure algebra also carries a nontrivial S4 modality defined with the aid of the sublattice $\mathrm{Open}([0,1])/\mathrm{Null}$ of open sets modulo null sets. This sublattice is closed under arbitrary joins and finite meets in the measure algebra, but it is not the whole of the measure algebra. By working by analogy to the construction of Boolean-valued models for ZF, we can construct over M a model for a modal ZF (MZF) where membership and equality predicates have interesting and natural modal properties. In such a universe the real numbers correspond to random variables, and — following a suggestion of Alex Simpson (Edinburgh) — there is also an well motivated modeling of random reals.

A modal set theory, however, requires a reexamination of comprehension principles, and much work remains to be done to organize methods of proof to take account of the new distinctions encountered. It is also possible to recast well known theorems of Ergodic Theory as principles about this modal universe, and the question to be considered is whether the new perspective can lead to some new results.

Carnegie Mellon University and University of California, Berkeley
E-mail: dana.scott@cs.cmu.edu

Embedding lattices into derived lattices

M. Semenova

The problem of embedding algebras into algebras possessing certain properties is a classical one in universal algebra. Due to a well-known result of A. I. Maltsev, the class of semigroups embeddable into groups forms a quasivariety, and that quasivariety is not finitely based.

In the talk, I shall consider classes of lattices which are embeddable into certain derived lattices. Most often, those classes of lattices turn to be quasivarieties. However, sometimes, they are varieties, and sometimes, they are even not first-order. I shall also mention some open problems and related topics.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
E-mail: udav17@gmail.com, semenova@math.nsc.ru

The omega-enumeration degrees

I. Soskov

The semi-lattice of the omega enumeration degrees is an extension of the enumeration degrees based on a certain reducibility on sequences of sets of natural numbers. In the talk we shall discuss some features of the omega enumeration degrees concerning the properties of the jump operation, the group of the automorphisms and the local theory. We will argue that studying the omega enumeration degrees could give us a powerful tool for better understanding the classical structures of the enumeration and Turing degrees.

Sofia University
E-mail: soskov@fmi.uni-sofia.bg

Distributions of countable models of small theories

S. V. Sudoplatov

It is known [1] that any countable model of a small theory T is either prime over a tuple or limit. Therefore the number $I(T,\omega)$ of countable models of T can be represented as the sum of the number $I_p(T,\omega)$ of prime models over tuples and the number $I_l(T)$ of limit models.

A theory T is *p-categorical* (accordingly *l-categorical*, *p-Ehrenfeucht*, *l-Ehrenfeucht*) if $I_p(T,\omega)=1$ (accordingly $I_l(T)=1$, $1<I_p(T,\omega)<\omega$, $1<I_l(T)<\omega$).

Obviously that the p-categoricity of T is equivalent to the countable categoricity, its p-Ehrenfeuchtness means that the system $\mathrm{RK}(T)$ of Rudin—Keisler preorder (see [1]) is finite, and the p-Ehrenfeuchtness and the condition $1\leq I_l(T)<\omega$ are satisfied iff $1\leq I(T,\omega)<\omega$, i.e. T is an Ehrenfeucht theory. Using the following theorem, generalizing the characterization [2] of p-Ehrenfeucht theories to the class of all small theories, we characterize the classes of l-categorical and l-Ehrenfeucht theories.

Theorem 1. *Any small theory T satisfies the following conditions:*

(1) *the system $\mathrm{RK}(T)$ is upward directed and has the least element $\mathbf{M}_0$ (the isomorphism type of prime model of T), $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_0})=0$;*

(2) *if $\mathbf{q}$ is a $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequence of nonprincipal types q_n, $n\in\omega$, such that each type q of T is related by $q\leq_{\mathrm{RK}} q_n$ for some n, then there exists a limit model over $\mathbf{q}$; in particular, $I_l(T)\geq 1$ and the countable saturated model is limit over $\mathbf{q}$ if $\mathbf{q}$ exists;*

(3) *if $\mathbf{q}$ is a $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequence of types q_n, $n\in\omega$, and $(M_{q_n})_{n\in\omega}$ is an elementary chain such that any co-finite subchain doesn't consist of pairwise isomorphic models, then there exists a limit model over $\mathbf{q}$;*

(4) *if $\mathbf{q}'=(q'_n)_{n\in\omega}$ is a subsequence of $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequence $\mathbf{q}$, then any limit model over $\mathbf{q}$ is limit over $\mathbf{q}'$;*

(5) *if $\mathbf{q}=(q_n)_{n\in\omega}$ and $\mathbf{q}'=(q'_n)_{n\in\omega}$ are $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequences of types such that for some $k,m\in\omega$, since some n, any types q_{k+n} and q'_{m+n} are connected by $M_{q_{k+n}}\simeq M_{q'_{m+n}}$, then any model M is limit over $\mathbf{q}$ iff M is limit over $\mathbf{q}'$;*

Moreover the following decomposition formula is true:

$$I(T,\omega)=|\mathrm{RK}(T)|+\sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Q}}\mathrm{IL}_{\mathbf{q}},$$

where $\mathrm{IL}_{\mathbf{q}}\in\omega\cup\{\omega,\omega_1,2^\omega\}$ is the number of limit models related to the $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequence $\mathbf{q}$ and not related to extensions and restrictions of $\mathbf{q}$ that used for the calculation of all limit models, and the family $\mathbf{Q}$ of $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequences of types represents all $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequences, over which limit models exist.

The following Theorem generalizes Theorem 1 in [2] for arbitrary Rudin—Keisler preorders and correspondent distribution functions for numbers of limit models, where values of functions belong to $\omega\cup\{\omega,2^\omega\}$.

Theorem 2. *Let $\langle X,\leq\rangle$ be a finite or countable upward directed preordered set with a least element x_0, $f:Y\to\omega\cup\{\omega,2^\omega\}$ be a function with the set Y of all $\leq_0$-sequences, i.e. of sequences in $X\setminus\{x_0\}$, forming all $\leq$-chains, and satisfying the following conditions:*

(1) *$f(y)\geq 1$, if for any $x\in X$ there exists some x' from the sequence y such that $x\leq x'$;*

(2) *$f(y)\geq 1$, if any co-finite subsequence of y doesn't contain of pairwise equal elements;*

(3) *$f(y)\leq f(y')$, if y' is a subsequence of y;*

(4) *$f(y)=f(y')$, if $y=(y_n)_{n\in\omega}$ and $y'=(y'_n)_{n\in\omega}$ are sequences such that there exist some $k,m\in\omega$ for which $y_{k+n}=y'_{m+n}$ since some n.*

Then there exists a small theory T and an isomorphism $g : \langle X, \leq\rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{RK}(T)$ such that any value $f(y)$ is equal to the number of limit models over a $\leq_{\mathrm{RK}}$-sequence $(q_n)_{n\in\omega}$, correspondent the $\leq_0$-sequence $y = (y_n)_{n\in\omega}$, where $g(y_n)$ is the isomorphism type of the model M_{q_n}, $n \in \omega$.

Constructions in [3] allow to represent stable structures for the proof of Theorem 2.

The work is supported by RFBR grant No. 09-01-00336-a and by the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools via project NSh-344.2008.1.

References

[1] Sudoplatov S. V. Complete Theories with Finitely Many Countable Models. I. Algebra and Logic, 43 (2004), N 1, 62–69.

[2] Sudoplatov S. V. On the number of countable models of complete theories with finite Rudin — Keisler preorders. Siberian Math. J., 48 (2007), N 2, 334–338.

[3] Sudoplatov S. V. Stable theories with finitely many countable models. Algebra and Logic (submitted)

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Constraints, graphs, algebra, logic, and complexity

M. Y. Vardi

A large class of problems in AI and other areas of computer science can be viewed as constraint-satisfaction problems. This includes problems in database query optimization, machine vision, belief maintenance, scheduling, temporal reasoning, type reconstruction, graph theory, and satisfiability. All of these problems can be recast as questions regarding the existence of homomorphisms between two directed graphs. It is well-known that the constraint-satisfaction problem is NP-complete. This motivated an extensive research program into identify tractable cases of constraint satisfaction.

This research proceeds along two major lines. The first line of research focuses on non-uniform constraint satisfaction, where the target graph is fixed. The goal is to identify those target graphs that give rise to a tractable constraint-satisfaction problem. The second line of research focuses on identifying large classes of source graphs for which constraint-satisfaction is tractable. We show in how tools from graph theory, universal algebra, logic, and complexity theory, shed light on the tractability of constraint satisfaction [1].

Work supported in part by NSF grants CCR-0311326, CCF-0613889, ANI-0216467, and CCF-0728882.

References

[1] Kolaitis P. G., Vardi M. Y. A logical approach to constraint satisfaction. In: *Complexity of Constraints*, Lecture Notes in Computer Science 5250, pp. 125–155, Springer, 2008.

Rice University, Houston, TX (USA)
E-mail: vardi@cs.rice.edu

Computing bounds from (arithmetical) proofs

S. S. Wainer

This survey talk will be about the function $a + 2^x$, its various generalizations to higher number classes, their natural role in providing ordinal analyses for a range of theories between "polynomial-time arithmetic" and Π^1_1-CA_0, and their direct connections with associated combinatorial independence results such as Friedman's miniaturized Kruskal theorems.

School of Mathematics, University of Leeds, UK
E-mail: s.s.wainer@leeds.ac.uk

Computable separation in topology

K. Weihrauch

We study computable separation axioms for computable topological spaces. A computable topological space is a 4-tuple $\mathbf{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ such that (X, τ) is a topological T_0-space and $\nu :\subseteq \Sigma^* \to \beta$ is a notation of a base β of τ such that $\mathrm{dom}(\nu)$ is recursive and for some r.e. set $S \subseteq (\mathrm{dom}(\nu))^3$, $\nu(u) \cap \nu(v) = \bigcup\{\nu(w) \mid (u, v, w) \in S\}$ for all $u, v \in \mathrm{dom}(\nu)$. Let δ be the standard representation of the points, let θ be the inner representation of the open sets and let ψ^- be the outer representation of the closed sets. We introduce 13 computable versions of the topological separation axioms T_0 to T_3. Examples:

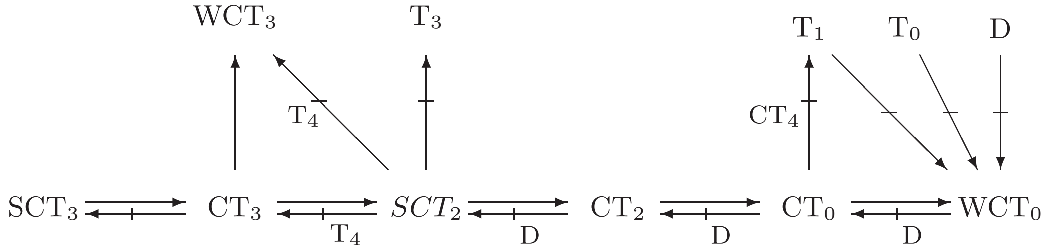
$\mathbf{CT_0}$: The multi-function t_0 is (δ, δ, ν)-computable where t_0 maps every $(x, y) \in X^2$ such that $x \neq y$ to some $U \in \beta$ such that $(x \in U$ and $y \notin U)$ or $(x \notin U$ and $y \in U)$.

$\mathbf{CT_1'}$: There is an r.e. set $H \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ such that $(\forall x, y,\ x \neq y)(\exists (u, v) \in H)(x \in \nu(u) \wedge y \in \nu(v))$ and for all $(u, v) \in H$, $\nu(u) \cap \nu(v) = \emptyset$ or $(\exists x)\, \nu(u) = \{x\} \subseteq \nu(v)$.

$\mathbf{SCT_3}$: There are an r.e. set $R \subseteq \mathrm{dom}(\nu) \times \mathrm{dom}(\nu)$ and a computable function $r :\subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^\omega$ such that for all $w \in \mathrm{dom}(\nu)$, $\nu(w) = \bigcup\{\nu(u) \mid (u, w) \in R\}$ and for all $(u, w) \in R$, $\nu(u) \subseteq \psi^- \circ r(u, w) \subseteq \nu(w)$.

The relations between these axioms are clarified completely. We have the following equivalences: $\mathrm{SCT}_0 \iff \mathrm{CT}_0 \iff \mathrm{CT}_0'$, $\mathrm{CT}_1 \iff \mathrm{CT}_1' \iff \mathrm{CT}_2 \iff \mathrm{CT}_2'$ (that is, computable T_1 = computable T_2) and $\mathrm{CT}_3 \iff \mathrm{CT}_3'$.

The remaining relations are summarized in the picture below. "$A \longrightarrow B$" means $A \Longrightarrow B$, "$A \not\longrightarrow B$" means that we have constructed a computable topological space for which $A \wedge \neg B$, and $A \overset{C}{\not\longrightarrow} B$" means that we have constructed a computable topological space for which $(A \wedge C) \wedge \neg B$. D means that the space is discrete, hence topologically trivial.



Further positive and negative results follow by transitivity of implication.

University of Hagen, Hagen, Germany
E-mail: `klaus.weihrauch@fernuni-hagen.de`

On model theory, noncommutative geometry and physics

B. Zilber

In recent developments in the theory of Zariski structures it has been established that many quantum algebras can be represented as co-ordinate rings of Zariski geometries. We note that, on the other hand, the corresponding Zariski geometries can be approximated (in a certain model-theoretic sense) by Zariski structures of a finitary type, where Dirac calculus has a well-defined meaning. We use this to give a mathematically rigorous calculation of the Feynman propagator in a few simple cases.

Mathematical Institute, University of Oxford
E-mail: zilber@maths.ox.ac.uk

II. Секция «Теория групп»

Об изоморфизме графов Кэли, порожденных транспозициями

С. В. Августинович, Д. Г. Храмцов

Пусть G — конечная группа, S — некоторое подмножество ее элементов, и пусть $Cay(G, S)$ — граф Кэли группы G относительно множества порождающих S. Если всякий автоморфизм графа $Cay(G, S)$ является автоморфизмом группы G, то говорят,что S обладает свойством CI (Cayley isomorphism). Также, пусть Γ — произвольный граф на множестве вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, обозначим через $T(\Gamma)$ множество транспозиций, соответствующих ребрам графа Γ. Множество $T(\Gamma)$ порождает некоторую группу H и определяет граф Кэли $Cay(H, T(\Gamma))$. Легко понять, что изоморфизм графов Γ и Γ' влечет изоморфизм графов $Cay(H, T(\Gamma))$ и $Cay(H, T(\Gamma'))$. Верно и обратное.

Теорема. *Пусть Γ и Γ' — два произвольных графа на n вершинах. Если граф $Cay(H, T(\Gamma))$ изоморфен графу $Cay(H, T(\Gamma'))$, то графы Γ и Γ' изоморфны.*

Следствие. *Всякое множество транспозиций обладает CI-свойством.*

Заметим, что не всякое множество инволюций порождает группу, в которой оно будет обладать CI-свойством. Это, в частности, следует из примера B. Alspach и L. Nowitz [1], доказавших, что элементарная абелева группа порядка 64 не является CI-группой. Тем не менее, есть основания полагать, что справедлива следующая

Гипотеза. Произвольное множество инволюций,порождающих симметрическую группу S_n или знакопеременную группу A_n, удовлетворяет свойству CI.

Работа выполнена при государственной поддержке Ведущих научных школ России ИШ-344.2008.1 и АВЦП Рособразования "Развитие потенциала Высшей школы", проект 2.1.1.419, и финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00248-а).

Список литературы

[1] Alspach B., Nowitz L. A. Elementary proofs that Z_p^2 and Z_p^3 are CI-groups. European Journal of Combinatorics, 20 (1999), N. 7, 607–617.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: avgust@math.nsc.ru; khramtso@math.nsc.ru

Об одном специальном локальном классе Шунка

Л. П. Авдашкова, С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные разрешимые группы, используются определения и обозначения из [1, 2]. Напомним, что если H — подгруппа группы G, то факторгруппа $H/Core_G(H)$ называется *кофактором* подгруппы H в группе G.

В данной работе предлагается общий подход к решению задачи о строении группы G, у которой кофакторы всех максимальных подгрупп принадлежат заданному гомоморфу $\mathfrak{X}$. В основе подхода лежит идея локального класса Шунка, изложенная в [1].

Напомним еще, что *классом Шунка* называется примитивно замкнутый гомоморф. Следуя [1], рассмотрим функцию

$$h : \mathrm{P} \to \{\text{классы групп}\},$$

которая ставит в соответствие каждому простому числу p некоторый (возможно, пустой) класс групп $h(p)$. Пусть $\mathfrak{H}$ — класс всех таких групп G, которые удовлетворяют следующему условию (*): $Aut_G(H/K) \in h(p)$ для любого нефраттиниева главного фактора H/K группы G и простого числа p, делящего $|H/K|$. Проверка показывает, что $\mathfrak{H}$ — класс Шунка. Он называется *классом Шунка, локально определенным функцией* h, и обозначается через $LC(h)$. Функция h называется *локальной*, если $h(p)$ — гомоморф для любого простого числа p. Если $\mathfrak{H} = LC(h)$ для некоторой локальной функции h, то $\mathfrak{H}$ называется *локальным классом Шунка*.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Функцию h будем называть $\mathfrak{X}$-постоянной, если $h(p) = \mathfrak{X}$ для любого простого числа p.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой гомоморф и h — $\mathfrak{X}$-постоянная функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) в том и только в том случае кофакторы всех максимальных подгрупп группы G принадлежат $\mathfrak{X}$, когда $G \in LC(h)$;

2) $LC(h) = \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$;

3) в том и только в том случае $LC(h) = \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{X}$ — формация.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс Шунка. Если H — $\mathfrak{X}$-проектор группы G, то $G \in \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ тогда и только тогда, когда $G = HC_G(L/K)$ для любого дополняемого главного фактора H/K группы G.*

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

УО «Торгово-экономический университет потребительской кооперации», Гомель
E-mail: lyudmila.avdashkova@gmail.ru
УО ФПБ «Международный институт трудовых и социальных отношений», Гомель
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Числа Хигмана групп $PSL_2(2^n)$

Р. Ж. Алеев, В. С. Насыпова

Пусть G — конечная группа, $U(I(Z(\mathbf{Q}G)))$ — группа единиц (обратимых элементов) кольца целых центра рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$ группы G, $U(Z(\mathbf{Z}G))$ — группа центральных единиц целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ группы G. Согласно теореме 4 из [1] существует такое натуральное число l, что $u^l \in U(Z(\mathbf{Z}G))$ для любой единицы $u \in U(I(Z(\mathbf{Q}G)))$. Наименьшее натуральное l с таким свойством называется числом Хигмана группы G и обозначается $Hig(G)$.

Определим $l(\chi)$ для $\chi \in Irr(G)$ как наименьшее число l со свойством, что для любой единицы $u \in U(I(\mathbf{Q}(\chi)))$ выполняется

$$u_\chi(u^l) \in U(Z(\mathbf{Z}G)).$$

В [2] доказано, что $Hig(PSL_2(16)) = 240$. Развитием этого результата служит следующая

Теорема. *Пусть для $\chi \in Irr(PSL_2(2^n))$ число $l(\chi)$ определено также, как определено выше. Тогда:*

(1) *если $\mathbf{Q}(\chi_1) = \mathbf{Q}(\cos\frac{2\pi}{q-1})$, то $l(\chi_1)$ делит $\frac{q(q-1)(q-2)}{4}$, если $q-1$ — простое число Мерсенна и делит*

$$\frac{q(q-1)^2}{2\prod_{p\in\pi(q-1)} p} \prod_{p\in\pi(q-1)} (p^{\phi(q-1)} - 1),$$

если $q-1 = \prod_{p\in\pi(q-1)} p^{i_p}$ и $|\pi(q-1)| \geqslant 2$;

(2) *если $\mathbf{Q}(\theta_1) = \mathbf{Q}(\cos\frac{2\pi}{q+1})$, то $l(\theta_1)$ делит $|PSL_2(2^n)|$, если $q+1$ — простое число Ферма или $q+1 = 9$, и делит*

$$\frac{|PSL_2(2^n)|}{2\prod_{p\in\pi(q+1)} p} \prod_{p\in\pi(q+1)} (p^{\phi(q+1)} - 1),$$

если $q+1 = \prod_{p\in\pi(q+1)} p^{i_p}$ и $|\pi(q+1)| \geqslant 2$;

(3) *$Hig(PSL_2(2^n)) = HOK(l(\chi_1), l(\theta_1))$.*

Для группы $PSL_2(32)$ имеем следующее:

(1) $l(\chi_1)$ делит 7440;

(2) $l(\theta_1)$ делит $31 \cdot 16 \cdot (3^{20} - 1) \cdot (11^{20} - 1)$;

(3) $Hig(PSL_2(32)) = 900240$.

Список литературы

[1] Higman G. The units of group rings. Proc. London Math. Soc(2), 46 (1940), 231–248.

[2] Алеев Р. Ж. Описание группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $PSL_2(16)$. Ред. Сиб. Мат. ж. Деп. ВИНИТИ, № 3170-В99 27.10.99, 67 с.

Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: aleev@csu.ru, 111_alex@mail.ru

О центральных единицах целочисленного группового кольца A_{14}

Р. Ж. Алеев, А. А. Шабаршина

Ранее группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп A_n, для $n < 7$ были описанны в работе [1]. В работе [2] Ферраз нашел, что ранг r_n группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременной группы A_n равен 0 тогда и только тогда, когда $n \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12\}$. В работе [3] доказано, что ранг r_n равен 1 тогда и только тогда, когда $n \in \{5, 6, 10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$. В работе [4] полностью описываются группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп в случаях когда $n \in \{10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$. В совокупности с [1] таким образом получено полное описание групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп имеющих ранг 1. В работе идет исследование самого первого случая, когда ранг > 1, а именно $n = 14$, в этом случае ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы A_{14} равен 3. А именно мы построим подгруппу конечного индекса в группе центральных единиц для A_{14}. Более точно, доказана следующая

Теорема *Группа центральных единиц $U(Z(\mathbf{Z}A_{14}))$ имеет следующую подгруппу:*

$$\langle u_{20}(1+\omega_{13})^{43680}\rangle \times \langle u_{57}(19+8\omega_{33})^{27720}\rangle \times \langle u_{59}(\omega_5)^{30240}\rangle$$

индекса, делящего

$$43680 \cdot 27720 \cdot 30240 = 2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13.$$

Здесь u_{20} — локальная единица, соответствующая характеру группы A_{14} степени 4752, u_{57} — *локальная единица, соответствующая характеру группы A_{14} степени* 29952, u_{59} — *локальная единица, соответствующая характеру группы A_{14} степени* 34320, $\omega_{13} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\omega_{33} = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$, $\omega_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Список литературы

[1] Aleev R. Ž. Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers. Intern. J. of Algebra and Comp., 4 (1994), N. 3, 309–358.

[2] Ferraz R. A. Simple components and central units in group rings. J. of Algebra, 279 (2004), N. 1, 191–203.

[3] Алеев Р. Ж., Соколов В. В. Группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп. Тезисы сообщений седьмой Международной школы-конференции, посвященной 60-ти летию А. С. Кондратьева. изд-во ЮУрГУ, Челябинск, 2008, 14–15.

[4] Алеев Р. Ж., Соколов В. В. О группах центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп. Труды института математики, 15 (2009), N. 2.

Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: `aleev@csu.ru, staicy@list.ru`

Универсальные теории нильпотентных групп

М. Г. Амаглобели

Пусть G группа. Обозначим символом $\mathrm{Th}_\forall(G)$ – универсальную теорию G и через $\mathrm{U}(G)$ — универсальное замыкание G: множество всех групп H таких, что $\mathrm{Th}_\forall(H) \supseteq \mathrm{Th}_\forall(G)$. Если G — нильпотентная группа без кручения, то через $G^{\mathbb{Q}}$ обозначим её мальцевское пополнение.

Теорема. *Пусть G — конечно-порожденная нильпотентная группа без кручения. Тогда $\mathrm{Th}_\forall(G) = \mathrm{Th}_\forall(G^{\mathbb{Q}})$ в следующих случаях:*

- *G — свободная нильпотентная группа;*
- *$G = \mathrm{UT}_n(\mathbb{Z})$ — унитреугольная группа матриц над кольцом $\mathbb{Z}$;*
- *G — двуступенно нильпотентная группа.*

Пусть G_1 и G_2 — две конечно-порожденные двуступенно нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы, такие, что $dim_{\mathbb{Q}} G_1/Z(G_1) = dim_{\mathbb{Q}} G_2/Z(G_2)$, и пусть τ — фиксированный изоморфизм между $\overline{G_1} = G_1/Z(G_1)$ и $\overline{G_2} = G_2/Z(G_2)$, и H — подгруппа $G_1 \times G_2$, состоящая из пар (g_1, g_2) таких, что $\tau(\overline{g_1}) = \overline{g_2}$. Обозначим H через $D_\tau(G_1 \times G_2)$, и будем называть её квазидиагональной подгруппой $G_1 \times G_2$ относительно τ. Тогда верен следующий результат: если G_1 и G_2 являются CT_1-группами, то $D_\tau(G_1 \times G_2)$ также является CT_1-группой.

Напомним, что по определению группа G является CT_1-группой, если для любого $x \notin Z(G)$ и любых y, z таких, что $[x, y] = [x, z] = 1$ следует, что $[y, z] = 1$.

Тбилиский университет, Тбилиси
E-mail: `remesl@ofim.oscsbras.ru`

Мозаики из выпуклых пятиугольников

О. Г. Багина

Назовем мозаикой покрытие плоскости попарно конгруэнтными пятиугольниками без зазоров и наложений. Соответствующий многоугольник называется плиткой мозаики. Наиболее сложной оказалась задача нахождения пятиугольных плиток. Было найдено 14 типов таких пятиугольников [1], но нет доказательства полноты имеющегося перечня.

Мной рассматривается задача классификации выпуклых пятиугольников, покрывающих плоскость ребро к ребру. Ранее аналогичная задача была решена для равносторонних пятиугольников [2]. Мозаика называется мозаикой ребро к ребру, если для любых двух ее плиток выполняется одно из следующих условий: 1) плитки не имеют общих точек; 2) плитки имеют ровно одну общую вершину; 3) плитки имеют ровно одно общее ребро.

Пусть x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 — углы пятиугольника, $C_0 = x_4x_0$, $C_1 = x_0x_1$, $C_2 = x_1x_2$, $C_3 = x_2x_3$, $C_4 = x_3x_4$ — длины сторон пятиугольника.

Теорема. *Пятиугольник, покрывающий плоскость ребро к ребру, относится к одному из следующих типов:*

1) $x_0 + x_1 = 180°, C_0 = C_2$ *или* $C_3 = C_4$.
2) $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3, C_0 = C_2$.
3) $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$.
4) $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$.
5) $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$.
6) $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.
7) $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.
8) $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.

Валентностью вершины пятиугольника называется число сходящихся в ней пятиугольников. Пусть $(\alpha_0, \ldots, \alpha_4)$ — набор валентностей всех вершин пятиугольника, упорядоченных по возрастанию.

Предложение. *В любой ребро к ребру пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор валентностей вершин может быть одним из следующих: (3,3,3,3,3), (3,3,3,3,4), (3,3,3,3,5), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4).*

Доказательство теоремы основано на этом предложении и включает в себя полный перебор, который был проведен сначала с помощью компьютера, а затем большинство вычислений были проведены вручную.

Список литературы

[1] Schattschneider D. Tiling the Plane with Congruent Pentagons. Math. Magazine, 51 (1978), 29–44.
[2] Bagina O. Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons. J. Combin. Theory. Ser. A, 105 (2005), N. 2, 221–232.

Кемеровский государственный университет, Кемерово
E-mail: `ogb@km.ru`

Группа унитреугольных автоморфизмов кольца многочленов

В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим

Пусть $K_n = K[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над полем K нулевой характеристики. В работе изучается строение некоторых подгрупп группы $\mathrm{Aut}\, K_n$ автоморфизмов кольца K_n.

Для каждого индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$ и многочлена $f = f(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \in K_n$ *элементарным автоморфизмом* $\varphi_{i,f}$ называется автоморфизм из $\mathrm{Aut}\, K_n$, действующий на переменные $x_1, ..., x_n$ по правилу:

$$\varphi_{i,f}(x_k) = \begin{cases} x_k + f, & \text{если} \quad k = i, \\ x_k, & \text{если} \quad k \neq i. \end{cases}$$

Группа унитреугольных автоморфизмов определяется следующим образом:

$$U_n = \mathrm{гр}\left(\varphi_{i,f} \, \| \, i = 1, ..., n, \; f = f(x_{i+1}, ..., x_n) \in K_n\right).$$

Очевидно, что

$$G_i = \mathrm{гр}\left(\varphi_{i,f} \, \| \, f = f(x_{i+1}, ..., x_n) \in K_n\right), \;\; i = 1, ..., n,$$

— подгруппа U_n. Более того, G_i абелева и изоморфна аддитивной группе кольца $K[x_{i+1}, ..., x_n]$, $i = 1, \ldots, n-1$, а $G_n \simeq K$.

Строение группы унитреугольных автоморфизмов проясняет

Теорема 1. *Группа U_n распадается в полупрямое произведение абелевых групп*:

$$U_n = (\ldots(G_1 \leftthreetimes G_2) \leftthreetimes ...) \leftthreetimes G_n.$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что U_n — разрешимая группа ступени n (этот факт также установлен в работе: Романьков В. А., Чирков И. В., Шевелин М. А., СМЖ, 45 (2004), N. 5, 1184–1188). С другой стороны, нетрудно проверить, что группа U_n не нильпотентна при $n \geq 2$.

Следующее предложение связано с известным вопросом М. И. Каргаполова о коммутаторной ширине разрешимых групп.

Предложение. *Всякий элемент из коммутанта U_n' является коммутатором.*

Также изучаются двупорожденные подгруппы группы $\mathrm{Aut}\, K_n$. Справедлива

Теорема 2. *Для фиксированных различных индексов $i, j \in \{1, ..., n\}$ и для фиксированных ненулевых мономов $\lambda_i = \alpha_i x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot \widehat{x_i^{p_i}} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}$, $\lambda_j = \alpha_j x_1^{q_1} \cdot \ldots \cdot \widehat{x_j^{q_j}} \cdot \ldots \cdot x_n^{q_n}$, $\alpha_i, \alpha_j \in K$, имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{гр}\left(\varphi_{i,\lambda_i}, \varphi_{j,\lambda_j}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} * \mathbb{Z}, & \text{если} \quad q_i \geq 1 \text{ и } p_j \geq 1, \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №09-01-00422a).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: bardakov@math.nsc.ru
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: neshch@math.nsc.ru

О двумерной группе матриц с нестандартным произведением

В. Г. Бардаков, А. А. Симонов

Для двух квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ степени n над полем P определены операции сложения и умножения: $A \cdot B = C$, $A + B = D$, где элементы матриц $C = (c_{ij})$ и $D = (d_{ij})$ определяются следующим образом:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Множество $M_n(P)$ всех квадратных матриц степени n над полем P образует кольцо относительно этих операций. Множество обратимых элементов этого кольца образует общую линейную группу $GL_n(P)$. Г. Г. Михайличенко [3] определил другую операцию умножения матриц: $A \odot B = C$, где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in})(b_{kj} - b_{nj}) + a_{in} + b_{nj}.$$

Нетрудно убедиться, что так определенная операция умножения ассоциативна. Возникающая при этом алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, + \rangle$ находит применения в теории физических структур [1, 2]. Легко заметить, что эта алгебраическая система уже не будет кольцом (не выполняется дистрибутивность). Возникает естественный вопрос об описании группы $G_n(P)$ обратимых элементов алгебраической системы $\langle M_n(P); \odot, + \rangle$.

В предлагаемой работе группа $G_n(P)$ изучается в случае $n = 2$.

Определим множество аффинных преобразований векторного пространства $V = P^2$ по правилу:

$$(x_1, x_2) \mapsto ((\alpha_{11} - \alpha_{21})x_1 - (\alpha_{11} - \alpha_{21} - 1)x_2, (\alpha_{21} - \alpha_{22})x_1 - (\alpha_{12} - \alpha_{22} - 1)x_2) + (\alpha_{21}, \alpha_{22}),$$

где $\alpha_{ij} \in P$. Легко заметить, что преобразование обратимо тогда и только тогда, когда $\alpha_{11} - \alpha_{21} \neq \alpha_{12} - \alpha_{22}$. Относительно операции композиции множество таких обратимых преобразований образует группу $Af_2(P)$. Преобразованию можно сопоставить пару

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{21} & \alpha_{12} - \alpha_{22} \\ 1 + \alpha_{21} - \alpha_{11} & 1 + \alpha_{22} - \alpha_{12} \end{pmatrix}, \ (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \right) \in M_2(P) \times V.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Группа $G_2(P)$ изоморфна группе $Af_2(P)$ и изоморфизм определяется правилом*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & a_{12} - a_{22} \\ 1 + a_{21} - a_{11} & 1 + a_{22} - a_{12} \end{pmatrix}, \ (a_{21}, a_{22}) \right).$$

Таким образом, мы можем изучать группу $Af_2(P)$, являющуюся подгруппой группы аффинных преобразований векторного пространства V. Справедлива

Теорема 2. (1) *Группа $Af_2(P)$ распадается в полупрямое произведение $P^2 \leftthreetimes H$, где*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix} \mid a, b \in P, \ a - b \neq 0 \right\} \leq GL_2(P).$$

(2) *Группа $Af_2(P)$ разрешима ступени 3.*

Из этой теоремы легко получается

Следствие. *Группа $Af_2(P)$ вкладывается в группу $GL_3(P)$.*

Список литературы

[1] Кулаков Ю. И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. Докл. АН СССР, 193 (1970), N. 1, 72–75.
[2] Кулаков Ю. И. Теория физических структур. Москва, 2004.
[3] Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. ДАН СССР, 206 (1972), N. 5, 1056–1058.

Новосибирск
E-mail: `bardakov@math.nsc.ru, Andrey.Simonoff@gmail.com`

О некоторых парах неприводимых характеров симметрических групп

В. А. Белоногов

Ранее автором была высказана гипотеза: знакопеременная группа A_n при любом натуральном n не имеет полупропорциональных неприводимых характеров. В [1 (I)] (там же см. обозначения) выдвинута следующая более общая

Гипотеза А. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε. Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений:*

(1) $\varepsilon = 1$ *и выполнено одно из условий:*

(1а) $\alpha =' 2^k.() + (3)$ *и* $\beta = 2^k.() + (0^k, 2, 1)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(1б) $\alpha =' 2^k.(1) + (3)$ *и* $\beta = 2^k.(1) + (0^k, 1, 2)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(2) $\varepsilon = -1$ *и выполнено одно из условий* (*везде* k, m *целые*):

(2а) $\alpha =' 3^k.\Delta_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 1$;

(2б) $\alpha =' 3^k.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$;

(2в) $\alpha =' 3^k.2.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$.

Очевидно, доказательство гипотезы А индукцией по числу n достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие А. Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\widetilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\widetilde{n}, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы А на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$ следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Итогом работ [1 (I–III)] является следующая

Теорема А3. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие А. Предположим, что $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. Тогда $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$ и пара $(\alpha^{11}, \beta^{11})$ удовлетворяет одному из условий* (2б) *и* (2в) *заключения гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.*

В настоящее время автором доказана теорема А4, которая получается из теоремы А3 заменой выражения "одному из условий (2б) и (2в)" выражением "условию (2в)".

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148), РФФМ-БРФФИ (проект №08-01-90006), программы отделения математических наук РАН (проект О1-2) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект С1-2) и НАН Белоруси (проект СБ).

Список литературы

[1] Белоногов В. А. О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I–III. Труды Института математики и механики УрО РАН, 14 (2008), N. 2, 143–163; N. 3, 58–68; N. 4, 12–30.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

Гиперболические группы, отделимость относительно сопряженности и пространство Гриффитса

О. В. Богопольский

Идея решения алгоритмических вопросов в группах с помощью аппроксимации групп подгруппами конечного индекса восходит к А. И. Мальцеву. Следующая теорема мотивирована, с одной стороны, работами Р. Ф. Стиба [7] и Дж. Л. Дайер [3], в которых доказано, что любые два не сопряженных элемента в почти свободной группе могут быть отделены относительно сопряженности, а с другой стороны работой Ф. Грюневальда и Д. Сегала [4] о том, что любые две не сопряженные подгруппы почти полициклической группы могут быть отделены относительно сопряженности.

Теорема 1 (О. В. Богопольский, Ф. Грюневальд)**.** *Пусть G — почти свободная группа, представимая в виде фундаментальной группы конечного дерева конечных групп. Тогда любые две ее конечно порожденные не сопряженные подгруппы отделимы относительно сопряженности.*

Эндоморфизм φ группы G называется *поточечно внутренним*, если $\varphi(g)$ сопряжен с g для каждого $g \in G$. Существуют группы, допускающие поточечно внутренние, но не внутренние автоморфизмы. Таковы, например, все свободные нильпотентные группы класса $c \geqslant 3$.

Теорема 2 (О. В. Богопольский, Э. Вентура)**.** *Пусть H — свободная от кручения δ-гиперболическая группа относительно конечного порождающего множества S. Существует вычислимая константа $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\delta, \sharp S)$ такая, что если φ эндоморфизм группы H и элемент $\varphi(g)$ сопряжен с g для каждого g из шара радиуса $\mathcal{C}$, то φ является внутренним автоморфизмом.*

Из некоторой более общей теоремы мы выводим

Следствие 3 (О. В. Богопольский, Э. Вентура)**.** *Если H свободная от кручения и отделимая относительно сопряженности гиперболическая группа, то $\mathrm{Out}(H)$ финитно аппроксимируема.*

Теорема 2 сформулирована нами в [1], полное доказательство можно посмотреть в [2]; см. также [6, 5].

Список литературы

[1] Bogopolski O., Martino A., Ventura E. On the generalized Whitehead problem for hyperbolic groups. In: Abstracts of the Conference: 2nd joint meeting of AMS, DMV, ÖMG at Mainz, 2005, page 136-137. Available at: http://wwwalt.mathematik.uni-mainz.de/mainz2005/program/CP.pdf

[2] Bogopolski O., Ventura E. On endomorphisms of torsion-free hyperbolic groups. Preprint. Available at http://arxiv.org/abs/0903.2306.

[3] DyerJ. L. Separating conjugates in free-by-finite groups. J. London Math. Soc., 20 (1979), N. 2, 215–221.

[4] Grunewald F. J., Segal D. Conjugacy in polycyclic groups. Comm. Algebra, 6 (1978), 775–798.

[5] Metaftsis V., Sykiotis M. On the residual finiteness of outer automorphisms of relatively hyperbolic groups. Preprint. Available at arXiv:math/0608685v2.

[6] Minasyan A., Osin D. Normal automorphisms of relatively hyperbolic groups. Preprint. Available at http://arxiv.org/abs/0809.2408v2.

[7] Stebe P. F. Conjugacy separability of groups of integer matrices. Proc. AMS, 32 (1972), 1–7.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: oleg_bogopolski@yahoo.com

О полумногообразиях нильпотентных групп

А. И. Будкин

Квазитождества вида $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(t_1(x_1\ldots,x_n)=1\rightarrow t_2(x_1\ldots,x_n)=1)$ называются полутождествами. Квазимногообразие, которое можно задать некоторой системой полутождеств, называется полумногообразием. В частности, всякое многообразие групп является полумногообразием.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие групп, заданное тождествами*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1),(\forall x)(x^{p^s}=1),(\forall x)(\forall y)([x,y]^p=1)(s\geq 2),$$

где p — простое число. Тогда множество полумногообразий, содержащихся в $\mathcal{N}$, счетно.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие групп, заданное тождествами*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z]=1),(\forall x)(\forall y)([x,y]^p=1),$$

где p — простое число. Тогда множество полумногообразий, содержащихся в $\mathcal{N}$, имеет мощность континуума.

Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (Мероприятие 1).

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

Конечная 2-группа Альперина с вторым коммутантом произвольного порядка

Б. М. Веретенников

Мы называем группой Альперина группу, в которой любая 2-порожденная подгруппа имеет циклический коммутант. Неметабелевых конечных p-групп Альперина при нечетном p не существует, как показано в [1]. В работах [2] и [3] построены примеры конечных 2-групп Альперина с вторым коммутантом порядка 2 и 4.

В настоящем сообщении утверждается, что для любого натурального m существует конечная 2-группа Альперина с вторым коммутантом, изоморфным Z_{2^m}.

Теорема. *Пусть m — произвольное натуральное число и $\mathbf{G}$ — группа, заданная образующими и определяющими соотношениями:*

$$\mathbf{G} = \langle \tau, f, g, h, a, b, c | \tau^{2^m} = 1,$$
$$f^{2^{m+2}} = g^{2^{m+2}} = 1, f^4 g^4 h^4 = \tau^7,$$
$$[a,b] = f, [b,c] = g, [c,a] = h, [f,g] = [g,h] = [h,f] = \tau,$$
$$[f,c] = g^2 h^2 \tau^{-2}, [g,a] = h^2 f^2 \tau^{-2}, [h,b] = f^2 g^2 \tau^{-2},$$
$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, [\tau,a] = [\tau,b] = [\tau,c] = 1 \rangle.$$

Тогда $|\mathbf{G}| = 2^{3m+9}$, $|\mathbf{G}''| = 2^m$, $\mathbf{G}'' = \langle \tau \rangle$ и $\mathbf{G}$ – группа Альперина.

Список литературы

[1] Alperin J. L. On a special class of regular groups. Trans. Amer. Math. Soc., 106 (1963), 77–99.
[2] Веретенников Б. М. Об одной гипотезе Альперина. Сиб. матем. журн., 21 (1980), 200–202.
[3] Веретенников Б. М. О конечных 3-порожденных 2-группах Альперина. Сиб. электр. матем. известия, 4 (2007), 155–168.

Уральский государственный технический университет (УГТУ-УПИ), Екатеринбург
E-mail: abvmt2@mail.ru

Квазикристаллографические группы в псевдоевклидовых пространствах

Р. М. Гарипов, В. А. Чуркин

Кристаллографическая группа (сокращенно, к. группа) в евклидовом пространстве является подгруппой группы движений, все трансляции которой образует решетку, т. е. свободную абелеву группу, порождаемую базисом евклидова пространства. *Квазикристаллографическая* группа (сокращенно, кк. группа) — подгруппа группы движений, все трансляции которой образуют квазирешетку, т.е. свободную абелеву подгруппу конечного ранга, содержащую решетку. Факторизуя по решетке, получим линейную “группу поворотов” к. группы. Аналогично для кк. групп.

С. П. Новиков и А. П. Веселов [1] предложили использовать кк. группы при классификации квазикристаллов — нового состояния вещества, открытого в восьмидесятые годы. Оказалось, в частности, что кк. группа при действии на своей квазирешетке сопряжением сохраняет подходящую невырожденную симметричную билинейную форму ранга, равного рангу квазирешетки, т. е. она изоморфна к. группе в *псевдоевклидовом* пространстве большей размерности (определения к. групп и кк. групп с евклидова случая переносятся без изменений). Таким образом, возникает задача классификации по типу изоморфизма для к. групп в псевдоевклидовых пространствах и их проекций на подходящие инвариантные подпространства. Для решения необходимо развить теорию к. групп и, возможно, кк. групп в псевдоевклидовых пространствах, в частности, в пространствах Минковского, имея в качестве ориентира успешную теорию таких групп в евклидовых пространствах. Начало было положено в работе [2].

Основа для классификации кристаллографических групп в евклидовых пространствах — известная теорема Бибербаха о том, что при абстрактных изоморфизмах к. групп решетки переходят в решетки. Назовем это свойством жесткости решеток в к. группах. Р. М. Гарипов [2] доказал, что решетки к. групп в пространствах Минковского жесткие.

Теорема 1. *Если размерность максимального изотропного подпространства в псевдоевклидовом пространстве не превосходит двух, то решетки любых кристаллографических групп в таком пространстве — жесткие. Если же эта размерность больше двух, то в псевдоевклидовом пространстве всегда существуют кристаллографические группы с нежесткой решеткой.*

Следствие. *Если группа поворотов к. группы не содержит нормальной свободной абелевой подгруппы ранга больше двух, то решетка в такой к. группе является жесткой.*

Интересно развить теорию кк. групп в псевдоевклидовых пространствах. Здесь были получены следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть $G = G(\Gamma, Z)$ — квазикристаллографическая группа в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ с квазирешеткой Z ранга N и группой поворотов Γ. Предположим, что в пространстве не существует ненулевых изотропных подпространств, инвариантных относительно группы Γ. Тогда действие группы Γ на квазирешетке Z сопряжением сохраняет некоторую невырожденную симметричную билинейную форму на $\mathbb{R}^N \supset \mathbb{Z}^N$.*

Построены примеры кк. групп, показывающие, что *условие на группу поворотов Γ в теореме 2 на плоскости Минковского существенно.* Отсюда следует, что не всякая кк. группа в пространстве Минковского является проекцией подходящей к. группы в псевдоевклидовом пространстве. Кроме того, примеры показывают, что существуют кк. группы в пространствах Минковского, обладающие *недискретной группой поворотов.*

Теорема 3. *Пусть матрица A имеет различные собственные числа, являющиеся корнями неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена $p(\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$ со старшим коэффициентом 1 и младшим коэффициентом ± 1. Тогда существует лишь конечное число инвариантных относительно циклической группы $\Gamma = \langle A \rangle$ минимальных квазирешёток с точностью до умножения слева на неособенные элементы $\mathbb{Q}$-линейной оболочки группы Γ.*

Список литературы

[1] Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А., Садов В. А. Геометрия квазикристаллов. УМН, 48 (1993), вып. 1., 41–102.

[2] Гарипов Р. М. Группы орнаментов на плоскости Минковского. Алгебра и логика, 42 (2003), N. 6, 655–682.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: R.M.Garipov@mail.ru
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: churkin@math.nsc.ru

О квазимногообразии, порожденном группой кватернионов

С. С. Глотов

Через $L_q(\mathcal{M})$ условимся обозначать решетку квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{M}$, через $q\mathcal{R}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{R}$. Если класс $\mathcal{R} = \{G\}$ содержит лишь одну группу G, то вместо $q\mathcal{R}$ пишем просто qG.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие групп. Если множество всех собственных подквазимногообразий в $\mathcal{M}$, частично упорядоченное по включению, имеет максимальные элементы, то эти максимальные элементы называются максимальными квазимногообразиями в решетке $L_q(\mathcal{M})$.

Рассмотрим группу кватернионов $K = \text{гр}(a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a)$.

Теорема. *Максимальное квазимногообразие в решетке $L_q(qK)$ не порождается конечной группой.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (Мероприятие 1).

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: GlotovSS@mail.ru

Группы автоморфизмов точечных кристаллографических групп

Е. В. Грачев

Определение 1. *Точечной группой* называется такая группа G ортогональных преобразований пространства R^3, для которой существует неподвижная точка.

Определение 2. Точечная группа G называется *кристаллографической*, если $G(Z^3) = Z^3$.

Любая точечная кристаллографическая группа может быть представлена матрицами из $GL_3(Z)$. Существует 32 различных точечных кристаллографических группы. Все они конечные, более того порядок любой такой группы делит 48.

Далее под точечной кристаллографической группой будем понимать конкретную матричную группу, взятую из международной кристаллографической таблицы.

Определение 3. Автоморфизм φ назовем *сопрягающим*, если $\exists g \in GL_3(Z)$: $\varphi(x) = gxg^{-1}$ для любого элемента x группы G.

Все сопрягающие автоморфизмы группы G образуют подгруппу $Sop(G)$ в группе $Aut(G)$.

Замечание. Группы $Aut(G)$ и $Int(G)$ не зависят от конкретного матричного представления группы G, тогда как группа $Sop(G)$ зависит от выбранного матричного представления.

Для всех 32 точечных кристаллографических групп описаны группы $Aut(G)$, $Int(G)$ и $Sop(G)$. Результаты представлены в таблице.

Найдены матричные представления групп $Sop(G)$ для всех точечных кристаллографических групп.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: grachev@che.nsk.su

Об одном классе модулей над групповыми кольцами, близких к артиновым

О. Ю. Дашкова

Исследование модулей над групповыми кольцами является важным направлением в современной алгебре. В этом направлении было получено много интересных результатов. Артиновы модули над групповыми кольцами представляют собой широкий класс модулей над групповыми кольцами. Напомним, что модуль называется артиновым, если частично упорядоченное множество подмодулей этого модуля удовлетворяет условию минимальности. Следует отметить, что решение ряда проблем алгебры требует исследования некоторых специфических артиновых модулей. Артиновы модули над групповыми кольцами с различными ограничениями на группы исследовались в [2]. Естественно возникает вопрос об изучении модулей над групповыми кольцами, которые не являются артиновыми, но близки к артиновым в некотором смысле.

Пусть A — $\mathcal{O}G$-модуль, где $\mathcal{O}$ - дедекиндово кольцо, G — группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$ называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A. В дальнейшем в работе рассматривается $\mathcal{O}G$-модуль A, такой, что $C_G(A) = 1$, и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathcal{O}$-модулем.

Говорят, что группа G имеет конечный 0-ранг $r_0(G) = r$, если G обладает конечным субнормальным рядом, у которого в точности r факторов — бесконечные циклические, а остальные факторы — периодические. 0-ранг не зависит от выбора ряда и является числовым инвариантом. Пусть теперь p - простое число. Группа G имеет конечный секционный p-ранг $r_p(G) = r$, если каждая элементарная абелева p-секция группы G конечна, и ее порядок не превосходит числа p^r, и существует элементарная абелева p-секция U/V такая, что $|U/V| = p^r$. В дальнейшем символом $r_p(G) = r$ обозначается секционный p-ранг группы G в случае, когда p - простое число, и 0-ранг группы G в случае, когда $p = 0$.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathcal{O}G$-модуль, G — разрешимая группа, и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы M, такой, что ранг $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор M в A является артиновым $\mathcal{O}$-модулем. Тогда группа G обладает рядом нормальных подгрупп $H \leq N \leq G$ таким, что подгруппа H и фактор-группа N/H нильпотентны, а фактор-группа G/N изоморфна квазициклической группе C_{q^∞} для некоторого простого числа q.*

Теорема 2. *Пусть A — $\mathcal{O}G$-модуль, G — разрешимая группа, и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы M, такой, что ранг $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор M в A является артиновым $\mathcal{O}$-модулем. Тогда группа G разрешима.*

Отметим, что аналогичные утверждения имеют место в случае, когда рассматриваемая группа G имеет бесконечный абелев секционный ранг, или бесконечный специальный ранг.

Список литературы

[1] Dashkova O. Yu., Dixon M. R., Kurdachenko L. A. Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension. Journal of Pure and Applied Algebra, 208 (2007), N 3, 785–795.

[2] Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya. Artinian modules over group rings. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 2007.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев
E-mail: odashkova@yandex.ru

Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага — Солитера

Ф. А. Дудкин

Пусть p, q — взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$), не равные нулю. Группы Баумслага — Солитера $BS(p, q)$ задаются двумя порождающими элементами a, t и одним определяющим соотношением $t^{-1}a^p t = a^q$. Без потери общности можно считать p натуральным, а q целым и $p > |q|$.

Пусть $a_n(G)$ обозначает число подгрупп индекса n в группе G, а $a_n^{\triangleleft}(G)$ число нормальных подгрупп. Гельман [1] доказал, что

$$a_n(BS(p,q)) = \sum_{l|n,\ l\perp pq} l. \tag{1}$$

Недавно Баттон [2] доказал формулу

$$a_n^{\triangleleft}(BS(p,q)) = \sum_{\substack{n=lm,\\ l|p^m-q^m}} \text{НОД}(l, p-q). \tag{2}$$

Результаты, полученные в данной работе, используют только формулу (1). Формула (2) получается как следствие теоремы 1.

Теорема 1. *Множество подгрупп индекса n в группе $BS(p,q) = \langle a,\ t \parallel t^{-1}a^p t = a^q\rangle$ совпадает с множеством подгрупп $H_{n,m}^s$, порожденных двумя элементами a^l и $t^m a^s$, где $n = lm$, $l, m \in \mathbb{N}$, $l \perp pq$, $s = 0, 1, \ldots, l-1$. Все подгруппы $H_{n,m}^s$ различны.*

Теорема 2. *Подгруппы $H_{n,m}^s$ изоморфны группе*

$$H_m = \left\langle A_0, \ldots, A_{m-1}, T \mid T^{-1}A_0^p T = A_{m-1}^q, A_i^q = A_{i+1}^p, i = 0, \ldots, m-2\right\rangle$$

при всех $s = 0, 1, \ldots, l-1$ и попарно неизоморфны при различных m.

Теорема 3. *Число классов сопряженных подгрупп индекса n в группе $BS(p,q)$ задается формулой*

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{klms=n,\\ l\perp pq}} \mu(k) \cdot ls \cdot \text{НОД}(s, p^m - q^m).$$

Здесь μ — функция Мёбиуса.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП Рособразования ”Развитие научного потенциала высшей школы”, проект 2.1.1.419.

Список литературы

[1] Gelman E. Subgroup growth of Baumslag-Solitar groups. J. Group Theory, 8 (2005), N. 6, 801–806.

[2] Button J. O. A formula for the normal subgroup growth of Baumslag—Solitar groups. J. Group Theory, 11 (2008), N. 6, 879–884.

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ
E-mail: `DudkinF@ngs.ru`

Разрешимая группа, изоспектральная группе $S_4(3)$

А. В. Заварницин

Множество порядков элементов конечной группы G обозначается через $\omega(G)$ и называется её *спектром.* Конечные группы G и H *изоспектральны*, если $\omega(G)=\omega(H)$.

В работе [1] было показано, что если неабелева простая группа G изоспектральна разрешимой группе, то $G\cong L_3(3), U_3(3), S_4(3), A_{10}$. Существование разрешимых групп, изоспектральных группам $L_3(3)$ и $U_3(3)$ доказано в [2, 3]. Из [4] следует, что не существует разрешимой группы, изоспектральной группе A_{10}. Таким образом, проблема оставалась открытой только для группы $S_4(3)$. Главным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует конечная разрешимая группа, изоспектральная простой группе $S_4(3)$.*

Разрешимая группа из теоремы 1 построена как группа матриц 17×17 над полем из трёх элементов. Эта группа имеет порядок

$$5\,648\,590\,729\,620 = 2^2\cdot 3^{24}\cdot 5$$

и, по всей видимости, является наименьшей рассматриваемой группой. Хотя предложенное доказательство не зависит от компьютерных вычислений, первое свидетельство в пользу существования такой группы было получено с использованием пакета компьютерной алгебры GAP.

В качестве следствия из теоремы 1 получается следующее утверждение.

Следствие 1. *Конечная простая неабелева группа G изоспектральна разрешимой группе тогда и только тогда, когда $G\cong L_3(3), U_3(3), S_4(3)$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00322; совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-344.2008.1); Фонда Содействия Отечественной Науке (грант от 2009 г.); АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

Список литературы

[1] Lucido M. S., Moghaddamfar A. R. Groups with complete prime graph connected components. J. Group Theory, 7 (2004), N. 3, 373–384.

[2] Мазуров В. Д. Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов. Алгебра и логика, 41 (2002), N. 2, 166–198.

[3] Зиновьева М. Р. Распознавание конечных групп по свойствам множества порядков элементов. Дисс. ... кандидата физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2003.

[4] Старолетов А. М. Неразрешимость конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе степени 10. Сибирские электронные мат. известия, 5 (2008), 20–24.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: zav@math.nsc.ru

О пересечениях силовских 2-подгрупп в группе $\mathrm{Aut}(\Omega_8^-(3))$

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа с единичным разрешимым радикалом, P — фиксированная силовская 2-подгруппа из G. Тогда (см. [1]) $P^u \cap P^z \cap P = 1$ для некоторых элементов u и z из G. В то же время $P^x \cap P \neq 1$ для любого элемента x из группы G в случае, например, $G = \mathrm{Aut}(L_2(7))$. Для изучения аналогичной ситуации в общем случае рассмотрим множество $X = \{P^g \mid P^g \cap P = 1, g \in G\}$. Тогда подгруппа P действует сопряжениями на множестве X. Пусть $l_2(G)$ обозначает число орбит при этом действии. Если группа G проста, то $l_2(G) > 0$ (см. [2]). Однако $l_2(G) = 0$, например, для почти простой группы $G = \mathrm{Aut}(L_2(p))$, где p — простое число Мерсенна, хотя $l_2(L_2(p)) > 0$ и $|\mathrm{Aut}(L_2(p)) : Inn(L_2(p))| = 2$.

В [1] было показано, что вопрос описания группы G с условием $l_2(\mathrm{Aut}(G)) = 0$ сводится к описанию компонент K группы G таких, что $l_2(\mathrm{Aut}(K)) \leq 2$. Из теорем 4.1, 5.1, 6.1 и леммы 3.12 из [1] следует, что для полного описания таких компонент K осталось рассмотреть компоненты K группы G, изоморфные группам Шевалле над полем порядка p, где p — простое число Ферма или Мерсенна, или над полем порядка 3^2. Примерами таких компонент служат $K \simeq L_2(5)$ или $L_2(9)$, причем $l_2(\mathrm{Aut}(L_2(5)) \wr Z_2) = 0$ и $l_2(\mathrm{Aut}(L_2(9))) = 0$, хотя $l_2(\mathrm{Aut}(L_2(5))) > 0$ и $l_2(G_1) > 0$ для $Inn(L_2(9)) \leqslant G_1 < \mathrm{Aut}(L_2(9))$. В [3] продолжается начатое в [1] и [2] изучение, причем в работе [3] показано, что $l_2(\mathrm{Aut}(U_3(3))) = l_2(\mathrm{Aut}(PSp_4(3))) = 1$, а $l_2(\mathrm{Aut}(L_3(3))) \geq 3$. Это означает (см. [1]), что $l_2(\mathrm{Aut}(U_3(3)) \wr Z_2) = l_2(\mathrm{Aut}(PSp_4(3)) \wr Z_2) = 0$, а $l_2(\mathrm{Aut}(L_3(3)) \wr Z_2) \geq 3$. Вопрос о числах $l_2(\mathrm{Aut}(L_4(3)))$ и $l_2(\mathrm{Aut}(U_4(3)))$ пока открыт.

В данной работе доказана

Теорема. *Если* $G = \mathrm{Aut}(\Omega_7(3))$, *то* $l_2(G) > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Список литературы

[1] Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах. Фунд. прикл. мат., 2 (1996), вып. 1, 1–92.

[2] Зенков В. И., Мазуров В. Д. О пересечении силовских подгрупп в конечных группах. Алгебра и логика, 35 (1996), N. 4, 424–432.

[3] Зенков В. И. О пересечениях силовских 2-подгрупп в конечных группах $\mathrm{Aut}(L_3(3))$, $\mathrm{Aut}(U_3(3))$, $\mathrm{Aut}(PSp_4(3))$. Межд. семинар по теории групп. Тез. докл. Екатеринбург: Ин-т мат. и мех. УрО РАН; Изд-во Урал. ун-та, 2001, 81–82.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: `zenkov@imm.uran.ru`

Флаг-транзитивность линейных групп, определенных над подкольцом тела

С. А. Зюбин

Пусть K — поле или тело. Естественное действие проективной линейной группы $PGL_{n+1}(K)$ на проективном пространстве $PG(n,K)$ является флаг-транзитивным, т. е. для любых двух максимальных флагов — неуплотняемых цепей вложенных подпространств — существует элемент группы, переводящий один флаг в другой. Флаг-транзитивность сохраняется, если рассматривать не всю группу $PGL_{n+1}(K)$, а некоторые ее подгруппы. Такова, например, группа $PSO_{n+1}(\mathbb{R})$, флаг-транзитивная на $PG(n,\mathbb{R})$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Качественно другим примером флаг-транзитивной подгруппы служит $PSL_n(\mathbb{Z}) < PGL_n(\mathbb{Q})$, заданная над подкольцом всех целых чисел $\mathbb{Z}$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Возникает естественная задача об описании всех флаг-транзитивных подгрупп H проективной линейной группы. Отметим, что эта проблема эквивалентна задаче об отыскании всех факторизаций вида $PGL_{n+1}(K) = H \cdot PT_{n+1}(K)$, где $PT_{n+1}(K)$ — проективная треугольная группа. Для конечного поля K задача решена в [2] для подгрупп полной проективной линейной группы, и даже для подгрупп групп Шевалле [3]. Для случая бесконечного поля или тела задача не решена до сих пор и записана в вопросе 11.70(в) из [1], в части (б) которого также спрашивается: какие свойства подкольца R из K обеспечивают флаг-транзитивность $PGL_{n+1}(R)$ на проективном пространстве $PG(n,K)$? Решение последнего вопроса для случая полей анонсировано в [4] и [5]. Полное решение вопроса 11.70(б) для всех тел дает следующая

Теорема. *Пусть R — подкольцо тела K. Подгруппа $PGL_{n+1}(R)$ действует флаг-транзитивно на проективном пространстве $PG(n,K)$ тогда и только тогда, когда R является (левым и правым) кольцом Безу, множества левых и правых частных которого совпадают с K.*

Работа поддержана РФФИ, грант № 09–01–00717.

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). 16-е изд., Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006.

[2] Higman D. G. Flag-transitive collineation groups of finite projective spaces. Ill. J. Math., 6 (1962), 434–446.

[3] Seitz G. Flag-transitive subgroups of Chevalley groups. Ann. Math., 2nd ser., 97 (1973), N. 1, 27–56.

[4] Зюбин С. А. Линейные группы, флаг-транзитивные на проективных пространствах. Классы групп, алгебр и их приложения, межд. алг. конф., тез. докл., Гомель, 2007, 75–76.

[5] Zyubin S. Groups acting transitively and flag-transitively on projective spaces. Межд. алгебр. конф., СПб отд. МИ РАН, Санкт-Петербург, 2007, 180–181.

Томский политехнический университет, Томск
E-mail: sergey.zyubin@gmail.com

О существовании холловых подгрупп

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Одним из фундаментальных результатов теории групп является теорема Шура — Цассензауза: *если в конечной группе имеется нормальная π-холлова подгруппа, то в группе существует и π'-холлова подгруппа.* Условие нормальности π-холловой подгруппы в этой теореме отбросить нельзя, т. е. для существования π'-холловой подгруппы недостаточно только существования π-холловой подгруппы. Например, в любой неразрешимой группе G нет p'-холловой подгруппы для некоторого простого p, в то время как p-холлова подгруппа (= силовская p-подгруппа) имеется. Напомним, что конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Без использования классификации конечных простых групп доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть H — π-холлова подгруппа группы G и $G = HK$ для некоторой подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если для каждого $p \in \pi(H)$ подгруппа H перестановочна со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта из K, то в группе G существует π'-холлова подгруппа.*

2. *Если H нильпотентна и перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из K, то любые две π'-холловы подгруппы сопряжены.*

Условие нильпотентности подгруппы H нельзя ослабить до сверхразрешимости. Например, в группе $PSL(2,11) = ([Z_{11}]Z_5)A_4$ $\{5,11\}$-холлова подгруппа $H = [Z_{11}]Z_5$ сверхразрешима, перестановочна с подгруппой Шмидта $K = A_4$, но $PSL(2,11)$ не является $C_{\{5,11\}'}$-группой. Кроме того, группа G может не быть $D_{\pi'}$-группой. Примером служит группа $PSL(2,5) = Z_5A_4$ с холловой подгруппой $H = Z_5$ и подгруппой $K = A_4$.

В 1962 году Ито и Сеп [1] доказали нильпотентность H/H_G при условии, что подгруппа H перестановочна со всеми подгруппами конечной группы G. Здесь H_G — наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H. Вполне естественно возникает следующий вопрос.

Вопрос. *Будет ли H/H_G нильпотентна, если подгруппа H перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы G?*

Положительный ответ известен в двух случаях: когда H холлова (это доказывается легко) и H максимальна, см. [2], следствие 2, с. 750.

Список литературы

[1] Ito N., Szep J. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. Acta Sci. Math. Sz., 23 (1962), 168–170.

[2] Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. О перестановочности подгрупп конечной группы. Сиб. мат. журн., 8 (1967), N. 4, 741–752.

Гомельский инженерный институт Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь
E-mail: knyagina@inbox.ru
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины
E-mail: monakhov@gsu.by

M_p-группы с ручками порядка три

С. Н. Козулин, В. И. Сенашов, В. П. Шунков

M_p-группы с ручками порядка, отличного от двух, в группе без инволюций изучались в работах В. П. Шункова [2], [3]. M_p-группы с ручками порядка 2 изучал В. О. Гомер [1]. В [4] получен признак непростоты M_p-группы с ручкой порядка, отличного от трех.

Группа G называется *M_p-группой*, если для ее бесконечной нормальной полной абелевой p-подгруппы B с условием минимальности и элемента a порядка p выполняются следующие условия:

а) локально конечные p-подгруппы из $C_G(a)B/B$ конечны;

б) если некоторая полная абелева p-подгруппа C группы G содержится в множестве $\bigcup_{g\in G}\langle a, a^g\rangle$, то $C \le B$.

Подгруппы B, $\langle a\rangle$ называются соответственно ядром и ручкой M_p-группы G.

Ручка называется p-конечной, если в $C_G(a)$ локально конечные p-подгруппы конечны.

Определение M_p-группы было введено В. П. Шунковым в 1983 г. в работе [2].

Теорема. *Пусть G — группа, B — её бесконечная полная абелева 3-подгруппа с условием минимальности, удовлетворяющие условиям:*

1) $H = N_G(B)$ является M_3-группой с ядром B и 3-конечной ручкой $\langle a\rangle$;

2) для произвольного элемента $g \in G \setminus H^{\#}$ подгруппы вида $\langle a, a^g\rangle$ конечны и разрешимы;

3) $|C_G(a) : H \cap C_G(a)| < \infty$ и $H \cap C_G(a)$ содержит все $3'$-элементы конечного порядка из $C_G(a)$;

4) если Q — конечная $\langle a\rangle$-инвариантная q-подгруппа из H с условием $Q \cap C_G(a) \ne 1$, то $N_G(Q) \le H$ (q — простое число, отличное от 3);

5) в G все конечные $\langle a\rangle$-инвариантные $3'$-подгруппы разрешимы.

Тогда $B \triangleleft G$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-01-00395 и гранта Сибирского федерального университета (проект — элитное математическое образование в СФУ).

Список литературы

[1] Гомер В. О. О группах с элементами конечных рангов. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск: КрасГУ, 1992.

[2] Шунков В. П. M_p-группы. Алгебра и логика, 23 (1984), N. 4, 445–475.

[3] Шунков В. П. M_p-группы. М.: Наука, 1990.

[4] Козулин С. Н., Сенашов В. И., Шунков В. П. Группы с ручками порядка, отличного от трех. Укр. мат. журнал, 56 (2004), N. 8. 1030–1042.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
E-mail: sen@icm.krasn.ru

Два и 3-порожденные рациональные 2-группы

С. Г. Колесников

В 1976 году R. Gow [1] доказал, что порядок конечной разрешимой группы, у которой все значения всех комплексных неприводимых характеров лежат в поле рациональных чисел (позже такие группы стали называть рациональными или Q-группами) может делиться только на три простых числа: 2, 3 и 5. Этот неожиданный результат послужил толчком к более детальному исследованию рациональных групп. Было поставлено несколько вопросов и высказано ряд гипотез о строении Q-групп и их силовских 2-подгрупп. В частности, в [2] А. Хайкин-Запирайн поставил вопрос 16.102: конечно ли число n-порождённых рациональных 2-групп (кратко n-Q-2-групп) при фиксированном n?

Автором классифицированы с точностью до изоморфизма рациональные 2-группы, порождённые двумя или тремя элементами. Более точно, доказаны

Теорема 1. *Существует только 3 неизоморфных 2-порождённых рациональных 2-группы: $Z_2 \times Z_2$, диэдральная и кватернионная группы порядка 8.*

Теорема 2. *Существует только 25 неизоморфных 3-порождённых рациональных 2-групп и любая из них разложима в произведение $K \rightthreetimes \langle z \rangle$, где*

$$K = \langle x, y \mid x^n = 1,\ y^m = x^l,\ [x, y^2] = f,\ [x, y] = g \rangle, \qquad n, m, l \in \{2, 4, 8\},$$

f, g слова от x^2, y^2, $(xy)^2$, $|z| \leqslant 4$ и $z^2 \in Z(K)$, причём, $x^z = x^3$ и $y^z = y^3$.

Отметим, что порядок максимальной 3-Q-2-группы равен 256. Поскольку [3, стр. 70] сплетение $G = H \wr Z_2$ будет Q-группой, если H — Q-группа, причём, минимальное число порождающих группы G на единицу больше, чем у H, то существуют n-порождённые ($n \geqslant 3$) рациональные 2-группы порядка больше либо равного $2^{2^n + 2^{n-3} - 1}$. В частности, существует 4-Q-2-группа порядка 2^{17}.

Следующие вопросы естественным образом возникают, как обобщение свойств два и 3-порождённых рациональных 2-групп.

Вопрос 1. Ограничены ли порядки элементов и ступень нильпотентности n-порождённой рациональной 2-группы числом 2^n?

Заметим, что рациональность значения произвольного комплексного неприводимого характера χ группы G на элементе g равносильно тому, что g сопряжен с g^k, если $\langle g \rangle = \langle g^k \rangle$. В связи с этим, возможно, интересным будет и следующий

Вопрос 2. Конечна ли n-порождённая группа G чётного периода, в которой каждый элемент g сопряжен с g^k, если $\langle g \rangle = \langle g^k \rangle$?

Список литературы

[1] Gow R. Groups whose characters are rational-valued. J. Algebra, 40 (1976), 280–299.

[2] Коуровская тетрадь. Нерешённые вопросы теории групп. 16-е изд., Новосибирск: ИМ СО РАН, 2005.

[3] Kletzing D. Structure and representation of Q-groups. Lecture notes in mathematics. Springer, 1984.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: sklsnkv@mail.ru

Кольца на векторных абелевых группах

Е. И. Компанцева

Абелева группа G называется полупростой, если она является аддитивной группой некоторого полупростого ассоциативного кольца. Проблема исследования полупростых групп сформулирована в [1]. В настоящей работе получено описание полупростых групп в классе векторных абелевых групп [2].

Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} R_i$ — векторная группа, R_i — группы без кручения ранга 1, которые с точностью до изоморфизма определяются своими типами $t(R_i)$. Обозначим:

$I_{nid} = \{i \in I \mid t(R_i) \quad \text{неидемпотентный тип}\}$,

$I_0 = \{i \in I \mid t(R_i) \quad \text{идемпотентный тип с бесконечным числом нулей}\}$,

$I_\infty = \{i \in I \mid t(R_i) \quad \text{идемпотентный тип с конечным числом нулей}\}$,

$\underline{I}_0(k) = \{i \in I \mid t(R_i) \geq t(R_k)\}, \ k \in I$,

$\overset{=}{I}(k) = \{i \in I \mid t(R_0) = t(R_k)\}, \ k \in I$.

Будем говорить, что множество $I' \subset I$ удовлетворяет условию (d), если существует система $\{J_i \mid i \in I'\}$ бесконечных попарно непересекающихся множеств $J_i \subset I_0(i)$.

Известно [2], что произвольная векторная группа представима в виде прямой суммы редуцированной и делимой векторных групп.

Теорема. *Пусть $G = A \oplus D$, где $A = \prod\limits_{i \in I} R_i$ — редуцированная векторная группа, I — неизмеримое множество [2], D — делимая векторная группа ранга $r(D)$. Пусть*

$$\nu = \begin{cases} 0, & r(D) \text{ конечен (в том числе r(D)=0)} \\ r(D), & r(D) \text{ бесконечен,} \end{cases}$$

$I_{nid}(\nu) = \{i \in I_{nid} \mid |\overset{=}{I}(i)| > \nu\}$.

Группа G полупроста тогда и только тогда, когда

(1) $|I_\infty| \leq \nu$

(2) $I_{nid}(\nu)$ удовлетворяет условию (d).

Список литературы

[1] Beaumont R. A., Lawver D. A. Strongly semisimple abelian groups. Publ. J. Math., 53 (1974), N. 2, 327–336.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.

Московский Педагогический Государственный Университет, Москва

E-mail: kompantseva@yandex.ru

О распознаваемости по спектру простых групп $D_{p+1}(3)$ для нечетного простого числа p

А. С. Кондратьев

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел (граф Грюнберга — Кегеля)* $GK(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $GK(G)$ через $s(G)$.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля (см. [1]). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в [1, 2].

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по спектру (см., например, обзор В. Д. Мазурова [3]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если для любой конечной группы H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

В данной работе продолжается изучение распознаваемости конечных простых групп лиева типа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа с таким же спектром, как у простой группы $D_{p+1}(3)$, где p — нечетное простое число. Тогда группа G изоморфна $D_4(3)$ или $B_3(3)$ при $p = 3$ и $D_{p+1}(3)$ при $p > 3$.*

В случае $p = 3$ теорема была доказана ранее ранее в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148), РФФМ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Список литературы

[1] Williams J. S. Prime graph components of finite groups. J. Algebra, 69 (1981), N. 2, 487–513.

[2] Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп. Мат. сб., 180 (1989), N. 6, 787–797.

[3] Мазуров В. Д. Группы с заданным спектром. Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. Математика и механика, 36 (2005), вып. 7, 119–138.

[4] Shi W. J., Tang C. Y. A characterization of some orthogonal groups. Progr. Nat. Sci., 7 (1997), N. 2, 155–162.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Примитивные параболические подстановочные представления конечных ортогональных групп нечетной размерности

В. В. Кораблева

Ранее автором вычислены ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы примитивных параболических подстановочных представлений для всех конечных простых исключительных групп лиева типа и классических групп $A_l(q)$, $C_l(q)$ и ${}^2A_l(q)$, а также определены ранги для групп $B_l(q)$ и $D_l(q)$. В данной работе определяются параметры примитивных параболических подстановочных представлений конечных ортогональных групп нечетной размерности.

Пусть V — векторное пространство нечетной размерности l над конечным полем порядка q нечетной характеристики и F — *невырожденная квадратичная* форма на V. Подпространство, на котором ограничение формы F есть нулевая форма, называется *изотропным* относительно F. Подгруппа $O(V)$ группы всех невырожденных линейных преобразований пространства V, состоящая из элементов φ, для которых $F(x^{\varphi}) = F(x)$ при всех x из V, называется *ортогональной группой* пространства V. Элементы из $O(V)$, имеющие равный единице определитель, образуют *специальную ортогональную группу* $SO(V)$. При нечетном q группа $SO(V)$ имеет единственную подгруппу индекса 2, которую обозначим через $\Omega(V)$. Пусть $G = \Omega(V)$ и W — изотропное подпространство пространства V относительно F. Известно, что стабилизатор G_W подпространства W является параболической максимальной подгруппой в группе G, причем все параболические максимальные подгруппы в G так получаются.

Теорема. *Пусть $G = \Omega(V)$ и W — изотропное относительно F подпространство размерности k в V. Тогда в V найдутся изотропные относительно F подпространства $W_{i,k-i-j,j}$ размерности k, где $0 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant i+j \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant [l/2]-k$ при $2k \geqslant [l/2]$ и $0 \leqslant j \leqslant k$ при $2k \leqslant [l/2]$, что $G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = C_{i,k-i-j,j} : L_{i,k-i-j,j}$, где $\mid C_{i,k-i-j,j} \mid = q^{(i+j)(l-k)-(i+j)(i+j+1)/2-j^2}$, $L_{i,k-i-j,j} \cong$*

$$\left[q^{(k-i)(i+j)-j^2}\right] : \frac{1}{2}\Big(SL_i(q).\,(q-1) \times SL_j(q).\,(q-1) \times SL_{k-i-j}(q).\,(q-1) \times G_j\Big).\,2$$

и подгруппа G_j изоморфна стабилизатору изотропного подпространства размерности j в $\Omega_{l-2k}(q)$.

Следствие. *Пусть W — изотропное подпространство относительно F размерности k в V. Ранг подстановочного представления группы $G = \Omega(V)$ на левых смежных классах по параболической максимальной подгруппе G_W равен $([l/2]-k+1)(3k-[l/2]+2)/2$ при $2k \geqslant [l/2]$ и $(k+1)(k+2)/2$ при $2k \leqslant [l/2]$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07–01–00148).

Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: vvk@csu.ru

О группах $F/[N,N]$

А. Ф. Красников

Пусть F — свободная группа с базой $x_1,\ldots,x_n$, N — нормальная подгруппа группы F, $F_{(c)}$ — c-й член нижнего центрального ряда группы F, $N^{(k)}$ — k-й коммутант группы N, $r \in F$, R — нормальное замыкание r в группе F.

Определим итерированный нижний центральный ряд группы F с набором классов $(c_1,\ldots,c_l)$, полагая $F_{(c_1,\ldots,c_l)} = (F_{(c_1,\ldots,c_{l-1})})_{(c_l)}$.

Пусть M — нормальная подгруппа группы F. Будем говорить, что образы элементов $x_2,\ldots,x_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/RM$ свободны от r, если для любого слова v от $x_2,\ldots,x_n$ из $v \in RM$ следует $v \in M$.

Теорема. *Пусть F/N — разрешимая группа без кручения, $n > 2$, $r \in N$, $r \notin [N,N]$, k — произвольное натуральное число. Образы элементов $x_2,\ldots,x_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/R[N,N]$ свободны от r тогда и только тогда, когда образы элементов $x_2,\ldots,x_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/RN^{(k)}$ свободны от r.*

Следствие. *Пусть F/N — свободная в некотором разрешимом многообразии групп и упорядочиваемая группа с базой $x_1N,\ldots,x_nN$, $n > 2$, $r \in N$, $r \notin [N,N]$, k — произвольное натуральное число. Образы элементов $x_2,\ldots,x_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/RN^{(k)}$ свободны от r тогда и только тогда, когда элемент r не сопряжен по модулю $[N,N]$ ни с каким словом от $x_2,\ldots,x_n$.*

Следствие. *Пусть $N = F_{(c_1,\ldots,c_l)}$, $n > 2$, $r \in N$, $r \notin [N,N]$, k — произвольное натуральное число. Образы элементов $x_2,\ldots,x_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/RN^{(k)}$ порождают свободную полинильпотентную группу с тем же набором классов, что и у группы $F/N^{(k)}$, тогда и только тогда, когда элемент r не сопряжен по модулю $[N,N]$ ни с каким словом от $x_2,\ldots,x_n$.*

Следствие ([1]). *Пусть N — член ряда коммутантов группы F, $n > 2$, k — произвольное натуральное число, $r \in N$, $r \notin [N,N]$. Образы элементов $x_2,\ldots,x_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/RN^{(k)}$ порождают свободную разрешимую группу той же ступени, что и $F/N^{(k)}$, тогда и только тогда, когда элемент r не сопряжен по модулю $[N,N]$ ни с каким словом от $x_2,\ldots,x_n$.*

Список литературы

[1] Романовский Н. С. Теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением в многообразиях разрешимых и нильпотентных групп данных ступеней. Мат. сб., 89 (131) (1972), 93–99.

г.Омск
E-mail: phomsk@mail.ru

Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$

А. А. Кузнецов, А. К. Шлёпкин

Пусть $B(2,5)$ — двупорожденная бернсайдова группа периода 5, а $B_0(2,5)$ — максимальная универсальная конечная двупорожденная группа того же периода (порядок последней равен 5^{34}). Вопрос о совпадении указанных групп на сегодняшний день является открытым.

Будем считать, что образующие групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ записаны в одном алфавите $\{1,2\}$. При поэлементном сравнении группы $B(2,5)$ с группой $B_0(2,5)$ по алгоритму из [1] было выявлено следующее.

Теорема 1. *Пусть v, w — два слова в алфавите образующих $\{1,2\}$, длины которых ≤ 29. Тогда $v = w$ — соотношение в группе $B_0(2,5)$ тогда и только тогда, когда $v = w$ — соотношение в группе $B(2,5)$.*

Однако длина 30 явилась своеобразной «точкой расхождения» групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$. Так на длине 30 в $B_0(2,5)$ имеются 2 соотношения, на длине 31 — 10, на длине 32 — 47, и на длине 33 — 69, доказать справедливость которых в $B(2,5)$ по алгоритму из [1], при применении соотношений, длины левой и правой части которых ≤ 33, не удается. В таблице 1 приведены некоторые соотношения указанного вида.

Таблица 1

122121121221121212211212212112	=	212121122112212121122112212121
1221122121211221122121212222111	=	2121122121121221121212211212212
12211222121111211222212222121112	=	21211112121221122112112121112111
121211211121121211211122121221112	=	211122121221112112121121112112121
....		

Поэтому имеет место

Теорема 2. *Если в группе $B(2,5)$ не выполняется хотя бы одно соотношение из таблицы 1, то тогда группа $B(2,5)$ бесконечна.*

Список литературы

[1] Кузнецов А. А., Шлёпкин А. К. Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$. Труды Института математики и механики УрО РАН, 15 (2009), N. 2, 125–132.

КрасГАУ, Красноярск
E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

О классах Леви, порожденных нильпотентными группами

В. В. Лодейщикова

Для произвольного класса $\mathcal{R}$ групп обозначим через $L(\mathcal{R})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{R}$. Класс $L(\mathcal{R})$ групп называется *классом Леви, порожденным* $\mathcal{R}$. $\mathcal{N}_c$ — многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, $q\mathcal{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$.

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$. Будем рассматривать квазимногообразие $\mathcal{N}$, заданное в $\mathcal{N}_2$ следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1), \tag{1}$$

$$(\forall x)(\forall y)(x^p = 1 \to [x, y] = 1), \tag{2}$$

$$(\forall x)(x^q = 1 \to x = 1), \tag{3}$$

$$(\forall x)(x^{p^2} = 1 \to x^p = 1), \tag{4}$$

где q пробегает множество простых чисел, отличных от p.

Через $\mathcal{M}$ обозначим квазимногообразие, задаваемое в $\mathcal{N}_3$ квазитождествами (3), (4) и формулами

$$(\forall x)(\forall y)([x, y, x]^p = 1), \tag{5}$$

$$(\forall x)(\forall y)(x^p = 1 \to [x, y, x] = 1), \tag{6}$$

$$(\forall x)(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(x^{p\delta} = \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{p\varepsilon_i} \to \prod_{i=1}^{n} [x, x_i, x]^{\varepsilon_i} = 1), \tag{7}$$

где q пробегает множество простых чисел, отличных от p, $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, \dots, n$, δ и n пробегают множество натуральных чисел.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп из $\mathcal{N}$, содержащий неабелеву группу. Предположим, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого неединичного элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Тогда $L(q\mathcal{K}) = \mathcal{M}$.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (Мероприятие 1).

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: victoria0504@mail.ru

О τ-квазинормальных подгруппах конечных групп

В. О. Лукьяненко, А. Н. Скиба

В данном сообщении рассматриваются только конечные группы. Подгруппа H группы G называется $\pi(G)$-квазинормальной в G [1], если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G. В нашем сообщении мы анализируем следующие обобщения $\pi(G)$-квазинормальности.

Определение. Пусть H — подгруппа группы G. Будем говорить, что:

(1) H *τ-квазинормальна в* G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами Q группы G такими, что $(|Q|, |H|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$;

(2) H *слабо τ-квазинормальна в* G, если группа G содержит такую субнормальную подгруппу T, что $HT = G$ и $T \cap H \leq H_{\tau G}$, где $H_{\tau G}$ — подгруппа, порожденная всеми подгруппами из H, которые τ-квазинормальны в G.

Класс всех сверхразрешимых групп будем обозначать через $\mathfrak{U}$. Напомним, что $\mathfrak{U}$-гиперцентром группы G называется наибольшая нормальная подгруппа из G, в которой все G-главные факторы цикличны [2, с. 389]. В работе [3] было введено следующее обобщение этого понятия: наибольшая нормальная подгруппа группы G, в которой все нефраттиниевы G-главные факторы цикличны, называется $\mathfrak{U}\Phi$-*гиперцентром* группы G и обозначается $Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$.

Исследования многих авторов связано с анализом следующего вопроса: *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, содержащий все сверхразрешимые группы, E — такая нормальная подгруппа группы G, что $G/E \in \mathfrak{X}$. При каких условиях на E группа G принадлежит $\mathfrak{X}$?* (см. [4, секция 5]). Многие результаты в данном направлении можно усилить, показав, что $E \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$ (см. [3]). Следующая теорема дополняет утверждение теоремы 1.5 работы [3].

Теорема. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G и P — силовская p-подгруппа из E, где p — наименьший простой делитель порядка $|E|$. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и каждая подгруппа из P порядка p^k и каждая циклическая подгруппа из P порядка 4 (если $p^k = 2$ и P — неабелева группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, слабо τ-квазинормальна в G. Тогда $E/O_{p'}(E) \leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G/O_{p'}(E))$.*

Список литературы

[1] Kegel O. H. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen. Math. Z., 78 (1962), 205–221.
[2] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.
[3] Shemetkov L. A., Skiba A. N. On the $\mathfrak{X}\Phi$-hypercentre of finite groups. J. Algebra (in press).
[4] Skiba A. N. On weakly S-permutable subgroups of finite groups. J. Algebra, 315 (2007), 192–209.

Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины, Гомель
E-mail: `lucas84@server.by, alexander.skiba49@gmail.com`

Конечные группы с S-квазинормальными третьими максимальными подгруппами

Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба

Все рассматриваемые в сообщении группы конечны. В работе [1] Агравалем было доказано, что группа является сверхразрешимой, если каждая ее вторая максимальная подгруппа S-квазинормальна (подгруппа H группы G называется S-квазинормальной или S-перестановочной в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). Оказалось, что в ненильпотентной группе G в том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа S-квазинормальна, когда G является сверхразрешимой группой Шмидта (см. [2, теорема 2.1]). Целью данного сообщения является изучение групп, у которых все третьи максимальные подгруппы S-квазинормальны.

Определение. *Группой Белоногова будем называть всякую ненильпотентную разрешимую группу, не являющуюся группой Шмидта, но содержащую только нильпотентные 2-максимальные подгруппы.*

Напомним, что $M_\beta(q) = \langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1, a^b = a^{1+q^{\beta-2}} \rangle$, где $\beta > 3$ при $p = 2$ и $\beta > 2$ при нечетном p.

Теорема. *В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной в G, когда группа G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$ $(\alpha+\beta+\gamma \le 3)$, либо G изоморфна $SL(2,3)$, либо G — сверхразрешимая группа Шмидта, либо G — сверхразрешимая группа Белоногова одного из следующих типов:*

(1) $G = [P]Q$, где $|P| = p, |Q| = q^\beta$ $(\beta \ge 3)$; группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$; $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$;

(2) $G = [P]Q$, где P — циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;

(3) $G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q — группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;

(4) $G = ([P]Q)R$, где P и R — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q — циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.

Список литературы

[1] Agrawal R. K. Generalized center and hypercenter of a finite group. Proc. Amer. Math. Soc., 54 (1976), 13–21.

[2] Луценко Ю. В. Конечные ненильпотентные группы с нормальными или S-квазинормальными n-максимальными подгруппами. Известия Гомельского университета им. Ф. Скорины, 1(52) (2009), 134–138.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
E-mail: lucenko_av@mail.ru, skiba@gsu.by

О пересечениях силовских 2-подгрупп в группе автоморфизмов группы $U_4(3)$

А. И. Макосий

Пусть G — конечная группа с единичным разрешимым радикалом, P — фиксированная силовская 2-подгруппа из G. Рассмотрим множество $X = \{P^g \mid P \cap P^g = 1, g \in G\}$. Обозначим через $l_2(G)$ число орбит при действии группы P сопряжениями на множестве X. В работе [1] утверждается, что если $G = Aut(U_4(3))$, то $l_2(G) > 0$. Автору удалось установить, что $l_2(G) = 8$ для $G = Aut(U_4(3))$, и указать явно представителей орбит.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00395).

Список литературы

[1] Зенков В. И., Пашкова С. В. О пересечениях силовских 2-подгрупп в группах автоморфизмов групп $L_4(3)$ и $U_4(3)$. Межд.конф. “Алгебра и ее приложения”, посвященная 75-летию со дня рождения В. П. Шункова. Тез. докл. Красноярск, 2007, 54–55.

ИВМ СО РАН, г.Красноярск
E-mail: AIMakosi@mail.ru

Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым симплектическим цоколем

Н. В. Маслова

М. Либеком и Я. Саксломом в [1] и независимо В. Кантором в [2] для конечных групп с простым классическим цоколем приведены типы подгрупп, которые могут являться в них максимальными подгруппами нечетного индекса. Однако не всякая подгруппа из приведенного списка в действительности является максимальной подгруппой нечетного индекса соответствующей группы. Полная классификация максимальных подгрупп нечетного индекса конечных простых классических групп получена автором в [3]. Теперь мы рассматриваем конечные группы с простым классическим цоколем. Ввиду результата П. Клейдмана [4, теорема 1.2.2] можно считать, что степень цоколя группы не меньше 13.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i. Введем на $\mathcal{M}$ порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Пусть ψ — функция, ставящая в соответствие каждому натуральному числу s последовательность $(s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \ldots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

Теорема *Пусть G — конечная группа, L — ее цоколь, $L \cong PSp_n(q)$ при $n \geq 13$ и V — естественный проективный модуль для группы L. Подгруппа H группы G является максимальной подгруппой нечетного индекса тогда и только тогда, когда $H = N_G(P)$ и либо q четно и P — параболическая максимальная подгруппа в L, либо q нечетно и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$P = N_L(PSp_n(q_0))$, где $q = q_0^t$ и t — простое нечетное число;*

(2) *P — стабилизатор в L невырожденного подпространства размерности $m < n/2$ пространства V и $\psi(n) \geq \psi(m)$;*

(3) *P — стабилизатор в L ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i размерности m и $m = 2^w \geq 2$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148).

Список литературы

[1] Liebeck M. W., Saxl J. The primitive permutation groups of odd degree. J. London Math. Soc (2), 31 (1985), N. 2, 250–264.

[2] Kantor W. M. Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes. J. Algebra, 106 (1987), N. 1, 15–45.

[3] Маслова Н. В. Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах. Труды Института математики и механики УрО РАН, 14 (2008), N. 4, 100–118.

[4] Kleidman P., Liebeck M. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge.: Cambridge University Press, 1990.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: butterson@mail.ru

Об основаниях алгебраической геометрии над проконечными группами

С. Г. Мелешева

В работах [1, 2] изложены основы алгебраической геометрии над группами и другими алгебраическими системами. Мы рассматриваем случай проконечных групп, которые по определению являются проективными пределами конечных групп с соответствующей топологией. На этот случай стандартные определения буквально не переносятся.

Для проконечных групп мы определяем понятия уравнения, алгебраического множества, топологии Зарисского, координатной группы, находим представление координатной группы в виде проективного предела координатных групп конечных групп.

Алгебраическая геометрия над (проконечной) группой G является достаточно хорошей лишь в том случае, если эта группа нетерова по уравнениям, т. е. для всякого n произвольная система уравнений от $x_1, \ldots, x_n$ над G должна быть эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме.

Пусть проконечная группа G является обратным пределом $\varprojlim G_i$ конечных групп G_i. Обозначим через $\pi(G) = \cup\pi(G_i)$ множество простых делителей порядков групп G_i. Нами доказаны

Теорема 1. *Если множество $\pi(G)$ бесконечно, то проконечная группа G не нетерова по уравнениям от одной переменной.*

Теорема 2. *Если проконечная группа G абелева и множество $\pi(G)$ конечно, то группа G нетерова по уравнениям.*

Строим два примера не нетеровых по уравнениям про-p-групп.

Определяем понятие линейной про-p-группы и доказываем

Теорема 3. *Линейная про-p-группа нетерова по уравнениям.*

Список литературы

[1] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. I: Algebraic sets and ideal theory. J. Algebra, 219 (1999), N. 1, 16–79.

[2] Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations. J. Algebra, 234 (2001), N. 1, 225–276.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: melesheva_s@ngs.ru

Ограничения модулярных представлений специальных линейных групп на подгруппы типа $A_1 \times A_1$

А. А. Осиновская

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, G — односвязная алгебраическая группа типа A_n над K, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — фундаментальные веса группы G, ϕ — неприводимое представление группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n$. Множество весов группы H типа $A_1 \times A_1$ можно отождествить с множеством пар целых чисел при помощи отображения $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \mapsto (x_1, x_2)$; множество доминантных весов - с множеством пар неотрицательных целых чисел. Мы предполагаем, что H — подсистемная подгруппа группы G, т. е. что корни подгруппы H образуют подсистему в системе корней группы G. Будем обозначать символом $Irr(\phi|H)$ множество старших весов композиционных факторов ограничения представления ϕ на подгруппу H.

Теорема. *Пусть $n > 6$ и $a_i + a_{i+1} < p$ для всех $1 < i < n-1$. Тогда*

$$Irr(\phi|\omega) = \{0 \leq x_1, x_2 \leq a, x_1 + x_2 \leq a + a_2 + \ldots + a_n\}.$$

Заметим, что множество $Irr(\phi|\omega)$ совпадает с соответствующим множеством в характеристике 0 [1].

Список литературы

[1] Железная Т. М. Об ограничениях неприводимых представлений алгебраических групп типа A_n в характеристике 0 на подгруппы типа $A_1 \times A_1$. Тр. Ин-та математики, 15 (2007), N 1, 56–67.

Институт математики НАН Беларуси, Минск
E-mail: anna@im.bas-net.by

Свободная полугруппа группы автоморфизмов свободной бернсайдовой группы

А. С. Пайлеванян

Нами доказана

Теорема. *Для любого нечетного* $n \geq 665$ *и для любого четного* $n = 16k > 8000$ *группа автоморфизмов* $Aut(B(m,n))$ *свободной бернсайдовой группы* $B(m,n)$ *ранга* $m \geq 2$ *содержит подполугруппу, изоморфную свободной полугруппе ранга 2.*

Следствие 1. *Фактор-группа*

$$Aut(B(2,n)) / Int(B(2,n))$$

бесконечна, где $Int(B(2,n))$ *— группа внутренних автоморфизмов группы* $B(2,n)$.

Ереванский Государственный Университет, Ереван
E-mail: apahlevanyan@ysu.am

О решетке квазимногообразий разрешимых групп без кручения

А. Л. Полушин

Как обычно, $q\mathcal{R}$ — квазимногообразие, порожденное классом $\mathcal{R}$ групп (пишем qG, если $\mathcal{R} = \{G\}$, $L_q(\mathcal{M})$ — решетка квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{M}$.

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$, $n = p^2 - p$. Будем рассматривать следующую группу:

$$G = gp(x_0, \ldots, x_{n-1}, y \mid [x_i, x_j] = 1\,(i, j = 0, \ldots, n-1),$$
$$x_i^y = x_{i+1}\,(i = 0, \ldots, n-2), x_{n-1}^y = x_0^{-1} x_p^{-1} \cdots x_{n-p}^{-1}).$$

Теорема. *Решетка $L_q(qG)$ является следующей цепью: $\mathcal{E}, qZ, qG_p, qG$, где*

$$G_p = gp(l_0, \ldots, l_{p-2}, z \mid [l_i, l_j] = 1,\ (i, j = 0, \ldots, p-2),$$
$$(l_i)^z = l_{i+1},\ (i = 0, \ldots, p-3),\ (l_{p-2})^z = l_0 l_1 \cdots l_{p-2}).$$

Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (Мероприятие 1).

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: hvostovich@gmail.com

Центроиды нильпотентных групп без кручения

К. Н. Пономарёв

В ряде статей ([1, 2]) для класса групп было определено два различных понятия, близких к оператору центроида в классе неассоциативных колец. Доказываем что для нильпотентных групп не имеющих кручения оба эти понятия совпадают.

Список литературы

[1] Пономарёв К. Н. Фактор-морфизмы нильпотентных групп. Сиб. мат. журн., 32 (1991), N. 3, 119–125.

[2] Lioutikov S., Myasnikov A. Centroid of groups. J. Group Theory, 3 (2000), N. 2, 177–197.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ponomaryov@ngs.ru

Об одной гипотезе Цассенхауза

А. М. Попова

Пусть G — конечная группа, ZG — целочисленное групповое кольцо, $h = \Sigma\alpha_g g \in ZG$, $\varepsilon(h) = \Sigma\alpha_g$.

Определение. Автоморфизм $\theta \in AutZG$ называется нормализованным, если $\forall h \in ZG[\varepsilon(h) = \varepsilon(\theta(h))]$ (или, что эквивалентно, если $\varepsilon(\theta(g)) = 1\ \forall g \in G$).

Гипотеза Цассенхауза состоит в следующем.

(**Aut**). *Пусть $\theta \in AutZG$ — нормализованный автоморфизм. Тогда существует единица $\alpha \in QG$ и автоморфизм $\sigma \in AutG$ такие, что*

$$\theta(g) = \alpha^{-1}\sigma(g)\alpha,\ \forall g \in G.$$

Пусть $T_1(G), \ldots, T_s(G)$ — все неэквивалентные неприводимые представления G степеней $n_1, \ldots, n_s$ соответственно, $D(G) = diag(T_1(G), \ldots, T_s(G))$. Можно показать, что $ZG \cong Z[D(G)]$.

Между различными клетками кольца $Z[D(G)]$ возникают отображения

$$\mu_{ij} : \sum_{g\in G} \alpha_g T_i(g) \longleftrightarrow \sum_{g\in G} \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in Z.$$

Если μ_{ij} не является изоморфизмом, то i-я и j-я клетки расклеиваются, то есть существуют такие целые положительные числа m_i и m_j, что в $Z[D(G)]$ лежат кольца вида

$$O_i = \{diag(0, \ldots, 0, m_i Z[T_i(G)], 0, \ldots, 0)\} \quad \text{и}$$
$$O_j = \{diag(0, \ldots, 0, m_j Z[T_j(G)], 0, \ldots, 0)\}.$$

При этом $m_i = \frac{|G|}{n_i}$ является минимальным числом с таким свойством.

Если же μ_{ij} является изоморфизмом, то i-я и j-я клетки не расклеиваются. Таким образом, кольцо $Z[D(G)]$ можно составить из блоков, состоящих из не расклеивающихся клеток.

Лемма 1. *Пусть $Q(\xi)$ — наименьшее поле такое, что $T_i(G) \subset (Q(\xi))_{n_i}$ и индекс Шура характера χ_i равен 1. Тогда любой автоморфизм блока, содержащего $T_i(G)$, является произведением автоморфизма поля $Q(\xi)$ на сопряжение матрицей из $GL_{n_i}(Q(\xi))$.*

Лемма 2. *Пусть $Q(\xi)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда для любого $\tau \in AutQ(\xi)$ найдется $\sigma \in AutG$, который изменяет таблицу характеров группы G, соответствующую представлению $D(G)$, точно так же, как это делает τ.*

Теорема. *Пусть G — конечная группа и для любого неприводимого над C характера χ индекс Шура этого характера равен 1. Тогда для группы G справедлива гипотеза Цассенхауза.*

НГТУ, Новосибирск
E-mail: algebra@nstu.ru

О π-теоремах Бэра — Судзуки

Д. О. Ревин

Далее предполагается, что p — некоторое простое число, а π — некоторое множество простых чисел. Для конечной группы G через $\mathrm{O}_\pi(G)$ обозначен ее π-радикал — наибольшая нормальная π-подгруппа.

Известная теорема Бэра — Судзуки утверждает, что если элемент x конечной группы G таков, что подгруппа $\langle x, x^g\rangle$ является p-группой для любого элемента $g \in G$, то $x \in \mathrm{O}_p(G)$. Заменить в этой теореме число p произвольным множеством π простых чисел, вообще говоря, нельзя. Например, любые две транспозиции в симметрической группе S_n порождают $\{2,3\}$-подгруппу, но $\mathrm{O}_{\{2,3\}}(\mathrm{S}_n) = 1$ при $n \geq 5$.

Скажем, что для конечной группы G *справедлива π-теорема Бэра — Судзуки* и будем писать $G \in \mathrm{BS}_\pi$, если каждый элемент $x \in G$, порождающий вместе с любым сопряженным с ним элементом некоторую π-группу, содержится в $\mathrm{O}_\pi(G)$. Следуя Х. Виландту и Ф. Холлу, скажем для конечной группы G *справедлива π-теорема Силова*, и будем писать $G \in \mathrm{D}_\pi$, если любые две максимальные π-подгруппы в G сопряжены. Многие известные доказательства теоремы Бэра — Судзуки используют в качестве одного из ключевых инструментов теорему Силова. Поэтому представляется естественной

Гипотеза. $\mathrm{D}_\pi \Rightarrow \mathrm{BS}_\pi$, т. е. если для конечной группы справедлива π-теорема Силова, то для нее справедлива π-теорема Бэра — Судзуки.

Теорема 1. *Если $\langle \mathrm{Inn}(S), x\rangle \in \mathrm{BS}_\pi$ для любой неабелевой простой группы $S \in \mathrm{D}_\pi$ и любого элемента $x \in \mathrm{Aut}(S)$ простого порядка $p \in \pi$, то $\mathrm{D}_\pi \Rightarrow \mathrm{BS}_\pi$.*

Эта теорема дает надежду подтвердить с помощью классификации конечных простых групп или опровергнуть гипотезу $\mathrm{D}_\pi \Rightarrow \mathrm{BS}_\pi$, тем более, что все простые группы, принадлежащие классу D_π, известны. В качестве промежуточного результата отметим следующую теорему, частным случаем которой при $\pi = \{p\}$ будет классическая теорема Бэра — Судзуки.

Теорема 2. *Если любой композиционный фактор конечной группы G либо является π-группой, либо имеет порядок, делящийся не более, чем на одно простое число из π, то $G \in \mathrm{BS}_\pi$.*

Гипотеза $\mathrm{D}_\pi \Rightarrow \mathrm{BS}_\pi$ подтверждена также при некоторых ограничениях на множество π.

Теорема 3. *Если $2, 3 \notin \pi$, то $\mathrm{D}_\pi \Rightarrow \mathrm{BS}_\pi$.*

Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00322), Советом по грантам Президента РФ (проект НШ-344.2008.1) и АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: revin@math.nsc.ru

Метод подъема в теории частично коммутативных нильпотентных групп

В. Н. Ремесленников, А. В. Трейер

В теории групп автоморфизмов свободных групп определяющими являются так называемые "pick up lemmas" (леммы о подъёме). Фактически, это метод доказательства основных результатов в этой теории. В докладе будет изложен метод доказательств нескольких результатов в теории частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп. Суть этого метода состоит в выделении в графе коммутативности Γ группы G_Γ специального подграфа Γ', далее, по предположению математической индукции, необходимое утверждение считается верным для группы $G_{\Gamma'}$, и затем нужное утверждение доказывается для всей группы G_Γ.

Метод будет проиллюстрирован на примере доказательства теоремы о структуре группы автоморфизмов частично коммутативной двуступенно нильпотентной группы.

ОФ ИМ СОРАН, Омск
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru, treyer_sas@rambler.ru

Об одном критерии p-разрешимости

М. В. Селькин, Р. В. Бородич

Рассматриваются конечные группы. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на строение группы. В настоящее время к исследованию пересечений максимальных подгрупп и изучению свойств классов групп, все чаще, подходят с позиций теории подгрупповых функторов (см. монографии [1], [2], [3]).

Теорема. *Пусть Θ — абнормально полный m-функтор и $p > 2$. Тогда либо $\Phi^p_\theta(G) = \Phi_\theta(G)$, либо G является p-разрешимой группой.*

В случае, когда $\Theta(G)\backslash\{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп для любой группы G, из теоремы вытекает соответствующий результат Шлыка из [4].

Список литературы

[1] Селькин М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Бел. навука, 1997.

[2] Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Бел. навука, 2003.

[3] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Бел. навука, 1997.

[4] Шлык В. В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах. Матем. заметки, 14 (1973), N. 3, 429–439.

Учреждение образования "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины", Гомель
E-mail: `Selkin@gsu.by, Borodich@gsu.by`

О сверхрадикальной формации и формациях Шеметкова

В. Н. Семенчук, С. А. Мокеева, О. А. Мокеева

Рассматриваются только конечные группы. Используются стандартные определения и обозначения [1].

В Коуровской тетради [2] Л. А. Шеметков поставил проблему о классификации насыщенных формаций, минимальные не $\mathfrak{F}$-группы которых либо группы Шмидта, либо группы простого порядка. В настоящее время такие формации называются *формациями Шеметкова*.

Напомним, что *минимальной не $\mathfrak{F}$-группой* формации $\mathfrak{F}$ (*критической группой*) называется группа не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Множество таких групп обозначают через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

В данной теореме получены новые характеризации сверхрадикальных формаций и формаций Шеметкова.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова;

2) формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-достижимые $\mathfrak{F}$-подгруппы из G и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

3) $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

4) формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$ и для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;

5) формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$ и для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-достижима в G;

6) формация $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

Список литературы

[1] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[2] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1992.

УО "ГГУ им. Ф. Скорины", г.Гомель
E-mail: kolenchukova@gsu.by

Об одном обобщении метагамильтоновых групп

Н. Н. Семко, О. А. Яровая

Пусть G — группа. Обозначим через $L_{non-norm}(G)$ семейство всех ненормальных подгрупп G. Изучение влияния семейства $L_{non-norm}(G)$ на структуру группы G было начато очень давно. Так Г. М. Ромалис и Н. Ф. Сесекин в работах [1]–[3] начали изучать группы, в которых семейство $L_{non-norm}(G)$ состоит из абелевых подгрупп. Такие группы были названы ими метагамильтоновыми. Конечные метагамильтоновы группы изучались в работах [4]–[5]. Полное описание метагамильтоновых групп было получено в работе Н. Ф. Кузенного и Н. Н. Семко [6]. Естественным продолжением таких исследований является рассмотрение ситуации, когда подгруппы семейства $L_{non-norm}(G)$ принадлежат к классу групп, который является естественным расширением класса абелевых групп. Так в работах [7]–[8] рассматривались группы, в которых подгруппы семейства $L_{non-norm}(G)$ имеют конечный коммутант или являются FC-группами. В настоящей работе продолжаются исследования в данном направлении. Поскольку естественным обобщением конечных групп являются черниковские группы, то естественным расширением групп с конечным коммутантом являются группы с черниковским коммутантом. В настоящей работе начинается изучение групп, в которых всякая подгруппа либо нормальна, либо имеет черниковский коммутант.

Теорема 1. *Пусть G — локально почти разрешимая группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) Всякая конечно порожденная подгруппа группы G будет конечной над центром, в частности, G — локально FC-группа.

(2) Коммутант группы G будет локально конечной подгруппой, в частности, если G не имеет кручения, то она абелева.

Теорема 2. *Пусть G — локально ступенчатая группа, всякая подгруппа которой или нормальна, или имеет черниковский коммутант. Предположим, что G не является локально почти разрешимой. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) G включает в себя такую нормальную локально конечную подгруппу T, что G/T — непериодическая абелева группа.

(2) T не имеет конечной системы порождающих элементов.

(3) Всякая собственная подгруппа T имеет черниковский коммутант.

Список литературы

[1] Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метагамильтоновых группах. Мат. зап. Урал. ун-та, 5 (1966), N. 3, 45–49.

[2] Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М. О метагамильтоновых группах. Мат. зап. Урал. ун-та. 6 (1968), N. 5, 50–53.

[3] Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метагамильтоновых группах. Мат. зап. Урал. ун-та., 7 (1970), N. 3, 195–199.

[4] Нагребецкий В. Т. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелевая подгруппа которых инвариантна. Мат. зап. Урал. ун-та., 6 (1967), N. 1, 80–88.

[5] Махнев А. А. О конечных метагамильтоновых группах. Мат. зап. Урал. ун-та., 10 (1976), N. 1, 60–75.

[6] Кузенний М. Ф., Семко М. М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення. К.: Ін-т математики НАН України, 1996.

[7] Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes. Advances in Group Theory, 2002. Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoly, May–June 2002. Roma: Aracne, 2003.

[8] Kurdachenko L., Otal J., Russo A., Vincenci G. Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes. Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 104A (2004), N. 2, 177–189.

Национальный университет государственной налоговой службы Украины, ул. К. Маркса 31, Ирпень, Киевская область, 08202, Украина
E-mail: n_semko@mail.ru

Одна характеризация групп с почти слойно конечной периодической частью

В. И. Сенашов

Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной*, если H содержит элемент порядка 2 (*инволюцию*) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций.

Ранее автором была установлена почти слойная конечность группы Шункова с сильно вложенной подгруппой при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп [1] и при условии периодичности группы [2]. В работе автора [3] рассматривался случай смешанных групп, и условие почти слойной конечности накладывалось только на периодические части нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп. При этом доказано, что при таком условии в группе Шункова с сильно вложенной подгруппой, обладающей черниковской почти слойно конечной периодической частью, элементы конечных порядков составляют почти слойно конечную периодическую подгруппу. Здесь удается отказаться от ограничения черниковости для периодической части сильно вложенной подгруппы, а именно, доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть группа Шункова G содержит сильно вложенную подгруппу, обладающую почти слойно конечной периодической частью. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то сама группа G обладает почти слойно конечной периодической частью.*

Напомним, что *группой Шункова* называется такая группа G, в которой для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-01-00395 и гранта Сибирского федерального университета (проект — элитное математическое образование в СФУ).

Список литературы

[1] Сенашов В. И. Достаточные условия почти слойной конечности группы. Укр. мат. журн., 51 (1999), N. 4, 472–485.

[2] Сенашов В. И. Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова. Дискретная математика, 14 (2002), N. 4, 133–152.

[3] Сенашов В. И. О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой. Труды ИММ УрО РАН, 15 (2009), N. 2, 203–210.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
E-mail: sen@icm.krasn.ru

О точно дважды транзитивных группах

А. И. Созутов, Е. В. Антосяк

Группа G подстановок множества Ω называется *точно дважды транзитивной*, если для любых элементов $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$ из Ω найдется точно одна подстановка $g \in G$ переводящая α в γ и β в δ, т. е. $\alpha^g = \gamma$ и $\beta^g = \delta$. Хорошо известно, что точно дважды транзитивная группа содержит один класс сопряженных инволюций, и каждая инволюция либо содержится в стабилизаторе точки, либо является регулярной подстановкой.

Теорема 1. *Пусть G — точно дважды транзитивная группа на Ω, $\alpha \in \Omega$, $H = G_\alpha$ содержит инволюцию j, b — строго вещественный относительно j элемент из $G \setminus G_\alpha$, $A = C_G(b)$ и $V = N_G(A)$. Тогда:* (1) *подгруппа A инвертируется инволюцией j и сильно изолирована в G;* (2) *подгруппа V действует точно дважды транзитивно на орбите $\Delta = \alpha^A$, при этом A — абелева регулярная нормальная подгруппа в V, $T = V \cap G_\alpha$ — стабилизатор точки и $V = A\lambda T$;* (3) *если $|\bigcap_{x \in H} T^x| > 2$, то $G = V$ (и $\Omega = \Delta$).*

Теорема 2. *Пусть в точно дважды транзитивной группе G есть локально конечная подгруппа, содержащая регулярную подстановку и пересекающаяся с некоторым стабилизатором по нормальной в нем подгруппе состоящей более чем из двух элементов. Тогда группа G обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой.*

Теоремы допускают эквивалентные формулировки на языке почтиобластей и почтиполей [1]. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00395).

Список литературы

[1] Wähling H. Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen Ferlag, 1987.

Сибирский федеральный университет, Красноярск

О f-локальных подгруппах в группах с инволюциями

А. И. Созутов, М. В. Янченко

Исследуется вопрос о существовании в группе f-локальных подгрупп [1–3]. Пусть G — произвольная группа. Любая её бесконечная подгруппа H с нетривиальным локально конечным радикалом называется *f-локальной*. По Шункову смешанная группа G обладает *периодической частью*, если все её элементы конечного порядка составляют подгруппу. Так, если множество элементов конечного порядка в группе G конечно, то ввиду известной леммы Дицмана группа G обладает конечной периодической частью. Если неединичный элемент a в группе G порождает почти с каждым элементом, сопряженным с неединичным элементом b, конечную подгруппу, то мы говорим, что в группе G выполняется (a, b)-*условие конечности* [4], при этом элемент a называем *обобщенно конечным.* Пусть G — бесконечная группа с инволюциями a, b и в G выполняется (a, b)-условие конечности. Если $a \notin b^G$ и G содержит бесконечно много элементов конечного порядка, то инволюции a и b принадлежат f-локальным подгруппам, содержащим бесконечно много элементов конечного порядка ([1], теорема 1). Как показал В. П. Шунков [5], при $a \in b^G$ теорема 1 из [1] неверна. Случай, когда $|a| \cdot |b| = 8$ в [2] был выделен в объект отдельного исследования.

Теорема 1. *Пусть G — бесконечная группа, a и b — элементы из G, один из которых инволюция, второй — элемент порядка 4 и в G выполняется (a, b)-условие конечности. Тогда либо G обладает конечной периодической частью, либо a и b принадлежат f-локальным подгруппам, содержащим бесконечно много элементов конечного порядка.*

Когда в группе все элементы простых порядков обобщенно конечны и это свойство наследуется всеми ее сечениями по периодическим нормальным подгруппам, она называется *обобщенной группой Шункова.*

Теорема 2. *Обобщенно конечная группа Шункова либо обладает конечной периодической частью, либо содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00395).

Список литературы

[1] Созутов А. И., Янченко М. В. О существовании в группе f-локальных подгрупп. Сиб. мат. журн., 47 (2006), N. 4, 898–913.

[2] Созутов А. И., Янченко М. В. F-локальные подгруппы в группах с обобщенно конечным элементом порядка 2 и 4. Сиб. мат. журн., 48 (2007), N. 5, 1150–1157.

[3] Янченко М. В. F-локальные подгруппы групп с инволюциями. Сб. тр. сем. "Математические системы". Красноярск: КрасГАУ, 2007. Вып. 6, 122–127.

[4] Сенашов В. И., Шунков В. П., Яковлева Е. Н. Группы с конечной периодической частью. Тез. докл. Международ. конф. "Алгебра и её приложения". Красноярск, 2002, 105–106.

[5] Шунков В. П. T_0-группы. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000.

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Вербальные подгруппы групп треугольных и унитреугольных матриц над полем произвольной характеристики

Ю. В. Сосновский

В работе [1] были описаны вербальные подгруппы групп верхних треугольных $T_n(K)$, верхних унитреугольных $UT_n(K)$, бесконечномерных треугольных $T(K)$ и бесконечномерных унитреугольных $UT(K)$ матриц над произвольным полем характеристики 0. Оказалось, что вербальные подгруппы групп $UT_n(K)$ и $UT(K)$ совпадают с членами их нижних центральных рядов — с группами унитреугольных матриц $UT_n^m(K)$ и $UT^m(K)$ с $(m-1)$-ой нулевой диагональю выше главной. У вербальных подгрупп групп треугольных матриц $T_n(K)$ и $T(K)$ несколько больше возможностей. Они либо совпадают с вербальными подгруппами соответствующих групп унитреугольных матриц, либо являются произведениями одной из вербальных подгрупп $V_{x^s}(D_n(K))$, $V_{x^s}(D(K))$ групп диагональных матриц и всей группы соответствующих унитреугольных матриц. Здесь через $V_{x^s}(G)$ обозначена вербальная подгруппа, порожденная значениями слова x^s на элементах группы G, под группами бесконечномерных треугольных, унитреугольных и диагональных матриц в [1] понимаются прямые пределы: $T(K) = \varinjlim(T_n(K), \varphi_n)$, $UT(K) = \varinjlim(UT_n(K), \varphi_n)$, $D(K) = \varinjlim(D_n(K), \varphi_n)$, а через φ_n обозначено вложение матриц из группы $T_n(K)$ в группу $T_{n+1}(K)$ путем приписывания к матрице из $T_n(K)$ снизу строки $(0, \ldots, 0, 1)$ и справа такого же столбца. По поводу описания нижних центральных рядов группы $UT_n(K)$ (см., например, [2], упражнение 16.1.2).

В нашей работе описаны вербальные подгруппы групп треугольных, унитреугольных, финитарно треугольных $FT(K)$ и финитарно унитреугольных $FUT(K)$ матриц над полями произвольной характеристики. Описание остается почти таким же, как и для случая полей нулевой характеристики, с небольшими уточнениями для групп $T_n(K)$ и $FT(K)$. Поясним, что под финитарно треугольной мы понимаем бесконечную верхнюю треугольную матрицу, строки и столбцы которой занумерованы натуральными числами и компоненты которой отличны от компонент единичной матрицы лишь в конечном числе мест.

Теорема 1. *Пусть K — произвольное поле, а n — произвольное натуральное число, большее 1. Тогда всякая вербальная подгруппа группы верхних унитреугольных матриц $UT_n(K)$ совпадает с одним из членов нижнего центрального ряда этой группы.*

Теорема 2. *Пусть K — произвольное поле. Тогда всякая вербальная подгруппа группы финитарно унитреугольных матриц $FUT(K)$ совпадает с одним из членов нижнего центрального ряда этой группы.*

Теорема 3. *Пусть K — произвольное поле, а n — произвольное натуральное число, большее 1. Тогда всякая вербальная подгруппа группы верхних треугольных матриц $T_n(K)$ либо совпадает с одной из вербальных подгрупп группы верхних унитреугольных матриц $UT_n(K)$, либо совпадает с произведением $V_{x^s}(D_n(K)) \cdot UT_n(K)$, где s — некоторое натуральное число, не делящееся на $q-1$ в случае конечного поля K из q элементов.*

Теорема 4. *Пусть K — произвольное поле. Тогда всякая вербальная подгруппа группы финитарно треугольных матриц $FT(K)$ либо совпадает с одной из вербальных подгрупп группы финитарно унитреугольных матриц $FUT(K)$, либо совпадает с произведением $V_{x^s}(FD(K)) \cdot FUT(K)$, где s — некоторое натуральное число, не делящееся на $q-1$ в случае конечного поля K из q элементов.*

Кроме того в [1] для полей характеристики 0 доказывалось равенство единице ширины вербальных подгрупп групп унитреугольных матриц $UT_n(K)$ и $UT(K)$ относительно естественного множества порождающих — коммутаторов $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ веса m. В доказательстве леммы 5, предшествовавшей доказательству этого утверждения, использовалась обратимость матрицы $B-1$, но B из $UT_n(K)$ и матрица $B-1$ необратима. Несмотря на эту погрешность в доказательстве, само утверждение о ширине оказывается справедливым для полей любой характеристики.

Теорема 5. *Пусть K — произвольное поле, а m, n — произвольные натуральные числа, причем $n \geq 2$ и $n \geq m$. Тогда ширина вербальных подгрупп $UT_n^m(k)$ и $FUT^m(K)$ относительно множества порождающих — коммутаторов $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ веса m — равна единице.*

Список литературы

[1] Bier A. Verbal subgroups in the group of triangular matrices over field of characteristic 0. J. Algebra, 321 (2009), N. 2, 483–494.

[2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирск
E-mail: yury_sosnovsky@mail.ru

О группах ограниченных подстановок множеств целых и натуральных чисел

Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова

Подстановка g числового множества M называется ограниченной, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Пусть F — группа всех ограниченных подстановок множества целых чисел, H — её подгруппа, порождённая элементами конечных порядков. Ранее было установлено, что H факторизуется двумя локально конечными подгруппами и в неё изоморфно вложимы любая счётная свободная группа, некоторые периодические не локально конечные группы [1, 2].

Изучаются сходства и различия группы F и группы G всех ограниченных подстановок множества натуральных чисел.

Теорема 1. *Группы F и G не являются изоморфными.*

Теорема 2. *$G = AB$, где A, B — локально конечные подгруппы.*

Теорема 3. $G = \langle g \mid g \in G,\ \omega(g) = 1 \rangle$.

Указанные порождающие элементы группы G являются инволюциями.

Теорема 4. $F = \langle f \mid f \in F,\ \omega(f) = 1 \rangle$.

Кроме инволюций в данных порождающих содержатся два элемента бесконечного порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00395.

Список литературы

[1] Сучков Н. М. Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами. Алгебра и логика, 23 (1984), N. 5, 573–577.

[2] Сучков Н. М. О подгруппах произведения локально конечных групп. Алгебра и логика, 24 (1985), N. 4, 408–413.

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Универсальная эквивалентность и строение ассоциатора коммутанта частично коммутативных абелевых групп

Е. И. Тимошенко

Две группы G и H называются универсально эквивалентными, если их универсальные теории совпадают.

Пусть Γ конечный простой граф на множестве вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Частично коммутативная метабелева группа S_Γ задана представлением

$$S_\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_n \mid [x_i, x_j] = 1 \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in \Gamma \rangle$$

в многообразии метабелевых групп.

Выбросим из графа Γ все крайние вершины и инцидентные им ребра. Полученный граф будем обозначать Γ^*.

Теорема 1. *Пусть Γ_1 и Γ_2 деревья на множествах вершин $X = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_{n_2}\}$ соответственно, $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$. Группы S_{Γ_1} и S_{Γ_2} универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда графы Γ_1^* и Γ_2^* изоморфны.*

Следствие. *Пусть S_{Γ_1} и S_{Γ_2} частично коммутативные метабелевы группы, определяющие графы которых Γ_1 и Γ_2 являются конечными деревьями. Тогда вопрос об универсальной эквивалентности этих групп решается алгоритмически и равносилен вопросу об изоморфизме дереьев.*

Пусть $A = \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$. Аннулятор элемента $c \in S'_\Gamma$ обозначим $Ann(c)$. По определению

$$Ann(c) = \{a \in A | c^a = 1\}.$$

Теорема 2 устанавливает, что для любого элемента c из коммутанта S'_Γ фактор-кольцо $A/Ann(c)$ не содержит нильпотентных элементов.

Теорема 2. *Если для некоторого элемента c из коммутанта S'_Γ частично коммутативной метабелевой группы S_Γ, некоторого элемента α из кольца A и некоторого целого числа $m \geq 2$ имеет место равенство $c^{\alpha^m} = 1$, то $c^\alpha = 1$.*

Пусть M некоторый модуль над кольцом A. Простой идеал P кольца A называется ассоциированным с модулем M, если существует элемент $x \in M$, аннулятор которого $Ann(x)$ совпадает с идеалом P.

Множество идеалов, ассоциированных с модулем M, называется ассоциатором M и обозначается $As(M)$.

Теорема 3. *Пусть Γ граф на множестве вершин $X = \{x_1, ..., x_n\}$, $n \geq 2$, S_Γ частично коммутативная метабелева группа, A кольцо лорановых многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если простой идеал P принадлежит ассоциатору коммутанта $As(S'_\Gamma)$, то найдутся вершины $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$, такие что идеал P порожден элементами $1 - x_{i_1}, \ldots, 1 - x_{i_m}$ или является нулевым идеалом.*

НГАСУ(Сибстрин), Новосибирск
E-mail: etim@sibstrin.ru

Факторизации конечных групп холловыми подгруппами

Т. В. Тихоненко, В. Н. Тютянов

В работах [1, 2] рассматривались факторизации простых неабелевых групп двумя подгруппами взаимно простых порядков. Естественно рассмотреть более общую задачу о факторизации простых неабелевых групп холловыми подгруппами.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть $G = AB$ — конечная простая неабелева группа, где A и B собственные холловы подгруппы группы G. Тогда G является простой неабелевой группой одного из следующих типов: A_r, где $5 \leq r$ — простое число; M_{11}; M_{23}; $PSL_2(7)$; $PSL_2(11)$; $PSL_2(29)$; $PSL_2(59)$; $PSL_2(q)$, где $q \not\equiv 1(mod4)$, $q \notin \{7, 11, 29, 59\}$; $PSL_5(2)$; $PSL_r(q)$, где $1 < r$ — нечетное простое число, $(r, q-1) = 1$.*

Отметим, что для всякой простой неабелевой группы из списка теоремы, найдены все холловы факторизации. Отсюда получаем

Следствие. *Пусть $G = AB$ — простая неабелева группа, где A и B холловы подгруппы группы G. Тогда A и B одновременно не могут иметь четные порядки.*

Список литературы

[1] Fisman E. On the product of two finite solvable groups. J. Algebra, 35 (1983), 517–536.
[2] Arad Z., Fisman E. On finite factorizable groups. J. Algebra, 36 (1984), 522–548.

УО "Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины", Гомель
E-mail: `tihonenkotanya@rambler.ru, tyutyanov@front.ru`

Теорема об определяющих симплексах

А. А. Тоболкин

Основные определения, относящиеся к теории n-упорядоченных алгебраических структур, изложены в [1, 2].

Определение 1. Пусть задана сюръекция $\zeta : S^{n+1} \to \{-1, 0, 1\}$, где $|S| \geq n+1$. Если для каждого $A \subset S$, $|A| \leq 2n+1$, существует инъекция (реализация) $\phi : A \to \mathbb{R}^n$ такая, что для всех $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A^n$ выполнено

$$\zeta(x_1; \ldots; x_{n+1}) = \eta_n(\phi(x_1); \ldots; \phi(x_{n+1})),$$

то ζ назовём функцией n-мерного порядка на множестве S.

Определение 2. Пусть $\langle S, \zeta \rangle$ — n-упорядоченное множество, $A \in S^{k+1}$. Если существует такое $B \in S^{n-k}$, что выполняется $\zeta(A, B) \neq 0$, то A назовём *k-симплексом n-упорядоченного множества* $\langle S, \zeta \rangle$.

Определение 3. Пусть A — k-симплекс n-упорядоченного множества $\langle S, \zeta \rangle$. Множество

$$\wp_A = \{x \in S : \zeta(A; S^{n-k-1}; x) = 0\}$$

назовем k-мерной плоскостью, образованной симплексом A.

Теорема 1 (критерий принадлежности плоскости)**.** *Пусть $(A; B)$ является n-симплексом n-упорядоченного множества $\langle S, \zeta \rangle$, $|B| = n-k$, $x \in S$. Тогда x принадлежит плоскости $\wp_A$ если и только если для всех $i = 1, \ldots, n-k$ выполнено*

$$\zeta(A; \int_{[i]}^{x} B) = 0,$$

где $\int_{[i]}^{x} B$ есть вектор B, в котором i-я координата заменятся на x.

Лемма 2. *Пусть $(A; B)$ является n-симплексом n-упорядоченного множества $\langle S, \zeta \rangle$, x — произвольный элемент S, функция ϕ реализует $(A; B; x)$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда условия $x \in \wp_A$ и $\phi(x) \in \pi_{\phi(A)}$ эквивалентны.*

Лемма 3. *Пусть $(A; B)$ — симплекс n-упорядоченного множества $\langle S, \zeta \rangle$, тогда $\wp_A \cap \wp_B = \emptyset$.*

Теорема 4 (об определяющих симплексах)**.** *Пусть A, B — k-симплексы n-упорядоченного множества $\langle S, \zeta \rangle$, причём $B \subset \wp_A$. Тогда $\wp_A = \wp_B$.*

Список литературы

[1] Пестов Г. Г. Двумерно упорядоченные поля. Томск: Изд-во ТГУ, 2003.

[2] Пестов Г. Г. n-упорядоченные множества. Труды Иркутского Государственного Университета, 74, N. 6, 146–169.

ММФ ТГУ, Томск
E-mail: tobantal@gmail.com

Локально лиевы стабилизаторы вершин графов

В. И. Трофимов

Тесно связанная с задачей выталкивания в теории конечных групп задача восстановления стабилизатора вершины графа по его действию на окрестности состоит (в общем виде) в следующем. Пусть R — заданная группа подстановок на конечном множестве. Предположим, что связный граф Γ допускает вершинно-транзитивную группу автоморфизмов G со следующим свойством: для вершины x графа Γ ее стабилизатор G_x в группе G конечен и индуцирует на множестве смежных с x вершин графа Γ группу, подстановочно изоморфную R. Какова при этом предположении может быть группа G_x (как абстрактная группа)?

Для теории конечных групп наибольший интерес представляет случай, когда группа R содержит нормальную подгруппу L, которая является группой присоединенного лиева типа, действующей на классе максимальных параболических подгрупп. Начало исследования последней проблемы восходит к [1, 2], где был рассмотрен случай группы $L = PSL_2(2)$. К началу 90-х годов прошлого века с использованием метода амальгам и результатов об FF-модулях были рассмотрены все случаи, когда L отлична от группы $PSL_n(q)$, $n > 3$, действующей естественным образом на множестве m-мерных (можно считать, что $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$) подпространств n-мерного векторного пространства над F_q. Рассмотрение оказавшегося технически наиболее сложным случая, когда L есть группа $PSL_n(q)$, действующая естественным образом на множестве 1-мерных подпространств n-мерного векторного пространства над F_q, было завершено в серии работ автора (см. [3] в качестве «путеводителя» по этой серии). Рассмотрение случая, когда L есть группа $PSL_n(q)$, $n > 3$, действующая естественным образом на множестве m-мерных, $2 \leq m \leq \frac{n}{2}$, подпространств n-мерного векторного пространства над F_q, и $(n, m) \neq (5, 2)$, было завершено в [4]. Наконец, случай, когда L есть группа $PSL_5(q)$, действующая естественным образом на множестве 2-мерных подпространств 5-мерного векторного пространства над F_q, в настоящее время рассмотрен в [5, 6].

Список литературы

[1] Tutte W. A family of cubical graphs. Proc. Cambridge Phil. Soc., 43 (1947), 459–474.

[2] Tutte W. On the symmetry of cubic graphs. Canad. J. Math., 11 (1959), 621–624.

[3] Trofimov V. I. Vertex stabilizers of locally projective groups of automorphisms of graphs. A summary // Groups, combinatorics and geometry (Durham, 2001) / A.A. Ivanov, M.W. Liebeck, J. Saxl eds. River Edge, NJ: World Sci. Publication, 2003, 313–326.

[4] Trofimov V. I., Weiss R. M. Graphs with a locally linear group of automorphisms. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 118 (1995), 191–206.

[5] Trofimov V. I., Weiss R. M. The group $E_6(q)$ and graphs with a locally linear group of automorphisms. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., to appear.

[6] Trofimov V. I. Supplement to "The group $E_6(q)$ and graphs with a locally linear group of automorphisms" by V. I. Trofimov and R. M. Weiss. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., to appear.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: trofimov@imm.uran.ru

О производной длине конечной группы с заданными силовскими подгруппами

А. А. Трофимук

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Согласно теореме Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. Бициклической называют группу $G = AB$, факторизуемую циклическими подгруппами A и B. Инварианты конечных разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в работе [2]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6. Из теоремы Холла и Хигмена [1, теорема VI.14.16] следует, что производная длина разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами не превышает числа различных простых делителей ее порядка.

В [3] В. С. Монаховым получена оценка производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ в зависимости от порядков силовских подгрупп группы G. В частности, если порядок разрешимой группы не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

В настоящей заметке установлено, что для оценки производной длины достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп не всей группы, как это сделано в [3], а только ее подгруппы Фиттинга. Для формулировки основного результата введем следующие обозначения: $s_p(G) = log_p(|G_p|)$, $s(G) = max\{s_p(G) \mid p \in \pi^*(G)\}$. Здесь G — группа, G_p — ее силовская p-подгруппа, $\pi^*(G)$ — множество всех простых чисел из $\pi(G)$, для которых силовская p-подгруппа в G небициклическая. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа. Если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то $d(G) \leq \rho(s(F)) + max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\}$. Если $\pi^*(F) \neq \emptyset$, то $d(G) \leq 6$.*

Здесь F — подгруппа Фиттинга группы G, $d(G)$ — производная длина разрешимой группы G. Через $\rho(n)$ обозначается максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп группы $GL(n,P)$, где P — поле.

Список литературы

[1] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1990.

[2] Монахов В. С., Грибовская Е. Е. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп. Матем. заметки, 70 (2001), N. 4, 603–612.

[3] Монахов В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп. Алгебра и логика, 43 (2004), N. 4, 411–424.

ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель
E-mail: trofim08@yandex.ru

V-группа с нильпотентной конечной подгруппой

Г. А. Троякова

Группу G назовем V-группой, если для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$, $|a| = p$, $|b| = q$ (p, q — простые числа) подгруппы $\langle b^{-1}ab, a\rangle$, $\langle a^{-1}ba, b\rangle$ конечны [1].

Теорема. *Если в периодической V-группе G любая конечная подгруппа нильпотентна, то $G/Z(G)$ разлагается в прямое произведение силовских подгрупп.*

Группы, фигурирующие в этой теореме, не исчерпываются прямыми произведениями силовских подгрупп. Существует нерасщепляемое расширение конечной группы составного порядка с помощью p-группы Новикова — Адяна (p не делит n) [2]. Такая группа является V-группой, фактор-группа $G/Z(G)$ которой разлагается в прямое произведение силовских подгрупп. Ранее [1] эта теорема была доказана только для случая без инволюций.

Список литературы

[1] Троякова Г. А. К теории черниковских групп. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. АН Украины, Ин-т математики, 1994, 290–311.

[2] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

Кафедра алгебры и геометрии ТывГУ, г. Кызыл
E-mail: afanasy@tyva.ru

Каноническое разложение локальной абелевой группы без кручения

В. Х. Фарукшин

Рассматриваются p-локальные абелевы группы без кручения.

Определение. Неразложимая группа S называется *группой расщепления* для G, если $G \otimes S$ является прямой суммой делимой группы и свободной S-группы.

Теорема 1. *Всякая p-локальная группа G без кручения конечного ранга имеет единственную с точностью до изоморфизма группу расщепления S минимального ранга p-ранга 1.*

Теорема 2. *Если S — группа расщепления минимального конечного ранга и p-ранга 1 для G, то она является сильно неразложимой, сильно однородной изоморфной аддитивной группе ее кольца эндоморфизмов, алгебра квазиэндоморфизмов которой является конечным расширением поля $\mathbb{Q}$.*

Если группа G S-расщепляемая, то будем называть ее также R-расщепляемой, где R — алгебра квазиэндоморфизмов группы S.

Всякому композиционному ряду группы Галуа поля R, реализованному в поле p-адических чисел, соответствует ряд полей

$$\mathbb{Q} = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_m = R,$$

которому, в свою очередь, однозначно соответствует ряд категорий R_i-расщепляемых групп с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{K}_m.$$

В относительной гомологической алгебре в каждой категории $\mathcal{K}_i$ существуют неразложимые относительно проективные и инъективные объекты двойственные друг другу в смысле Арнольда.

Теорема 3. *Всякая p-локальная группа без кручения конечного ранга имеет разложение*

$$G = G_0 \oplus G_1 \oplus \ldots \oplus G_m \oplus G_*,$$

где

1. *G_* не содержит прямых слагаемых, являющихся инъективными или проективными в категории $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$;*
2. *$G_i = P_i \oplus J_i$, где P_i — прямая сумма проективных групп категории $\mathcal{K}_i$, а J_i — прямая сумма инъективных групп категории $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$;*
3. *$G_0 = P_0 \oplus J_0$, где P_0 — максимальное свободное прямое слагаемое, а J_0 — максимальная делимая подгруппа.*

Заметим, что выделение прямым слагаемым делимой подгруппы J_0 общеизвестно. Выделение прямым слагаемым P_0 рассмотрено А. И. Мальцевым в хорошо известной статье «Абелевы группы конечного ранга без кручения», 1938 г.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: fvkh@mail.ru

Теорема Мальцева об абелевых группах

А. А. Фомин

А. И. Мальцев в своей кандидатской диссертации описал абелевы группы без кручения конечного ранга при помощи матриц специального вида. Теорема Мальцева недавно получила следующее развитие. Для каждой упорядоченной пары матриц определяется группа морфизмов из одной матрицы в другую. Таким образом, совершенные в терминологии Мальцева матрицы образуют категорию. Эта категория является двойственной категории абелевых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами. При этом, соответствие Мальцева между группами и матрицами совпадает с функтором двойственности.

Одновременно с Мальцевым и независимо от него Д. Дэрри получил описание того же класса абелевых групп при помощи матриц, введенных ранее Курошем для так называемых p-примитивных групп.

Нам представляется более естественным обобщение теоремы Куроша на факторно делимые группы, каковыми, в частности, являются p-примитивные группы Куроша. Это обобщение оказывается эквивалентностью между упомянутой выше категорией совершенных матриц Мальцева и категорией смешанных факторно делимых групп с квазигомоморфизмами.

Композиция двойственности, которая получается из теоремы Мальцева, и эквивалентности, обобщающей теорему Куроша, совпадает с двойственностью, введенной У. Уиклессом и автором в 1998 г.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: alexander.fomin@mail.ru

Абнормальные функторы на универсальных алгебрах

А. Д. Ходалевич

Рассматриваются алгебры из фиксированного мальцевского многообразия. Используются определения и обозначения из [1].

Определение. Пусть Θ — отображение, которое ставит в соответствие каждой алгебре A некоторое множество $\Theta(A)$ её максимальных подалгебр и саму алгебру A, причем $\Theta(A^f) = (\Theta(A))^f$, где f — произвольный изоморфизм алгебры A и $(\Theta(A))^f = \{M^f | M \in \Theta(A)\}$. Тогда Θ будем называть m-функтором.

m-функтор Θ назовем регулярным, если для любой алгебры A и любой конгруэнции α на A выполняются условия:

1) из $M \in \Theta(A)$ всегда следует $\alpha M/\alpha \in \Theta(A/\alpha)$;

2) из $M/\alpha \in \Theta(A/\alpha)$ следует $M \in \Theta(A)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс алгебр. Тогда, согласно [1], максимальная подалгебра M алгебры A называется $\mathfrak{X}$-абнормальной, если $A/M_A \notin \mathfrak{X}$, M_A — наибольшая конгруэнция на A такая, что $M_A M = M$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, Θ — отображение, которое ставит в соответствие каждой алгебре A множество $\Theta(A)$ всех её $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подалгебр и саму алгебру A. Тогда Θ является регулярным m-функтором.*

В частности, отсюда следует аналогичный результат для групп [2].

Список литературы

[1] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

[2] Селькин М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Бел. навука, 1997.

УО "ГГУ им. Ф. Скорины", г.Гомель
E-mail: kolenchukova@gsu.by

О разрешимости групп с ограниченной длиной цепочек централизаторов

Е. И. Хухро

Максимальная длина цепочек вложенных централизаторов называется c-размерностью группы (или высотой решетки централизаторов). Доказывается, что если конечная разрешимая группа имеет c-размерность k, то ее ступень разрешимости k-ограничена (т. е. ограничена в терминах k). Доказательство основано на теоремах типа Холла — Хигмана и теореме Томпсона о централизаторе автоморфизма простого порядка.

В качестве одного следствия получается, что периодическая локально разрешимая группа конечной c-размерности k разрешима k-ограниченной ступени, а ранг ее фактор-группы по локально-нильпотентному радикалу (Плоткина — Хирша) k-ограничен.

В качестве другого следствия получается, что квази-(конечная разрешимая) группа конечной c-размерности k разрешима k-ограниченной ступени. По определению группа является квази-(конечной разрешимой), если она элементарно эквивалентна ультрапроизведению конечных разрешимых групп.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

Кослед кольца псевдорациональных чисел

А. В. Царев

Через $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ будем обозначать кольцо целых p-адических чисел. Если M — подмножество группы G, то через $\langle M\rangle_*$ будем обозначать сервантную оболочку множества M, состоящую из всех таких $g \in G$, что $ng \in \langle M\rangle$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подкольцо

$$R = \langle 1, \bigoplus_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p\rangle_* \subset \prod_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$$

в кольце универсальных чисел $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, которое называется *кольцом псевдорациональных чисел.*

Определение. Абелева группа G называется *факторно делимой*, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что G/F — делимая периодическая группа.

Редуцированная факторно делимая группа G вкладывается в свое $\mathbb{Z}$-адическое пополнение $\widehat{G}$, являющееся $\widehat{\mathbb{Z}}$-модулем, а значит, и R-модулем. Тогда для произвольной факторно делимой группы G определим R-модуль $\mathcal{R}(G) = divG \oplus \langle G\rangle_R$, который называется *псевдорациональной оболочкой* группы G.

Последовательность $(k_p)_{p\in P}$, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞, называется *кохарактеристикой* элемента $g \in G$, если k_p — наименьшее такое, что $p^{k_p} g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n G$. Будем писать $(k_p) = cochar(g)$.

Рассмотрим множество $K_G(H) = \bigcap\limits_{\varphi\in\mathrm{Hom}(G,H)} \ker\varphi$. Факторгруппа $G/K_G(H)$ называют *коследом* группы H в G. Нас интересует случай, когда G — факторно делимая группа, а $H = R$ — кольцо псевдорациональных чисел.

Теорема 1. *Пусть G — факторно делимая группа, тогда*

1. $K_G(R) = \{g \in G \mid cochar(g)$ *не содержит символов* $\infty\}$*;*
2. $K_G(R)$ *— сервантная вполне инвариантная подгруппа в* G*;*
3. $\langle K_G(R)\rangle_R = K_G(R)$*, т. е.* $K_G(R)$ *является* R*-модулем;*
4. $G/K_G(R)$ *— редуцированная факторно делимая группа без кручения;*
5. $K_G(R)/t(G) = div\big(G/t(G)\big)$*;*
6. $K_G(R) = G \;\Leftrightarrow\; G/t(G)$ *— делимая группа;*
7. $K_G(R) = t(G) \;\Leftrightarrow\; G/t(G)$ *— редуцированная группа.*

Теорема 2. *Для факторно делимой группы следующие условия равносильны:*

1. $G/t(G)$ *— почти делимая группа;*
2. $\mathcal{R}(G) = K_G(R) \oplus K$*, где* K *— конечная прямая сумма модулей вида* $\widehat{\mathbb{Z}}_p$*, возможно по различным простым* p*;*
3. $G = K_G(R) \oplus H$*, где* H *— почти делимая группа без кручения.*

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: an-tsarev@yandex.ru

О гамильтоновой разложимости графов Кэли бесконечной циклической группы

О. А. Чуешева

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — взаимно простые натуральные числа. Обозначим через $C(a_1, \ldots, a_k)$ граф, вершинами которого являются целые числа и две вершины x, y смежны, если $|x - y| = a_i$ для некоторого i. Этот граф является графом Кэли группы Z относительно порождающего множества $\{\pm a_1, \ldots, \pm a_k\}$.

Регулярный граф степени $2k$ называется гамильтоново разложимым, если множество его ребер можно разбить на k гамильтоновых циклов (в случае бесконечного графа — на k двусторонних гамильтоновых цепей). Известно, что для конечных абелевых групп все графы Кэли степени 4 гамильтоново разложимы. В случае бесконечных абелевых групп это не так: например, граф $C(1, 2)$ неразложим.

Теорема. *Если m, n — взаимно простые нечетные числа, то граф $C(m, n)$ гамильтоново разложим.*

Следствие. *Если $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — различные нечетные числа и $(a_i, b_i) = 1$, то графы $C(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ и $C(1, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ гамильтоново разложимы.*

Отметим, что разложения, полученные в теореме, симметричны: существует автоморфизм графа (сдвиг), переводящий одну гамильтонову цепь в другую. Вопрос о существовании несимметричных гамильтоновых разложений открыт.

КемГУ, Кемерово
E-mail: simran@ngs.ru

О существовании решетки доминионов в квазимногообразиях абелевых групп

С. А. Шахова

Согласно [1], доминионом подалгебры H универсальной алгебры A в полной категории $\mathcal{M}$ $(A \in \mathcal{M})$, обозначаемым $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$, называется множество элементов $a \in A$ таких, что $\varphi(a) = \psi(a)$ для любых морфизмов $\varphi, \psi : A \to M (M \in \mathcal{M})$, совпадающих на H.

А. И. Будкин, исследуя доминионы в квазимногообразиях универсальных алгебр [2], распространил это понятие на случай $A \notin \mathcal{M}$ и ввел в рассмотрение множество

$$L(A, H, \mathcal{M}) = \{\mathrm{dom}_A^{\mathcal{N}}(H) \mid \mathcal{N} \in L_q(\mathcal{M})\},$$

где $L_q(\mathcal{M})$ — решетка подквазимногообразий квазимногообразия $\mathcal{M}$. В [2] было доказано, что при определенных условиях множество $L(A, H, \mathcal{M})$ образует решетку относительно теоретико-множественного включения и сформулирован вопрос: существует ли такое квазимногообразие $\mathcal{M}$ универсальных алгебр, что для некоторых алгебр A и H множество $L(A, H, \mathcal{M})$ не образует решетку относительно теоретико-множественного включения?

Изучение этой проблемы применительно к квазимногообразиям абелевых групп показало, что среди них таких квазимногообразий нет, а верен следующий результат.

Теорема. *Для произвольного квазимногообразия $\mathcal{M}$ абелевых групп, группы A и ее подгруппы H множество $L(A, H, \mathcal{M})$ образует решетку относительно теоретико-множественного включения.*

Список литературы

[1] Isbell J. R. Epimorphisms and dominions. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, New York: Springer-Verl., 1966, 232–246.

[2] Budkin A. Dominions in quasivarieties of universal algebras. Studia Logica, 78 (2004),N. 1–2, 107–127.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: sashakhova@gmail.com

О полупрямых произведениях групп с интерполяционным условием

Е. Е. Ширшова

Пусть G — частично упорядоченная группа (*po*-группа). $G^+ = \{x \in G| \, e \leq x\}$. Говорят, что *po*-группа G является группой с интерполяционным условием, если для любых элементов a_1, a_2, b_1, b_2 группы G справедливость неравенств $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$ влечет существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$.

Теорема 1. *Пусть $\{G_i | i \in I\}$ — семейство po-групп, и $\overline{G}$ — декартово произведение po-групп G_i (см. [2]). Если G_i — группа с интерполяционным условием для каждого $i \in I$, то $\overline{G}$ является группой с интерполяционным условием.*

Направленную группу с интерполяционным условием называют группой Рисса (см. [3]).

Пусть группа GA является полупрямым произведением A и G (см. [1]), где G — направленная группа, A — *po*-группа, $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех $g \in G^+$, и

$$P = \{ga \in GA| \text{ либо } \quad g \in G^+ \setminus \{e\}, \quad \text{либо} \quad g = e \quad \text{и} \quad a \in A^+\}.$$

Теорема 2. *Группа GA является po-группой с положительным конусом P, A — выпуклая подгруппа группы GA, и $G \cap P = G^+$.*

Теорема 3. *Если GA — полупрямое произведение A и G, A и G являются группами Рисса, и $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех $g \in G^+$, то GA — группа Рисса.*

Пусть A и B — произвольные группы, $\overline{A} = \overline{\prod}_{b \in B} A^b$ — декартово произведение групп A^b, где $A^b \cong A$ для каждого $b \in B$. Полупрямое произведение $B\overline{A}$ называется декартовым сплетением ($AWrB$) групп A и B (см. [1]).

Теорема 4. *Пусть A и B — группы Рисса. Если $b^{-1}A^+b \subseteq A^+$ для каждого $b \in B^+$, то декартово сплетение $AWrB$ является группой с интерполяционным условием.*

Список литературы

[1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
[2] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
[3] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: `e.shir@relcom.ru`

Isotyped representations of groups

E. V. Aladova, A. A. Gvaramiya, B. I. Plotkin

Let K be a commutative and associative ring with unit and let (V, G) be a representation of a group G in a K-module V. We consider such representations from the point of view of some logic. In particular, we consider various logical invariants of the representations and relations between different representations which defined by such invariants. One of the basic relations is the relation of isotypeness. Here we use a concept of a type from the Model Theory. If two representations are isotyped then they are elementary equivalent. We also consider a concept of logically Noetherian representations. If two representations (V_1, G_1) and (V_2, G_2) are logically Noetherian and elementary equivalent then they are isotyped.

In the Model Theory the concept of homogeneous algebra plays a very important role. We apply this concept to representations of groups and connect it with the idea of the type of the representation. It is known [1], [2] that every group can be embedded into a homogeneous one, and that every homogeneous group is logically perfect. We have the similar problem for representations of groups: is it true that every representation can be embedded to a homogeneous one? Note, that if a representation can be embedded to a homogeneous one then it is embedded to the logically perfect representation.

This work adjoins the paper [2], where the similar problems are considered for one-sorted algebras.

References

[1] Higman G., Neumann B., Neumann H. Embedding Theorems for Groups. Jornal of the London Mathematical Society, 24 (1949) N. 4, 247–254.

[2] Plotkin B. I. Isotyped algebras. Arxiv: math.LO/0812.3298v2 (2009).

Bar-Ilan University, Ramat Gan
E-mail: aladovael@mail.ru
Abkhaz State University, Sukhum
E-mail: agvaramia@mail.ru
Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem
E-mail: plotkin@macs.biu.co.il

Automorphisms and monomorphisms of free Burnside groups

V. S. Atabekyan

Let $\mathbf{B}_n$ be the variety of all groups, that satisfy the identity $x^n = 1$. The free group of rank m in this variety is denoted by $B(m,n)$ and called free Burnside group of period n and rank m.

Theorem 1. *Let $n \geq 1003$ be arbitrary odd number and φ be an automorphism of group $B(m,n)$, such that $\varphi(N) = N$ for any maximal normal subgroup $N \trianglelefteq B(m,n)$, for which ${}^{B(m,n)}\!/_{N}$ is non-abelian group. Then φ is inner automorphism.*

Corollary 1.1. *For any odd $n \geq 1003$ every normal automorphism of free Burnside group $B(m,n)$ of rank $m \geq 2$ (finite or infinite) is inner automorphism.*

The similar results about normal automorphisms for other classes of groups have been proved by M. Jarden, A. Lubotzky, A. S.-T. Lue, N. Romanovskii, V. Roman'kov, G. Endimioni, M. Neschadim, O. Bogopolski, E. Kudryavtseva, H.Zieschang, E. Cherepanov, A. Minasyan, and D. Osin.

Theorem 2. *For any odd $n \geq 1039$ there exist words $u(x,y), v(x,y)$ over the group alphabet $\{x,y\}$, such that if a,b are two elements, generating non-cyclic subgroup of group $B(m,n)$, then for some p the elements $u(a^p,b), v(a^p,b)$ freely generate subgroup that is isomorphic to the free Burnside group $B(2,n)$ (moreover, $p = 2^k$ and $0 \leq k \leq 9$).*

Corollary 2.1. *There exists a monomorphism $\phi : B(2,n) \to B(2,n)$, such that for any endomorphism $\varphi : B(2,n) \to B(2,n)$ with non-cyclic image, there exists an automorphism $\tau : B(2,n) \to B(2,n)$ for which $\varphi \circ \tau \circ \phi$ is monomorphism.*

Corollary 2.2. *For any odd $n \geq 1039$ free Burnside groups $B(m,n)$ are uniformly non-amenable.*

Yerevan State University, Yerevan (Armenia)
E-mail: avarujan@ysu.am

Groups with minimal conditions

N. Chernikov

The author plans to give a detailed survey of results relating to the important direction of investigations in the theory of groups defined by minimal conditions. Note, for example, the following "united" author's theorem belonging to this direction.

Remind that nonabelian groups with proper abelian subgroups are called Miller—Moreno.

Theorem. *Let G be a binary finite group. Then the following statements are equivalent:*

(i) G is Chernikov.

(ii) G is Artinian.

(iii) G satisfies the weak minimal condition on subgroups.

(iv) G satisfies the weak maximal condition on subgroups.

(v) G satisfies the minimal condition on abelian subgroups.

Further, in the case when G is nonabelian, the statement (i) is equivalent to each of the following statements:

(vi) G satisfies the minimal, or even if the weak minimal, condition on nonabelian subgroups.

(vii) G satisfies the minimal, or even if the weak minimal, condition on nonabelian metabelian subgroups.

(viii) G satisfies the weak maximal condition on nonabelian subgroups.

(ix) G satisfies the weak maximal condition on nonabelian metabelian subgroups.

(x) Any nonabelian metabelian subgroup $H = A\lambda B$ of G, where A is a direct product of some finite elementary abelian minimal normal subgroups M of H and B is a finite p-subgroup for some primer p, and also either $B = \langle b \rangle$ and $[b^p, A] = 1$ or B is Miller—Moreno and $[B, A] = 1$, satisfies the weak minimal or weak maximal condition on nonabelian subgroups $L\lambda B$ such that L is a direct product of some M.

(xi) Any above subgroup H is finite.

Department of Algebra, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine
E-mail: chern@imath.kiev.ua

Evaluation of the multiple combinatorial sums in a problem of enumeration of $\mathcal{D}$-invariant ideals of a ring $R_n(K,J)$

G. P. Egorychev, M. N. Davletshin

Let K be a local ring with principal maximum ideal J which is nilpotent of step s. Following [3], authors solve a problem of determination of number $\Omega(n,s)$ of $\mathcal{D}$-invariant ideals of the ring $R_n(K,J)$ for all $n\times n$ matrices over an associative ring K with elements from an ideal J of K on and above the main diagonal (see also [4]). The solution of this combinatorial problem has been shown by us to a series of problems of enumeration of number of ways of various type on a rectangular lattice [1]. It has led us to necessity of an evaluation of the several complicated sums with binomial of coefficients $\binom{n}{k}$, $n=0,1,\dots$, $k=0,1,\dots,n$, including the following multiple sum $S_r^{(n-1)}(i-1,j)=$

$$\sum_{r\geq 1}\Big\{\sum_{k_1=0}^{r-1}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{s=r-k_2-1}^{2r-k_1-k_2-2}\binom{i-1}{k_1}\binom{j-i}{s}\binom{n-j}{k_2}\binom{s}{2r-s-k_1-k_2-2}\times\frac{k_1-k_2+1}{s-r+k_1+2}\binom{2s-2r+k_1+k_2+2}{s-r+k_2+1}+$$

$$\sum_{k_1=0}^{r-1}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{s=r-k_2-1}^{2r-k_1-k_2-2}\binom{i-1}{k_1}\binom{j-i}{s}\binom{n-j}{k_2}\binom{s}{2r-s-k_1-k_2-2}\times\frac{k_2-k_1+1}{s-r+k_2+2}\binom{2s-2r+k_1+k_2+2}{s-r+k_1+1}\Big\}.$$

By difficult calculations of this expression we used the idea of integral representation of combinatorial sums (the method of coefficients, [2]).

Theorem. *The following identity is valid*:

$$S_r^{(n-1)}(i-1,j)=2^{2n-1}+(n-1)\binom{2n-2}{n-1}-\frac{4}{n}\binom{2n}{n-2}-\binom{2n}{n},\ n\geq 2,\ r\geq 1,\ i=1,\dots,n,\ j>i-1.$$

The spent evaluations have allowed to discover number $\Omega(n,s)$ of $\mathcal{D}$-invariant ideals of ring $R_n(K,J)$ as the sum of degrees of 2 and binomial of coefficients of certain type. A series of similar problems is considered in [1].

References

[1] Andrews G., Krattenthaler C., Orsina L., Papi P. *ad*-Nilpotent *b*-ideals in *sl*(*n*) having a fixed class of nilpotence. Combinatorics and enumeration. arXiv:math/0004107v1 [math.RA], 17 Apr 2000.

[2] Egorychev G. P. Integral Representation and the Computation of Combinatorial Sums. Novosibirsk: Nauka, 1977 (Russian); English Translation: Math. Monographs, Vol. 59, Amer.Math. Soc., (1984), 2nd edn in 1989.

[3] Egorychev G. P., Levchuk V. M. Enumeration in the Chevalley algebras. ACM SIGSAM Bulletin 35 (2001), 20–34.

[4] Egorychev G. P., Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. Some enumerative questions for algebras and modules over rings with strongly maximal ideals. (2008) (to appear).

Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: `anott@scn.ru`
Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: `makdav@rambler.ru`

Algebraic and semialgebraic problems in geometric tomography

V. P. Golubyatnikov, Y. N. Yomdin

Let $V_0, V_1, V_2 \subset E^n$ be convex compact bodies in an Euclidean space E^n (real, complex etc). Denote by $V_i(P^k)$ orthogonal projection of the body V_i onto k-dimensional plane $P^k \subset E^n$. Let $d(A, B)$ be the Hausdorff metric.

Fix some $k < n$. Let $G, H \subseteq ISO(E^k)$ be subgroups of groups of isometries of corresponding Euclidean space E^k. Denote by $g(P^k) \in G$, $h(P^k) \in H$ elements of these groups as continuous functions of the argument P^k.

We study an algebraic problem concerning the Minkowski sum. *Let*

$$V_1(P^k) = h(P^k)(V_2(P^k)) + g(P^k)(V_0(P^k)), \tag{1}$$

for all planes $P^k \subset E^n$. How different can the bodies V_1, V_2 be?

We start from the case when V_0 is a ball $B(O, r)$, $H = ISO^+(R^2)$ preserves orientation of R^2 and G is a group of parallel translations in E^k:

Theorem 1. *If $h(P^2)$ is a single-valued function then (1) implies that the bodies V_1 and $V_2 + B(O, r)$ are either parallel translates or centrally symmetric each other.*

Similar results can be obtained in the complex spaces for $k \geq 2$ as well, see [1]. Note that if $H = G$ consists of linear conformal automorphisms of R^2 and V_1, V_2 are centrally symmetric, then V_1 and $V_2 + B(O, r)$ need not be affine equivalent ([2]).

These considerations are connected with the semialgebraic approximation problems and with complexity theory in the case when $r = \varepsilon$ is sufficiently small, (see [1], [3]): *Let*

$$d_H(V_1(P^k), V_2(P^k)) := \min_{h \in H} d(V_1(P^k), h(V_2(P^k))) < \varepsilon. \tag{2}$$

for all planes $P^k \subset E^n$. How close can these bodies be?

Theorem 2. *If projections of $V_1, V_2 \subset R^3$ onto any 2-dimensional plane do not have $SO(2)$-symmetries and ε is sufficiently small, then (2) implies that V_1 and V_2 can be done $9 \cdot \varepsilon^{1/3}$-close either by a parallel translation, or by a central symmetry.*

This theorem can be generalized to higher-dimensional spaces as well.

The work was partially supported by Leading Scientific Schools grant 8526.2006.1, by ADS-Program of Development of Scientific Potential of Higher School, grant 2.1.1/3707, and by Joseph Meyerhoff visiting professorship at the Weizmann Institute of Science.

References

[1] Golubyatnikov V. P. Uniqueness Questions in Reconstruction of Multidimensional Objects from Tomography-Type Projection Data. VSP BV, The Netherlands, 2000.

[2] Gardner R. J. Geometric Tomography, 2-nd Edition. NY: Cambridge Univ. Press, 2006.

[3] Yomdin Y. Semialgebraic complexity of functions. J. of Complexity, 21 (2005), N 1, 111–148.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
E-mail: glbtn@math.nsc.ru
Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel
E-mail: yosef.yomdin@weizmann.ac.il

On solubility of groups with bounded centralizer chains

E. I. Khukhro

The c-dimension of a group (or the height of its centralizer lattice) is defined as the maximum length of nested chains of centralizers. It is proved that if a finite soluble group has c-dimension k, then its derived length is bounded in terms of k (for short, k-bounded). The proof is based on the Hall—Higman type theorems and Thompson's theorem on the centralizer of an automorphism of prime order.

One corollary is that a periodic locally soluble group of finite c-dimension k is soluble of k-bounded derived length and the rank of its quotient by the Hirsch—Plotkin radical (i. e., locally nilpotent radical) is k-bounded.

Another corollary is that a quasi-(finite soluble) group of finite c-dimension k is soluble of k-bounded derived length. By definition a group is quasi-(finite soluble) if it is elementarily equivalent to an ultraproduct of finite soluble groups.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

Mal'cev's theorem and sub-Riemannian geometry

S. V. Selivanova, S. K. Vodop'yanov

Sub-Riemannian geometry (see e.g. [1] and references therein) models physical processes, in which it is possible to move only along several "horizontal" directions, and naturally arises in many applications. Motivated by metrical questions of sub-Riemannian geometry, we study a slightly more general object — a topological (in particular, quasimetric) space X on which a dilation structure is given (dilations are one-parametric families of contractive homeomorphisms defined in a neighborhood of each point $x \in X$). Axioms of a dilation structure allow to define in a neighborhood of each point $x \in X$ a local topological group $\mathcal{D}^x$. The study of algebraic properties of spaces with dilations turns out to be closely related to the celebrated H5 problem, which is solved for global groups e.g. in [2]. Generalizing results of [2] to local groups (where product is a partial function) is nontrivial, but in our case this difficulty may be overcome by means of the following well-known theorem due to A. I. Mal'cev.

Theorem 1 [3]. *A local topological group $\mathcal{G}$ is locally isomorphic to a topological group G if and only if the global associativity property in a neighborhood of identity $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ holds, i.e. for each n-tuple of elements $a_1, a_2 \dots, a_n \in \mathcal{U}$, whenever there exist two different ways of introducing parentheses so that all intermediate products are defined, the resulting products are equal.*

Using Theorem 1 and properties of dilations we show that the local group $\mathcal{D}^x$ is locally isomorphic to a contractible topological group and then apply known results regarding contractible groups [4]. From the metrical point of view, these considerations combined with results from [5] imply

Theorem 2 [6]. *The tangent cone to a (quasi)metric space with a dilation structure is a Lie group, the Lie algebra of which is graded and nilpotent.*

The notion of the tangent cone to a metric space was introduced by M. Gromov. It generalizes the notion of the tangent space to a smooth manifold, in the sense that the tangent cone is the first order approximation to the original space.

References

[1] Karmanova M., Vodopyanov S. Geometry of Carno-Carathèodory spaces, differentiability and coarea formula. In: Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics. Basel: Birkhäuser, 2009, 231–332.

[2] Montgomery D., Zippin L. Topological transformation groups. New York: Interscience, 1955.

[3] Mal'cev A. I. On local and global topological groups. Doklady USSR, 32 (1941), N. 1, 606–608 (Russian).

[4] Siebert E. Contractive automorphisms on locally compact groups. Mat. Z., 191 (1986), 73–90.

[5] Selivanova S. V. The tangent cone to a regular quasimetric Carnot — Carathèodory space. Doklady Mathematics, 425 (2009), N. 5, 595–599.

[6] Selivanova S. V., Vodopyanov S. K. Algebraic properties of the tangent cone to a quasimetric space with a dilation structure. Doklady Mathematics, 2009 (to appear).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: s_seliv@yahoo.com, vodopis@math.nsc.ru

$(2,k)$-Generation of matrix groups

C. Tamburini

It is well known that all finite simple groups can be generated by two elements. This important result was proved by Miller (1901) for the alternating groups, Steinberg (1962) for the groups of Lie type and Aschbacher—Guralnick (1984) for the sporadic groups. Actually there is great abundance of generating pairs: indeed two randomly chosen elements of a finite simple group G generate G with probability $\to 1$ as $|G| \to \infty$, as shown in papers of Kantor—Lubotzky (1990) and Liebeck and Shalev (1995). This allows various modifications of the 2-generation problem, which was addressed by many authors. In particular the constructive approach received a lot of attention, in view of the applications.

Let us recall that a group is said to be (n,k)-generated (respectively (n,k,ℓ)-generated) if it can be generated by a pair of elements of respective orders n and k (whose product has order ℓ). Significative instances of these classes of groups are the $(2,3)$-generated groups, i.e. the epimorphic images of $\mathrm{PSL}_2(Z)$ whose order is infinite or divisible by 6, and the $(2,3,7)$-generated groups which, in the finite case, are also called Hurwitz groups.

After a brief survey of the main results in this area, I will describe some more recent ones, due to M. Vsemirnov, A. Zalesskii and myself, in the more general context of matrix groups over finitely generated rings. In particular I will illustrate the methods and the relevance of a formula of L. Scott for this kind of problems.

Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia, Italy
E-mail: `Tamburini@dmf.unicatt.it`

Endomorphisms of rectangular relations

Y. V. Zhuchok

Let $\Im(X)$ be a symmetric semigroup of all transformations of set X and $\rho \subseteq X \times X$. The transformation $\varphi \in \Im(X)$ is called endomorphism of relation ρ if for all $a, b \in X$ condition $(a; b) \in \rho$ implies $(a\varphi; b\varphi) \in \rho$. The set of all endomorphisms of relation ρ is a semigroup relative to ordinary operation of transformations' composition. The semigroup is called an endomorphisms' semigroup of relation ρ and denoted as $E_\rho(X)$.

For binary relation ρ on a set X we put $c(\rho) = Dom\rho \cup Im\rho$. If $f : A \to B$ is an arbitrary mapping, $Y \subseteq A$, then through $f|_Y$ we designate the restriction of mapping f on the subset Y and by $Map(A; B)$ the set of all maps from A into B.

A binary relation ρ on a set X is called a rectangular if $(a; b) \in \rho$, $(c; d) \in \rho$ implies $(a; d) \in \rho$ for all $a, b, c, d \in X$. Let $Rec(X)$ be a set of all rectangular relations on a set X. We have the next

Lemma. *The transformation $f \in \Im(X)$ is endomorphism of relation $\rho \in Rec(X)$ if and only if or $c(\rho) = X$ and one of the next conditions is hold:*

(i) $Dom\rho = Im\rho$;
(ii) $Dom\rho \cap Im\rho = \emptyset, f\,|_{Dom\rho} \in \Im(Dom\rho), f\,|_{Im\rho} \in \Im(Im\rho)$;
(iii) $Dom\rho \subset Im\rho, f\,|_{Dom\rho} \in \Im(Dom\rho), f\,|_{Im\rho \setminus Dom\rho} \in Map(Im\rho \setminus Dom\rho; X)$;
(iv) $Im\rho \subset Dom\rho, f\,|_{Im\rho} \in \Im(Im\rho), f\,|_{Dom\rho \setminus Im\rho} \in Map(Dom\rho \setminus Im\rho; X)$;
(v) $f\,|_{Im\rho \cap Dom\rho} \in \Im(Im\rho \cap Dom\rho), f\,|_{Dom\rho \setminus Im\rho} \in Map(Dom\rho \setminus Im\rho; Dom\rho)$, $f\,|_{Im\rho \setminus Dom\rho} \in Map(Im\rho \setminus Dom\rho; Im\rho)$;
or $c(\rho) \neq X, f\,|_{c(\rho)} \in E_\rho(c(\rho))$ *and* $f\,|_{X \setminus c(\rho)} \in Map(X \setminus c(\rho); X)$.

Here the semigroup which is isomorphic to semigroup of all endomorphisms of an arbitrary rectangular relation is constructed. Regularity, definability, idempotents and other properties of the semigroup of endomorphisms of a rectangular relation are described also. Study of different properties of endomorphisms' semigroups of other types of binary relations can be seen for example in [1–3].

References

[1] Higgins P. M., Mitchell J. D., Ruškuc N. Generating the full transformation semigroup using order preserving mappings. Glasgow Math.J., 45 (2003), 557–566.

[2] Kim V. I., Kozhuhov I. B. On semigroups of isotone transformations of partially ordered sets. (Russian) Uspehi matematicheskih nauk, 62 (2007), N. 5, 155–157.

[3] Zhuchok Y. V. Endomorphisms of equivalence relations. (Ukrainian) Visnyk Kyivskogo universiteta. Seriya: phizyko-mathematychni nauki, 3 (2007), 22–26.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk
E-mail: `zhuchok_y@mail.ru`

III. Секция «Теория колец»

Обобщенные SV-кольца

А. Н. Абызов

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными. Модуль M называется I_0-*модулем*, если каждый его немалый подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. Кольцо R называется *обобщенным справа (слева) SV-кольцом*, если каждый правый (левый) R-модуль является I_0-модулем. Если над кольцом R каждый правый и левый R-модуль является I_0-модулем, то назовем кольцо R *обобщенным SV-кольцом.*

С помощью трансфинитной индукции для каждого ординала α в произвольном кольце R определим идеал $I_\alpha(R)$. При $\alpha = 0$ положим $I_\alpha(R) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $I_{\beta+1}(R)/I_\beta(R)$ — сумма всех простых инъективных подмодулей правого R-модуля $R/I_\beta(R)$. Когда α — предельное ординальное число, положим $I_\alpha(R) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta(R)$. Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеют место равенства $I_\tau(R) = I_{\tau+1}(R)$. Далее через $I(R)$ будем обозначать идеал $I_\tau(R)$.

В работе [1, стр. 735] был приведен пример кольца R, над которым каждый правый модуль является I_0-модулем, но среди левых R-модулей найдется не I_0-модуль. Следующая теорема описывает обобщенные SV-кольца.

Теорема. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — обобщенное SV-кольцо;*

(2) *R — обобщенное справа SV-кольцо, у которого каждый первичный образ артинов;*

(3) *R — обобщенное справа SV-кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов;*

(4) *R — полуартиново кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов, $R/I(R)$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2(R/I(R)) = 0$.*

Список литературы

[1] Абызов А. Н. Слабо регулярные кольца над нормальными кольцами. Сиб. мат. журн., 49 (2008), N. 4, 721–738.

г. Казань
E-mail: aabyzov@ksu.ru

О решеточном изоморфизме полуколец непрерывных функций

Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров

Пусть X — произвольное топологическое пространство, $C^+(X)$ — полукольцо всех непрерывных неотрицательных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения, $A(C^+(X))$ — решетка всевозможных подалгебр полукольца $C^+(X)$ относительно включения и $A_1(C^+(X))$ — ее подрешетка, состоящая из всех подалгебр с 1. *Подалгеброй* в полукольце $C^+(X)$ называется его подполукольцо, выдерживающее умножение на константы.

Теорема 1. *Для любых топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1) *решетки $A(C^+(X))$ и $A(C^+(Y))$ изоморфны;*
2) *решетки $A_1(C^+(X))$ и $A_1(C^+(Y))$ изоморфны;*
3) *полукольца $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ изоморфны.*

Поскольку подалгебра констант $\mathbf{R}^+$ определяется решеточным свойством в решетке $A(C^+(X))$, то 1) $\Rightarrow$ 2). Главным в теореме является доказательство того, что решеточный изоморфизм $A_1(C^+(X)) \cong A_1(C^+(Y))$ влечет гомеоморфизм $X \approx Y$ в случае хьюиттовских пространств X и Y. При этом исходным моментом служит:

Лемма. *Однопорожденные подалгебры в $A_1(C^+(X))$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решетки $A_1(C^+(X))$.*

Проблема решеточного изоморфизма для колец $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на X и решеток $A(C(X))$ решена в [1] другими методами. Она положительно решается и для решетки $A_1(C(X))$ всех подалгебр с 1 кольца $C(X)$:

Теорема 2. *Для любых топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $A_1(C(X))$ и $A_1(C(Y))$ влечет изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$.*

Заметим, что полукольца $C^+(X)$ (и кольца $C(X)$) определяются также решетками своих идеалов [2] и решетками конгруэнций [3].

Список литературы

[1] Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства. Математические заметки, 62 (1997), N. 5, 687–693.

[2] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции. Фундаментальная и прикладная математика, 4 (2008), N. 2, 493–510.

[3] Семенова И. А. Определяемость хьюиттовских пространств X решеткой конгруэнций полуколец непрерывных неотрицательных функций на X. Вестник Вятского государственного гуманитарного университета, 1 (1999), 20–23.

Вятский государственный гуманитарный университет, Киров
E-mail: vecht@mail.ru

Независимая система тождеств для многообразия монолейбницевых алгебр

А. Т. Гайнов

Пусть K — произвольное поле характеристики $\neq 2$. Как известно, алгеброй Лейбница называется алгебра $L = (L, \cdot)$ над полем K, удовлетворяющая тождеству

$$(\forall x, y, x \in L)\ x(yz) = (xy)z - (xz)y.$$

Введем следующее

Определение. Алгебру $A = (A, \cdot)$ над полем K назовем монолейбницевой алгеброй, если всякая ее однопорожденная подалгебра является алгеброй Лейбница.

Очевидно, класс W всех монолейбницевых алгебр над фиксированным полем K является многообразием алгебр.

Пусть x — произвольный элемент алгебры A. Через x^n $(n \in N = \{1, 2, \dots\})$ обозначим левонормированное произведение $x^n = \underbrace{(\dots((x \cdot x) \cdot x) \dots)x}_{n \text{ раз}}$.

Теорема. *Пусть K — бесконечное поле характеристики $\neq 2$, W — многообразие монолейбницевых алгебр над полем K. Независимая система тождеств многообразия W есть бесконечное множество тождеств*

$$(\forall x \in A) x \cdot x^n = 0, \quad n \in N \setminus \{1\} = \{2, 3, \dots, \}.$$

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Алгебры Ли, индуцированные ненулевым дифференцированием

А. Г. Гейн, А. Н. Егоров

В 1990 году на IV Всесоюзной школе по алгебрам Ли А. И. Кострикин в своем докладе обратил внимание слушателей на конструкцию, позволяющую получать алгебру Ли из ассоциативно-коммутативной алгебры с помощью нетривиального дифференцирования этой алгебры. Опишем эту конструкцию.

Пусть A — ассоциативно-коммутативная алгебра над полем F, D — ее ненулевое дифференцирование. Через $A^{(D)}$ обозначим линейную алгебру над тем же полем, в которой операция умножения заменена операцией $\circ$, определяемой формулой $a \circ b = D(a)b - aD(b)$. Легко убедиться, что относительно операции $\circ$ алгебра $A^{(D)}$ является алгеброй Ли. Будем говорить, что эта алгебра индуцирована дифференцированием D.

Первые результаты исследования алгебр, получаемых посредством такой конструкции, были анонсированы в [1], однако, развернутой публикации не последовало. Сами же результаты относились к алгебрам над полем характеристики 0. В настоящей работе исследуются алгебры простой характеристики. В качестве базовой алгебры A выбрано конечное несепарабельное расширение поля F. Как известно, для такого расширения всегда существует ненулевое дифференцирование, которое является нулевым на F (отметим, что для сепарабельного расширения ненулевого дифференцирования не существует). В этом случае A можно рассматривать как конечномерную ассоциативно-коммутативную алгебру над полем F с ненулевым дифференцированием D.

Теорема. *Пусть A — конечное несепарабельное расширение поля F простой нечетной характеристики. Тогда алгебра $A^{(D)}$ является простой алгеброй Ли.*

Список литературы

[1] Гейн А. Г., Тютин А. Н. Об алгебрах Ли, получаемых из ассоциативно-коммутативных алгебр с помощью дифференцирования, Алгебра и анализ: Тез. докл. международной конференции (Казань), КГУ, 1994.

Уральский государственный университет, Екатеринбург
E-mail: Alexander.Gein@usu.ru

Нильпотентность и разрешимость йордановых диалгебр

В. Ю. Губарев

Алгебры Лейбница были введены Ж-Л. Лодеем в начале 90-х годов при изучении групп когомологий алгебр Ли и являются некоммутативным обобщением алгебр Ли: умножение $[,]$ в этом многообразии алгебр удовлетворяет тождеству $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$. Ассоциативные диалгебры — векторные пространства с двумя ассоциативными билинейными операциями $\vdash$, $\dashv$, удовлетворяющими тождествам

$$x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z), \quad (x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z \quad x \vdash (y \dashv z) = (x \vdash y) \dashv z,$$

относительно операции $[x,y] = x \vdash y - y \dashv x$ являются алгебрами Лейбница. Ж.-Л. Лодей и Т. Пирашвили (1993) доказали, что верно и обратное: любая алгебра Лейбница вкладывается в некоторую ассоциативную диалгебру. В разные годы были также введены многообразия коммутативных и альтернативных диалгебр.

Общий подход определения для произвольного многообразия Var обычных алгебр многообразия Var диалгебр был получен П. Колесниковым (2008). В частности, класс диалгебр Ли совпадает с классом алгебр Лейбница.

Йордановы диалгебры, которые мы назваем LJ-алгебрами (Leibniz—Jordan), являются некоммутативным обобщением йордановых алгебр и определяются следующими тождествами:

$$[x_1,x_2]x_3 = 0, \quad (x_1^2,x_2,x_3) = 2(x_1,x_2,x_1x_3), \quad x_1(x_1^2x_2) = x_1^2(x_1x_2).$$

В данной работе изучалась взаимосвязь между нильпотентностью и разрешимостью LJ-алгебр. Была доказана

Теорема. *Всякая разрешимая конечнопорожденная LJ-алгебра нильпотентна.*

В качестве следствий установлены нильпотентность конечномерной LJ-ниль-алгебры и существование локально нильпотентного радикала в классе LJ-алгебр.

Также автором был построен аналог пирсовского разложения для LJ-алгебр с идемпотентом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-344.2008.1) и проекта Федерального агентства по образованию «Поддержка научного потенциала высшей школы» (грант 2.1.1.419).

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: vsevolodgu@mail.ru

Конструкция Кантора — Кехера — Титса для йордановых диалгебр

В. Ю. Губарев, П. С. Колесников

Понятие алгебры Лейбница является наиболее изученным некоммутативным обобщением алгебр Ли: это многообразие алгебр с умножением $[\cdot,\cdot]$, определенное тождеством $[x,[y,z]]-[y,[x,z]]=[[x,y],z]$. Аналогами ассоциативных обертывающих для алгебр Лейбница являются ассоциативные диалгебры, введенные Ж.-Л. Лодеем в 1993. Эти алгебраические системы представляют собой линейные пространства с ассоциативными билинейными операциями $(\cdot\vdash\cdot)$, $(\cdot\dashv\cdot)$, удовлетворяющие тождествам

$$x\dashv(y\vdash z)=x\dashv(y\dashv z),\quad (x\dashv y)\vdash z=(x\vdash y)\vdash z,\quad x\vdash(y\dashv z)=(x\vdash y)\dashv z.$$

Ассоциативная диалгебра A, рассматриваемая относительно операции $[a,b]=a\vdash b-b\dashv a$, $a,b\in A$, является алгеброй Лейбница, и, как показано Ж.-Л. Лодеем и Т. Пирашвили (1993), любая алгебра Лейбница вкладывается в некоторую ассоциативную диалгебру. Другие многообразия диалгебр (коммутативные и альтернативные диалгебры) также вводились в рассмотрение в связи с их приложениями к алгебрам Лейбница.

Общий подход, позволяющий для любого многообразия Var обычных алгебр определить многообразие Var диалгебр, был предложен П. Колесниковым (2008) и А. Пожидаевым (2009). В частности, класс диалгебр Ли совпадает с классом алгебр Лейбница.

Многообразие йордановых диалгебр, которое естественно назвать классом LJ-алгебр (Leibniz — Jordan), является, следовательно, некоммутативным надмногообразием для класса йордановых алгебр. Это многообразие определено тремя тождествами:

$$[x_1x_2]x_3=0,\quad (x_1^2,x_2,x_3)=2(x_1,x_2,x_1x_3),\quad x_1(x_1^2x_2)=x_1^2(x_1x_2).$$

В частности, ассоциативная диалгебра относительно новой операции $ab=a\vdash b+b\dashv a$ является LJ-алгеброй.

Нами построен некоммутативный аналог ККТ-конструкции, позволяющий вложить LJ-алгебру в алгебру Лейбница, и изучены основные свойства этой конструкции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00157), Совета по грантам Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-344.2008.1) и проекта Федерального агентства по образованию “Поддержка научного потенциала высшей школы” (грант 2.1.1.419).

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: vsevolodgu@mail.ru
Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: pavelsk@math.nsc.ru

Об обобщенной жордановой нормальной форме второго рода матрицы линейного преобразования над произвольным полем

С. Г. Далалян

В учебнике «Основы линейной алгебры» А. И. Мальцева [1] мелким шрифтом излагается обобщение теоремы К. Жордана о существовании и единственности нормальной формы матрицы линейного преобразования, определенного над любым подполем K поля комплексных чисел $\mathbf{C}$. В примечании указывается, что это обобщение верно для любого совершенного поля K. *Обобщенной жордановой матрицей* называется прямая сумма $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{J}_\tau$ обобщенных жордановых клеток $\mathbf{J}_k$. У каждой *обобщенной жордановой клетки* $\mathbf{J}_k$ по главной диагонали стоят сопровождающие матрицы $[P_k(t)]$ неприводимых полиномов $P_k(t)$, непосредственно выше и правее них — единичные матрицы $\mathbf{E}$, а все остальные места заполнены нулями. Назовем такие клетки и их прямые суммы, соответственно, обобщенными жордановыми клетками и матрицами первого рода.

В [2] доказывается, что теорема Мальцева верна для любого сепарабельного поля K. Как показывает несложный пример, в случае несепарабельного поля K эта теорема, вообще говоря, перестает быть верной. Однако небольшое изменение в построении обобщенных жордановых клеток и матрицы позволяет восстановить справедливость теоремы при произвольном поле K: надо только в конструкции обобщенных жордановых клеток и матрицы единичную матрицу $\mathbf{E}$ заменить матрицей $\mathbf{F}$ (естественно, того же порядка), в левом нижнем углу которой стоит единица, а все остальные элементы — нули. В [3] соответствующий результат выводится из теоремы Жордана переходом к алгебраическому замыканию поля K, а в [4] дается его прямое геометрическое доказательство, основанное на построении соответствующего базиса.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1975.

[2] Далалян С. Г. Обобщенный жорданов нормальный вид матрицы с сепарабельными неприводимыми делителями характеристического многочлена. Вестник РА(С)ГУ, Физ-мат. и естест. науки, 1, Ереван, 2005, 7–14.

[3] Далалян С. Г. Обобщенная жорданова матрица линейного оператора. Мат. заметки, 83 (2007), N. 1, 27–35.

[4] Далалян С. Г. Прямое доказательство теоремы об обобщенной жордановой форме линейного оператора. Известия НАН РА, 43 (2008), N. 5, 274–284.

Ереванский государственный университет, Ереван
E-mail: dalalyan@ysu.am

Простые йордановы супералгебры, возникающие из дифференциально простых алгебр

В. Н. Желябин

Пусть F — поле характеристики не 2 и Γ — ассоциативная коммутативная алгебра с ненулевым дифференцированием D. Изоморфную копию пространства Γ с отображением изоморфизма $a \mapsto \overline{a}$ обозначим через $\overline{\Gamma}$. Рассмотрим прямую сумму пространств $J(\Gamma, D) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ и определим на $J(\Gamma, D)$ умножение $(\cdot)$ по правилам:

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot \overline{b} = \overline{ab}, \quad \overline{a} \cdot b = \overline{ab}, \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = D(a)b - aD(b),$$

где $a, b \in \Gamma$ и ab — произведение в Γ. Тогда $J(\Gamma, D)$ — йорданова супералгебра с четной частью Γ и нечетной $\overline{\Gamma}$. Супералгебра $J(\Gamma, D)$ проста тогда и только тогда, когда алгебра Γ — D-проста [1].

Пусть F — поле характеристики 0. Рассмотрим алгебру полиномов $F[x, y]$ от двух переменных x, y. Положим $D = 2y^3 \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ и $f(x, y) = x^2 + y^4 - 1$. Тогда D — дифференцирование алгебры $F[x, y]$ и $D(f(x, y)) = 0$. Пусть $\Gamma = F[x, y]/f(x, y)F[x, y]$. Дифференцирование D индуцирует дифференцирование алгебры Γ, которое мы также обозначим через D. Отождествим образы элементов x и y при каноническом гомоморфизме $F[x, y] \mapsto \Gamma$ с элементами x и y.

Теорема. *Рассмотрим в Γ подалгебру A, порожденную элементами $1, y^2, xy$ и A-модуль $M = xA + yA$. Положим $\Delta = \{D_{11}, D_{12}, D_{22}\}$, где $D_{11} = (1 - y^4)D, D_{12} = xyD, D_{22} = y^2 D$. Тогда подпространство $J(A, \Delta) = A + \overline{M}$ — подсупералгебра в $J(\Gamma, D)$, и умножение нечетных элементов в $J(A, \Delta)$ задается формулами*

$$\overline{xa} \cdot \overline{xb} = D_{11}(a)b - aD_{11}(b), \quad \overline{ya} \cdot \overline{yb} = D_{22}(a)b - aD_{22}(b),$$

$$\overline{xa} \cdot \overline{yb} = (1 + y^4)ab + D_{12}(a)b - aD_{12}(b).$$

Супералгебра $J(A, \Delta)$ проста и $\overline{M}$ не является однопорожденным A-модулем, т.е. $J(A, \Delta)$ неизоморфна супералгебре $J(\Gamma_0, D_0)$.

Рассматриваемые супералгебры изучались в [2, 3].

Работа поддержана РФФИ 09-01-00157, грант СО РАН, Развитие научного потенциала высшей школы (проект 2.1.1.419)

Список литературы

[1] King D., McCrimmon K. The Kantor construction of Jordan superalgebras. Comm. in Algebra, 20 (1992), N. 1, 109–126.

[2] Желябин В. Н. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью. Алгебра и логика, 41 (2002), N. 3, 276–310.

[3] Желябин В. Н., Шестаков И. П. Простые специальные супералгебры с ассоциативной четной частью. Сиб. мат. журн., 45 (2004), N. 5, 1046–1072.

Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru

Об изоморфизме конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре

Е. В. Журавлев

Рассматриваемый здесь результат является продолжением исследований, начатых в работах [1, 2] и посвящен необходимым и достаточным условиям существования изоморфизма между двумя произвольными кольцами указанного типа.

Если $A = (a_{ij})$ — матрица над полем F, а σ – автоморфизм поля F, то в дальнейшем символом A^σ будем обозначать матрицу $(\sigma(a_{ij}))$. Пусть A и B — матрицы над полем F размерностей $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in Aut(F)$, n, m, $k \in N$. Обозначим через $[A, B]_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}$ матрицу $= (c_{ij})_{m\times k}$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j}^{\alpha_i} + a_{i2}b_{2j}^{\alpha_i} + \ldots + a_{in}b_{nj}^{\alpha_i}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$.

Рассмотрим ситуацию, когда $p \in J(R)^3$.

Пусть $R = R(A, B, C, D, \sigma_i, \theta_j, \tau_k)$ и $R' = R(A', B', C', D', \sigma'_i, \theta'_j, \tau'_k)$ два кольца конструкции B (с одинаковыми инвариантами, см. [1]).

Теорема. *$R \cong R'$ тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{s_1\times s_1}$, $R = (r_{ij})_{s_2\times s_2}$, $T = (t_{ij})_{(s_3+1)\times(s_3+1)}$, некоторые матрицы $Q = (q_{ij})_{s_2\times s_1}$, $S = (s_{ij})_{(s_3+1)\times s_2}$ и автоморфизм ρ кольца R_0, такие, что*

$$P^T[A'_k, P]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})} = \sum_{\nu=1}^{s_2} r_{k\nu}A_\nu^\rho, \quad k = \overline{1, s_2},$$

$$P^T[B'_k, P]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})} + P^T[C'_k, Q]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})} + Q^T[D'^T_k, P]_{(\theta'_1,\ldots,\theta'_{s_2})} = \sum_{\nu=1}^{s_2} s_{k\nu}A_\nu^\rho + \sum_{\nu=0}^{s_3} t_{k\nu}B_\nu^\rho,$$

$$P^T[C'_k, R]_{(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_{s_1})} = \sum_{\nu=0}^{s_3} t_{k\nu}C_\nu^\rho, \quad R^T[D'^T_k, P]_{(\theta'_1,\ldots,\theta'_{s_2})} = \sum_{\nu=0}^{s_3} t_{k\nu}(D_\nu^T)^\rho, \quad k = \overline{0, s_3}$$

и $\sigma_i = \sigma'_j$, если $p_{ji} \neq 0$; $\sigma_i = \theta'_j$, если $q_{ji} \neq 0$; $\theta_i = id_F$, если $s_{0i} \neq 0$; $\theta_i = \theta'_j$, если $r_{ji} \neq 0$; $\theta_i = \tau'_j$, если $s_{ji} \neq 0$; $\tau_i = id_F$, если $t_{0i} \neq 0$; $\tau_i = \tau'_j$, если $t_{ji} \neq 0$.

Доказательство данной теоремы, а также оставшиеся ситуации $p \in J(R)\setminus J(R)^2$ и $p \in J(R)^2\setminus J(R)^3$ подробно изложены в работе [2].

Список литературы

[1] Журавлев Е. В. О классификации конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре. Известия АлтГУ, 1(57) (2008), 18–28.

[2] Журавлев Е. В. Об изоморфизме конечных локальных колец характеристики p^2, радикал Джекобсона которых имеет индекс нильпотентности четыре. Известия АлтГУ, 1(61) (2009), 10–16.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: evzhuravlev@mail.ru

О структуре факторов по действию алгебраических супергрупп

А. Н. Зубков

В работах Манина — Воронова — Пенкова и др. строились факторы простых супергрупп по действию параболических суперподгрупп (над полями нулевой характеристики). Соответствующий фактор строился чисто геометрическими средствами, как супермногообразие флагов. В случае произвольных супергрупп до сих пор неизвестно, будет ли фактор G/H, где G и H алгебраические супергруппы, хотя бы суперсхемой (в смысле Гротендика). Известны примеры, когда G/H не проективно (Манин, R. Fioresi). В предлагаемом докладе обсуждаются подходы к этой проблеме (над полями произвольной характеристики) и недавние результаты автора. Именно:

1) Если характеристика основого поля > 0 и нечетна, тогда G/H суперсхема.

2) Если H нормальна в G, тогда G/H аффинная суперсхема.

3) Если X аффинная суперсхема и конечная супергруппа G действует на X, тогда X/G аффинная суперсхема.

4) Если четная часть H редуктивна и характеристика поля > 0 и нечетна, тогда G/H аффинная суперсхема.

В классической теории алгебраических групп проблема описания подгрупп H, таких, что G/H аффинная схема, хорошо известна (Grosshans, Cline — Parshall — Scott). Такие подгруппы носят название обозримых (observable). Пункт 4) дает частичный ответ на проблему, поставленную J. Brundan. Именно, не будет ли G/H аффинной суперсхемой, если H_{even} редуктивна? Другими словами, не будет ли H с редуктивной четной частью всегда обозрима?

Омский государственный педагогический университет
E-mail: a.zubkov@yahoo.com

δ-Супердифференцирования простых конечномерных супералгебр Ли

И. Б. Кайгородов

В [1] были рассмотрены антидифференцирования алгебр Ли, т. е. такие линейные отображения μ алгебры, что $\mu(xy) = -(\mu(x)y + x\mu(y))$, и было показано отсутствие ненулевых антидифференцирований на центральных простых алгебрах Ли размерности ≥ 4 при некоторых ограничениях на основное поле. Понятие δ-дифференцирования алгебры, т. е. такого линейного отображения ϕ алгебры, что $\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y))$, где δ — некоторый фиксированный элемент основного поля, является естественным обобщением понятия антидифференцирования и обыкновенного дифференцирования и широко изучалось в работах В. Т. Филиппова. Он рассматривал первичные алгебры Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей и $\frac{1}{2}$ [2, 3]. В. Т. Филиппов доказал, что любая первичная Φ-алгебра Ли с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой не имеет ненулевого δ-дифференцирования, если $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. Также он дал описание $\frac{1}{2}$-дифференцирований произвольной первичной Φ-алгебры Ли A ($\frac{1}{6} \in \Phi$) с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. Им доказано, что линейное отображение $\phi\colon A \to A$ является $\frac{1}{2}$-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\phi \in \Gamma(A)$, где $\Gamma(A)$ — центроид алгебры A. Отсюда следует, что если A — центральная простая алгебра Ли над полем характеристики $p \neq 2, 3$ с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой, то любое $\frac{1}{2}$-дифференцирование ϕ имеет вид $\phi(x) = \alpha x$, $\alpha \in \Phi$. В работе [3] он доказал, что любая первичная Φ-алгебра Ли A ($\frac{1}{6} \in \Phi$) с ненулевым антидифференцированием удовлетворяет тождеству $[(yz)(tx)]x + [(yx)(zx)]t = 0$ и является 3-мерной центральной простой алгеброй над полем частных центра $Z_R(A)$ своей алгебры правых умножений $R(A)$. Также в этой работе был построен пример нетривиального $\frac{1}{2}$-дифференцирования ($\phi \notin \Gamma(A)$) для алгебры Витта W_1. В дальнейшем В. Т. Филиппов описал δ-дифференцирования первичных альтернативных и нелиевых мальцевских Φ-алгебр с некоторыми ограничениями на кольцо операторов Φ. Он доказал [4], что алгебры из этих классов не имеют ненулевого δ-дифференцирования, если $\delta \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.

Под тривиальными отображениями мы будем понимать нулевые отображения, а также 0-(супер)дифференцирования, 1-(супер)дифференцирования и $\frac{1}{2}$-(супер)дифференцирования, являющиеся элементами центроида. Под супералгеброй A мы понимаем $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру, т. е. считаем, что $A = A_0 \oplus A_1$ и $A_iA_j \subseteq A_{i+j(mod 2)}$.

В работе [5] И. Б. Кайгородов описал δ-дифференцирования полупростых конечномерных йордановых алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2 и простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Работа [6] посвящена описанию δ-дифференцирований классических супералгебр Ли. В дальнейшем им были описаны δ-дифференцирования картановских супералгебр Ли. В этих работах было показано отсутствие нетривиальных δ-дифференцирований на данных классах алгебр и супералгебр.

Однородный элемент ϕ суперпространства $End(A)$ эндоморфизмов $A \to A$ называется δ-супердифференцированием, если $\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + (-1)^{p(x)deg(\phi)}x\phi(y))$.

В настоящей работе рассматриваются δ-супердифференцирования на простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебрах над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В результате, имеем следующую теорему.

Теорема. *Пусть ϕ — δ-супердифференцирование простой конечномерной йордановой супералгебры или супералгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Тогда ϕ тривиально.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, гранта НШ-344.2008.1, интеграционного проекта СО РАН №97, гранта мэрии г. Новосибирска для молодых ученых.

Список литературы

[1] Hopkins N. C. Generalizes Derivations of Nonassociative Algebras. Nova J. of Math. Game Theory Algebra, 5 (1996), N. 3, 215–224.

[2] Филиппов В. Т. О δ-дифференцированиях алгебр Ли. Сиб. мат. журн., 39 (1998), N. 6, 1409–1422.

[3] Филиппов В. Т. О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли. Сиб. мат. журн., 40 (1999), N. 1, 201–213.

[4] Филиппов В. Т. О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр. Алгебра и Логика, 39 (2000), N. 5, 618–625.

[5] Кайгородов И. Б. О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр. Алгебра и Логика, 46 (2007), N. 5, 585–605.

[6] Кайгородов И. Б. О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли. Сиб. мат. журн., 50 (2009), N. 3, 547–566.

Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: `kib@math.nsc.ru`

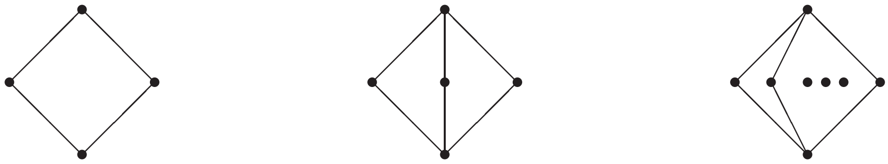
Решеточные характеристики элементов ассоциативной алгебры

С. С. Коробков

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F и $L(A)$ — решетка ее подалгебр. Решается вопрос: можно ли по свойствам решетки $L(A)$ определить наличие в алгебре A элементов с заданными свойствами? Рассматриваются следующие свойства элементов: алгебраичность, идемпотентность, нильпотентность.

Легко видеть, что наличие в алгебре A алгебраических элементов равносильно существованию в $L(A)$ атомов. Следовательно, A — алгебраическая алгебра тогда и только тогда, когда $L(A)$ — атомная решетка.

Наличие в решетке $L(A)$ атома влечет существование в самой алгебре A идемпотентного или нильпотентного элемента. Однако, если атом единственен, то нельзя с уверенностью утверждать какой именно элемент содержит алгебра. Если число атомов больше одного, то ситуация проясняется. Определим три типа решеток с помощью следующих диаграмм:



(I) (II) (III)

Теорема 1. *Если решетка подалгебр $L(A)$ содержит идеал типа (I) или типа (II) при $F \neq GF(2)$, то в алгебре A существует ненулевой идемпотентный элемент. Если $L(A)$ содержит идеал типа (I) или типа (III) при $F \neq GF(2)$, то в алгебре A существует ненулевой нильпотентный элемент.*

Теорема 2. *Пусть в решетке подалгебр $L(A)$ содержится элемент B высоты n ($n \in \mathbf{N}$), удовлетворяющий условиям:*

1) B покрывает в точности один элемент;

2) интервал $[0, B]$ содержит более одного атома.

Тогда алгебра A содержит ненулевой нильпотентный элемент индекса нильпотентности $n + 1$.

Теорема 3. *Пусть решетка подалгебр $L(A)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) в $L(A)$ содержится идеал, являющийся цепью длины 3;

2) в $L(A)$ содержится элемент конечной высоты, покрывающий в точности два элемента.

Тогда в алгебре A содержится ненулевой идемпотентный элемент.

Найдены достаточные условия, накладываемые на решетку подалгебр $L(A)$, позволяющие сделать вывод о существовании ортогональных идемпотентов и матричных единиц в алгебре A.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: kors@mail.ur.ru

О бесконечно базируемых многообразиях правоальтернативных метабелевых алгебр

А. М. Кузьмин

Алгебра $\mathcal{A}$ над полем характеристики, отличной от двух, называется *правоальтернативной метабелевой*, если в $\mathcal{A}$ справедливы тождества

$$(x, y, z) = -(x, z, y) \quad \text{и} \quad (xy)(zt) = 0,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — *ассоциатор* элементов x, y, z.

Основные результаты, связанные с проблемой конечной базируемости правоальтернативных метабелевых алгебр, можно найти в работах [1–6].

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие правоальтернативных метабелевых алгебр над полем характеристики, не равной 2, с тождествами

$$(x \circ y) \circ z = 0 \quad \text{и} \quad \big[(x, yz, x), t\big] = 0,$$

где $x \circ y = xy + yx$ и $[x, y] = xy - yx$ — *йорданово произведение* и *коммутатор* элементов x, y соответственно.

Основная теорема работы устанавливает необходимое и достаточное условие шпехтовости собственного подмногообразия в $\mathfrak{M}$. Из доказательства основной теоремы выводятся следующие утверждения.

Теорема 1. *$\mathfrak{M}$-алгебра Грассмана ранга 2 порождает бесконечно базируемое многообразие, выделенное в $\mathfrak{M}$ системой тождеств*

$$\Big(x, \Big(y_1, \ldots, \big(y_{n-1}, (y_n, x, y_n)\,, y_{n+1}\big), \ldots, y_{2n-1}\Big), x\Big) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}_n$ — подмногообразие алгебр $\mathcal{A}$ в $\mathfrak{M}$ таких, что всякая n-порожденная подалгебра в $\mathcal{A}$ нильпотентна ступени, не выше $n+2$. Тогда $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ является почти шпехтовым многообразием топологического ранга 4. Кроме того, $\mathfrak{N}$ — единственное почти шпехтово подмногообразие в $\mathfrak{M}$.*

Список литературы

[1] Белкин В. П. О многообразиях правоальтернативных алгебр. Алгебра и логика, 15 (1976), N. 5, 491–508.

[2] Исаев И. М. Конечномерные правоальтернативные алгебры, порождающие не конечнобазируемые многообразия. Алгебра и логика, 25 (1986), N. 2, 136–153.

[3] Медведев Ю. А. Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством. Алгебра и логика, 17 (1978), N. 6, 705–726.

[4] Пчелинцев С. В. О тождествах правоальтернативных метабелевых алгебр Грассмана. Фунд. прикл. мат., 13 (2007), N. 2, 157–183.

[5] Кузьмин А. М. О шпехтовых многообразиях правоальтернативных алгебр. Фунд. прикл. мат., 12 (2006), N. 2, 89–100.

[6] Кузьмин А. М. О конечной базируемости правоальтернативных метабелевых алгебр. Дисс. ... кандидата физ.-мат. наук, Москва, 2006.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: amkuzmin@ya.ru

Hom-делимость прямых сумм конечного числа рациональных групп

Е. Н. Курманова, А. М. Себельдин

В настоящей работе рассматривается понятие Hom-делимости рациональных групп и прямых сумм конечного числа рациональных групп, представление кольца эндоморфизмов прямой суммы конечного числа рациональных групп кольцом рациональных матриц.

Определение. Упорядоченную пару рациональных групп $(A,\, B)$ назовем Hom-делимой, если $\tau(A) \leq \tau(B)$ и $\dfrac{\varphi(x)}{x} \in \mathbb{Z}$ для любого $\varphi \in Hom(A, B)$ и для любого $0 \neq x \in A$.

Определение. Рассмотрим прямые суммы $A = \oplus_{i=1}^{n} A_i, B = \oplus_{j=1}^{m} B_j$ конечного числа рациональных групп с системами проекций $\{\pi_i\}$ и $\{\theta_j\}$ соответственно. Пусть $0 \neq x \in A$ и $\varphi \in Hom(A, B)$, будем говорить, что $\varphi(x)$ делится на x, если $\theta_j \varphi \pi_i(x) \in x_i\mathbb{Z}$ для любых $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$.

Определение. Упорядоченную пару групп $(A,\, B)$, где $A = \oplus_{i=1}^{n} A_i, B = \oplus_{j=1}^{m} B_j$ — прямые суммы конечного числа рациональных групп, назовем Hom-делимой, если $\varphi(x)$ делится на x для любого $\varphi \in Hom(A, B)$ и для любого $0 \neq x \in A$.

Очевидно, что упорядоченная пара групп $(A,\, B)$, где $A = \oplus_{i=1}^{n} A_i, B = \oplus_{j=1}^{m} B_j$ — прямые суммы конечного числа рациональных групп, является Hom-делимой тогда и только тогда, когда упорядоченные пары групп (A_i, B_j) — Hom-делимы для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть $A = \oplus_{i=1}^{n} A_i$ — прямая сумма конечного числа рациональных групп. Положим $H_{ij} = \{\dfrac{\varphi_{ij}(a_i)}{a_i} \in \mathbb{Q} \colon \varphi_{ij} \in Hom(A_i, A_j)\}, i, j \in \{1, \ldots, n\}$, где a_i — наименьший целый положительный элемент A_i. Тогда кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A изоморфно кольцу рациональных матриц $\bar{E} = (H_{ij})$. Для рассматриваемого представления колец эндоморфизмов имеет место следующая

Теорема. *Пусть $A = \oplus_{i=1}^{n} A_i$ и $B = \oplus_{j=1}^{m} B_j$ — прямые суммы конечного числа рациональных групп, и упорядоченная пара групп (A, B) — Hom-делима. Тогда $\bar{E}(A) = \bar{E}(B)$ в том и только том случае, когда $A_i = A_j$, $B_i = B_j$ для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.*

Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород
E-mail: `kurm-elena@yandex.ru, sebeldinam@rambler.ru`

Полукольца непрерывных функций со значениями в единичном отрезке

Е. Н. Лубягина

Пусть $\boldsymbol{I} = [0,1]$ — единичный числовой отрезок, рассматриваемый как компактное топологическое аддитивно-идемпотентное полукольцо с операциями сложения max и умножения $\cdot$ в обычной топологии.

Обозначим через $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$ полукольцо всех непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве $\mathcal{X}$ и принимающих значения в $\boldsymbol{I}$. Оно коммутативно, аддитивно-идемпотентно и имеет единственный обратимый элемент 1. Заметим, что для любого $\mathcal{X}$ существует такой компакт (компактное хаусдорфово пространство) $\mathcal{Y}$, что полукольца $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$ и $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\boldsymbol{I})$ канонически изоморфны.

Теорема 1. *Для любых компактов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ эквивалентны следующие условия:*
1) *полукольца $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$ и $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\boldsymbol{I})$ изоморфны;*
2) *мультипликативные полугруппы $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$ и $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\boldsymbol{I})$ изоморфны;*
3) *решетки $\mathcal{C}(X,\boldsymbol{I})$ и $\mathcal{C}(\mathcal{Y},\boldsymbol{I})$ изоморфны;*
4) *пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ гомеоморфны.*

В доказательстве теоремы 1 используется следующая лемма, из нее же вытекает известный результат о строении мультипликативных изоморфизмов [1].

Лемма. *Пусть $\mathcal{X}$ — компакт и $\alpha : \mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{I}$ — мультипликативный эпиморфизм. Тогда существуют такие точка $x \in \mathcal{X}$ и число $r > 0$, что $\alpha(f) = f(x)^r$ для всех $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$.*

Если $f \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$, то $Z(f) = f^{-1}(0)$ — нуль-множество на $\mathcal{X}$ и $Z^0(f)$ — его внутренность. Для точки $x \in X$ положим: $M_x = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I}) : f(x) = 0\}$, $N_x = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I}) : f(x) \neq 1\}$, $O_x = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I}) : x \in Z^0(f)\}$ и $E_x = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I}) : x \in Z^0(1-f)\}$.

Теорема 2. *Для любого компакта $\mathcal{X}$ справедливы утверждения:*
1) *любой простой идеал полукольца $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$ содержит O_x для единственной точки $x \in \mathcal{X}$;*
2) *между простыми идеалами $P \subset Q$ полукольца $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$ нет других простых идеалов $\Leftrightarrow P = M_x$ и $Q = N_x$ для единственной точки $x \in \mathcal{X}$;*
3) *любой максимальный идеал полукольца $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I})$ содержит N_x и содержится в $\mathcal{C}(\mathcal{X},\boldsymbol{I}) \setminus E_x$ для единственной точки $x \in \mathcal{X}$;*
4) *все идеалы $O_x, x \in \mathcal{X}$, просты $\Leftrightarrow \mathcal{X}$ есть F-пространство [2];*
5) *все идеалы $N_x, x \in \mathcal{X}$, максимальны $\Leftrightarrow \mathcal{X}$ — конечное пространство.*

Список литературы

[1] Araujo J. Multiplicative bijections of semigroups of interval-valued continuous functions. UC Davis Math [Электронный ресурс], 2007. http://trefoil.math.ucdavis.edu/0710.4347, 11 pages.

[2] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1976.

Вятский государственный гуманитарный университет, Киров
E-mail: `mathematic@vshu.kirov.ru`

Алгоритмы реализации рангов систем элементов свободных неассоциативных алгебр.

А. А. Михалев, А. В. Михалев, А. А. Чеповский

Рассматриваются свободные неассоциативные алгебры, свободные коммутативные неассоциативные алгебры и свободные антикоммутативные неассоциативные алгебры конечного ранга над полем.

Рангом системы элементов $a_1, \ldots, a_m$ свободной алгебры $F(X)$ с множеством X свободных образующих $rank(a_1, \ldots, a_m)$ называется наименьшее возможное число свободных образующих из X, от которых зависят элементы $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$, где φ — автоморфизм алгебры $F(X)$. Построены и реализованы улучшенные алгоритмы вычисления ранга системы элементов $a_1, \ldots, a_m$, а так же алгоритмы построения такого автоморфизма φ алгебры $F(X)$, что элементы $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$ зависят лишь от $rank(a_1, \ldots, a_m)$ свободных образующих из множества X.

Построенные алгоритмы применяются для исследования примитивных систем элементов. Система элементов $a_1, \ldots, a_m$ свободной алгебры $F(X)$ называется примитивной, если эта система является подмножеством некоторого множества Y свободных образующих алгебры $F(X)$, $F(Y) = F(X)$. Построены и реализованы улучшенные алгоритмы распознавания примитивных систем элементов, а также алгоритмы дополнения примитивных систем элементов до множеств свободных образующих. Построенные алгоритмы используют свободное дифференциальное исчисление в свободных алгебрах.

В качестве языка реализации этих алгоритмов был выбран язык C++. Была создана библиотека классов — различных элементов рассматриваемых алгебр, универсальной обертывающей алгебры, а также математические операции в этих алгебрах. Были использованы различные структуры данных, в том числе бинарные деревья, что позволило легко производить математические операции в соответствующих алгебраических структурах. Например, умножение и свободное дифференцирование в свободных неассоциативных алгебрах, вычисление линейных функционалов с различными весами элементов рассматриваемых алгебр.

Приведенные результаты продолжают исследоваться в свободных неассоциативных алгебрах.

Список литературы

[1] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр. Мат. сб., 20(62) (1947), 239–262.

[2] Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр. Мат. сб., 34(76) (1954), 81–88.

[3] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T. Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras. J. Algebra, 243 (2001), 198–223.

[4] Михалев А. А., Михалев А. В., Чеповский А. А., Шампаньер К. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр. Фунд. прикл. мат., 13 (2007), N. 5, 171–192.

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: c4hapa@gmail.com

О свойствах бесконечно близких к базе элементов

Г. Г. Пестов, Е. А. Фомина

Основные определения, относящиеся к теории двумерно упорядоченных полей, изложены в [1].

Теорема 1. *Элемент* $a \in \overset{o}{P^u}$ $(a \in -\overset{o}{P^u})$ *является бесконечно близким к базе* P_0, *если и только если*

$$\forall n \forall \rho \in P_0 (\rho > a) \Rightarrow (\rho - a)^n \in -\overset{o}{P^u} \; ((\rho - a)^n \in \overset{o}{P^u}).$$

Теорема 2. *Пусть* P *— двумерно упорядоченное поле. Множество бесконечно близких к базе элементов* B *есть подполе поля* P.

Определение. Двумерно упорядоченное поле называется *бесконечно узким*, если каждый его элемент либо бесконечно близок к базе, либо является элементом базы. Конструкции бесконечно узких полей приведены в [2, 3].

Пример. Поле $Q(\pi)$ допускает структуру бесконечно узкого поля, где база есть поле Q, и элемент π бесконечно близок к базе.

Пусть $\langle K, K^u \rangle$ есть бесконечно узкое двумерно упорядоченное поле. Обозначим через K^r правый конус этого поля. Известно [4], что правый конус бесконечно узкого поля K есть положительный конус этого поля. Следовательно, K^r задаёт в K линейный порядок. Обозначим его через $\leq$. Итак, $x \leq y \Leftrightarrow yx^{-1} \in K^r$. Линейный порядок $\leq$, заданный в поле K, порождает в поле $L = K(i)$ стандартный двумерный порядок η_2.

Обозначим верхний конус этого двумерного порядка через L^u. Используя стандартный двумерный порядок L^u в поле L и заданный двумерный порядок K^u в поле K, определим функцию двумерного порядка $\zeta(x, y, z)$ в поле L.

Пусть $x, y, z \in L$, элементы x, y, z попарно различны. Если $(z - x)(y - x)^{-1} \in \overset{o}{L^u}$, или $(z - x)(y - x)^{-1} \in \overset{o}{K^u}$, то полагаем: $\zeta(x, y, z) = 1$.

Список литературы

[1] Пестов Г. Г. Двумерно упорядоченные поля. Томск: Изд-во ТГУ, 2003.

[2] Пестов Г. Г. Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля. Вестник ТГУ. Сер. Математика и механика, 1 (2007), 50–53.

[3] Фомина Е. А. Об одном классе двумерно упорядоченных полей. Вестник ТГУ. Сер. Математика и механика, 3(4) (2008), 32–34.

[4] Фомина Е. А. Критерий бесконечно узкого поля. Вестник ТГУ. Сер. Математика и механика, 1(5) (2009), 27–30.

Кафедра математического анализа ТГУ, Томск
E-mail: pppestov@mail.tomsknet.ru, ef@sibmail.com

О структуре факторизаций линейных обыкновенных дифференциальных операторов

А. В. Пургин

Изучаются факторизации в кольце линейных обыкновенных дифференциальных операторов (ЛОДО) с коэффициентами из поля рациональных функций $Q(x)$, [1]–[3]. Символом P будем обозначать линейный обыкновенный дифференциальный оператор $P = D^n + f_1(x)D^{n-1} + \ldots + f_n(x)$, $D = d/dx$, где $f_s(x)$ принадлежат полю $Q(x)$. Введем отношение частичного порядка на множестве всех правых делителей произвольного ЛОДО P следующим образом: пусть P_1 и P_2 — некоторые правые делители оператора P, будем говорить, что $P_1 \leqslant P_2$, если оператор P_1 является правым делителем оператора P_2. Частично упорядоченное множество правых делителей произвольного ЛОДО P является решеткой с операциями взятия точной нижней грани $\inf\{P_1, P_2\} = \mathrm{rGCD}(P_1, P_2)$ и точной верхней грани $\sup\{P_1, P_2\} = \mathrm{rLCM}(P_1, P_2)$, где $\mathrm{rGCD}(P_1, P_2)$ обозначает оператор, являющийся правым наибольшим общим делителем ненулевых операторов P_1 и P_2, а $\mathrm{rLCM}(P_1, P_2)$ — оператор, являющийся их правым наименьшим общим кратным. Пусть $P = P_1 \circ P_2 \circ \ldots P_i \circ P_{i+1} \circ P_{i+2} \circ \ldots \circ P_k$ — некоторая факторизация линейного обыкновенного дифференциального оператора P на неприводимые множители P_i. Для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ обозначим символом $\langle P_i \rangle$ следующий оператор: $\langle P_i \rangle = P_i \circ P_{i+1} \circ P_{i+2} \circ \ldots \circ P_k$ — именно он и является элементом решетки правых делителей оператора.

Теорема 1. *Для ЛОДО P следующие условия эквивалентны:* (1) *решетка правых делителей ЛОДО P дистрибутивна;* (2) *все факторы оператора P непараметризованы.*

Теорема 2. *Пусть L — произвольная конечная дистрибутивная решетка высоты n. Тогда существует линейный обыкновенный дифференциальный оператор P порядка n (не обязательно единственный) с коэффициентами из дифференциального поля рациональных функций $Q(x)$ такой, что решетка L_P его правых делителей изоморфна L.*

Список литературы

[1] van Hoeij M. Factorization of differential operators with rational functions coefficients. J. Symbolic Comput., 24 (1997), 537–561.

[2] Tsarev S. P. An algorithm for complete enumeration of all factorizations of a linear ordinary differential operator. Proceedings of ISSAC'96 (1996), ACM Press, 226–231.

[3] Абрамов С. А., Царев С. П. О периферийной факторизации линейных дифференциальных операторов. Программирование, 1997, N. 1, 59–67.

Красноярский Государственный Педагогический Университет, Красноярск
E-mail: pav1972@yandex.ru

Изотопы первичных $(-1,1)$-алгебр

С. В. Пчелинцев

В предлагаемой работе изучаются присоединенные коммутаторные и йордановы алгебры изотопов первичных строго $(-1,1)$-алгебр. Доказано, что коммутаторная алгебра $(A^{(c)})^-$ изотопа $A^{(c)}$ строго $(-1,1)$-алгебры A удовлетворяет тождествам $[x,y,y,x]=0$ и $[x_0,x_1,...,x_6]=0$. В частности, алгебра $(A^{(c)})^-$ является бинарно лиевой, (неизвестно, является ли она алгеброй Мальцева). Основной результат о коммутаторных тождествах: *система тождеств* $[x_1,x_2,x_2,x_3,...,x_n]=0$ $(n=2,...,5)$ *различима на изотопах первичных* $(-1,1)$*-алгебр.*

В [1] Е. И. Зельманов доказал знаменитую теорему о строении первичных невырожденных йордановых алгебр. В [2] было доказано существование первичных вырожденных йордановых алгебр, такие алгебры получались как присоединенные к первичным строго $(-1,1)$-алгебрам (указанные в [2] первичные вырожденные йордановы алгебры имеют одни и те же наборы тождеств).

Для йордановых алгебр получены результаты: *всякий изотоп* $A^{(c)}$ *строго* $(-1,1)$*-алгебры* A *удовлетворяет йордановым тождествам*: $\{[x,y]^2\}^2=(\{[x,y]^2\},x,y)^+=0$, *где* $\{[x,y]^2\}$ *- йорданов квадрат коммутатора* [1]; *если* A *- первичная неассоциативная (-1,1)-алгебра, то тождество* $(\{[a,b]^2\},x,x)^+=0$ *выполняется в присоединенной алгебре* $A^+=0$*, но не выполняется в изотопе* $(A^+)^{(c)}$, где $c=1+c_0$, c_0 - а.д.н. алгебры A достаточно высокого порядка.

Основные результаты работы являются аналогами теоремы из [3] об изотопах первичных альтернативных алгебр

Список литературы

[1] Зельманов Е. И. О первичных йордановых алгебрах, II. Сиб. мат. журн., 24 (1983), N 1, 89–104.

[2] Пчелинцев С. В. Первичные алгебры и абсолютные делители нуля. Изв. АН СССР, сер. матем., 50 (1986), N 1, 79–100.

[3] Пчелинцев С. В. Первичные альтернативные алгебры. Фундам. и прикл. матем., 4 (1998), N 2, 651–657.

Финансовая академия при прав-ве Российской Федерации, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru

Алгебраическая теория ДНК-рекомбинаций

С. Р. Сверчков

ДНК-рекомбинации обеспечивают хранение, передачу генетической информации и реализацию генетической программы развития и функционирования живых организмов. Алгебраическая формализация ДНК-рекомбинация представляется в виде линейного пространства $F(R)$ над полем F, где R — бесконечная свободная полугруппа, порожденная множеством $\{A, G, C, T\}$, здесь A — аденин, G — гуанин, C — цитозин и T — тимин.

ДНК-рекомбинации (обмен участками ДНК) определяют на $F(R)$ коммутативную неассоциативную n-арную операцию и превращают $F(R)$ в n-арную алгебру J_n, где n — число участков ДНК, участвующих в рекомбинациях.

Алгебры из многообразия $\mathrm{Var}(J_n)$, порожденного J_n, называются *алгебрами n-арных ДНК-рекомбинаций.*

Бинарные рекомбинации (кроссинговер), впервые описанные в классической работе Томаса Ханта Моргана (1916) [1], определяют коммутативную алгебру Моргана J_2. Оказалось (М. Бремнер [4] (2005)), что J_2 — специальная йорданова алгебра. С помощью компьютера М. Бремнер [4] нашел тождество f алгебры J_2 степени 4 и доказал, что все тождества J_2 степени $\leqslant 6$ являются следствиями тождества f. В работе автора [5] построены структура и представления алгебр ДНК-рекомбинаций для $n = 2$. Оказалось, что все тождества алгебры J_2 являются следствиями f, алгебра J_2 является йордановой алгеброй Бернштейна, все алгебры из $\mathrm{Var}(J_2)$ являются специальными йордановыми алгебрами. Построены базис и таблица умножения свободной алгебры многообразия $\mathrm{Var}(J_2)$ и ее универсальной ассоциативной обертывающей.

В настоящей работе построена алгебраическая теория ДНК-рекомбинаций для любого $n \geqslant 2$. Для алгебраической формализации n-арных ДНК-рекомбинаций была использована идея формализации алгебры наблюдаемых величин в квантовой механике, которую впервые осуществил Паскаль Йордан в классической работе [3] в 1933 г.

В работе построено многообразие S алгебр сращивания (S-splicing), которые моделируют частичные фрагменты ДНК-рекомбинаций. Для $n \geqslant 3$ это неассоциативные n-арные алгебры. Оказалось, что если на произвольной алгебре $B \in S$ ввести новую n-арную симметризованную операцию умножения (формализация Йордана), то полученная алгебра $B^{(+)}$ с этой операцией является алгеброй n-арных ДНК-рекомбинаций, т. е. $B^{(+)} \in \mathrm{Var}(J_n)$. Доказано и обратное. Для многообразия n-арных алгебр ДНК-рекомбинаций верен аналог классической теоремы Пуанкаре — Биркгоффа — Витта для алгебр Ли. Любая алгебра ДНК-рекомбинаций изоморфно вкладывается в алгебру $B^{(+)}$, где B — некоторая алгебра из S, т. е. все алгебры из $\mathrm{Var}(J_n)$ являются S-специальными.

В работе построены базисы свободной n-арной алгебры ДНК-рекомбинаций $DR[X]$ и свободной алгебры сращивания $S[X]$.

Построен базис тождеств многообразия $\mathrm{Var}(J_n)$. Он состоит из одного n-арного тождества степени $3n - 2$. Найдены определяющие тождества S. Найден J-критерий для алгебры $S[X]$, аналог классического критерия Шпехта и Вебера, определяющий лиевость любого многочлена из свободной ассоциативной алгебры. J-критерий конструктивно определяет, является ли произвольный многочлен $S[X]$ элементом алгебры $DR[X]$.

В заключение отметим, что исследования тождеств n-арных алгебр ДНК-рекомбинаций, построение универсальных объектов в многообразии алгебр ДНК-рекомбинаций, являются чрезвычайно важными для теоретической генетики, математической биологии и ДНК-программирования. Эти тождества и объекты определяют универсальные закономерности ДНК-рекомбинаций и дают возможности для построения эффективных генетических алгоритмов.

Основным математическим инструментом в построении алгебраической теории ДНК-рекомбинаций является теория алгебраических систем [5], одним из создателей которой является А. И. Мальцев.

Список литературы

[1] Morgan T. H. A criticque of the theory of evolution. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1916.

[2] Jordan P. Über Verallgemeinerung smöglichkeiten des Formalismus quanten Mechanik. Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 1933, 209–214.

[3] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

[4] Bremner M. R. Jordan algebras arising from intermolecular recombination. SIGSAM bulletin Commun. Computer Algebra, 39 (2005), N. 4, 106–117.

[5] Sverchkov S. R. Structure and representation of Jordan algebras arising from intermolecular recombination. Comtemp. Math. AMS., 483 (2009), 261–280.

Новосибирский гос. университет, Новосибирск
E-mail: sverchkovSR@yandex.ru

Алгебра Ли кососимметричных элементов ранга 2 и ее применения в теории йордановых алгебр

С. Р. Сверчков

Доказано, что алгебра Ли кососимметричных элементов свободной ассоциативной алгебры ранга 2 относительно стандартной инволюции порождается как F-модуль элементами вида $[a,b]$, $[a,b]^3$, где a,b — йордановы многочлены, F — поле характеристики 0. С использованием этого результата доказаны две теоремы для йордановых алгебр. Пусть $\langle\ \rangle : Ass[x,y,z] \to J[x,y,z]$ — критерий йордановости Ширшова — Кона [1], где $Ass[x,y,z]$, $J[x,y,z]$ — свободные ассоциативная и йорданова алгебры от порождающих x,y,z.

Теорема 1. *Алгебра Ли йордановых дифференцирований алгебры $J[x,y]$ порождается как характеристический F-модуль двумя дифференцированиями $D_{a,b}$ и $S_{a,b}$, где $zD_{a,b} = (z\cdot a)\cdot b - (z\cdot b)\cdot a$ — стандартное дифференцирование $J[x,y]$, $zS_{a,b} = \langle [z,[a,b]^3]\rangle$, $a,b \in J[x,y]$.*

Теорема 2. *Все йордановы s-тождества алгебры $J[x,y,z]$ являются следствиями s-тождества Шестакова* [2]
$$\langle [z^2,[x,y]^3\rangle - 2\langle [z,[x,y]^3]\rangle \cdot z.$$

Список литературы

[1] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
[2] McCrimmon K. A taste of Jordan algebras. Berlin e.a.: Springer-Verl., 2004 (Universitext).

Новосибирский гос. университет, Новосибирск
E-mail: sverchkovSR@yandex.ru

Композиционное строение многообразий альтернативных алгебр и алгебр Мальцева

С. Р. Сверчков

Говорят, что многообразие $\mathfrak{M}$ является *композицией многообразий* $\mathfrak{N}_1$ *и* $\mathfrak{N}_2$ (или *произведением в смысле Мальцева*), если для любого $A \in \mathfrak{M}$ существует идеал $B \subset A$ такой, что $A/B \in \mathfrak{N}_1$, $B \in \mathfrak{N}_2$. Композиция многообразий записывается так: $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \circ \mathfrak{N}_2$. Отметим, что в общем случае $\mathfrak{N}_1 \circ \mathfrak{N}_2 \neq \mathfrak{N}_2 \circ \mathfrak{N}_1$. Первые примеры композиционного разложения многообразия Mal алгебр Мальцева и многообразия Alt альтернативных алгебр были построены в работах В. Т. Филиппова [1, 2]. Исследования композиционного строения Mal и Alt определяют новые подходы к решению проблемы А. И. Мальцева о специальности многообразия Mal.

В данной работе построен элемент минимальной степени из ассоциативного ядра свободной алгебры Alt: $k = [x, [x, y]^2] \in U$, где $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор $x, y \in \mathrm{Alt}[X]$, $U = U(\mathrm{Alt}[X])$ — ассоциативное ядро, $\mathrm{Alt}[X]$ — свободная альтернативная алгебра от порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Элемент k определяет в $\mathrm{Alt}[X]$ неизвестные ранее тождества:

$$[x, [x, y]^2](a, b, c) = (a, b, c)[x, [x, y]^2] = 0,$$

$$[x, [x, y], [x, y], x](a, b, c) = (a, b, c)[x, [x, y], [x, y], x] = 0,$$

где $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор $a, b, c \in \mathrm{Alt}[X]$, $[x, [x, y], [x, y], x] = [[[x, [x, y]], [x, y]], x]$. С помощью элемента k доказаны теоремы о композиционном строении многообразий Mal и Alt. Пусть Ass — многообразие ассоциативных алгебр, K — многообразие альтернативных алгебр, порожденных тождеством $[x, [x, y]^2] = 0$, L — многообразие алгебр Ли, M — многообразие алгебр Мальцева, порожденных тождеством $[x, [x, y], [x, y], x] = 0$.

Теорема 1 $\mathrm{Alt} = \mathrm{Ass} \circ K = K \circ \mathrm{Ass}$.

Теорема 2. $\mathrm{Mal} = L \circ M = M \circ L$.

Список литературы

[1] Филиппов В. Т. О многообразии алгебр Мальцева. Алгебра и логика, 20 (1981), N. 3, 300–314.

[2] Филиппов В. Т. О разложении многообразия альтернативных алгебр. Алгебра и логика, 32 (1993), N. 1, 73–91.

Новосибирский гос. университет, Новосибирск
E-mail: sverchkovSR@yandex.ru

О соответствии правых почтиобластей точно дважды транзитивным группам

А. А. Симонов

Для описания *точно дважды транзитивных групп* в [1] введено понятие *почтиобласти*, как алгебраической системы $(B_1, 0, \cdot, +, r)$, но до последнего времени не известно ни одного примера почтиобласти, которая не была бы почтиполем. Предлагается ослабить аксиомы почтиобласти, оставив только необходимые для построения точно дважды транзитивных групп. Определим правую почтиобласть как алгебраическую систему $(B_1, 0, v, \cdot, +, -, h, r)$ с операциями:

$$(+) : B \times B_1 \to B,\ (-) : B \times B_1 \to B,\ (\cdot) : B \times B_1 \to B,\ \text{где } B = B_1 \cup \{1\} \text{ и}$$

$$v : B_1 \to B_1,\ h : B_1 \times B_1 \to B_1,\ r : B_1 \times B_1 \to B_1,$$

для которых выполнены аксиомы

A1. $(\forall x \in B)(\forall y \in B_1)\ (x - y) + y = x$;

A2. $(\forall x \in B)(\forall y \in B_1)\ (x + y) - y = x$;

A3. $(\forall x \in B_1)\ \ x - x = 0$;

A4. $(B_1, \cdot, e)$ — группа с нейтральным элементом $e \in B_1$;

A5. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_1)(\exists\ h(y, z) \in B_1)\ (x + y)z = xh(y, z) + yz$;

A6. $(\forall x \in B)(\forall y, z \in B_1 :\ y + z \neq 0)(\exists\ r(y, z) \in B_1)\ (x + y) + z = xr(y, z) + (y + z)$;

A7. $(\forall x \in B)(\forall z \in B_1)(\exists\ v(z) \in B_1)\ (x + (0 - z)) + z = xv(z)$.

Введём обозначения $L(x) = 0 - x$, тогда из A1 следует $L(x) + x = 0$. Т.о. отображение $L : B_1 \to B_1$ определяет левый обратный в правой лупе.

Лемма. *в правой почтиобласти выполнено:*

1. $(\forall x \in B_1)\ 0x = 0$*;*

2. $h(x, y) = EL(x)L(xy)$*, где* $E(x) = x^{-1}$*;*

3. $r(y, z) = (L(z) - y)^{-1}L(y + z)$*;*

4. $x - z = xv^{-1}(z) + L(z)$*;*

5. $v(z) = EL^2(z)z$*, где* EL *— суперпозиция преобразований* L *и* E*.*

Группа $T_2(B)$ преобразования множества B точно дважды транзитивна, если для произвольных пар $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \in B^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in B\}$ найдётся единственный элемент $g \in T_2(B)$, для которого справедливо $g(x_1) = y_1, g(x_2) = y_2$.

Теорема. *Алгебраические системы* $(B_1, 0, v, \cdot, +, -, h, r)$ *и точно дважды транзитивные группы* $T_2(B)$ *рационально эквивалентны.*

Понятие *рациональной эквивалентности* введено Мальцевым [2].

Приведём несколько примеров правых почтиобластей, над телом $\mathbb{K}$:

1. $x \oplus y = -xa^{-1} + y,\ x \ominus y = -xa + ay,\ r(y, z) = -a^{-1},\ v(z) = a^{-2},\ h(y, z) = z.$
2. $x \oplus y = xy^2 + y,\ x \ominus y = xy^{-2} - y^{-1},\ r(y, z) = y^2z(z + y)^{-1}(yz + 1),\ h(y, z) = z^{-1}.$

Список литературы

[1] Karzel H. Inzidenzgruppen I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg, 1965, 123–135.

[2] Мальцев А. И. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. Докл. Акад. наук СССР, 120 (1958), N. 1, 29–32.

Новосибирск

E-mail: Andrey.Simonoff@gmail.com

Абсолютные идеалы абелевой группы

Т. Т. Т. Фам

Настоящая работа посвящена изучению абсолютных идеалов абелевой группы. Под абсолютным идеалом группы G понимается ее подгруппа, являющаяся идеалом в любом кольце, аддитивная группа которого совпадает с G. Исследованию абсолютных идеалов группы посвящена работа [1]. Ясно, что любая вполне характеристическая подгруппа абелевой группы является ее абсолютным идеалом, однако обратное утверждение не верно. Класс абелевых групп, в которых любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой обозначим через $\mathbb{K}$.

Абелеву группу назовем AI-группой, если она допускает кольцевую структуру, в которой любой идеал является абсолютным. Проблема описания AI-группы сформулирована в [2, проблема 93].

В настоящей работе получен критерий принадлежности редуцированной вполне транзитивной периодической абелевой группы классу $\mathbb{K}$, а также описаны AI-группы в классе редуцированных периодических абелевых групп.

Теорема 1. *Пусть G — редуцированная периодическая абелева p-группа. Тогда 1) G принадлежит классу $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда любая ее p-компонента принадлежит классу $\mathbb{K}$.*
2) G является AI-группой тогда и только тогда, когда любая ее p-компонента является AI-группой.

Теорема 2. *Пусть G — редуцированная вполне транзитивная абелева p-группа. Тогда $G \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда ее первая ульмовская подгруппа G^1 циклическая.*

Теорема 3. *Пусть G — редуцированная абелева p-группа. Пусть $B = \sum\limits_{i\in I}\langle e_i\rangle$ — ее p-базисная подгруппа и $B_n^* = \sum\limits_{o(e_i)>p^n}\langle e_i\rangle$. Тогда G является AI-группой тогда и только тогда, когда $|G/B| \leq |B_n^*|$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

Список литературы

[1] Fried E. On the subgroups of abelian group that are ideals in every ring. Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest, 1964, 51–55.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, т. 1,2. М.: Мир, 1977.

Московский Педагогический Государственный Университет, Москва
E-mail: ptthuthuy@yahoo.com

Кольца простой характеристики с коммутативным факторкольцом по локально нильпотентному радикалу, в которых подкольца моногенных подколец моногенны

П. А. Фрейдман, И. Л. Хмельницкий

Ассоциативные кольца, в которых подкольца любого моногенного подкольца моногенны, названы авторами A-кольцами. Различные классы A-колец были изучены ими в ряде предыдущих работ. В частности, в [1] получено описание A-колец простой характеристики без нильпотентных элементов, отличных от нуля, в [2] изучены коммутативные A-кольца простой характеристики. Обобщением этих классов является класс A-колец со свойством, указанным в заглавии. Доказана следующая

Теорема. *Кольцо K простой характеристики p является A-кольцом с коммутативным факторкольцом по локально нильпотентному радикалу $R(K)$ тогда и только тогда, когда $K/R(K)$ есть A-кольцо без нильпотентных элементов, отличных от нуля, и для любого $a \in K$ радикал $R(\langle a\rangle)$. изоморфен кольцу $\langle r\rangle$, где $r^3 = 0$.*

Список литературы

[1] Фрейдман П. А., Хмельницкий И. Л. О кольцах, в которых подкольца моногенных подколец моногенны. Известия Уральского гос. университета, 36 (2005), 145–152.

[2] Freidman P. A., Hmel'nitskii I. L. Commutative rings of prime characteristic in which subrings of monogenic subrings are monogenic. Intern. J. Algebra Comp., 17 (2007), N. 5& 6, 1013–1019.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург

E-mail: `freidman@dialup.mplik.ru, ayaovs@e1.ru`

Применения колец Ли с конечной циклической градуировкой

Е. И. Хухро

Пусть $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ всюду далее — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированное кольцо (алгебра) Ли, где L_i — аддитивные подгруппы (подпространства) такие, что $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j\,(\mathrm{mod}\,n)}$. Теоремы Хигмэна, Кострикина и Крекнина утверждают, что если $L_0 = 0$, то L разрешимо (для простого n нильпотентно) n-ограниченной (т. е. ограниченной в терминах n) ступени. Отсюда то же следует для кольца Ли M с регулярным (т. е. без нетривиальных неподвижных точек) автоморфизмом φ порядка n: присоединив примитивный корень n-й степени из единицы ω, получаем $M = M_0 + M_1 + \dots + M_{n-1}$, где $M_i = \{x \in M \mid \varphi(x) = \omega^i x\}$, причем $[M_i, M_j] \subseteq M_{i+j\,(\mathrm{mod}\,n)}$ и $M_0 = 0$ (то, что в общем случае сумма не является прямой, несущественно). Отсюда легко следует аналогичное утверждение о (локально) нильпотентных группах с регулярным автоморфизмом простого порядка. Однако открыт вопрос об аналоге теоремы Крекнина для таких же групп с регулярным автоморфизмом произвольного конечного порядка.

Тем не менее, теорема Крекнина успешно применялась к конечным p-группам с автоморфизмом порядка p^k и к про-p-группам данного кокласса в работах Зельманова — Шалева, Медведева, Хайкина-Запирайна, Хухро, Шалева.

Макаренко и Хухро доказали, что если $\dim L_0 = r$ (или $|L_0| = r$), то L содержит разрешимый (для простого n нильпотентный) идеал n-ограниченной ступени и (n, r)-ограниченной коразмерности. Хухро применил этот результат к кольцам Ли и периодическим нильпотентным группам с «почти регулярным» автоморфизмом простого порядка n; Медведев снял условие периодичности для групп.

Пусть среди компонент градуировки L_i только d ненулевые. Шалев и Хухро доказали, что если $L_0 = 0$, то L разрешимо (для простого n нильпотентно) d-ограниченной ступени. Эти результаты применялись для групп ограниченного ранга с почти регулярными автоморфизмами. В работах Макаренко, Хухро, Шумяцкого условие $L_0 = 0$ заменено на $\dim L_0 = r$ (или $|L_0| = r$): тогда L содержит разрешимый (для простого n нильпотентный) идеал d-ограниченной ступени и (d, r)-ограниченной коразмерности. Эти результаты применялись для обобщения теоремы Джекобсона об алгебрах Ли с нильпотентной алгеброй дифференцирований на случай «почти без нетривиальных констант».

Пусть для некоторого m при $k \neq 0$ имеем $|\{i \mid [L_k, L_i] \neq 0\}| \leq m$, т. е. каждая компонента L_k при $k \neq 0$ коммутирует со всеми компонентами, кроме не более чем m компонент. Хухро доказал, что если $L_0 = 0$, то L разрешимо (для простого n нильпотентно) m-ограниченной ступени, а если $\dim L_0 = r$ (или $|L_0| = r$), то L содержит разрешимый (для простого n нильпотентный) идеал m-ограниченной ступени и (n, r)-ограниченной коразмерности. Эти результаты применялись к нильпотентным группам с Фробениусовыми группами автоморфизмов.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

Централизаторы трехмерных простых подалгебр Ли в универсальной обертывающей семимерной простой алгебры Мальцева

К. А. Шемонаев

Хорошо известна проблема, восходящая к А. И. Мальцеву, о вложении алгебры Мальцева в коммутаторную алгебру некоторой альтернативной алгебры. В связи с этой проблемой универсальные обертывающие алгебры Мальцева вначале развивались в классе альтернативных алгебр [1]. Однако, как показано в [2], обобщенный альтернативный центр произвольной алгебры является алгеброй Мальцева относительно операции коммутирования. В [3] показано, что любая алгебра Мальцева является подалгеброй коммутаторной алгебры обобщенного альтернативного центра некоторой неассоциативной алгебры. Среди этих неассоциативных обертывающих алгебр Мальцева, как и в случае алгебр Ли, существует универсальная обертывающая алгебра. Их свойства близки к свойствам универсальных обертывающих алгебр Ли. Например, в [4] установлено, что центр универсальной обертывающей полупростой конечномерной алгебры Мальцева над полем характеристики ноль является кольцом многочленов от конечного числа переменных.

В данной работе исследовались централизаторы простых трехмерных подалгебр Ли в универсальной обертывающей простой семимерной алгебре Мальцева над полем нулевой характеристики. Основным результатом работы является

Теорема. *Централизатор трехмерной простой подалгебры Ли в универсальной обертывающей семимерной простой нелиевой алгебры Мальцева над полем характеристики ноль является кольцом многочленов от двух переменных.*

Работа поддержана РФФИ 09-01-00157 и грантом «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

Список литературы

[1] Shestakov I. P. Speciality Problem for Malcev algebras and Poisson Malcev Algebras. In: "Non-Associative Algebra and Its Applications", Proceedings of the IV International Conference on Non-Associative Algebra and Its Applications, July 1998, São Paulo. New York: Marcel Dekker, 2000, 365–371.

[2] Morandi P. J., Pérez-Izquierdo J. M., Pumplin S. On the tensor product of composition algebras. J. Agebra, 243 (2001), 41–68.

[3] Pérez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P. An envelope for Malcev algebras. Journal of Algebra, 272 (2004), 379–393.

[4] Желябин В. Н., Шестаков И. П. Теоремы Шевалле и Константа для алгебр Мальцеа. Алгебра и логика, 46 (2007), N. 5, 560–584.

Новосибирский государственный университет
E-mail: killri@yandex.ru

Prime spectrum and primitive Leavitt path algebras

G. Aranda Pino

Leavitt path algebras of row-finite graphs have been recently introduced in [1] and [2]. They have become a subject of significant interest, both for algebraists and for analysts working in C*-algebras. The Cuntz—Krieger algebras $C^*(E)$ (the C*-algebra counterpart of these Leavitt path algebras) are described in [5].

For a field K, the algebras $L_K(E)$ are natural generalizations of the algebras investigated by Leavitt in [4], and are a specific type of path K-algebras associated to a graph E (modulo certain relations). The family of algebras which can be realized as the Leavitt path algebras of a graph includes matrix rings $\mathbb{M}_n(K)$ for $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (where $\mathbb{M}_\infty(K)$ denotes matrices of countable size with only a finite number of nonzero entries), the Toeplitz algebra, the Laurent polynomial ring $K[x, x^{-1}]$, and the classical Leavitt algebras $L(1, n)$ for $n \geq 2$ (the latter being universal algebras without the Invariant Basis Number condition).

In this work we determine the prime and primitive Leavitt path algebras. The main inspiration springs out of the complete description of the primitive spectrum of a graph C*-algebra $C^*(E)$ carried out by Hong and Szymański in [3]. Concretely, in [3, Corollary 2.12], the authors found a bijection between the set $\mathrm{Prim}(C^*(E))$ of primitive ideals of $C^*(E)$ and some sets involving maximal tails and points of the torus $\mathbb{T}$. We give the algebraic version of this by exhibiting a bijection between the set of prime ideals of $L_K(E)$, and the set formed by the disjoint union of the maximal tails of the graph $\mathcal{M}(E)$ and the cartesian product of maximal tails for which every cycle has an exit $\mathcal{M}_\tau(E)$ and the nonzero prime ideals of the Laurent polynomial ring $\mathrm{Spec}(K[x, x^{-1}])^*$.

In addition, the primitive Leavitt path algebras are characterized. Concretely, $L_K(E)$ is left primitive if and only if $L_K(E)$ is right primitive if and only if every cycle in the graph E has an exit and $E^0 \in \mathcal{M}(E)$.

References

[1] Abrams G., Aranda Pino G. The Leavitt path algebra of a graph. J. Algebra, 293 (2005), N. 2, 319–334.

[2] Ara P., Moreno M. A., Pardo E. Nonstable K-Theory for graph algebras. Algebra Represent. Theory, 10 (2007), 157–178.

[3] Hong J. H., Szymański W. The primitive ideal space of the C^*-algebras of infinite graphs. J. Math. Soc. Japan, 56 (2004), N. 1, 45–64.

[4] Leavitt W. G. The module type of a ring. Trans. Amer. Math. Soc., 103 (1962), 113–130.

[5] Raeburn I. Graph algebras. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. 103, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga, 29071 Málaga, Spain
E-mail: `g.aranda@uma.es`

On some identities of a ternary quaternion algebra

P. D. Beites, A. P. Nicolás, A. P. Pozhidaev, P. Saraiva

We describe the degrees 1 and 2 identities of a simple 4-dimensional ternary algebra A. This triple system is said to be a ternary quaternion algebra because it appears analogously to the quaternions from the Lie algebra sl_2. Based on A, we construct some ternary enveloping algebras for ternary Filippov algebras.

Supported by FCT (Foundation for Science and Technology of the Portuguese Ministry of Science, Technology and Higher Education), grant reference SFRH/BD/37907/2007; by State Aid of Leading Scientific Schools (project NSh-344.2008.1) and by ADTP "Development of the Scientific Potential of Higher School" of the Russian Federal Agency for Education (grant 2.1.1.419); by CMUC (Centre for Mathematics, University of Coimbra).

References

[1] Bremner M., Hentzel I. Identities for generalized Lie and Jordan products on totally associative triple systems, Journal of Algebra, 231 (2000), N. 1, 387–405.

[2] Bremner M. R., Peresi L. A. Classification of trilinear operations. Communications in Algebra, 35 (2007), N. 9, 2932–2959.

[3] Filippov V. T. $n-$Lie Algebras. Siberian Mathematical Journal, 26 (1985), N. 6, 879–891 (translation of *Sib. Mat. Zh.*, 26 (1985), N. 6, 126–140).

[4] Pojidaev A. P. Enveloping algebras of Filippov algebras. Communications in Algebra, 31 (2003), N. 2, 883–900.

Department of Mathematics and Centre of Mathematics, University of Beira Interior, Covilhã, Portugal
E-mail: pbeites@mat.ubi.pt
Department of Mathematics, Statistics and Computing, University of Cantabria, Santander, Spain
E-mail: alejandro.p.nicolas@unican.es
Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: app@math.nsc.ru
Faculty of Economics and Centre for Mathematics, University of Coimbra, Coimbra, Portugal
E-mail: psaraiva@fe.uc.pt

The construction of a finitely presented infinite nilsemigroup

A. Belov, I. Ivanov-Pogodaev

The talk is devoted to the old question posted by L. N. Shevrin and M. V. Sapir in «Sverdlovskaya tetrad», Vol. 3, 1989:

3.61. b) Is there exists a finitely presented infinite nilsemigroup?

The answer is «yes». The main idea of the construction uses the geometric properties of nonperiodic mosaics on the plane. The elements of the semigroup are presented by paths in the special metric space.

The connections between nil-objects and nilpotent objects are always interesting. This construction presents the first known finitely presented nil-object that is not nilpotent. Our joint paper A. Belov, I. Ivanov-Pogodaev «The construction of a finitely presented infinite nilsemigroup» will be presented soon.

Moscow Institute of Open Education, Bar-Ilan University, Moscow State University
E-mail: `kanel@mccme.ru, ivanov-pogodaev@mail.ru`

Groebner—Shirshov bases and embedding of algebras

L. A. Bokut', Y. Chen

It is a joint talk with Yongshang Chen, Xueming Deng, Yu Li, Cihua Liu, Qiuhui Mo, Jianjun Qiu, Xia Zhang, Xiangui Zhao, Chanyan Zhong.

We give Gröbner—Shirshov bases technique for the following classes of algebras:

1. Associative Ω-algebras;
2. Vinberg—Koszul—Gerstenhaber right-symmetric (pre-Lie) algebras;
3. Associative differential algebras;
4. Associative λ-differential algebras;
5. Associative Rota—Baxter algebras;
6. Associative S-act algebras, where S is a semigroup;
7. Dialgebras;
8. Lie algebras over a commutative algebra;
9. Braid groups in Adyan—Thurston generators;
10. Free inverse semigroups.

As an applications we proved some known theorems of PBW-types and some known and new results on embedding of algebras into 2-generated (2-generated simple) algebras.

Supported by RFBR 01-09-00157, LSS-344.2008.1 and SB RAS Integration grant No. 2009.97 (Russia) and by the NNSF of China (No.10771077) and the NSF of Guangdong province (No.06025062).

Sobolev Institute of Mathematics, Russia
E-mail: bokut@math.nsc.ru
South China Normal University, China

On p-Schreier varieties of semimodules

S. N. Il'in, Y. Katsov

As is well known, by the classical Nielsen-Schreier theorem every subgroup of a free group is itself free. This result stimulated a strong interest in establishing the analogs of the Nielsen-Schreier theorem in different varieties of algebras. Thus, there appeared so-called Schreier varieties of algebras — varieties whose all subalgebras of free algebras are themselves free. However, in homological algebra, projective algebras — algebras which are retracts of free algebras — play a very important role. Therefore, combining the concepts of free and projective algebra, one naturally comes up with the concept of a p-Schreier variety — a variety whose all projective algebras are free.

In this talk, considering p-Schreier varieties in a context of semimodules over semirings, implicitly studied in [1]–[3] we present the following results.

Theorem 1. *The category of right semimodules over a division semiring R is a Schreier variety iff R is a division ring.*

The next theorem, having been of interest in its own rights, particularly solves Problem 1 left open in [3].

Theorem 2. *The categories of right semimodules over additively π-regular proper (i.e., they are not rings) semirings are not p-Schreier varieties.*

Finally, in contrast to Theorem 2, we obtain the following interesting and important result.

Theorem 3. *The categories of right semimodules over cancellative division semirings are p-Schreier varieties.*

References

[1] Grillet P. A. On free commutative semigroups. J. Natur. Sci. and Math., 9 (1969), 71–78.

[2] Sokratova O. On semimodules over commutative, additively idempotent semirings. Semigroup Forum, 64 (2002), 1–11.

[3] Katsov Y. Toward homological characterization of semirings: Serre's conjecture and Bass's perfectness in a semiring context. Algebra Universalis, 52 (2004), 197–214.

Department of Algebra and Mathematical Logic, Kazan State University, Kazan
E-mail: `Sergey.Ilyin@ksu.ru`
Department of Mathematics and Computer Science, Hanover College, Hanover, USA
E-mail: `katsov@hanover.edu`

Applications of Lie rings with finite cyclic grading

E. I. Khukhro

Let $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ be a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-graded Lie ring (algebra), where the L_i are additive subgroups (subspaces) satisfying $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j\,(\mathrm{mod}\,n)}$. Theorems of Higman, Kostrikin, and Kreknin assert that if $L_0 = 0$, then L is soluble (for n prime, nilpotent) of n-bounded (i.e. bounded in terms of n) derived length (class). Hence the same follows for a Lie ring M with a regular (i.e. without nontrivial fixed points) automorphism φ of order n: after adjoining a primitive nth root of unity ω we obtain $M = M_0 + M_1 + \cdots + M_{n-1}$ for $M_i = \{x \in M \mid \varphi(x) = \omega^i x\}$, where $[M_i, M_j] \subseteq M_{i+j\,(\mathrm{mod}\,n)}$ and $M_0 = 0$ (the fact that the sum is not direct in general is inessential). A similar assertion easily follows for (locally) nilpotent groups with a regular automorphism of prime order. But there is an open problem whether an analogue of Kreknin's theorem holds for such groups with a regular automorphism of arbitrary finite order.

Nevertheless, Kreknin's theorem was successfully applied to finite p-groups with an automorphism of order p^k and to pro-p-groups of given coclass in the papers of Jaikin-Zapirain, Khukhro, Medvedev, Shalev, Shalev—Zel'manov.

Makarenko and Khukhro proved that if $\dim L_0 = r$ (or $|L_0| = r$), then L contains a soluble (for n prime, nilpotent) ideal of n-bounded derived length (nilpotency class) and of (n, r)-bounded codimension. Khukhro applied this result to Lie rings and periodic nilpotent groups with an "almost regular" automorphism of prime order n; Medvedev lifted the periodicity condition for groups.

Suppose that there are only d nonzero components among the grading components L_i. Shalev and Khukhro proved that is $L_0 = 0$, then L is soluble (for n prime, nilpotent) of d-bounded derived length (class). These results were applied to groups of bounded rank with almost regular automorphisms. In the works of Makarenko, Khukhro, Shumyatsky the condition $L_0 = 0$ was replaced by $\dim L_0 = r$ (or $|L_0| = r$): then L contains a soluble (for n prime, nilpotent) ideal of d-bounded derived length (class) and of (d, r)-bounded codimension. There results were applied to generalize Jacobson's theorem on Lie algebras with a nilpotent algebra of derivations to the case of "almost without nontrivial constants".

Suppose that for some m for $k \neq 0$ we have $|\{i \mid [L_k, L_i] \neq 0\}| \leq m$, i.e. each component L_k for $k \neq 0$ commutes with all but at most m components. Khukhro proved that if $L_0 = 0$, then L is soluble (for n prime, nilpotent) of m-bounded derived length (class), and if $\dim L_0 = r$ (or $|L_0| = r$), then L contains a soluble (for n prime, nilpotent) ideal of m-bounded derived length (class) and of (n, r)-bounded codimension. These results were applied to nilpotent groups with Frobenius groups of automorphisms.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs

A. S. Kuz'mina

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of an associative ring R is the graph whose vertices are all nonzero (one-sided and two-sided) zero-divisors of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$.

Finite commutative decomposable rings with unity whose zero-divisors graph are planar were studied in [1]. In [2], all finite commutative local rings with unity whose zero-divisor graphs are planar were discribed.

In [3], all nilpotent finite rings with planar zero-divisor graphs were described. In the present thesis, we describe all non-nilpotent finite rings with planar zero-divisor graphs. So the results of this thesis and the paper [3] give us the complete list of finite rings with planar zero-divisor graphs. There are 57 types of such rings.

References

[1] Akbari S., Maimani H. R., Yassemi S. When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph. Journal of Algebra, 270 (2003), 169–180.

[2] Belshoff R., Chapman J. Planar zero-divisor graphs. Journal of Algebra, 316 (2007), 471–480.

[3] Kuz'mina A. S., Maltsev Yu. N. Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs. Asian-European Journal of Mathematics, 1(4) (2008), 565–574.

Altai State Pedagogical Academy
E-mail: akuzmina1@yandex.ru

The structural and model theory questions of nilpotent matrix groups and associated rings

V. M. Levchuk

The Malcev's papers [1]–[3] raised suggest several important leads for further research. We consider development of these trends by different authors. It is partially reflected in [4] and [5]. The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 09–01–00717).

References

[1] Malcev A. I. Commutative subalgebras of the semisimple Lie algebras. Izvestiya AN USSR, ser. matem., 9 (1945), N 4, 291–300.

[2] Malcev A. I. Generally nilpotent algebras and their adiont groups. Matem. Sbornik, 25 (1949), N 3, 347–366.

[3] Malcev A. I. On some correspondense between rings and groups. Matem. Sbornik, 50 (1960) N 3, 257–266.

[4] Levchuk V. M., Suleimanova G. S. The normal structure of the unipotent subgroup of Lie type groups and closely-related questions. Doklady Math., 77 (2008) N 2, 284–287.

[5] Levchuk V. M., Minakova E. V. Elementary equivalence and isomorphisms of locally nilpotent matrix groups and rings. Doklady Math., 79 (2009) N 2, 185–188.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: levchuk@lan.krasu.ru

On identities in infinite rings with some combinatorial conditions on infinite subsets

Yu. N. Mal'tsev

The following main result is proved.

Theorem. *Let R be an infinite associative ring and for any infinite subsets $A_1, A_2, \ldots, A_n$ of R*

$$A_1 A_2 \ldots A_n = A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(n)},$$

where σ is a fixed permutation such that $\sigma(1) \neq 1$ and $A_1 A_2 \ldots A_n = \{a_1 a_2 \ldots a_n ; a_i \in A_i\}$. Then R satisfies the identity $x_1 x_2 \ldots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$.

This result extends the theorem of H. Bell and A. Klein that an infinite ring R must be commutative if $XY = YX$ for all infinite subsets X and Y [1].

References

[1] Bell H., Klein A. A Commutativity and Finiteness Condition for Rings. Arch. Math. (Basel), 80 (2003), 354–357.

Altai State University
E-mail: maltsev@math.asu.ru

Classification of finite dimensional structurable superalgebras over an algebraically closed field of characteristic 0

A. P. Pozhidaev, I. P. Shestakov

Classification of simple finite dimensional structurable algebras was obtained by I. Kantor, B. Allison, and O. Smirnov. We consider the superalgebra case. Recall that a superalgebra A with a superinvolution $^-$ is called *structurable* if

$$[T_z, V_{x,y}] \quad = \quad V_{T_z(x),y} - (-1)^{xz} V_{x,T_{\bar{z}}(y)},$$

where $T_x(z) = xz + (-1)^{xz} z(x - \bar{x})$, $V_{x,y}(z) = (x\bar{y})z + (-1)^{x,y,z}(z\bar{y})x - (-1)^{xz+yz}(z\bar{x})y$.

We describe the simple Lie superalgebras arising from the simple unital finite dimensional structurable superalgebras of characteristic 0 and construct four series of the unital simple structurable superalgebras of Cartan type. We give a classification of simple finite dimensional structurable superalgebras of Cartan type over an algebraically closed field F of characteristic 0. Together with the Faulkner theorem on the classification of classical such superalgebras, it gives a classification of the simple finite dimensional structurable superalgebras over F.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: app@math.nsc.ru

IV. Секция «Универсальная алгебра»

Алгебраические соотношения над многоосновными алгебраическими системами и их использование в криптографии

В. Д. Аносов

А. И. Мальцев [1] впервые начал рассматривать многоосновные алгебры и модели. Алгебраические модели, основанные на многоосновных алгебраических системах (МАС) оказываются удобными для изучения ряда свойств криптографических алгоритмов [3]. В связи с использованием в криптографических алгоритмах преобразований и предикатов, зависящих от ключа, представляет прикладной интерес разработка вопросов, связанных с решением систем уравнений над МАС, в число неизвестных которых могут входить не только элементы основных множеств, но и операторы и предикаты. В [2] при перенесении результатов, связанных с разрешимостью уравнений, с полей на общие классы универсальных алгебр, рассматривались системы алгебраических уравнений с предметными переменными над произвольной одноосновной универсальной алгеброй А из некоторого многообразия. На основе использования гомоморфизмов МАС [4], [6] при которых могут отождествляться как элементы основных множеств, так и операторы и предикаты, предложенный подход развивается для систем алгебраических соотношений , в число неизвестных которых могут входить как предметные, так и сигнатурные переменные, над МАС из некоторого сверхпредмногообразия [3], [5].

Пусть $X = \{X_i\}_{i\in I}$ — предметные переменные и $U = U^{\Omega}\bigcup U^{P}$ — сигнатурные (функциональные и предикатные) переменными. Если алгебраическая система A принадлежит сверхпредмногообразию K, то существует полиномиальная МАС $A_K[X, U]$ [3].

Произвольный элемент t некоторого основного множества $A_K[X, U]$ можно представить в виде слова $t(U_1, \ldots, U_m, x_1, \ldots, x_n)$, где $U_1, \ldots, U_m, x_1, \ldots, x_n$ — функциональные и предметные переменные. Пусть $=_i, i \in I$ соответственно равенства на $S_i, i \in I$. Алгебраическими соотношениями над A с предметными и сигнатурными переменными X, U называем формальные выражения вида

$$p(t_1(U_1^1, \ldots, U_{m_1}^1, x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1), \ldots, t_l(U_1^l, \ldots, U_{m_l}^l, x_1^l, \ldots, x_{n_l}^l)),$$

где $p \in \{\Sigma^P_{\langle\xi\rangle}, =_i, i \in I\}$, а элементы основных множеств $A_K[X, U]$, входящие в соотношения, согласованы с типами используемых предикатов.

Системой $\mathfrak{L}$ алгебраических соотношений называем семейство алгебраических соотношений, индексированное произвольным множеством индексов L.

По алгебраическому соотношению над МАС $A = \langle M, \Sigma\rangle$ и гомоморфизму $\overline{\Phi} = (\overline{\varphi}_M = \{\overline{\varphi}_i\}_{i\in I}, \overline{\psi})$ МАС A в МАС A' однозначно строится алгебраическое соотношение над МАС $A' = \langle M', \Sigma'\rangle$, удовлетворяющее условию: если $s_1, \ldots, s_n,\ s_l \in S_{i_l},\ l = 1, \ldots, n, \omega_1, \ldots, \omega_m, (p)$— решение алгебраического соотношения над МАС $A = \langle M, \Sigma\rangle$, то $\varphi_{i_1}(s_1), \ldots, \varphi_{i_n}(s_n), \psi(w_1), \ldots, \psi(w_m), (\psi(p))$— решение алгебраического соотношения над МАС $A' = \langle M', \Sigma'\rangle$.

Последнее утверждение позволяет предложить методы решения систем алгебраических соотношений, использующие гомоморфные образы и гомоморфные прообразы.

В связи с получением оценок сложности их реализации для конечных МАС, приводятся общие алгоритмы поиска гомоморфизмов конечной многоосновной алгебраической системы и оценки сложности их реализации [4].

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Модельные соответствия. Изв. АН СССР. Сер. матем., 23 (1959), N. 3, 313–336.
[2] Lausch H., Nobauer W. Algebra of polynomials. Amsterdam: Elsevier, 1973.

[3] Аносов В. Д. О гомоморфизмах многоосновных алгебраических систем в связи с криптографическими применениями. Дискретная математика, 19 (2007), вып. 2, 27–44.
[4] Аносов В. Д. Гомоморфизмы многоосновных алгебраических систем. Международная конференция по алгебре: тезисы докладов по логике и универсальным алгебрам, прикладной алгебре. ИМ СО АН СССР, Новосибирск,1991, 6–7.
[5] Аносов В. Д. Уравнения (соотношения) над многоосновными алгебраическими системами. Мальцевские чтения. Новосибирск, ИМ СО РАН, 13–15 ноября 2007.
[6] Мовсисян Ю. М. Сверхтождества в алгебрах и многообразиях. Успехи математических наук, 19 (1998), вып. 1(319), 61–114.

ФСБ России, Москва
E-mail: `AnosovVD@yandex.ru`

Тождества и линейность квазигрупп

Г. Б. Белявская, А. В. Михалев, А. Х. Табаров

Важность изучения тождеств в алгебрах указано А. И. Мальцевым в [1]. Доклад посвящен проблеме характеризации линейных квазигрупп и некоторых их обобщений тождествами. Линейные квазигруппы впервые введены В. Д. Белоусовым в 1967 году в связи с исследованием уравновешенных тождеств в квазигруппах [2]. В дальнейшем Г. Б. Белявской и А. Х. Табаровым введены и исследованы различные обобщения линейных квазигрупп — полулинейные, алинейные, односторонние линейные, квазигруппы смешанного типа линейности и т.д. (см. [3, 4]). Как известно, теория тождеств в алгебрах имеет два взаимосвязанных аспекта: тождества и алгебра. Соответственно этому имеются две задачи: 1) описать алгебры с тождествами; 2) описать тождества в алгебрах. Для класса линейных, алинейных, смешанных линейных квазигрупп, односторонних линейных и алинейных квазигрупп, T-квазигрупп и близких к ним квазигрупп решена вторая задача, а именно, описаны тождества (система тождеств), характеризующие все вышеназванные классы квазигрупп. Кроме того, найдены тождества с подстановками, выполнение которых в квазигруппах влечет линейность или обобщенную линейность указанных типов.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

[2] Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах. Мат. сборник, 70 (1966), N. 1, 55–97.

[3] Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп. Дискретная математика, 4 (1992), вып. 2, 142–147.

[4] Табаров А. Х. Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп. Дискретная математика, 19 (2007), вып. 2, 67–73.

Институт математики и информатики АН Молдовы, Кишинев
E-mail: gbel1@rambler.ru
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: aamikhalev@mail.ru
Таджикский национальный университет, Душанбе
E-mail: tabarov63@rambler.ru

Независимые системы элементов в унарных алгебрах и их приложения

В. К. Карташов

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная унарная алгебра сигнатуры Ω. Для любого элемента $a \in A$ через (a) обозначается подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная этим элементом. Элементы $a, b \in A$ будем называть *эквивалентными* и писать $a \sim b$, если $(a) = (b)$. Класс эквивалентности $\sim$ с порождающим элементом a называется *слоем* элемента a.

Элементы $a, b \in A$ называются *независимыми*, если каждый из них не принадлежит подалгебре, порожденной другим. Непустое подмножество $X \subseteq A$ называется *независимым*, если оно либо одноэлементно, либо любые два его элемента независимы.

В работе [1] доказано, что *если унарная алгебра имеет хотя бы одну независимую систему порождающих, то любые две ее независимые системы порождающих имеют одинаковую мощность.*

В [1] независимые системы порождающих применялись также для нахождения условий, при которых унарная алгебра $\mathfrak{A}$ обладает одним из следующих свойств:

1. $End\mathfrak{A} = Aut\mathfrak{A}$;
2. свойство Хопфа (каждый эпиэндоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ является автоморфизмом).

В частности, в [1] доказано, что *любая конечно порожденная коммутативная унарная алгебра обладает свойством Хопфа* (теорема 2).

Настоящая работа является продолжением [1].

Теорема 1. *Если каждый слой конечно порожденной унарной алгебры конечен, то она обладает свойством Хопфа.*

Пусть $\mathcal{B}_{1,1}$ означает многообразие унарных алгебр $\langle A, f, g \rangle$, определенное тождеством $fg(x) = x$.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Теорема 2. *Для любой сильно связной алгебры $\mathfrak{A}$ многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$ справедливо равенство $End\mathfrak{A} = Aut\mathfrak{A}$.*

Здесь также построены примеры, показывающие, что каждое из условий в формулировке теоремы 2 из [1] является существенным. В частности, найдены примеры однопорожденных алгебр многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$, для которых свойство Хопфа не выполняется.

Список литературы

[1] Карташов В. К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр, Дискретная математика, 20 (2008), вып. 4, 79–84.

Волгоградский государственный педагогический университет, г. Волгоград
E-mail: `kartashovvk@yandex.ru`

Антимногообразия унаров

А. В. Карташова

Антитождеством ([1], [2]) называется предложение следующего вида

$$(\forall \bar{x})(\neg\alpha_1(\bar{x}) \vee \neg\alpha_2(\bar{x}) \vee \ldots \vee \neg\alpha_m(\bar{x})),$$

где $\alpha_i(\bar{x})$ — атомная формула фиксированной сигнатуры σ для любого числа $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Антимногообразием называется всякий класс σ-систем, определяемый некоторым (возможно, пустым) множеством антитождеств.

Настоящее сообщение является продолжением работы [3]. Здесь изучаются антимногообразия унаров, т. е. алгебр с одной унарной операцией.

Пусть $\mathbf{K}$ означает множество всех конечных непустых подмножеств множества целых положительных чисел и

$$q = \{(A, B) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} | (\forall b) b \in B \Rightarrow (\exists a)(a \in A \& a|b)\}.$$

Для каждого подмножества $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{K}$ положим

$$C(\mathbf{X}) = \{A \in \mathbf{K} | (\exists B)(B \in \mathbf{X} \& AqB)\}.$$

Нетрудно проверить, что отображение C является оператором замыкания на множестве $\mathbf{K}$.

Пусть $\mathcal{L}$ — решетка, полученная из решетки, двойственной к решетке всех замкнутых подмножеств оператора C, присоединением внешним образом наименьшего элемента.

Теорема 1. *Решетка всех антимногообразий унаров изоморфна решетке $\mathcal{L}$.*

Следствие. *Решетка всех антимногообразий унаров является дистрибутивной коалгебраической решеткой, имеет ровно один атом и ровно один коатом.*

Теорема 2. *Существует континуум антимногообразий унаров, имеющих независимый базис антитождеств, и континуум антимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса антитождеств.*

Теорема 3. *Конечный унар $\mathfrak{A}$ имеет независимый базис антитождеств тогда и только тогда, когда этот унар содержит хотя бы один одноэлементный цикл. В этом случае антимногообразие, порожденное унаром $\mathfrak{A}$, совпадает с классом всех унаров (т. е. определяется пустым множеством антитождеств).*

Список литературы

[1] Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий, Новосибирск: Научная книга, 1999.

[2] Горбунов В. А, Кравченко А. В. Универсальные хорновы классы и антимногообразия алгебраических систем. Алгебра и логика, 39 (2001), N. 1, 3–22.

[3] Карташова А. В. Строение решетки антимногообразий унаров, Алгебра и ее приложения, Тезисы докладов Международной конференции, Красноярск, 2002, 61.

Волгоградский государственный педагогический университет, г. Волгоград
E-mail: kartashovaanna@mail.ru

Минимально полные коммутативные нильполугруппы

О. В. Князев

В [1] для произвольных универсальных алгебр ставится задача (проблема 10): *охарактеризовать минимальные полные алгебры данного многообразия.* Здесь сообщается решение этой задачи для коммутативных нильполугрупп.

Напомним некоторые определения. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с выделенным нулем; $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом «полугруппа» понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}-$вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий нуль. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$*вербалом* полугруппы A.

Полугруппу A называют *полной*, если равенство $\mathbf{X}(A) = A$ имеет место для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$. Если полная полугруппа не имеет собственных, отличных от нуля, полных подполугрупп, то ее называют *минимально полной* полугруппой.

Элемент a полугруппы A называют нильэлементом, если найдется натуральное число n такое, что $a^n = 0$. Полугруппу, у которой все элементы суть нильэлементы, называют *нильполугруппой*.

Имеет место следующая

Теорема. *Среди нетривиальных коммутативных нильполугрупп минимально полных нет.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр. Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev@omsk.edu

О простых по чистоте периодических полугруппах с нулем

О. В. Князев, Т. Ю. Финк

Понятие чистоты и некоторые родственные понятия, возникшие в теории абелевых групп, могут быть определены, как отмечено в [1], для произвольных универсальных алгебр. Это обстоятельство дает новый подход к изучению строения алгебр из разных классов. В [1] намечены возможные перспективы дальнейших исследований в этом направлении. В частности, формулируется проблема (см. [1], проблема 22): *описать алгебры данного многообразия, не имеющие нетривиальных чистых подалгебр.* Нас будет интересовать решение этой задачи в классе полугрупп с нулем.

Напомним некоторые определения. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с выделенным нулем; $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом «полугруппа» понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}-$вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий нуль. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$*вербалом* полугруппы A.

Подполугруппу B полугруппы A называют *чистой* в A, если равенство $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$. Если полугруппа не имеет собственных, отличных от нуля, чистых подполугрупп, то ее называют *простой по чистоте* полугруппой.

Элемент a полугруппы A называют нильэлементом, если найдется натуральное число n такое, что $a^n = 0$.

Имеет место следующая

Теорема. *Если A — простая по чистоте периодическая полугруппа с нулем, в которой множество нильэлементов не является подполугруппой, то она является гомоморфным образом полугруппы $B = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^n = b^k = 0\rangle$, где $n, k \geq 2$.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр. Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev@omsk.edu, matyanafink@yandex.ru

Сравнение классов нётеровых по уравнениям, слабо нётеровых по уравнениям и q_ω-компактных алгебраических систем

М. В. Котов

В работах Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова по универсальной алгебраической геометрии введены классы нётеровых по уравнениям, слабо нётеровых по уравнениям и q_ω-компактных алгебраических систем, обозначаемые $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$ и $\mathbf{Q}$ соответственно.

Пусть $\mathcal{L}$ — язык без предикатных символов; $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}$ с носителем A; $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}| = n$, — набор переменных. Под *уравнениями* в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$ мы понимаем атомарные формулы языка $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$. Любое множество уравнений в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$ называется *системой уравнений* в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$.

Набор $\mathbf{a} \in A^n$ называется *решением* системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, если при интерпретации переменных $\mathbf{x}$ элементами из $\mathbf{a}$ каждая формула из S принимает истинное значение.

Системы уравнений $S_1(\mathbf{x})$ и $S_2(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$ называются *эквивалентными* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если множества всех решений из A^n для систем S_1 и S_2 совпадают. Уравнение $s(\mathbf{x})$ называется *следствием* системы $S(\mathbf{x})$ над $\mathcal{A}$, если каждое решение системы S из A^n является решением уравнения s.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного числа n и любой системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, $|\mathbf{x}| = n$, найдётся её конечная подсистема S_0, эквивалентная системе S над $\mathcal{A}$.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется *слабо нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного числа n и любой системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, $|\mathbf{x}| = n$, найдётся конечная система $S_0(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, эквивалентная системе S над $\mathcal{A}$.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется q_ω-*компактной*, если для любого целого положительного числа n, любой системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, $|\mathbf{x}| = n$, и любого следствия s системы S над $\mathcal{A}$ найдётся конечная подсистема S_0 системы S такая, что s есть следствие системы S_0 над $\mathcal{A}$.

Из определений следует, что

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' \cap \mathbf{Q}.$$

Мы строим примеры алгебраических систем, которые показывают, что

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{N}' \quad \text{и} \quad \mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Q}.$$

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского
E-mail: `matvej.kotov@gmail.com`

О распознаваемости языков произвольных слов

В. А. Молчанов

В связи с широким применением в компьютерных науках языков, содержащих как конечные, так и бесконечные в любую сторону слова, естественно возникает задача обобщения на такие языки классической теории формальных языков [1].

Как показывают исследования [2, 3], теоретико-модельные методы нестандартного анализа позволяют естественно переносить основные понятия классической теории формальных языков на языки произвольных слов, содержащие как конечные, так и бесконечные в любую сторону слова. Так, в работе [2] на языки произвольных слов перенесено понятие распознаваемого автоматом Буши языка конечных слов и описан класс $\mathrm{Rec}_B(A)$ таких языков над алфавитом A. В последующей работе [3] на языки произвольных слов перенесено понятие распознаваемого полугруппой языка конечных слов и описан класс $\mathrm{Rec}_S(A)$ таких языков над алфавитом A. Проведенные исследования показывают, что в отличие от равносильности понятий распознаваемых языков конечных слов автоматами и полугруппами [1] класс $\mathrm{Rec}_S(A)$ значительно шире класса $\mathrm{Rec}_B(A)$.

Позже в работе [4] было введено понятие обобщенного автомата Мюллера [1] и доказано, что класс $\mathrm{Rec}_M(A)$ распознаваемых такими автоматами языков произвольных слов содержит класс $\mathrm{Rec}_S(A)$. С помощью модификации теоретико-модельного подхода к языкам, разработанного Буши [5] для языков конечных слов и языков бесконечно вправо слов, получен следующий результат.

Теорема. *Все множества слов из класса* $\mathrm{Rec}_M(A)$ *описываются формулами языка* $\mathcal{L}$ *монадической логики 2-го порядка и, с другой стороны, все определяющиеся формулами языка* $\mathcal{L}$ *множества произвольных слов над алфавитом* A *принадлежат классу* $\mathrm{Rec}_S(A)$.

Список литературы

[1] Perrin D., Pin J. E. Infinite words. Automata, Semigroups, Logic and Games. Pure and Applied Mathematics, vol. 141. Elsevier, 2004.

[2] Molchanov V. A. Nonstandard approach to general rational languages. Contributions to General Algebra 13, Proceedings of the Dresden Conference 2000 (AAA60) and the Summer School 1999, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt. 2001. P. 233–244.

[3] Молчанов В. А. О распознавании языков произвольных слов конечными полугруппами. Известия СГУ (новая серия). Том 6. Серия Математика. Механика. Информатика. Вып. 1/2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. С. 96–108.

[4] Молчанов В. А. О распознавании языков полугруппами и автоматами. Математика, механика: Сб. науч. тр. Вып. 8. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. С. 83–86.

[5] Büchi J. R. Weak second-order arithmetic and finite automata. Z. Math. Logik and Grundl. Math., 6 (1960), 66–92.

Саратовский государственный социально-экономический университет, Саратов
E-mail: `v.molchanov@inbox.ru`

О дистрибутивности решетки конгруэнций полугруппы линейных отношений

М. И. Наумик

Пусть V — векторное пространство над телом F. Напомним, что линейным отношением на V называется подпространство пространства $V \bigoplus V$. Множество всех линейных отношений на V с операцией умножения является полугруппой, которая обозначается $LR(V)$.

Конгруэнции на полугруппе $LR(V)$ описаны в [1].

Используя описание конгруэнций на $LR(V)$, нами доказана следующая

Теорема. *Решетка конгруэнций на $LR(V)$ является подрешеткой решетки всех бинарных отношений на $LR(V)$. В частности, она является дистрибутивной решеткой.*

Эта теорема является продолжением развития идеи А. И. Мальцева, [2, 3].

Список литературы

[1] Наумик М. И. Конгруэнции полугруппы линейных отношений. Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Гомель, 2008.

[2] Мальцев А. И. Симметрические группоиды. Математический сборник, 31 (1952), 136–151.

[3] Мальцев А. И. Мультипликативные сравнения матриц. ДАН СССР, 90 (1953), N. 3, 333–335.

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь
E-mail: naumik@tut.by

Эпигруппы, решетка подэпигрупп которых полумодулярна вниз

А. Я. Овсянников

Полугруппа S называется *эпигруппой*, если некоторая степень любого элемента S содержится в некоторой ее подгруппе. На эпигруппу можно смотреть как на унарную полугруппу, т. е. полугруппу с дополнительной унарной операцией (см. [1] и [2]). Изучение связей между эпигруппами как таковыми (т. е. не обязательно периодическими полугруппами или группами) и их решетками подэпигрупп началось в работе [3]. Первые полученные в этом направлении результаты обозреваются в статье [4].

Напомним, что решетка L называется *полумодулярной вниз*, если для любых $x, y \in L$ из $x \vee y \succ x$ следует $y \succ x \wedge y$. Двойственно определяется решетка, полумодулярная вверх. Структура эпигрупп с полумодулярной вверх решеткой подэпигрупп описана в [3]. Задача описания эпигрупп, имеющих полумодулярную вниз решетку подэпигрупп, упомянута в [4]. Полугруппы с полумодулярной вниз решеткой (обычных) подполугрупп изучены в работе [5]; сообщаемый результат для эпигрупп имеет сходную формулировку.

Фигурирующие ниже понятия теории полугрупп считаются известными. Через $\langle\langle X\rangle\rangle$ обозначается подэпигруппа данной эпигруппы, порожденная ее подмножеством X.

Теорема. *Решетка подэпигрупп эпигруппы S полумодулярна вниз тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) каждый главный фактор эпигруппы S есть полугруппа одного из следующих типов:

1a) полугруппа с нулевым умножением,

1b) группа с полумодулярной вниз решеткой подгрупп (возможно, с присоединенным нулем),

1c) сингулярная полугруппа (возможно, с присоединенным нулем),

1d) 5-элементная полугруппа Брандта B_2;

2) для любых $e \in E_S$, $a \in S$ из $\{ea, ae\} \cap (H_e \setminus \{e\}) \neq \emptyset$ следует $e \in \langle\langle a\rangle\rangle$;

3) для любых $a, b, x \in S$ из того, что x не принадлежит нетривиальной подгруппе, $ab \notin J_x$ и $x = xab$ $[x = abx]$ следует, что либо $x \in \langle\langle a, b\rangle\rangle$, либо $x = xa$ $[x = bx]$.

Список литературы

[1] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. I, II. Матем. сб., 185 (1994), N. 8, 129–160; N. 9, 153–176.

[2] Shevrin L. N. Epigroups. In: Structural Theory of Automata, Semigroups and Universal Algebra (NATO Science Series, II. Mathematics, Physics and Chemistry, 207), eds. Kudryavtsev V. B. and Rosenberg I. G., Springer, 2005, 331–380.

[3] Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. On lattice properties of epigroups. Algebra univers., 59 (2008), 209–235.

[4] Шеврин Л. Н. Решеточные свойства эпигрупп. Фунд. прикл. мат., 14 (2008), N. 6, 219–229.

[5] Jones P. R. On semigroups with lower semimodular lattice of subsemigroups. J. Algebra, 2009, to appear.

Уральский государственный университет, Екатеринбург
E-mail: Alexander.Ovsyannikov@usu.ru

О классе конечных полугрупп кодов аминокислот

Н. Ю. Одинцова

В работе [1] введено понятие полугрупп кодов аминокислот. Эти полугруппы представляют существенный интерес с точки зрения ДНК-наномеханики (см., например, [2]). В [1] отмечено, что при наличии хотя бы одного сокращающего соотношения полугруппа кодов аминокислот является конечной. В связи с этим представляется естественным вопрос о нетривиальности класса $\Bbbk$ полугрупп кодов аминокислот с сокращающими соотношениями, ответ на который дает следующее утверждение.

Теорема. *В классе $\Bbbk$ существует по крайней мере две неизоморфные полугруппы кодов аминокислот.*

Получено описание минимальной полугруппы класса $\Bbbk$. Показано, что если полугруппы P_1 и P_2 в копредставлении имеют единственное сокращающее соотношение $XYU = XY$ и $XYV = XY$, соответственно, то эти полугруппы изоморфны.

Список литературы

[1] Одинцова Н. Ю., Попов В. Ю. О полугруппах кодов аминокислот. Межд. конф. “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвященная 70-летию со дня рождения ректора МГУ академика В. А. Садовничего. Тез. докл. Москва, Изд-во Университетская книга, 2009, с. 328.

[2] Попов В. Ю. ДНК наномеханические роботы и вычислительные устройства / Всероссийский конкурсный отбор обзорно-аналитическихстатей по приоритетному направлению “Информационно-телекоммуникационные системы”, 2008.

Уральский Государственный университет, Екатеринбург
E-mail: `odincova_natalya@mail.ru`

Суперклоны и клоны

Н. А. Перязев

Алгебраический подход к изучению функциональных систем впервые был предложен А. И. Мальцевым [1]. Среди алгебр функций наибольшее распространение получили клоны — алгебры операций замкнутые относительно суперпозиции и содержащие селекторные операции [2]. Определенную ниже алгебру назовем суперклоном [3].

Пусть $B(A)$ — множество всех подмножеств A, в том числе $\varnothing$. Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A (будем допускать случай $n = 0$). Для множества всех мультиопераций на A используем обозначение H_A.

Алгебру $\mathfrak{K} = \langle K; *, \zeta, \tau, \Delta, \mu, \varepsilon, \varnothing\rangle$ типа $\langle 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0\rangle$, где $K \subseteq H_A$, назовем *суперклоном* над A, где операции определяются следующим образом:

$$(f * g)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}) = \{a| \text{ существует } a_0 \in g(a_1, ..., a_m) \text{ такой, что}$$

$$a \in f(a_0, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1})\} \text{ при } n \geq 1,$$

$$(f * g)(a_1, \ldots, a_m) = f, \text{ если } g(a_1, \ldots, a_m) \neq 0 \text{ и}$$

$$(f * g)(a_1, \ldots, a_m) = 0, \text{ если } g(a_1, \ldots, a_m) = 0 \text{ при } n = 0;$$

$$(\zeta f)(a_1, ..., a_n) = f(a_2, ..., a_n, a_1) \text{ при } n > 1 \text{ и } (\zeta f) = f \text{ при } n \leq 1;$$

$$(\tau f)(a_1, ..., a_n) = f(a_2, a_1, a_3, ..., a_n) \text{ при } n > 1 \text{ и } (\tau f) = f \text{ при } n \leq 1;$$

$$(\Delta f)(a_1, ..., a_{n-1}) = f(a_1, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \text{ при } n > 1,$$

$$(\Delta f) = \{a|a \in f(a)\} \text{ при } n = 1 \text{ и } (\Delta f) = f \text{ при } n = 0;$$

$$(\mu f)(a_1, ..., a_n) = \{a|a_1 \in f(a, a_2, ..., a_n)\} \text{ при } n \geq 1$$

и

$$(\mu f) = f \text{ при } n = 0;$$

$$\varepsilon = e_1^2, \text{ где } e_1^2(a_1, a_2) = \{a_1\};$$

$$\varnothing = o, \text{ где } o() = \varnothing.$$

Мощность множества A называется *рангом* суперклона.

В докладе будут представлены результаты по исследованию суперклонов. Вводится класс представлений мультиопераций специальными формами, названными стандартными формами. Установлено, что решетка подсуперклонов и решетка подклонов одного ранга являются антиизоморфными. Получен критерий для порождающих множеств наибольшего суперклона ранга 2 и установлено, что любое порождающее множество для этого суперклона содержит базис, состоящий с не более чем 4-х мультиопреараций. Доказано, что суперклон, порожденный всеми унарными мультиоперациями, является максимальным суперклоном.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1976.

[2] Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Springer-Verlag Berlin YeideWater Resourses Research. 2006.

[3] Перязев Н. А. Суперклоны недоопределенных частичных функций. Синтаксис и семантика логических систем. Материалы российской школы-семинара (Владивосток, 25–29 августа 2008 г.). Владивосток: Дальнаука, 2008, 40–42.

Иркутский государственный педагогический университет, г. Иркутск
E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Теорема типа теоремы Левенгейма — Сколема — Тарского для геометрически эквивалентных алгебр

А. Г. Пинус

Понятийный аппарат для алгебраической геометрии универсальных алгебр произвольных многообразий разработан в серии работ Б. И. Плоткина (см., к примеру, [1]). Одним из центральных понятий этой теории является понятие геометрически эквивалентных алгебр.

В этой связи представляет интерес следующий аналог теоремы Левенгейма — Сколема — Тарского.

Теорема. *Для любого многообразия V алгебр не более чем счетной сигнатуры, любой неодноэлементной V-алгебры $\mathcal{A}$ и любого кардинала $k \geq 2^{\aleph_0}$ существует V-алгебра мощности k, геометрически эквивалентная алгебре $\mathcal{A}$. Ограничение $k \geq 2^{\aleph_0}$ здесь существенно.*

Список литературы

[1] Плоткин Б. И. Проблемы алгебры, инспирированные универсальной алгебраической геометрией. Фундаментальная и прикладная математика, 10 (2004), 181–197.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы с планарными графами Кэли

Д. В. Соломатин

Графы Кэли, представляющие собой одномерные комплексы Кэли, играют важную роль в комбинаторной теории групп. Так, например, если представление группы имеет планарный комплекс Кэли, то проблема равенства слов этого представления разрешима [1]. Более того, известно описание конечных групп, допускающих плоские графы Кэли [2]. Наличие подобных свойств и вызывает особый интерес к графам, отражающим структуру полугрупп. В [3] и ряде других работ нами уже изучалась планарность графов Кэли для некоторых классов полугрупп.

Напомним, что если дан граф Γ с множеством вершин $V\Gamma = \{a_1, ..., a_t\}$, то можно определить свободную частично коммутативную полугруппу [4], как полугруппу $S(\Gamma)$, заданную множеством $\{a_1, ..., a_t\}$ образующих элементов и множеством определяющих соотношений вида $a_i a_j = a_j a_i$ для тех и только тех a_i и a_j, которые соединены ребром в графе Γ. Свободной частично коммутативной n-нильпотентной полугруппой, определяемой графом Γ, мы называем фактор-полугруппу Риса $S(\Gamma)/S^n$; будем обозначать её через $S_t^n(\Gamma)$, где $n \geq 1$ и $t \geq 1$.

«Деревом» из простых циклов называем связный граф, блоками которого являются простые циклы или мосты.

Теорема. *Полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает планарный граф Кэли, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) Γ — пустой граф;

2) связными компонентами графа Γ являются паросочетания или изолированные вершины, а $n \leq 5$;

3) связными компонентами графа Γ являются цепи или изолированные вершины, а $n \leq 4$;

4) связными компонентами графа Γ являются "деревья" из простых циклов или изолированные вершины, а $n \leq 3$;

5) Γ — любой граф, а $n \leq 2$, либо $n > 2$ и $t \leq 2$.

Список литературы

[1] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[2] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.

[3] Соломатин Д. В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли. Сибирские Электронные Математические Известия, http://semr.math.nsc.ru, 3 (2006), 238–252.

[4] Diekert V., Métivier Y. Partial commutation and traces. Handbook of formal languages. Berlin: Springer–Verl., 1997. V.3. P. 457–533.

Омский государственный педагогический университет, г.Омск
E-mail: denis_2001j@bk.ru

Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли

В. А. Стукопин

Рассматривается квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(n,n)$. В настоящее время, ввиду возможных приложений в квантовой теории суперструн (AdS/CFT гипотеза, см., например, [1]), стала актуальной задача вычисления универсальной R-матрицы квантового дубля $DY(A(n,n))$ янгиана супералгебры Ли $A(n,n)$. При этом особенно важным является случай случай $n=4$. В работе [2] был описан квантовый дубль $DY(A(m,n))$ и получена явная формула для универсальной R-матрицы квантового дубля $DY(A(m,n))$. Здесь мы рассматриваем эту формулу в частном случае $m=n$. Ниже мы будем использовать обозначения из [3], в предположении, что $m=n$.

Имеет место следующая

Теорема. *Универсальная R-матрица дубля $DY(A(n,n))$ может быть представлена в следующей факторизованной форме: $R=R_+R_0R_-$, где $R_+\in Y_+^+\otimes Y_-^-, R_0\in Y_0^+\otimes Y_0^-, R_-\in Y_-^+\otimes Y_+^-$ и определяются следующими формулами*

$$R_+=\overrightarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_+}\exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta\otimes e_{-\beta}),$$

$$R_-=\overleftarrow{\prod}_{\beta\in\Xi_-}\exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta\otimes e_{-\beta}),$$

$$R_0=\prod_{n\geq 0}\exp\sum_{i,j=1}^{r}\sum_{k\geq 0}((\phi_i^+(u))')_k\otimes c_{ji}(T^{-\frac{1}{2}})(\phi_j^-(v+(n+\tfrac{1}{2})l(\mathfrak{g})))_{-k-1}$$

Отметим, что эта формула была, по существу, использована в работе [5] для вычисления S-матрицы нелинейной сигма-модели в квантовой теории суперструн, а также в работе [6].

Данная работа поддержана грантом РФФИ, проект 09-01-00671-а.

Список литературы

[1] Arutyunov G.,Frolov S., Staudacher M. Bethe ansatz for quantum strings. JHEP, 0410, 016 (2004) (arXiv: hep-th/0406256).

[2] Стукопин В. А. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ и вычисление универсальной R-матрицы. Фунд. прикл. мат., 11 (2005), N. 2, 185–208.

[3] Стукопин В. А. О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$. Функ. анализ и его приложения, 40 (2005), N. 2, 86–90.

[4] Stukopin V. Quantum Double of Yangian of strange Lie superalgebra, Drinfeld approach. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 3 (2007).

[5] Torrielli A. Structure of the string R-matrix. arXiv: hep-th/0806.1299.

[6] Zwiebel B. Two-loop Integrability of Planar $N=6$ Superconformal Chern-Simons theory. arXiv:hep-th/0901.0411.

ДГТУ (Ростов-на-Дону); ЮМИ и ВНЦ РАН (Владикавказ)
E-mail: stukopin@mail.ru

Разрешимость проблемы равенства слов в свободных алгебрах некоторых многообразий линейных квазигрупп

А. Х. Табаров

Доклад посвящен решению алгоритмической проблемы равенства слов в свободных алгебрах многообразий Т-квазигрупп, медиальных квазигрупп и является продолжением работ [1,2]. Согласно В.Д.Белоусову [3] квазигруппа $(Q,\cdot)$, называется *линейной над* группой $(Q,+)$, если она имеет вид: $xy = \varphi x + c + \psi y$, где $\varphi,\psi \in Aut(Q,+)$, c - фиксированный элемент из Q. Т-квазигруппы - это квазигруппы, линейные над абелевой группой. Квазигруппа называется *медиальной*, если в ней выполняется тождество $xy \cdot uv = xu \cdot yv$. Медиальные квазигруппы, также линейны над абелевой группой, причем $\varphi\psi = \psi\varphi$ [3]. Существуют многообразия квазигрупп с разрешимой проблемой равенства слов. К ним относятся, в частности, все R-многообразия [4]. Вместе с тем, как доказал А.И.Мальцев, что существуют многообразия квазигрупп с неразрешимой проблемой равенства слов в свободных квазигруппах [5].

Теорема 1. *В многообразии всех Т-квазигрупп разрешима проблема равенства слов для свободных алгебр.*

По аналогии с доказательством теоремы 1 может быть доказана

Теорема 2. *В многообразии всех медиальных квазигрупп разрешима проблема равенства слов для свободных алгебр.*

При доказательстве основной теоремы используются методы и идеи, разработанные в работе [4].

Список литературы

[1] Табаров А. Х. О некоторых многообразиях абелевых квазигрупп. Дискретная математика, 12 (2000), вып. 3, 154–159.

[2] Табаров А. Х. Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп. Дискретная математика, 19 (2007), вып. 2, 67–73.

[3] Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах. Мат. сборник, 70 (1966), N. 1, 55–97.

[4] Глухов М. М., Гварамия А. А. Решение основных алгоритмических проблем в некоторых классах квазигрупп с тождествами. Сиб. мат. журн. 10 (1969), N. 2, 297–317.

[5] Мальцев А. И. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп. Мат. сборник, 69 (1966), N. 1, 3–12.

Таджикский национальный университет, мех.-мат. факультет, г.Душанбе
E-mail: tabarov63@rambler.ru

Об упорядоченных лупах

В. И. Урсу

Абстрактная лупа L называется упорядоченной, если между ее элементами установлено отношение порядка, подчиненное обычным требованиям:

(i) для любых элементов $a, b, c \in L$ верно одно и только одно из соотношений $a < b$, $a = b$, $b < a$;
(ii) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
(iii) если $a < b$, то $ac < bc$ и $ca < cb$.

При изучении свойств упорядоченных луп естественно встает вопрос: какие абстрактные лупы можно упорядочить? Этот вопрос решается в этой работе, где среди прочего указаны на языке абстрактных теории луп необходимые и достаточные условия для упорядочиваемости абстрактной лупы. Рассматриваются также упорядоченные прямые произведения и доказывается, что любые два разложения упорядоченной лупы обладают изоморфными уплотнениями. Отметим, что аналогичные результаты для абстрактных групп были доказаны А. И. Мальцевым в [1].

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Об упорядоченных группах. Изв. АН СССР, сер. мат., 13 (1949), 473–482.

Институт математики "Simion Stoilow" Румынской Академии Наук, Технический Университет Молдовы
E-mail: vasileursumd@yahoo.com, vursu@mail.md, vasile.ursu@imar.ro

Об относительно элементарной определимости класса гиперграфов в классе всех полугрупп

Е. В. Хворостухина

Под гиперграфом понимается система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество и L — семейство произвольных подмножеств X. Элементы множества X называются вершинами и элементы множества L называются ребрами гиперграфа. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому его ребру. Для натурального числа p гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа принадлежат не более, чем одному его ребру. Например, проективные плоскости и аффинные плоскости с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами. Эндоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ называется такое преобразование φ множества X, что $(\forall l \in L)(\exists l' \in L)(\varphi(l) \subset l')$.

С помощью [1] доказана относительно элементарная определимость класса эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами в классе полугрупп.

Теорема. *Существуют такие формулы* $C(x)$, $L(\bar{x})$, $\mathrm{Eqv}(\bar{x}; \bar{y})$, $\mathrm{Ins}(x; \bar{y})$ *сигнатуры языка элементарной теории полугрупп* Ls *(здесь и далее* $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_p)$, $\bar{y}^i = (y^i_1, \ldots, y^i_p)$ *), что любой эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами* $H = (X, L)$ *и его полугруппа эндоморфизмов* $S = \mathrm{End}H$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) множества $\overline{X} = \{x \in S : C(x)\}$ *и* $\overline{L} = \{\bar{x} \in S^p : L(\bar{x})\}$ *не пусты;*

2) формула $\mathrm{Eqv}(\bar{x}; \bar{y})$ *задает отношение эквивалентности* $\overline{\mathrm{Eqv}}$ *на* $\overline{L}$*;*

3) формула $\mathrm{Ins}(x; \bar{y})$ *задает такое бинарное отношение* $\overline{\mathrm{Ins}}$ *между элементами множеств* $\overline{X}$ *и* $\overline{L}$, *что* $(x, \bar{x}) \in \overline{\mathrm{Ins}} \ \wedge\ \bar{x} \equiv \bar{y}(\overline{\mathrm{Eqv}}) \implies (x, \bar{y}) \in \overline{\mathrm{Ins}}$*;*

4) гиперграф $H = (X, L, \in)$ *изоморфен двухсортной алгебраической системе* $\overline{H} = (\ \overline{X},\ \overline{L}/\overline{\mathrm{Eqv}},\ \overline{\mu}\ )$ *с бинарным отношением* $\overline{\mu} \subset \overline{X} \times \overline{L}/\overline{\mathrm{Eqv}}$, *которое для* $x \in \overline{X}$, $Y \in \overline{L}/\overline{\mathrm{Eqv}}$ *определяется по формуле:* $(x, Y) \in \overline{\mu} \iff (x, \bar{x}) \in \overline{\mathrm{Ins}}$, *при любых* $\bar{x} \in Y$*;*

5) для любой формулы Ψ *языка* $\mathbf{L_H}$ *эффективно строится такая формула* $\tilde{\overline{\Psi}}$ *языка* $\mathbf{L_S}$, *что* Ψ *в том и только том случае истинна на гиперграфе* H, *если формула* $\tilde{\overline{\Psi}}$ *истинна на полугруппе эндоморфизмов* $\mathrm{End}H$, *т.е. выполняется условие:* $H \models \Psi \iff \mathrm{End}H \models \tilde{\overline{\Psi}}$.

Список литературы

[1] Хворостухина Е. В. О конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г.Куроша. Тезисы докладов, 2008, 241–242.

Саратовский государственный социально-экономический университет, Саратов
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

О вложении графов в TS-квазигруппы

Л. В. Шабунин

Группоид $(Q,\cdot)$ называется TS-квазигруппой (тотально симметрической квазигруппой), если в $(Q,\cdot)$ выполняются тождества

$$xy = yx, \qquad x(xy) = y.$$

Пусть K_0 — класс всех конечных графов, K_1 — класс всех конечно определенных тотально симметрических квазигрупп, V — многообразие всех тотально симметрических квазигрупп,

Теорема. *Класс K_0 относительно элементарно определим в классе K_1.*

Следствие 1. *Элементарная теория $Th(K_1)$ класса K_1 наследственно неразрешима.*

Следствие 2. *Элементарная теория $Th(V)$ многообразия V наследственно неразрешима.*

Чувашский государственный университет, Чебоксары
E-mail: `lvsh@mail.ru`

Об эпигруппах, решеточно изоморфных вполне 0-простым полугруппам

Л. Н. Шеврин

Изучение разнообразных связей между полугруппами и решетками их подполугрупп ведется уже более полувека. Основные достижения в этой области до середины 1990-х годов отражены в монографии [1]. Полугруппы некоторых важных типов наделены дополнительной унарной операцией, их называют унарными полугруппами. Таковы, в частности, инверсные полугруппы с операцией взятия инверсного элемента и эпигруппы с операцией взятия псевдообратного элемента (оба указанных типа расширяют свойство полугруппы быть группой). Идея рассматривать эпигруппы как унарные полугруппы была определяющей для работы [2]; см. также обзорную статью [3].

Для унарной полугруппы наряду с решеткой подполугрупп естественно рассматривать решетку ее подсистем, т. е. подполугрупп, замкнутых относительно данной унарной операции. Применительно к инверсным полугруппам соответствующие исследования ведутся с 1960-х годов, они достаточно полно отражены в [1]. Применительно же к эпигруппам такие исследования начались лишь недавно работой [4]. Обзор первых продвижений в этом направлении дан в статье [5]; к упоминаемым там основным результатам из [4] добавлены некоторые совсем недавние результаты автора, а также нескольких китайских математиков. Приводимый ниже результат и результат А. Я. Овсянникова, сообщаемый в настоящем сборнике, представляют дальнейшие шаги в обсуждаемом направлении.

Напомним, что две алгебраические системы с изоморфными решетками подсистем называются *решеточно изоморфными*. Вполне 0-простые полугруппы представляют собой один из важнейших типов эпигрупп. Следующая теорема дает ответ на естественный вопрос о решеточно изоморфных образах таких эпигрупп.

Теорема. *Если вполне 0-простая полугруппа S обладает делителями нуля, то любая решеточно изоморфная S эпигруппа сама будет вполне 0-простой; если же S без делителей нуля, то (как нетрудно убедиться) это не обязательно так.*

Список литературы

[1] Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. Semigroups and Their Subsemigroup Lattices. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[2] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп, I, II. Матем. сб., 185 (1994), N. 8, 129–160, N. 9, 153–176.

[3] Shevrin L. N. Epigroups. In: Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra (NATO Science Series, II. Mathematics, Physics and Chemistry, 207), eds. V. B. Kudryavtsev, I. G. Rosenberg. Springer, 2005, 331–380.

[4] Shevrin L. N., Ovsyannikov A. J. On lattice properties of epigroups. Algebra univers. 59 (2008), 209–235.

[5] Шеврин Л. Н. Решеточные свойства полугрупп. Фунд. прикл. мат., 14 (2008), N. 6, 219–229.

Уральский государственный университет, Екатеринбург
E-mail: Lev.Shevrin@usu.ru

Алгебраическая характеризация многообразий частичных алгебр

М. С. Шеремет

Известно, что формальное равенство термов имеет неоднозначную интерпретацию, если в качестве модельных объектов рассматриваются алгебры с частичными операциями. В настоящее время в литературе (см., например, [3]) закрепились четыре варианта: сильное равенство, равенство Клини, равенство Эванса и слабое равенство (сильное равенство в [3] называется экзистенциальным).

Естественно, возникает вопрос, как можно охарактеризовать классы частичных алгебр, которые можно задать тождествами относительно того или иного понятия равенства. Для сильного равенства такая характеризация была дана в [3]. Результат оказался вполне аналогичен HSP-теореме Биркгофа. Для слабого равенства характеризация многообразий получена в [1]. Для равенства Клини один частный случай был рассмотрен в [2].

Мы вводим новый оператор, обозначим его $\mathbf{R}$, действие которого, в общих чертах, следующее. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}_i (i \in I)$ — частичные алгебры. Тогда $\mathcal{A} \in \mathbf{R}(\mathcal{B}_i \mid i \in I)$, если $\mathcal{A}$ может быть получена как описано ниже.

Пусть B — множество всех непустых частичных функций $b : I \to \bigcup_{i \in I} B_i$ таких, что $b(i) \in B_i$, если $b(i)$ определено. Пусть $\mathcal{B}$ — частичная алгебра на множестве B, в которой на любом наборе аргументов основные операции покоординатно для всех координат, где это возможно. Пусть ε — бинарное отношение на B, состоящее из всех пар (a, b) таких, что $a(i) = b(i)$, если $a(i)$ и $b(i)$ определены. Рассмотрим произвольное $X \subseteq B$ такое, что i-я проекция X совпадает с B_i для всех $i \in I$. Используя ε, мы замыкаем X до некоторого множества X^ε, индуцируем на нем с помощью $\mathcal{B}$ частичную алгебру $\mathcal{X}^\varepsilon$, и факторизуем $\mathcal{X}^\varepsilon$ по транзитивному замыканию отношения $\varepsilon \restriction X^\varepsilon$, получая $\mathcal{A}$.

Мы доказываем, что слабые многообразия — это в точности классы вида $\mathbf{H}_c\mathbf{R}\mathbf{S}_w(\mathbf{K})$, где $\mathbf{K}$ — некоторый класс частичных алгебр, а $\mathbf{H}_c$ и $\mathbf{S}_w$ — операторы взятия слабых подалгебр и замкнутых гомоморфных образов, соответственно. Это уточняет результат из [1]. Кроме того, мы доказываем, что и в случае равенства Эванса или равенства Клини соответствующие многообразия имеют аналогичную характеризацию.

Список литературы

[1] Bińczak G. A charachterization theorem for weak varieties. Algebra Univers., 45 (2001), N. 1, 53–62.
[2] Börner F. Varieties of partial algebras. Contrib. to Algebra and Geometry, 37 (1996), N. 2, 259–287.
[3] Burmeister P. A model-theoretic oriented approach to partial algebras. Part I. Berlin: Academie-Verlag, 1986.
[4] Evans T. The word problem for abstract algebras. J. London Math. Soc., 26 (1951), N. 1, 64–71.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: `sheremet@math.nsc.ru`

Конечно базируемое многообразие частичных алгебр, в котором гомоморфизмы из конечных алгебр не вычислимы

М. С. Шеремет

Результаты о характеризации классов подпрямо неразложимых алгебр являются красивым и классическим фрагментом теории многообразий полных алгебр, поэтому естественно искать возможность обобщения этих результатов на частичный случай.

В работе [1] П. Бурмайстер обосновал рассмотрение в случае частичных алгебр такого варианта подпрямых разложений $\mathcal{A} \to \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$, где от проекций $\mathcal{A} \to B_i$ требуется не сюръективность, а лишь эпиморфность, т. е. чтобы образы A были порождающими множествами для сомножителей.

В [2] мы установили, что в отношении алгебраических свойств класса неразложимых алгебр условие эпиморфности проекций является "хорошим", а условие сюръективности — "плохим". С другой стороны, нетрудно видеть, что для любого конечно базируемого многообразия частичных алгебр $\mathbf{K}$ разрешима следующая задача: *для сюръективного гомоморфизма $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, где $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$, выяснить, верно ли, что $\mathcal{B} \in \mathbf{K}$;* при этом разрешимость аналогичной задачи для эпиморфизмов $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, где $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$, вообще говоря, ниоткуда не следует.

И, действительно, мы указываем многообразие частичных алгебр $\mathbf{V}$, задаваемое конечным числом тождеств относительно равенства Клини, в котором подобная проблема неразрешима; а именно, мы предъявляем семейство $\mathcal{A}_n \in \mathbf{V}$ $(n \in \omega)$ и элементы $f_n = f^{\mathcal{A}_n}(a)$, $g_n = g^{\mathcal{A}_n}(a)$, $h_n = h^{\mathcal{A}_n}(a)$ (которые всегда определены и не зависят от выбора $a \in A$) со следующим свойством: *не существует алгоритма, позволяющего по любому $n \in \omega$ проверить, существует ли в $\mathbf{V}$ гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ такой, что $\varphi(f_n) = \varphi(g_n) \neq \varphi(h_n)$.*

Таким образом, различные варианты обобщения понятия подпрямого разложения на случай частичных алгебр наследуют лишь свои различные части "хороших" свойств этого понятия, имеющихся для полных алгебр; в частности, сравнение этих вариантов между собой является в общем случае невозможным.

Список литературы

[1] Burmeister P. Subdirect representations by epimorphisms in quasivarieties of partial algebras. Preprint Nr. 2010, TU Darmstadt, Fachbereich Mathematik, 1998.

[2] Шеремет М. С. Неразложимые алгебры в квазимногообразиях частичных алгебр. Препринт 55, ИДМИ, Новосибирск, 2001.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: sheremet@math.nsc.ru

Semisimple Hopf algebras

V. A. Artamonov

Let H be a finite dimensional semisimple Hopf algebra over an algebraically closed field k. It is assumed that $\operatorname{char} k$ is coprime with the dimension of H. We shall assume that in each dimension $d > 1$ there exist at most irreducible H-modules of dimension d.

Under these assumptions it is an explicit form of the counit and the antipode in H.

Suppose that there exists only one irreducible H-module of dimension > 1 and its dimension is equal to n. The order of the group G of group-like elements of the dual Hopf algebra H^* is a divisor of n^2 [1]. If the order of G is equal to n^2 then G is an Abelian group which is a direct product $G = A \times A$ of two copiers of an Abelian group A. In this case there is given a classification of H up to an isomorphism in terms of faithful projective irreducible representations of G of degree n [2]. If $n > 2$ then H is not self-dual [2].

Research is partially supported by grants RFFI 09–01–00059.

References

[1] Artamonov V. A. On semisimple finite dimensional Hopf algebras. Mat. Sbornik, 198 (2007), N 9, 3–28.

[2] Artamonov V. A., Chubarov I. A., Properties of some semisimple Hopf algebras. Contemp. Math., Proc. of the International conference dedicated to 60th anniversary of I. P. Shestakov.

Department of Algebra, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow
E-mail: `artamon@mech.math.msu.su`

CSPs of bounded width and checking for the affine type

A. Bulatov

Bounded width is an important property of Constraint Satisfaction Problems (CSPs) that has been intensively studied for a number of years. The bounded width conjecture, recently confirmed by Barto and Kozik, states that the CSP parametrized by a relational structure $\mathcal{A}$ is of bounded width if and only if the corresponding algebra $\mathrm{Alg}(\mathcal{A})$ (provided it is idempotent) generates a variety omitting the unary and affine types. In this talk we consider the complexity of the problem: Given a relational structure $\mathcal{A}$, decide if algebra $\mathrm{Alg}(\mathcal{A})$ generates a variety omitting the unary and affine types. It is known that if we are given the algebra $\mathrm{Alg}(\mathcal{A})$ itself, and if it is idempotent, then the problem can be solved in polynomial time. However, when input is just a relational structure, the problem is not known to be in NP or coNP. We show that if there is a uniform polynomial time algorithm solving problems of bounded width then omitting the unary and affine types can be checked in polynomial time. A stronger version of the bounded width conjecture, would provide such an algorithm.

Simon Fraser University, Vancouver (Canada)
E-mail: abulatov@cs.sfu.ca

Equational theory of nilpotent A-loops

A. V. Covalschi, V. I. Ursu

Algebra $L = (L, \cdot, /, \backslash)$ of $(2, 2, 2)$ type, where identities

$$(x \cdot y)/y = y\backslash(y \cdot x) = y \cdot (y\backslash x) = (x/y) \cdot y = x, x/x = y\backslash y$$

hold true is called a loop. The internal substitutions $L_{x,y} = L_x L_y L_{y \cdot x}^{-1}$, $R_{x,y} = R_x R_y R_{y \cdot x}^{-1}$, $T_x = R_x L_x^{-1}$ of loop L are defined as follows:

$$L_{x,y} = L_x L_y L_{y \cdot x}^{-1}, R_{x,y} = R_x R_y R_{y \cdot x}^{-1}, T_x = R_x L_x^{-1},$$

where $x \cdot y = yL_x = xL_y \quad (x, y \in L)$.

Loop L is called an A-loop is all its internal substitutions are automorphisms [1].

In [2] it is proved that the identities of nilpotent Moufang loops have a finite basis. This paper extends this result to cover also the nilpotent A-loops.

Lemma 1. *A nilpotent and finitely generated A-loop satisfies the maximality condition.*

Corollary 2. *A nilpotent and finitely generated A-loop is finitely represented.*

Lemma 3. *A nilpotent and finitely generated A-loop is residually finite.*

Theorem 4. *The equational theory of a nilpotent A-loop have a finite basis.*

Corollary 5. *The quasiequational and equational theories of any variety of nilpotent A-loops are resoluble.*

References

[1] Smith J. D. H., Chein O., Pflugfelder H. O. Quasigroups and loops: Theory and applications. Berlin: HeldermannVerlag, 1990.

[2] Ursu V. I. On identities of nilpotent Moufang loops. Rev. Roumain Math. Pures Appl., 45 (2000), N. 3, 537–548.

State Pedagogical University "Ion Creangă", Chisinău, Moldova

E-mail: `Alexandru_Covalschi@yahoo.com`

Institute of Mathematics "Simion Stoilow", Academy of Sciences, Bucureshti, Romania; Technical University of Moldova, Chisinău, Moldova

E-mail: `vasile.ursu@imar.ro, vursu@mail.md`

Bounded Boolean products of pseudo MV-algebras

A. Dvurečenskij, M. Hyčko

Algebraic contruction of Boolean powers and bounded Boolean powers were investigated for orthomodular posets by Pták ([5]), for orthoalgebras by Foulis and Pták ([4]) and for difference posets by Dvurečenskij and Pulmannová ([1]). We extend definition of bounded Boolean power for pseudo MV-algebras. We show that bounded Boolean power of a finite Boolean algebra and a pseudo MV-algebras is isomorphic to their free product. There is a topological construction of bounded Boolean powers for arbitrary universal algebras ([2], [3]). We show that the algebraic construction is dual to the topological one.

References

[1] Dvurečenskij A., Pulmannová S. Difference posets, effects, and quantum measurements. Inter. J. Theor. Phys., 33 (1994), 819–850.

[2] Foster A. L. Generalized "Boolean" theory of universal algebras. Part I: Subdirect sums and normal representation theorem. Math. Z., 58 (1953), 306–336.

[3] Foster A. L. Generalized "Boolean" theory of universal algebras. Part II: Identities and subdirect sums in functionally complete algebras. Math. Z., 59 (1953), 191–199.

[4] Foulis D. J., Pták P. On the tensor product of a Boolean algebra and an orthoalgebra. Czechoslovak Math. J., 45 (120) (1995), 117–126.

[5] Pták P. Summing of Boolean algebras and logics. Demostratio Math., 19 (1986), 349–357.

Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Štefánikova 49, SK-814 73 Bratislava, Slovakia
E-mail: {dvurecenskij,hycko}@mat.savba.sk

Ternary polynomials of idempotent algebras

Yu. M. Movsisyan, J. Pashazadeh

Let $U = (U; F)$ be an algebra, i.e. a nonempty set U of elements and a class F of fundamental operations consisted of U-valued functions of several variables running over U. We called the n-ary operations

$$e_k^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots)$$

trivial and considered the class of all polynomial operations of algebra $U = (U; F)$, i.e. the smallest class of operations on the set U containing trivial operations and closed under the composition with fundamental operations of algebra. The algebra is idempotent iff the identity $f(x, x, \ldots, x) = x$ holds for every its polynomial operation f. K. Urbanik characterized the set of all binary polynomials of an idempotent algebra.

A similar problem on characterization of ternary polynomials of an idempotent algebra remains open.

Theorem. *Suppose that an idempotent algebra has at least one binary and one ternary polynomial operation depending on every variable, and there exists an integer $r > 3$ such that there is not any r-ary polynomial operation depending on every variable . Then the set of its ternary polynomials form a finite DeMorgan algebra with a fixed element.*

We characterized these DeMorgan algebras.

Yerevan State University, Yerevan (Armenia)
E-mail: yurimovsisyan@yahoo.com

On congruence lattices of semigroups

A. L. Popovich, V. B. Repnitskiĭ

Recall that an element a of a complete lattice L is called *compact* if, for any set $X \subseteq L$ with $a \leq \bigvee X$, there exists a finite subset $X' \subseteq X$ such that $a \leq \bigvee X'$. A complete lattice is called *algebraic* if every its element is the join of some compact elements. The well-known result of G. Grätzer and E. T. Schmidt [1] states that every algebraic lattice is represented as the congruence lattice of an algebra. At the same time, this is not true if we require finiteness of similarity type of the corresponding algebra (see [2]). The main theorem of [3] states that if unit of an algebraic lattice L is compact, then L is represented as the congruence lattice of some groupoid. The following problem is open: is every distributive algebraic lattice isomorphic to the congruence lattice of a groupoid and, moreover, of a semigroup? We proved the following theorem.

Theorem. *Every distributive algebraic lattice whose compact elements form a lattice with unit is isomorphic to the congruence lattice of a suitable semigroup.*

References

[1] Grätzer G., Schmidt E. T. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. Acta Sci. Math. (Szeged), 24 (1963), 34–59.

[2] Freese R., Lampe W. A., Taylor W. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, I. Pacific J. Math., 82 (1979), 59–68.

[3] Lampe W. A. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, II. Pacific J. Math., 103 (1982), 475–508.

Ural State University, Ekaterinburg
E-mail: `tei_la@mail.ru, vladimir.repnitskii@usu.ru`

Type decompositions of an effect algebra

S. Pulmannová

The paper is based on the joint work with D. Foulis [7, 8]. Effect algebras (EAs) [5], play a significant role in quantum logic, are featured in the theory of partially ordered abelian groups, and generalize the classes of orthoalgebras, MV-algebras, orthomodular posets, orthomodular lattices, modular ortholattices, and boolean algebras. We study centrally orthocomplete effect algebras (COEAs), i. e., EAs satisfying the condition that every family of elements that is dominated by an orthogonal family of central elements has a supremum. For COEAs, we introduce a general notion of decomposition into types, prove that a COEA factors uniquely as a direct sum of types I, II, and III; and obtain a generalization for COEAs of Ramsay's fourfold decomposition of a complete orthomodular lattice. The main tool are type-determining sets (TD): a subset K of a COEA is TD iff (i) K is closed under the suprema of arbitray subfamilies of centrally orthogonal elements; (ii) intersections of elements of K with central elements belong to K. Using TD sets, it is possible to decompose a COEA into direct summands belonging to any of the above mentioned subclasses.

References

[1] Carrega J. C., Chevalier G., Mayet R. Direct decompositions of orthomodular lattices. Alg. Univ., 27 (1990), 480–496.

[2] Chang C. Algebraic analysis of many-valued logic. Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 467–490.

[3] Dvurečenskij A., Pulmannová S. New Trends in Quantum Structures. Dordrecht: Kluwer, 2000.

[4] Foulis D. J., Greechie R. J., Rüttimann. Filters and supports in orthoalgebras. Int. J. Theor. Phys., 31 (1992), N. 5, 789–807.

[5] Foulis D. J., Bennett M. K. Effect algebras and unsharp quantum logics. Found. Phys., 24 (1994), N. 10, 1331–1352.

[6] Foulis D. J, Greechie R. J. Quantum logic and partially ordered abelian groups. In: Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures, Amsterdam: Elsevier, 2007.

[7] Foulis D. J., Pulmannová S. Centrally orthocomplete effect algebras, submitted.

[8] Foulis D. J., Pulmannová S. Type decompositions of an effect algebra, submitted.

[9] Greechie R. J., Foulis D. J., Pulmannovà S. The center of an effect algebra. Order, 12 (1995), 91–106.

[10] Loomis L. H. The Lattice Theoretic Background of the Dimension Theory of Operator Algebras. Memoirs of AMS, 18 (1955).

[11] Maeda S. Dimension functions on certain general lattices. J. Sci. Hiroshima Univ., A19 (1955), 211–237.

[12] Pták P., Pulmannová S. Orthomodular Structures as Quantum Logics. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publ., 1991.

[13] Ramsay A. Dimension theory in complete weakly modular orthocomplemented lattices. Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965), 9–31.

Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, 814 73 Bratislava, Slovakia
E-mail: pulmann@mat.savba.sk

Special elements in the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited

V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov

A semigroup variety is called *overcommutative* if it contains the variety of all commutative semigroups. The lattice of all overcommutative varieties is denoted by **OC**. It was verified in [1] that, for an overcommutative semigroup variety $\mathcal{V}$, the following are equivalent: (i) $\mathcal{V}$ is a distributive element of **OC**; (ii) $\mathcal{V}$ is a codistributive element of **OC**; (iii) $\mathcal{V}$ is a standard element of **OC**; (iv) $\mathcal{V}$ is a costandard element of **OC**; (v) $\mathcal{V}$ is a neutral element of **OC**. Besides that, a description of overcommutative varieties with the properties (i)–(v) was proposed in [1]. In actual fact, the claim that (i)–(v) are equivalent is true but the description given in [1] is false. Here we formulate a correct description.

Let m and n be positive integers with $2 \le m \le n$. A sequence of positive integers $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$ is called a *partition of n into m parts* if $\sum\limits_{i=1}^{m} \ell_i = n$ and $\ell_1 \ge \ell_2 \ge \cdots \ge \ell_m$. The set of all partitions of n into m parts is denoted by $\Lambda_{n,m}$. Let $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in \Lambda_{n,m}$. We define numbers $q(\lambda)$, $r(\lambda)$ and $s(\lambda)$ by the following way: $q(\lambda)$ is the number of ℓ_i's with $\ell_i = 1$; $r(\lambda) = n - q(\lambda)$ (in other words, $r(\lambda)$ is the sum of all ℓ_i's with $\ell_i > 1$); $s(\lambda) = \max\{r(\lambda) - q(\lambda) - \delta, 0\}$, where $\delta = 0$ whenever $n = 3$, $m = 2$ and $\lambda = (2, 1)$, and $\delta = 1$ otherwise. If k is a non-negative integer then $\lambda^{(k)}$ stands for the following partition of $n + k$ into $m + k$ parts: $\lambda^{(k)} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k \text{ times}})$ (in particular, $\lambda^{(0)} = \lambda$). If $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_s) \in \Lambda_{r,s}$ then $W_{r,s,\mu}$ is the set of all words u with the following properties: the length of u equals r, u depends on variables $x_1, x_2, \ldots, x_s$, and the number of occurrences of x_i in u equals m_i for all $i = 1, 2, \ldots, s$. For a partition $\lambda = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m) \in \Lambda_{n,m}$, we denote by $\mathcal{S}_\lambda$ the semigroup variety given by all identities of the form $u = v$ such that $u, v \in W_{n+i,m+i,\lambda^{(i)}}$ for some $0 \le i \le s(\lambda)$.

Theorem. *An overcommutative semigroup variety $\mathcal{V}$ has an arbitrary of the* (*equivalent*) *properties* (i)–(v) *if and only if either $\mathcal{V}$ coincides with the variety of all semigroups or $\mathcal{V} = \bigwedge\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}_{\lambda_i}$ for some set of partitions $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$.*

References

[1] Vernikov B. M. Special elements of the lattice of overcommutative semigroup varieties. Matem. Zametki, 70 (2001), 670–678 [in Russian; Engl. translation: Math. Notes, 70 (2001), 608–615].

Ural State University, Ekaterinburg
E-mail: vush@etel.ru, boris.vernikov@usu.ru

New compactification for moduli of stable vector bundles, as a moduli scheme

N. V. Timofeeva

The moduli of Gieseker-stable vector bundles on a projective algebraic surface can be compactified if we prohibit degeneration of vector bundles into torsion-free coherent sheaves but allow the surface to degenerate [1, 2, 3]. The notion of (semi)stability for pairs $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ where $((\widetilde{S}, \widetilde{L})$ is appropriate polarized projective algebraic scheme and $\widetilde{E}$ is vector bundle on $\widetilde{S}$ and functor of moduli for (semi)stable pairs $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, will be constructed. We prove that this functor has a coarse moduli space with connected component to be reduced projective algebraic scheme $\widetilde{M}$. The new moduli scheme $\widetilde{M}$ is not bigger (in birational sense) then the classical Gieseker — Maruyama moduli scheme.

References

[1] Timofeeva N. V. A compactification of the moduli variety of stable vector 2-bundles on a sirface in the Hilbert scheme. Mat. Zametki, 82(2007), N. 5, 756–769; English transl. in: Math. Notes, 82 (2007), N. 5–6, 677–690.

[2] Timofeeva N. V. On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. Mat. Sb., 199 (2008), N. 7, 103–122; English transl. in: Sbornik Math., 199(2008), N. 7, 1051–1070.

[3] Timofeeva N. V. On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. II. Mat. Sb., 200 (2009), N. 3, 95–118; English transl. in: Sbornik Math., 200 (2009), N. 3, to appear.

Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
E-mail: ntimofeeva@list.ru

Congruences and ideals in pseudo-effect algebras as total algebras

E. Vinceková, S. Pulmannová

We study congruences and ideals in pseudo-effect algebras and their counterparts in the total algebras that arise from the pseudo-effect algebras ([2]). This work is a continuation of the previous observations and results obtained for effect algebras and their total algebra versions ([1]), called basic algebras, that we have published recently ([3]).

It is shown that every congruence of the total algebra induces a Riesz congruence in the corresponding pseudo-effect algebra. Conversely, to every normal Riesz ideal in a pseudo-effect algebra there is a total algebra, in which the given ideal induces a congruence of the total algebra. Ideals of total algebras corresponding to lattice ordered pseudo-effect algebras are characterized, and it is shown that they coincide with normal Riesz ideals in the pseudo-effect algebras.

References

[1] Chajda I., Halaš R., Kühr J. Every effect algebra can be made into a total algebra. Algebra Univers., to appear.

[2] Chajda I., Kühr J. Pseudo-effect algebras as total algebras. Int. J. Theor. Phys., to appear.

[3] Pulmannová S., Vinceková E. Congruences and ideals in lattice effect algebras as basic algebras. Kybernetika, to appear.

Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Bratislava (Slovakia)
E-mail: vincekova@mat.savba.sk

Dimonoids with a commutative operation

A. V. Zhuchok

Jean-Louis Loday [1] introduced the notion of a dimonoid. This notion is a standard tool in the theory of Leibniz algebras. Recall that a set D equipped with two associative operations $\prec$ and $\succ$ satisfying the following axioms:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z), \quad (x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z), \quad (x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z)$$

for all $x, y, z \in D$ is called a dimonoid. If the operations of a dimonoid coincide, then it becomes a semigroup.

We call a dimonoid $(D, \prec, \succ)$ separative (commutative) if both semigroups $(D, \prec)$ and $(D, \succ)$ are separative (commutative). If ρ is a congruence on the dimonoid $(D, \prec, \succ)$ such that ${}^{(D, \prec, \succ)}/_{\rho}$ is a separative dimonoid, then we say that ρ is a separative congruence.

Let $(D, \prec, \succ)$ be a dimonoid, $a \in D$, $n \in N$. Denote by a^n the degree n of an element a concerning the operation $\prec$. Define a relation σ on the dimonoid $(D, \prec, \succ)$ with a commutative operation $\prec$ by: $a\sigma b$ if and only if there exists positive integer n, $n \neq 1$, such that $a \prec b^n = b^{n+1}; b \prec a^n = a^{n+1}$.

Theorem. *The relation σ on the dimonoid $(D, \prec, \succ)$ with a commutative operation $\prec$ is the least separative congruence and ${}^{(D, \prec, \succ)}/_{\sigma}$ is a commutative dimonoid.*

This result is a generalization of a theorem by Hewitt and Zuckerman [2] about the description of the least separative congruence on a commutative semigroup.

In addition, we characterize the least separative congruence on a free commutative dimonoid.

References

[1] Loday J.-L. Dialgebras. In: Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math. 1763, Springer, Berlin, 2001, 7–66.

[2] Hewitt E., Zuckerman H. S. The l_1-algebra of a commutative semigroup. Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 70–97.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk, Ukraine
E-mail: zhuchok_a@mail.ru

V. Секция «Теория моделей»

О классификации теорий без свойства независимости

В. В. Вербовский

Обозначение. Пусть s — частичный n-тип, A — множество, Δ — совокупность формул от n свободных переменных, не считая параметров. Тогда

$$S^n_{\Delta,s}(A) \triangleq \{p \in S^n_\Delta(A) : p \cup s \text{ is consistent}\}.$$

Если $\Delta = \mathcal{L}$, будем опускать этот индекс и писать просто S^n_s. Заметим, что s не обязательно тип над A.

Определение. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая структура, $A \subseteq M$. Пусть Δ и ∇ — совокупности формул от n переменных.

(1) Структура $\mathcal{M}$ *стабильна с точностью до* Δ в (λ, ∇), если для любого $A \subseteq M$, такого что $|A| \leq \lambda$, и для любого Δ-типа p над M существует самое большее λ ∇-типов над A, которые совместны с p, то есть $|S^n_{\nabla,p}(A)| \leq \lambda$.

(2) Теория T *стабильна с точностью до* Δ в (λ, ∇), если все ее модели таковы. Иногда будем писать, что T (λ, ∇)-стабильна с точностью до Δ.

(3) Если $\nabla = \mathcal{L}$, то опускаем этот знак и пишем, что T стабильна в λ или λ-стабильна с точностью до Δ.

(4) T *стабильна с точностью до* Δ, если существует λ, в котором T стабильна с точностью до Δ. Пишем, что T *стабильна с точностью до* φ, подразумевая, что T стабильна с точностью до $\Delta = \{\varphi\}$.

(5) T *суперстабильна с точностью до* Δ, если существует λ, такой что T стабильна с точностью до Δ во всех $\mu \geq \lambda$.

Очевидно, если T λ-стабильна с точностью до Δ и (λ, Δ)-стабильна, то она λ-стабильна. Если Δ состоит из одной формулы $\varphi(x; y) \triangleq (x = y)$, то стабильность с точностью до Δ эквивалентна стабильности.

Теорема 1. *Теория T не обладает свойством независимости тогда и только тогда, когда она стабильна с точностью до некоторого Δ, причем все формулы из Δ не обладают свойством независимости.*

Формула $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ обладает *свойством порядка внутри типа* $p(\bar{x})$, если существуют последовательности $\langle \bar{a}_i : i < \omega \rangle$ и $\langle \bar{b}_i : i < \omega \rangle$, такие что все $\bar{a}_i \models p$ и формула $\varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j)$ истинна тогда и только тогда, когда $i < j$. Формула $\varphi(x; \bar{y})$ обладает *свойством порядка в пику* Δ, если существует такая модель $\mathcal{M}$ и такой тип $p \in S_\Delta(M)$, что $\varphi(x; \bar{y})$ обладает свойством порядка внутри типа $p(x)$.

Теорема 2. *Теория T стабильна с точностью до некоторого Δ тогда и только тогда, когда она не имеет формулы, обладающей свойством порядка в пику Δ.*

Следствие. *Зависимая теория T стабильна с точностью до некоторого Δ тогда и только тогда, когда она не имеет формулы, обладающей свойством строгого порядка в пику Δ.*

Институт проблем информатики и управления, Алматы
E-mail: `vvv@ipic.kz`

Двукардинальные теоремы для семейств типов теории с компактными k-отделимыми моделями и наличием стабильных типов

А. А. Викентьев

Доклад посвящен переносу и обобщению двукардинальных теорем, доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности и приведенных в диссертации автора

«Теории с покрытием и формульные подмножества», ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г. для семейств формул, теорем статьи в сборнике, посвященному 90-летию А. Д. Тайманова (A two cardinal therems for sets of types in stable theory, Казахстан, Алма–Ата, 2007, с. 67–69), которые были доложены в Казахстане и затем Новосибирске — на ежегодных Мальцевских Чтениях в 2006 г., на случай богатых (двукардинальных) семейств неполных (стабильных) типов с параметрами для теорий с k-компактными моделями и свойством k-отделимости новых элементов, реализующих типы богатого семейства, от старых (элементов в меньшей модели) над малыми подмножествами наличия реализаций в большей (в богатой паре) модели вполне определимых (стабильных) типов.

В стабильном случае все эти условия выполняются и многие известные теоремы распространяются на рассматриваемый случай. Идея обобщения состоит в работе с малыми типами (мощности меньше к) в компактных моделях, вместо формул. Основными инструментами доказательств является теорема компактности Анатолия Ивановича Мальцева, развитая техника современной геометрической, топологической и семантической теории стабильности (Шелах, Лахлан, Балдвин, Пиллай, Хрушовский, Невельский, Зильбер, Палютин, Перетятькин, Еримбетов, Кудайбергенов, Мустафин Т. Г., Омаров А. И. и многие другие) и наличия (даже локального) нужных компактных (для подходящих мощностей к) моделей теории со свойствами k-отделимости над реализациями стабильных типов. Такие модели являются обобщением слабой отделимости (когда к счетно), введенными и использованными ранее автором. Интерес к двукардинальным моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (опровержимых) формул и/или типов как для ранжирования таким образом представленных знаний эспертов с помощью привлечения семантики алгебраических систем, так и введения расстояний (метрик) на классах эквивалентных формул с помощью измеримых подклассов измеримых метрических моделей теории, необходимых для алгоритмов в распознавании образов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 07–01–00331а, 08–07–00136а.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

Достаточные условия устойчивости шарнирной конструкции вложенной в евклидово пространство

А. М. Гурин

Граф $G(V, L)$, где V — множество вершин, L — множество ребер, называют *шарнирной конструкцией*, если его ребра L — суть прямолинейные отрезки данной длины, соединенные друг с другом шарнирно в вершинах V. Все множество возможных реализаций шарнирной конструкции $G(V, L)$ в евклидовом пространстве R^n назовем *вложениями* шарнирной конструкции в пространство R^n. Шарнирная конструкция $G(V, L)$ называется вложенной *устойчиво*, если все вложения ее, в евклидово пространство R^n, конгруэнтны между собой.

Примеры. Граф $G(V, L)$, где V состоит из двух точек A_1 и A_2, а L состоит из отрезка (A_1, A_2) имеет все вложения в R^n конгруэнтные между собой. Граф $G(V, L)$, где V состоит из трех точек A_1, A_2 и A_3, а L состоит из отрезков (A_1, A_2) и (A_2, A_3) допускает не конгруэнтные между собой вложения в R^n.

Найдем условие, гарантирующее конгруэнтность всех вложений данной шарнирной конструкции графа $G(V, L)$ в R^n.

Диаграммой Дирихле произвольной точки A_i из множества V называется область в R^n, полученная в результате пересечения полупространств, границы которых пересекают отрезки (A_i, A_j) в их серединах ортогонально им. Пары точек A_i и A_j шарнирной конструкции $G(V, L)$ называют *геометрически соседними*, если через середину отрезка (A_i, A_j) проходит гипергрань диаграммы Дирихле какой-либо точки из V.

Граф $G(V, L_1)$ называют *декорацией* шарнирной конструкции $G(V, L)$, если L_1 состоит лишь из отрезков (A_i, A_j), где A_i и A_j суть геометрически соседние точки из V.

Теорема. *Пусть $G_1(V, L)$ и $G_2(V, L)$ — вложения шарнирной конструкции $G(V, L)$ в евклидово пространство R^n такое, что графы декораций $G_1(V, L_1)$ и $G_2(V, L_1)$ комбинаторно эквивалентны, а соответствующие отрезки (A_i, A_j) из множеств L_1 равны между собой. Тогда вложения $G_1(V, L)$ и $G_2(V, L)$ шарнирной конструкции $G(V, L)$ в евклидово пространство R^n конгруэнтны между собой.*

Физико-технический институт низких температур, просп. Ленина, 47, Харьков 61103, Украина

О подобии центральных типов $\Delta - PM$ теорий

А. Р. Ешкеев

Данный тезис отражает информацию о некоторых свойствах $\Delta - PM$ теорий [1] и их центров в обогащённой сигнатуре. При этом в классе таких теорий рассматривается понятие $\Delta - PM$ подобия и найдена связь этого понятия с синтаксическим подобием в смысле [2]. Пусть T — произвольная $\Delta - PM$-теория в языке сигнатуры σ. Пусть C — семантическая модель теории T, $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Рассмотрим следующую теорию

$$T_\Gamma^{PM}(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a | a \in A)\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq "\},$$

где $\{"P \subseteq "\}$ есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - PM$-ности теории T^*, существует её центр и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ, теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T. Пусть T — произвольная $\Delta - PM$-теория, тогда $E^+(T) = \bigcup_{n,m<\omega} E^+_{n,m}(T)$, где $E^+_{n,m}(T)$ — решетка позитивных экзистенциальных формул с n свободными переменными и с m-переменами кванторов.

Определение. Пусть T_1 и T_2 — $\Delta - PM$-теории. Мы будем говорить, что T_1 и T_2 $\Delta - PM$-синтаксически подобны, если существует биекция $f : E^+(T_1) \to E^+(T_2)$ такая, что

1) ограничение f до $E^+_{n,m}(T_1)$ есть изоморфизм решеток $E^+_{n,m}(T_1)$ и $E^+_{n,m}(T_2)$, $n, m < \omega$;

2) $f(\exists \nu_{n+1} \varphi) = \exists \nu_{n+1} f(\varphi), \varphi \in E^+_n(T), n < \omega$;

3) $f(\nu_1 = \nu_2) = (\nu_1 = \nu_2)$.

Один из полученных результатов в рамках выше указанных определений выглядит следующим образом:

Теорема. *Пусть T_1 и T_2 — Σ_{m+1}-полные, совершенные йонсоновские $\Delta - PM$-теории. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) T_1^* и T_2^* $\Delta - PM$-синтаксически подобны;

2) T_1^c и T_2^c синтаксически подобны в смысле [2].

Список литературы

[1] Ешкеев А. Р. Счетная категоричность $\Delta - PM$-теорий. Вестник КазНУ Серия математика, механика, информатика, 3 (2008).

[2] Mustafin T. G. On similarities of complete theories. Logic Colloquium ’90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, held in Helsinki, Finland, July 15–22, 1990.

Карагандинский государственный университет им. академика Е. А. Букетова, Караганда
E-mail: modth1705@mail.ru

Ортогональность семейств бинарных типов в слабо о-минимальных структурах

Б. Ш. Кулпешов

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных структур.

Пусть M — слабо о-минимальная структура, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические. Мы говорим, что тип p является *бинарным*, если для любых $n < \omega$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, $b'_1 < b'_2 < \ldots < b'_n \in p(M)$ таких, что $tp(\langle b_i, b_j\rangle/\emptyset) = tp(\langle b'_i, b'_j\rangle/\emptyset)$ для всех $1 \leq i < j \leq n$, мы имеем $tp(\bar{b}/\emptyset) = tp(\bar{b}'/\emptyset)$. Мы говорим, что тип p не является *слабо ортогональным* типу q, если существуют $\emptyset$-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$. Мы говорим, что семейство неалгебраических 1-типов $\{p_1, \ldots, p_s\}$ является *ортогональным*, если для любой последовательности $(n_1, \ldots, n_s) \in \omega^s$, для любых кортежей $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}$, …, $\bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$ таких, что $tp(\bar{a}_1/\emptyset) = tp(\bar{a}'_1/\emptyset)$, …, $tp(\bar{a}_s/\emptyset) = tp(\bar{a}'_s/\emptyset)$ мы имеем $tp(\langle\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s\rangle/\emptyset) = tp(\langle\bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_s\rangle/\emptyset)$.

Пример (см. пример 3.8 [2]). Пусть $M = \langle Q \cup W, <, E^3, P^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура, где Q — множество рациональных чисел; W — множество всех Q-последовательностей из $\{0, 1\}$ с конечным числом ненулевых координат, исключая Q-последовательность, состоящую только из 0, упорядоченное лексикографически; $P(M) = Q$, $\neg P(M) = W$ и $P(M) < \neg P(M)$. Для любого $a \in P(M)$ $\quad E(a, y_1, y_2)$ есть отношение эквивалентности на $\neg P(M)$, определяемое следующим образом: для любого $a \in P(M)$, $b_1, b_2 \in \neg P(M)$ $\quad E(a, b_1, b_2) \Leftrightarrow b_1(q) = b_2(q)$ для всех $q \leq a$, т. е. q-е координаты элементов b_1 и b_2 совпадают для всех $q \leq a$.

Ранее доказано что M — $\aleph_0$-категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p_1 := \{P(x)\}$, $p_2 := \{\neg P(x)\}$. Нетрудно понять что типы p_1 и p_2 слабо ортогональны, и нарушается условие ортогональности семейства $\{p_1, p_2\}$ над пустым множеством. Заметим, что тип p_1 бинарный, а тип p_2 не является бинарным.

Ранее в [2] была доказана ортогональность семейств типов в $\aleph_0$-категоричных слабо о-минимальных теориях конечного ранга выпуклости. В настоящем докладе мы обсуждаем вопрос ортогональности семейств бинарных типов в произвольной $\aleph_0$-категоричной слабо о-минимальной теории.

Список литературы

[1] Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Trans. Amer. Math. Soc., 352 (2000), 5435–5483.

[2] Kulpeshov B. Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories. Annals of Pure and Applied Logic, 145 (2007), N 3, 354–367.

Институт проблем информатики и управления, Алматы
E-mail: kbsh@ipic.kz

Непрерывность и теоретико-множественные модели теории лямбда

А. А. Лялецкий

Изначально построенное Алонзо Черчем в 1930-х годах лямбда-исчисление более 35 лет не имело никакой своей разумной семантики в теоретико-множественных терминах. Только в конце 1960-х годов Дана Скотт предложил ограничиться рассмотрением так называемых топологических моделей, построенных на его определении непрерывной функции над полными решетками и приведших к определенному соответствию между синтаксисом лямбда-подобных исчислений и семантикой Скотта.

Модели Скотта были приняты за "канонические" для лямбда-исчисления; также были построены другие интенсиональные модели лямбда-подобных исчислений, базирующихся на конструкциях, которые использовал Д. Скотт. Однако, фактически открытым остался следующий вопрос: можно ли ввести такие понятия непрерывной функции, которые, с одной стороны, определяют классы непрерывных функций, отличные от классов функций, непрерывных по Скотту, а с другой стороны, также приводят к теоретико-множественным моделям лямбда-подобных исчислений.

В данном сообщении дается возможное решение этой проблемы на базе новых понятий непрерывных функций над частично упорядоченными множествами и введенных автором с помощью новых определения сходимостей направленностей (над частично упорядоченными множествами) с "достаточным числом" инфимумов и супремумов.

Исходя из установленных свойств пределов направленностей, удается дать абстрактную теоретико-множественную характеризацию новых понятий непрерывности, что служит основой для проведения сравнительного анализа соответствующих классов непрерывных (в новом смысле) функций с хорошо известными классами непрерывных функций, такими, как топологически- и (o)-непрерывные функции, а также с классом функций, непрерывных по Скотту. Это приводит к возможности построения, на основе новых понятий непрерывности, теорий лямбда по методу Скотта — Койманса.

Показывается, что одно из новых понятий непрерывности функции, равно как и классическое понятие (o)-непрерывности, не может привести по методу Скотта — Койманса к построению лямбда-алгебры, отличной от вырожденной. Другие же понятия непрерывности приводят к лямбда-моделям, которые не изоморфны ни одной лямбда-модели Скотта, что, в частности, влечет то, что теоретико-множественные модели теории лямбда не исчерпываются с точность до алгебраического изоморфизма лямбда-моделями Скотта.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев
E-mail: foraal@mail.ru

Класс и множество как понятия формальной логики

В. А. Одинцов

Пусть L — язык, содержащий бинарные функциональные символы f и g, и пусть V — универсум языка L.

Определение 1. Язык L называется языком теории классов, а V называется формальным классом, если формулы

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[f(x,y)=z \to x \neq y], \tag{1}$$

$$(\forall x)(\exists y)[x \neq y \ \& \ g(x,y)=y \ \& \ (\forall z)(g(f(x,y),z)=f(x,y) \to z=f(x,y))] \tag{2}$$

являются нелогическими аксиомами L.

Определение 2. Язык L называется языком теории множеств, а V называется формальным множеством, если хотя бы одна из формул

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)[f(x,y)=z \ \& \ x=y],$$
$$(\exists x)(\forall y)[x=y],$$
$$(\exists x)(\forall y)[g(x,y)\neq y],$$
$$(\exists x)(\forall y)(\exists z)[g(f(x,y),z)=f(x,y) \ \& \ z \neq f(x,y)]$$

является нелогической аксиомой L.

Теорема 1. *Если V — формальный класс, то V содержит не менее трёх членов; если V — формальное множество, то V содержит хотя бы один элемент.*

Примеры формальных множеств приведены в следующей теореме.

Теорема 2. *Если T формализует классическую систему аксиом для натуральных чисел (или аксиоматическую систему для полугрупп), то $L(T)$ — язык теории множеств.*

Замечание 1. В случае полугрупп $f=g$.

Пусть $\mathbf{C}$ — универсум Кантора за вычетом пустого множества. Члены $\mathbf{C}$ — множества вида $\{a,b,c,...\}$ — мы интерпретируем как неупорядоченные алфавиты, состоящие из попарно различных знаков $a,b,c,...$ произвольного вида. Алфавиты вида $\{a\}$ называются синглетами. Знак $\{a,b,c,...\}$ называется метазнаком алфавита $\{a,b,c,...\}$.

Теорема 3. *Если $\{a,b,c,...\} \notin \{a,b,c,...\}$ для всех алфавитов $\{a,b,c,...\}$ и при этом f и g символизируют симметрическую разность Δ и объединение $\cup$ в $\mathbf{C}$, то формулы* (1), (2) *истинны в $\langle \mathbf{C}; \Delta, \cup\rangle$.*

Замечание 2. Левое $\{a,b,c,...\}$ в теореме 3 понимается автонимно (как знак).

Язык L теории классов можно дополнить определёнными нелогическими аксиомами, в которых кванторы действуют по определённым подмножествам функций, отображающих класс V в себя, и которые истинны в модели $\langle \mathbf{C}; \Delta, \cup\rangle$, дополненной соответствующими отображениями $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Гипотеза континуума в расширенном языке будет теоремой.

Новоуральский государственный технологический институт, г.Новоуральск
E-mail: `odintzov@e1.ru`

Сильно абелевы группоиды

А. А. Степанова, Н. В. Трикашная

В работе изучаются сильно абелевы группоиды. Напомним, что алгебра называется абелевой [1], если для любого терма $t(x, y_1, \ldots, y_n)$ и любых элементов $a, b, c_1, \ldots, c_n$, $d_1, \ldots, d_n$ алгебры из равенства $t(a, c_1, \ldots, c_n) = t(a, d_1, \ldots, d_n)$ следует $t(b, c_1, \ldots, c_n) = t(b, d_1, \ldots, d_n)$. Алгебра называется сильно абелевой [1], если для любого терма $t(x, y_1, \ldots, y_n)$ и любых элементов $a, b, e, c_1, \ldots, c_n$, $d_1, \ldots, d_n$ алгебры из равенства $t(a, c_1, \ldots, c_n) = t(b, d_1, \ldots, d_n)$ следует $t(e, c_1, \ldots, c_n) = t(e, d_1, \ldots, d_n)$. Ясно, что сильно абелева алгебра является абелевой. Одноэлементный группоид называется тривиальным.

В [2] описываются абелевы группоиды с единицей, абелевы конечные квазигруппы и полугруппы.

Непосредственно из определения сильно абелевой алгебры получаем следующие утверждения.

Утверждение 1. *Не существует нетривиального сильно абелевого группоида с единицей.*

Утверждение 2. *Не существует нетривиальной сильно абелевой квазигруппы.*

Напомним, что полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ называется прямоугольной связкой [3], если $A = \{e_{i\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ и $e_{i\lambda} \cdot e_{j\mu} = e_{i\mu}$ для любых $i \in I, \lambda, \mu \in \Lambda$. Полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ называется раздуванием подполугруппы $\langle B, \cdot\rangle$ [3], если существует разбиение $\{X_a \mid a \in B\}$ множества A такое, что $a \in X_a$ и $x \cdot y = a \cdot b$ для любых $a, b \in B, x \in X_a, y \in X_b$.

Теорема. *Полугруппа $\langle A, \cdot\rangle$ является сильно абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда $\langle A, \cdot\rangle$ – раздувание прямоугольной связки.*

Работа поддержана грантом ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1) и грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00336-а)

Список литературы

[1] Kiss E. W., Valeriote M. A. Abelian algebras and the Hamiltonian property. J. Pure Appl. Algebra, 87 (1993), N 1, 37–49.

[2] Степанова А. А., Трикашная Н. В. Абелевы и гамильтоновы группоиды. Фундаментальная и прикладная математика, в печати.

[3] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, Т. 1,2. 1972.

ДВГУ, Владивосток
E-mail: trik74@mail.ru

Naming an indiscernible set

B. S. Baĭzhanov, J. T. Baldwin

Let M be a stable structure in a language L and form an $L(P) = L^*$-structure (M, A) by interpreting a new predicate P as the set A. When is the new structure stable? Many people have used variants of the Hrushovski construction to find specific examples where the stability condition is preserved. But another line beginning with Poizat's work on beautiful pairs goes in the direction of finding sufficient conditions on A for preservation. In [1], we considered subsets A of stable theories and introduced the notion of a pair being locally homogeneous or benign. We concentrate on naming a set of indiscernibles but greatly relaxing the conditions on M.

Definition

(1) If I is an infinite set of indiscernibles in M such that for some infinite $J \subset M$, $I \cup J$ is a set of indiscernibles, we say I has *infinite codimension* (in M); otherwise I has *finite codimension*.

(2) The pair (M, A) is *small* if for every finite sequence $\beta \in M$, every L-type over $A\beta$ is realized in M.

(3) (M, A) is *locally saturated* if for any $\bar{b} \in M$, for any L-formula $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$, any $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{b})$-type over A is realized in M.

Theorem 1. *Suppose (M, I) is $L(P) - \omega$-saturated. The following are equivalent.*

(1) *(M, I) is locally saturated;*

(2) *I has infinite codimension;*

(3) *I is small.*

It then follows easily from [2]:

Theorem 2. *If M is stable, I is an infinite set of indiscernibles in M with infinite codimension then (M, I) is stable.*

Theorem 3. *Let $I \subset M$ be an indiscernible set and M be stable. Suppose (M, I) is ω-saturated in $L(P)$. The following are equivalent:*

(1) *I has finite codimension;*

(2) *For some ϕ, a canonically defined equivalence relation E_ϕ has less than N_ϕ classes that do not intersect I.*

References

[1] Baizhanov B., Baldwin J. Local Homogeneity. The Journal of Symbolic Logic, 69 (2004), N. 4, 1243–1260.

[2] Baldwin J., Benedikt M. Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models. Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), 4937–4969.

Institute of mathematics, informatics and mechanics, Almaty (Kazakhstan)
Department of Mathematics, Statistics and Computer Science
E-mail: baizhanov@hotmail.com
University of Illinois at Chicago (USA)

VI. Секция «Теория вычислимости»

Автоустойчивые булевы алгебры в атомно-идеальных обогащениях

П. Е. Алаев

Вычислимая структура $\mathfrak{A}$ называется автоустойчивой (вычислимо категоричной), если для каждого её вычислимого представления $\mathfrak{B}$ найдётся вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. В докладе предлагается алгебраический критерий автоустойчивости для структур вида

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*, I_1, \ldots, I_\lambda, At_{I_1}, \ldots, At_{I_\mu}),$$

где $\mathfrak{A}^*$ — булева алгебра, $I_1, \ldots, I_\lambda$ — предикаты для некоторых идеалов в $\mathfrak{A}^*$ и At_{I_j} — предикаты для множеств $\{x \in \mathfrak{A}^* \mid x/I_j$ — атом алгебры $\mathfrak{A}^*/I_j\}$. Будем называть их $I_{\lambda,\mu}$-*алгебрами*. Ранее некоторое описание было найдено для ряда частных случаев $I_{\lambda,\mu}$-алгебр.

Для каждых $\lambda, \mu \in \omega$, где $\mu \leqslant \lambda$, определим конечное семейство $I_{\lambda,\mu}$-алгебр $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, которые назовём *устойчивыми*, так, что выполняется следующая

Теорема. *Вычислимая $I_{\lambda,\mu}$-алгебра автоустойчива тогда и только тогда, когда она изоморфна конечному прямому произведению устойчивых алгебр.*

Определение устойчивой $I_{\lambda,\mu}$-алгебры $\mathfrak{A}$ требует нескольких промежуточных понятий. Пусть $x \in \mathfrak{A}$. Определим его *характеристику* $P_x : \{1, \ldots, \lambda\} \to \{0, 1, 2\}$:

$$P_x(j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in I_j, \\ 1, & \text{если } x \in At_{I_j} \text{ и } j \leqslant \mu, \\ 2, & \text{если } x \notin I_j, At_{I_j}. \end{cases}$$

Скажем, что $P_x \leqslant P_y$ если $P_x(j) \leqslant P_y(j)$ для всех $j \leqslant \lambda$. Элемент x *разложим*, если $x = 0$ или $x = x_1 + \ldots + x_n$, где $P_{x_i} < P_x$ для всех $i \leqslant n$. Если P', P'' — две характеристики, то их сумма $P' + P''$ определяется так, что $P' + P''(j) = \min\{2, P'(j) + P''(j)\}$. Через L_P обозначим идеал $\{x_1 + \ldots + x_n \mid P_{x_i} < P\}$.

$I_{\lambda,\mu}$-алгебра $\mathfrak{A}$ *устойчива* если верно следующее:

(1) 1 — неразложимый элемент в $\mathfrak{A}$;

(2) для каждой характеристики P верен один из случаев:

  (i) каждый элемент характеристики P разложим в $\mathfrak{A}$;

  (ii) каждый ненулевой элемент характеристики P неразложим в $\mathfrak{A}$;

  (iii) $P_1 = P$ и $1/L_P$ — атом.

(3) если P, Q — две характеристики такие, что $P + Q = Q$, и $\mathfrak{A}$ содержит неразложимые элементы характеристики P, то под каждым неразложимым элементом характеристики Q найдётся неразложимый элемент характеристики P.

(4) если P — такая характеристика, что $P + P = P$, то верно одно из условий:

  (i) x/L_P — безатомный элемент для любого элемента x характеристики P;

  (ii) $P_1 = P$ и $1/L_P$ — атом.

Кроме того, в докладе приводится некоторая естественная классификация типов изоморфизма устойчивых алгебр.

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: alaev@math.nsc.ru

Предельно монотонные функции и η-представления

М. В. Зубков

Бесконечное множество $A = \{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$ называется *η-представимым*, если существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ типа

$$\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \ldots.$$

Если $a_0 \le a_1 \le a_2 \ldots$, то A называется *η-представимым по неубыванию.* Если же $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$, то A называется *сильно η-представимым.* Функция F называется *X-предельно монотонной*, если существует X-вычислимая функция $f(x, s)$ такая, что $(\forall x)(\forall s)[f(x, s) \le f(x, s+1)]$ и $(\forall x)[F(x) = \lim\limits_{s\to\infty} f(x, s)]$. К. Харрис [1] доказал, что множество является η-представимым тогда и только тогда, когда оно является множеством значений некоторой $0'$-предельно монотонной функции. С другой стороны, он же построил пример сильно η-представимого множества, которое не является областью значений никакой возрастающей $0'$-предельно монотонной функции, определенной на ω. В работе А. Каца и Д. Турецкого [2] было предложено рассматривать псевдовозрастающие функции — функции, определенные на множестве рациональных чисел и возрастающие не на всей области определения, а на своем носителе.

Теорема 1. *Если A сильно η-представимое множество, то существует такая $0'$-предельно монотонная псевдовозрастающая функция H, что $rang(H) \equiv_T A$.*

Таким образом, тьюринговая степень η-представима тогда и только тогда, когда она содержит множество, являющееся рангом некоторой $0'$-предельно монотонной псевдовозрастающей функции.

Теорема 2. *Каждое таблично сводящееся к $0''$ множество m-эквивалентно некоторому сильно η-представимому множеству.*

Теорема 3. *Множество η-представимо по неубыванию тогда и только тогда, когда оно Δ^0_3 и η-представимо.*

Список литературы

[1] Harris K. η-Represetation of Sets and Degrees. Journal of Symbolic Logic, 73 (2008), 1097–1121.

[2] Kach A. M., Turetsky D. Limitwise Monotonic Functions, Sets and Degrees on Computable Domaine. Journal of Symbolic Logic, принято к печати.

Казанский Государственный Университет, Казань
E-mail: Maxim.Zubkov@ksu.ru

Создание базы данных по общей теории вычислимости

И. А. Лавров

Современная теория вычислимости включает в себя достаточно большое число направлений как по абстрактным, так и прикладным аспектам. Число научной литературы по Теории вычислимости (монографий и статей) постоянно растет. Ориентироваться в этой массе довольно затруднительно.

В настоящее время существуют различные варианты подобных баз, в основном на иностранных языках. Отметим некоторые из них:

- MathSciNet (выход только для членов AMS; российские ученые могут выходить лишь через некоторые институты РАН);
- CiteSeer (цитирования);
- `http://nd.edu/~cholak/computability/bib/bib.html`;
- `http://www.dblp.uni-trier.de` (здесь имеются каталоги журналов) и др.

Однако в них крайне скупо отражены работы, опубликованные на русском языке. Отсутствуют и многие иностранные работы.

Цель создания данной базы состоит в том, чтобы специалисты в различных направлениях теории вычислимости имели достаточно полное на данный момент представление о многообразии научных исследований в этой непрерывно развивающейся области теории алгоритмов.

В настоящее время база размещена на сайте
`http://ispras.ru/ru/mathbib` или `http://ispras.ru/publications.php`.

В базу включены более 3200 известных составителю научных монографий и статей по теории рекурсии, степеням неразрешимости, элементарным теориям, иерархиям сложностей, обобщенным вычислениям и их приложениям. В меньшей степени указаны работы по вероятностным алгоритмам, реверсивной математике, полиномиальным алгоритмам, ряду обобщений вычислимости и приложениям в конкретных математических направлениях. В базе имеется более 850 работ, напечатанных на русском языке, 200 авторов. А также более 2350 работ, напечатанных на иностранных языках, 600 авторов. Автор не включал в базу, за редким исключением, неопубликованные работы и частные сообщения. Предполагается, что в базу будут вноситься необходимые коррективы и дополнения по мере их поступления. Автор будет признателен за все замечания и предложения, которые можно ему сообщать по адресу: lavrov@ispras.ru.

По запросу поисковая система выдает список фамилий авторов, список работ конкретного автора, место и время опубликования, номер реферата в РЖ «Математика» или «Вычислительные науки», наличие ссылок в известных книгах Роджерса Х., Ершова Ю. Л., Odifreddi P., Соара Р. И. и Гончарова С. С., Ершова Ю. Л. Интересную статистику можно извлечь из данной базы. Например, вот список авторов по числу работ, включенных в базу (от 29 работ):

1.	Downey R. G.	144
2.	Shore R.A.	103
3.	Slaman T.A.	81
4.	Cooper S.B.	73
5.	Ершов Ю. Л.	73
6.	Soare R.I.	68
7.	Jockusch C.G.J	67
8.	Гончаров С.С.	66
9.	Ambos-Spies K.	65
10.	Селиванов В.Л.	60

11.	Lerman M.	59
12.	Арсланов М.М.	56
13.	Nies A.	54
14.	Lempp S.	52
15.	Remmel J.B.	47
16.	Lachlan A.H.	45
17.	Дегтев А.Н.	45
18.	Cholak P.	38
19.	Sorbi A.	37
20.	Chong C.T.	36

21.	Sacks G.E.	36
22.	Normann D.	32
23.	Kleene S.C.	32
24.	McLaughlin T.	31
25.	Harrington L.A.	30
26.	Simpson S.G.	30
27.	Knight J.F.	30
28.	Бадаев С.А.	30
29.	Добрица В.П.	29
30.	Оманадзе Р.Ш.	29

Дадим краткую сводку известных математических журналов, в которых помещены работы, упомянутые в базе:

1.	J. Symbolic Logic	341
2.	Алгебра и логика	201
3.	Z. Math. Logik und Grundl. Math.	137
4.	Ann. Pure Appl. Logic	117
5.	ДАН СССР (РАН)	97
6.	Сибирск. матем. журнал	96
7.	Trans. Amer. Math. Soc.	94
8.	Proc. Amer. Math. Soc.	92
9.	Arch. Math. Logik Grundl. Math.	72
10.	Lect. Notes in Math.	62
11.	Lect. Notes in Comput. Sci.	53
12.	Мат. заметки	53
13.	Изв. Вузов	44
14.	Theor. Comput. Sci.	39

Институт системного программирования РАН, Москва
E-mail: `lavrov@ispras.ru`

Разрешимость булевых алгебр элементарной характеристики (1,0,1)

М. Н. Леонтьева

Вычислимая булева алгебра называется *n-вычислимой*, если существует алгоритм, определяющий по конечной Σ_n-формуле и набору элементов, истинна ли эта формула на данном наборе. *Сильно вычислимая* модель — та, для которой подобный алгоритм существует для всех формул исчисления предикатов. Булева алгебра *разрешима*, если у неё существует сильно вычислимая изоморфная копия.

Для каждой булевой алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $At(\mathfrak{A})$ множество атомов, через $Atm(\mathfrak{A})$ — идеал атомных элементов, через $Als(\mathfrak{A})$ — идеал безатомных элементов. Кроме того, будем использовать $E(\mathfrak{A}) = Atm(\mathfrak{A}) + Als(\mathfrak{A})$ — идеал Ершова — Тарского, $F(\mathfrak{A})$ — идеал Фреше.

Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики (1,0,1). То есть $\mathfrak{A}/E$ — ненулевая безатомная булева алгебра. Пусть S — подмножество набора $\{At, Atm, Als, E\}$. Рассмотрим следующий вопрос: можем ли мы утверждать, что $\mathfrak{A}$ разрешима, если все предикаты из S вычислимы в $\mathfrak{A}$? Было доказано, что для $S = \{At, Als\}$ ответ положительный, а для $S = \{At\}$ и $S = \{Als, Atm, E\}$ отрицательный. Теоремы 1 и 3 завершают изучение данного вопроса.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики (1,0,1). Если $At(\mathfrak{A})$ и $Atm(\mathfrak{A})$ вычислимы, то $\mathfrak{A}$ разрешима.*

Пусть $\{E_k\}_{k\in\omega}$ — последовательность идеалов Ершова — Тарского, а $Atm_k(\mathfrak{A})$ — идеал атомных элементов фактор-алгебры $\mathfrak{A}/E_k$. Теорема 1 обобщена на случай булевых алгебр характеристики $(n, 0, 1)$ следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $\lambda \in \omega$, $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики $(\lambda + 1,\ 0,\ 1)$. Если $\mathfrak{A}$ является $(4\lambda + 1)$-вычислимой и при этом вычислим идеал $Atm_\lambda(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A}$ разрешима.*

Теорема 3. *Существует неразрешимая вычислимая булева алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики (1, 0, 1) с вычислимыми $At(\mathfrak{A})$ и $E(\mathfrak{A})$.*

При доказательстве теоремы 3 было получено следующее описание Σ^0_5-вычислимых булевых алгебр. Пусть $T = (Atm \to F) + Atm$, где $Atm \to F = \{x | \forall z \le x(z \in F \vee z \notin Atm)\}$.

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны:*
(а) $\mathfrak{A}$ является Σ^0_5-вычислимой булевой алгеброй;
(б) $\mathfrak{A}$ является Δ^0_6-вычислимой булевой алгеброй;
(в) существует вычислимая булева алгебра $\mathfrak{C}$ элементарной характеристики (1,0,1) такая, что $\mathfrak{C}/T \cong \mathfrak{A}$.

Научный руководитель — д. ф.-м. н., доцент П. Е. Алаев.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
E-mail: Margarita.Leontyeva@gmail.com

О сильной приводимости над недвукардинальной формулой.

А. Т. Нуртазин

Как следует из синтаксического критерия М. Гэйфмана [1], недвукардинальность данной полной теории T над одноместным предикатом P на самом деле означает, что в этой теории существуют «сильные», даже в каком то смысле «формульные», связи между основным множеством любой модели этой теории и её ограничением на подмножество, выделяемой в ней этим предикатом. В то же время «сильная приводимость» T над этим предикатом гарантирует, что эта связь «заметным образом» отражается на структуре этого ограничения. Вышесказанное делает естественным предположение, что некоторые «регулярные» свойства ограничения $T|P$ в этом случае гарантируют другие «хорошие» свойства самой теории T. Следующий список, по-видимому, не является окончательным.

1^0. *Счётная категоричность ограничения $T|P$ влечёт счётную категоричность исходной теории T.*

2^0. *Если $T|P$ имеет три счётные модели, то число счётных моделей исходной теории T также конечно.*

3^0. *Если $T|P$ имеет счётную насыщенную модель, то такую же модель имеет и T.*

4^0. *Если $T|P$ стабильна в мощности k, то такой же оказывается и исходная теория T.*

Для формулировки следующих оценочных утверждений напомним, что недвукардинальность теории над формулой эквивалентна существованию в этой теории «замыкающей $m - \exists - P$-формулы», где $m = m_1 + \cdots + m_k$ и для любого элемента a из произвольной модели A теории T можно последовательно подбирать m_1 элементов $\bar{b}^1$ из подмножества $P(\mathrm{A})$, затем n_1 элементов из подмножества $\neg P(\mathrm{A})$ (и эти элементы зависят от кортежа $\bar{b}^1$, но не зависят от исходного элемента a). И так k раз. В следующих двух свойствах предполагается существование в теории T «замыкающей $m - \exists - P$-формулы».

5^0. *Если $T|P$ тотально трансцендентна и имеет ранг Морли α, то ранг Морли исходной теории T не превышает ординала $m\alpha$.*

6^0. *Если $T|P$ суперстабильна и $Deg(T|P) = \alpha$, то выполняется неравенство $Deg(T|P) \leq m\alpha$.*

Список литературы

[1] Gaifman H. On local and nonlocal properties. Proceedings of the Herbrand Symposium, Log. Colloquium’81, North-Holland Publ. Company, 1982, 105–135.

[2] Hodges W. Model theory. Camdridge Univ. Press, 1993.

КазНУ, Алматы
E-mail: AbyzNurtazin@mail.ru

Некоторые свойства вычислимых нумераций различных классов иерархии Ершова

С. С. Оспичев

В работе рассматриваются вычислимые нумерации [3] семейств множеств из различных классов Σ^{-1}_n иерархии Ершова [2].

Мы будем рассматривать более сильное определение вычислимых нумераций семейств множеств из класса Σ^{-1}_α иерархии Ершова.

Определение. Нумерация $\{\nu_n\}_{n\in\alpha}$ называется α-вычислимой, если множество $\{\langle m,n\rangle \mid m\in\nu_n\}$ принадлежит классу Δ^{-1}_α иерархии Ершова, где α — вычислимый ординал.

Показано, что не существует вычислимой нумерации семейства всех множеств из класса Δ^{-1}_α для любого вычислимого ординала α.

В работе анонсирована

Теорема. *Существует минимальная нумерация семейства всех множеств из класса* $\bigcup\limits_{n\in\omega}\Sigma^{-1}_n$ *иерархии Ершова.*

Заметим, что в [4] доказано, что для конечных уровней иерархии Ершова Σ^{-1}_n доказано, что семейства всех множеств из Σ^{-1}_n имеет даже минимальную фридберговскую нумерацию.

Список литературы

[1] Арсланов М. М. Иерархия Ершова. Казань: Казанский государственный университет, 2007.

[2] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств III. Алгебра и логика, 9 (1970), N. 1, 34–51.

[3] Гончаров С. С., Сорби А. Обобщенные вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса. Алгебра и логика, 36 (1997), N. 6, 621–641.

[4] Goncharov S. S. Lempp S., Solomon R. Friedberg numberings of families of n-computability enumerable sets.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: ospichev@gmail.com

Отношения на вычислимых линейных порядках и иерархия Ершова

А. Н. Фролов

Д. Хиршфельдт показал, что все конечные уровни иерархии Ершова реализуются спектром отношения на вычислимой структуре. А именно, он построил для любого $n \in \omega$ вычислимую структуру $\mathcal{A}$ и отношение U такие, что $DgSp_{\mathcal{A}}(U) = \Sigma_n^{-1}$. Построенные структура и отношение не являются естественными. Возникает вопрос — для каких естественных структур и отношений на них выполнено аналогичное свойство.

Теорема. *Существует вычислимый линейный порядок L такой, что для любого $n \in \omega$ выполнено $DgSp_L(S_n) = \Sigma_n^{-1}$, где*
$S_0 = \emptyset$;
$S_{2n}(x, y) \rightleftharpoons (\exists k \in \{1, \ldots, n\})(|(x, y)_L| = 2k - 1)$ *для* $n \geq 1$;
$S_{2n+1}(x, y) \rightleftharpoons S_{2n}(x, y) \vee |(x, y)_L| \geq 2n + 1$;
$(x, y)_L = \{z \mid x <_L z <_L y\}$.

В работе также изучаются различные свойства введенных отношений.

Казанский государственный университет, Казань
E-mail: `Andrey.Frolov@ksu.ru`

Σ-однородная алгебраическая система и универсальные функции

А. Н. Хисамиев

Одним из принципиальных результатов обычной теории вычислимости является существование универсальной частично вычислимой функции. Как известно (см. [1]) в любом допустимом множестве существует универсальный Σ-предикат, но это не верно для Σ-функций [2]. Поэтому представляет интерес нахождение условия на алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над $\mathfrak{M}$. В [2, 3–8] для некоторых классов систем даны такие условия.

В данном сообщении введено понятие Σ-однородной алгебраической системы $\mathfrak{M}$ и получено необходимое и достаточное условие для существования универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Этот критерий применен для одного класса периодических абелевых групп.

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость. Новосибирск: научная книга, 1996. (Сибирская школа алгебры и логики).

[2] Руднев В. А. Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах. Алгебра и логика, 25 (1986), N. 4, 425–436.

[3] А. С. Морозов, В. Г. Пузаренко. О Σ-подмножествах натуральных чисел. Алгебра и Логика, 43 (2004), N. 3, 291–320.

[4] Калимулин И. Ш., Пузаренко В. Г. О вычислимости на структурах. Mататематические труды, 1, N. 2, 35–72.

[5] Пузаренко В. Г. К вычислимости на специальных моделях. Сиб. мат. журн., 46 (2005), N. 1, 185–208.

[6] Хисамиев А. Н. О Σ-подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами. Сиб. мат. журн., 45 (2006), N. 3, 211–228.

[7] Хисамиев А. Н. Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции I. Сиб. мат. журн., принято к печати.

[8] Хисамиев А. Н. Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции II. Сиб. мат. журн., принято к печати.

ИМ СОРАН, Новосибирск
E-mail: hisamiev@math.nsc.ru

О конструктивной нильпотентной группе, размерность коммутанта которой конечна

Н. Г. Хисамиев

В сообщении получен критерий конструктивизируемости нильпотентной группы ступени 2, указанной в заглавии. *Размерностью* $dim(G)$ абелевой группы без кручения называется максимальное число линейно независимых ее элементов.

Лемма 1. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения, $I(G')$ — изолятор коммутанта, $\bar{G} = G/I(G')$. Если размерности групп $\bar{G}$ и G' соответственно бесконечна и конечна, то для любого конечного множества $F \subseteq G$ размерность факторгруппы $C(F)/I(G')$ централизатора $C(F)$ множества F по $I(G')$ бесконечна.*

Теорема 1. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения ступени 2, размерность коммутанта которой конечна. Тогда существует нумерация μ группы G, для которой справедливы следующие свойства: 1) группа (G, μ) конструктивна; 2) изолятор коммутанта $I(G')$ вычислим в (G, μ); 3) существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{b_i \mid i \in I\}$ в (G, μ), что смежные классы $\{b_i I(G')\}$ образуют базис фактор-группы G/A.*

Пусть даны нумерованные полные абелевы группы без кручения (A, α) и (B, β), где $dim(A) = r$, $r \in \omega$, и 2-х местная частично вычислимая функция φ_n номера n такие, что: 1^0) $A \bigcap B = 0$; 2^0) в группе (B, β) имеется вычислимо перечислимый базис $\{b_i \mid i < \delta\}$ для некоторого $\delta \leq \omega$; 3^0) область определения функции φ_n содержит множество $\{\langle i, j\rangle \mid i < j < \delta\}$.

Через (H_n^r, γ_n) обозначим *центральное расширение* группы A посредством (B, β) с определяющими соотношениями $[b_i, b_j] = \alpha\varphi_n(i, j)$, где γ_n — естественная нумерация группы H_n^r, определенная по α и β.

Теорема 2. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения ступени 2, размерность коммутанта которой конечна и равна r. Группа G конструктивизируема тогда и только тогда, когда она изоморфна вычислимо перечислимой подгруппе группы (H_n^r, γ_n) при некотором n.*

Группа G называется *упорядоченно конструктивизируемой*, если существуют ее упорядочивание $\leq$ и нумерация μ такие, что система $\langle G, \cdot, \leq, \mu\rangle$ является конструктивной упорядоченной группой.

Следствие 1. *Конструктивизируемая нильпотентная группа без кручения ступени 2, размерность коммутанта которой конечна, упорядоченно конструктивизируема.*

Теорема 3. *Для любого натурального числа r семейство всех конструктивизируемых нильпотентных групп без кручения ступени не более 2, размерность коммутантов которых не более r, вычислимо.*

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск
E-mail: hisamiev@mail.ru

Superlow sets and degrees

M. Kh. Faĭzrahmanov

Let $J = \{a \cup b : a, b$ are superlow c.e. degrees$\}$, and let C be the semilattice of all c.e. degrees.

Theorem 1. *For all superlow c.e. degrees a_0, a_1, a_2 there are superlow c.e. degrees b_0, b_1, b_2, such that*

$$a_0 \cup a_1 \cup a_2 = b_0 \cup b_1 = b_0 \cup b_2 = b_1 \cup b_2.$$

Corollary 2. *J is an upper semilattice.*

Theorem 3. *There is a c.e. degree a such that for all c.e. degrees b_0, b_1, b_2 if*

$$a = b_0 \cup b_1 = b_0 \cup b_2 = b_1 \cup b_2$$

then b_i is not totally ω-c.e. for some $i < 3$.

Corollary 4. *The upper semilattices J and C are not elementary equivalent.*

Theorem 5. *For all notation $a \in O$ there is a low 2-c.e. set D, such that for all 2-c.e. sets E and F, if $E' \in \Delta^{-1}_a$, $F' \in \Delta^{-1}_a$, then $D \not\equiv_T E \oplus F$.*

Corollary 6. (Independently with M. Yamaleev). *The low c.e. degrees and the low 2-c.e. degrees are not elementary equivalent.*

Theorem 7. *Let ν and μ be Δ^0_2-computable numberings of some families of sets. Then the predicate*

$$P(e, i) \Leftrightarrow \nu(e)' \neq \mu(i)$$

is a Σ^0_2-predicate.

Corollary 8. *The family of all superlow sets has a Δ^{-1}_ω-computable numbering.*

Kazan State University, Kazan
E-mail: `Marat.Faizrahmanov@ksu.ru`

The effective theory of Borel equivalence relations

E. B. Fokina, S.-D. Friedman, A. Törnquist

In this talk we discuss the question of effectiveness of some well-known results in descriptive set theory. The study of Borel equivalence relations under Borel reducibility has developed into an important area of descriptive set theory. The dichotomies of Silver [3] and Harrington—Kechris—Louveau [1] show that with respect to Borel reducibility, any Borel equivalence relation strictly above equality on ω is above equality on $\mathcal{P}(\omega)$, the power set of ω, and any Borel equivalence relation strictly above equality on the reals is above equality modulo finite on $\mathcal{P}(\omega)$.

We discuss the effective content of these and related results by studying Δ^1_1 (hyperarithmetical) equivalence relations under Δ^1_1 reducibility. The resulting structure is complex, even for equivalence relations with finitely many equivalence classes. However use of Kleene's O as a parameter is sufficient to restore the picture from the noneffective setting. A key lemma is the existence of two Δ^1_1 sets of reals, neither of which contains the range of the other under any Δ^1_1 function; the proof of this result applies Barwise compactness to a deep theorem of Harrington (see [2]) establishing for any recursive ordinal α the existence of Π^0_1 singletons whose α-jumps are Turing incomparable.

References

[1] Harrington L., Kechris A., Louveau A. A Glimm—Efross dichotomy for Borel equivalence relations. Journal of the American Mathematical Society, 3 (1990), N. 4, 903–928.

[2] Hjorth G. An argument due to Leo Harrington. Unpublished note, http://www.math.ucla.edu/~greg/harrington.dvi.

[3] Silver J. H., Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations. Annals of Mathematical Logic, 18 (1980), N. 18, 1–18.

Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic, University of Vienna, Vienna (Austria)
E-mail: efokina@logic.univie.ac.at

Relations on computable linear orderings and Ershov hierarchy

A. N. Frolov

D. Hirschfildt showed that any finite level of Ershov hierarchy is realized by a spectrum of a relation on computable structure. Namely, he constructed for any $n \in \omega$ computable structure $\mathcal{A}$ and relation U such that $DgSp_{\mathcal{A}}(U) = \Sigma_n^{-1}$. These structure and relation are not natural. What natural structures and relations satisfy similar property?

Theorem. *There exists a computable linear ordering L such that for any $n \in \omega$ we have $DgSp_L(S_n) = \Sigma_n^{-1}$, where*
$S_0 = \emptyset$;
$S_{2n}(x, y) \rightleftharpoons (\exists k \in \{1, \ldots, n\})(|(x, y)_L| = 2k - 1)$ *for* $n \geq 1$;
$S_{2n+1}(x, y) \rightleftharpoons S_{2n}(x, y) \vee |(x, y)_L| \geq 2n + 1$;
$(x, y)_L = \{z \mid x <_L z <_L y\}$.

Kazan State University, Kazan
E-mail: `Andrey.Frolov@ksu.ru`

Structures associated with real closed fields

J. F. Knight, K. M. Lange

A real closed ordered field is a model of $T = Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$. We report results on the effectiveness of structures associated with real closed fields. For $x, y \in K$, we say $x \sim y$ if there exist integers m and n such that $m|x| > |y|$ and $n|y| > |x|$. It is possible to choose a representative from each equivalence class such that the result is a subgroup G of $(K^+, \cdot)$. Such a subgroup G is called a *value group* of K. A *residue field* of K is a subfield of K containing exactly one representative for each rational cut that is filled in K. Any two value groups of K and any two residue fields of K are isomorphic. We will present exact characterizations of the complexity of value groups and residue fields of computable real closed fields.

An *integer part* for K is a discrete ordered subring I such that 1 is the first positive element of I, and for all $r \in K$, there exists $i \in I$ such that $i \leq r < i + 1$. Mourgues and Ressayre [1] showed that every real closed ordered field K has an integer part. We explore how effective it is to locate an integer part of K.

References

[1] Mourgues M. H., Ressayre J. P. Every real closed field has an integer part. Journal of Symbolic Logic, 58 (1993), N. 2, 641–647.

University of Notre Dame, Notre Dame (U.S.A.)
E-mail: klange1@nd.edu

On definability in the subword order

O. V. Kudinov, V. L. Selivanov, L. V. Yartseva

Starting with classical works of A. Tarski and A. I. Mal'cev, the study of definability in natural structures became a central issue of logic and computation theory. For computation theory, the study of structures on words and trees is most relevant [1, 2].

In [3, 4] a complete definability theory was developed for the h-quasiorder of finite labeled forests and for the structure $(A_k^*; \leq)$, where A_k^* is the set of words over the finite alphabet $A_k = \{0, \ldots, k-1\}$, $k \geq 1$, and $\leq$ is the infix partial order ($u \leq v$ iff $v = xuy$ for some $x, y \in A_k^*$). We use some notation and terminology of these papers.

In this work we start to develop a similar theory for the subword order $\preceq$ on A_k^* defined as follows: $u \preceq v$ iff u is a subword of v, i.e., u is obtained from v by deleting some symbols.

Theorem. *1. For any $k \geq 1$, any element of A_k^* is Σ-definable in the $A_k^{[1,2]}$-expansion of $(A_k^*; \preceq)$ (i.e. in the expansion obtained by adding to the signature $\{\preceq\}$ the constant symbols denoting words of lengths 1 or 2).*

2. For any $k \geq 1$, any automorphism of $(A_k^*; \preceq)$ identical on $A_k^{[1,2]}$ is the identity automorphism.

3. For any $k \geq 2$, $Aut(A_k^*; \preceq) \simeq \mathbf{S}_k \times \mathbf{S}_2$ where $\mathbf{S}_k$ is the symmetric group on k elements $\{0, \ldots, k-1\}$.

4. For any $k \geq 1$, the structure $(A_k^*; \leq)$ is definable in $(A_k^*; \preceq)$.

References

[1] Kuske D. Theories of orders on the set of words. RAIRO Theoretical Informatics and Applications, 40 (2006), 53–74.

[2] Rabin M. O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. Trans. Amer. Math. Soc., 576 (1969) 141, 1–35.

[3] Kudinov O. V., Selivanov V. L. A Gandy theorem for abstract structures and applications to first-order definability. Proc. of CiE-2009, Lecture Notes in Computer Science, v. 5635. Berlin: Springer, 2009, 290–299.

[4] Kudinov O. V., Selivanov V. L. Definability in the infix order on words. Proc. of DLT-2009, Lecture Notes in Computer Science, v. 5583. Berlin: Springer, 2009, 454–465.

S. L. Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
E-mail: kud@math.nsc.ru
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS
E-mail: vseliv@ngs.ru
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS
E-mail: kotofejnik@gmail.com

Arithmetical categoricity of ordered abelian groups

A. G. Mel'nikov

One of the main topics of computable model theory is the study of isomorphisms between computable copies of a given structure. A structure $\mathcal{A}$ is *computably categorical* if there is a computable isomorphism between any two computable copies of $\mathcal{A}$. Goncharov, Remmel, Solomon, Lempp and others obtained characterisations of computable categoricity in the classes of Boolean algebras, linear orders, abelian groups, ordered abelian groups and trees (see e. g. [4], [8] or [3]).

If structure $\mathcal{A}$ is not computably categorical, then we may ask if $\mathcal{A}$ is Δ^0_n-categorical, for a given n (i.e. every pair of computable copies of $\mathcal{A}$ has a Δ^0_n-computable isomorphism between them). In [6] McCoy studies Δ^0_2-categorical linear orders and Boolean algebras. In [1] Ash gives a characterization of hyperarithmetical categoricity of ordinals. In [5], for any given $n > 0$, a tree is constructed that is Δ^0_{n+1}-categorical but not Δ^0_n-categorical. Similar examples can be constructed in the class abelian p-groups [2]. There are also examples of Δ^0_n-categorical torsion-free abelian groups for small n [7].

We study Δ^0_n-categorical ordered abelian groups. The main result is the following theorem.

Theorem. *For every natural number $n > 0$ there is an ordered abelian group which is Δ^0_{n+1}-categorical but not Δ^0_n-categorical.*

To prove this theorem we introduce a coding technique that transforms linear orders into ordered abelian groups. Using this technique we also show that *the isomorphism problem for ordered abelian groups is Σ^1_1-complete.*

References

[1] Ash C. J. Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees. Trans. of Amer. Math. Soc., 298 (1986), 497–514.

[2] Barker E. J. Back and forth relations for reduced abelian p-groups. Annals of Pure and Applied Logic, 75 (1995) 223–249.

[3] Goncharov S. S., Lempp S., Solomon R. The computable dimension of ordered abelian groups. Advances in Mathematics, 175 (2003), 102–143.

[4] Goncharov S. S. Countable Boolean algebras and decidability. Siberian School of Algebra and Logic, Novosibirsk, Nauchnaya Kniga, 1996.

[5] Lempp S., McCoy C., Miller R., Solomon R. Computable Categoricity of Trees of Finite Height. Journal of Symbolic Logic, 70 (2005), N. 1, 151–215.

[6] McCoy C. Categoricity in Boolean algebras and linear orderings. Annals of Pure and Applied Logic, 119 (2003), 85–120.

[7] Melnikov A. G. $0''$-Categorical completely decomposable torsion-free abelian groups. Proceedings of CiE 2009, Springer, Accepted.

[8] Remmel J. B. Recursively categorical linear orderings. Proc. Amer. Math. Soc., 83 (1981), 387–391.

The University of Auckland, and The Novosibirsk State University
E-mail: `vokinlem@bk.ru`

Fine hierarchies via Priestley duality

V. L. Selivanov

In most applications of fine hierarchies (see [1] for a survey) their characterizations in terms of so called alternating trees is of principal importance. Also, in many cases a suitable version of many-one reducibility exists that fits a given fine hierarchy. Here we show a surprising result that suitable versions of alternating trees and of m-reducibilities may be found for any given fine hierarchy, i.e. the methods of alternating trees and m-reducibilities are quite general, which is of some methodological interest.

The result (which is formulated, because of lack of space, only for the difference hierarchy (DH) which is the simplest and most important version of fine hierarchy; for the DH the alternating trees are simplified to alternating chains) is naturally described in terms of Priestley duality [2] that states the dual equivalence between the category of bounded distributive lattices (with $\{\vee, \wedge, 0, 1\}$-homomorphisms) and the category of Priestley spaces (with continuous monotone mappings). Recall that a Priestley space $(X; \leq)$ is a compact topological space X equipped with a partial order $\leq$ such that for any $x, y \in X$ with $x \not\leq y$ there is a clopen up-set U with $x \in U, y \notin U$.

Let $X = p(L)$ be the Priestley space corresponding to a given bounded distributive lattice L and let $\mathcal{L}$ be the lattice of clopen up-sets in X. Then L and $\mathcal{L}$ are canonically isomorphic, and this isomorphism uniquely extends to an isomorphism between $L(n)$ and $\mathcal{L}(n)$ for each $n < \omega$ where $\{L(n)\}$ and $\{\mathcal{L}(n)\}$ are the DH's over L and $\mathcal{L}$, respectively.

Theorem. *1. For any $n < \omega$, $\mathcal{L}(n)$ coincides with the class of clopen subsets of X that have no 1-alternating $\leq$-chain of length n.*

2. If the class $\mathcal{C} = \mathcal{L}(n) \setminus co\text{-}\mathcal{L}(n)$ is non-empty then $\mathcal{L}(n)$ has a complete set and $\mathcal{C}$ is a degree under the m-reducibility by the continuous monotone functions.

3. If the class $\mathcal{C} = (\mathcal{L}(n+1) \cap co\text{-}\mathcal{L}(n+1)) \setminus (\mathcal{L}(n) \cup co\text{-}\mathcal{L}(n))$ is non-empty and L has the reduction property then $\mathcal{L}(n+1) \cap co\text{-}\mathcal{L}(n+1)$ has a complete set and $\mathcal{C}$ is a degree under the m-reducibility by the continuous monotone functions.

References

[1] Selivanov V. L. Fine hierarchies and m-reducibilities in theoretical computer science. Theoretical Computer Science, 405 (2008), 116–163.

[2] Davey B. A., Priestley H. A. Introduction to Lattices and Order. Cambridge, 1994.

A. P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: `vseliv@ngs.ru`

Isomorphisms and algorithmic complexity relations over structures with two binary predicates

J. A. Tussupov

There are the next basic generalized problems of computable algebraic structures.
1. The problem of Goncharov S. S. and Manasse M. S. — "The problem of characterization of relative categoricity in hyperarithmetical hierarchies by given levels of complexity of Scott families" and "The problem of connection of relative categoricity of computable presentations and abstract presentation".
2. The problem of Ershov Yu. L. — "The problem of finite algorithmitical dimensions in hyperarithmetical hierarchy".
3. The problem of Nerode A. — "The problem of connection between relations of bounded complexity on different computable presentations and definability of relations by formulas of given complexity".
4. The problem of Knight J. F. — "The problem of structures with presentations in just the degrees of sets X such that $\Delta^0_\alpha(X) \neq \Delta^0_\alpha$".

We give the results which are connected with decisions of problems 1–4. for some algebraic structure. Let $\mathcal{A}$ structure of signature of two binary predicates.

Theorem 1. *For each computable successor ordinal α there is computable structure $\mathcal{A}$ that is Δ^0_α categorical but not relatively Δ^0_α (and without formally Σ^0_α Scott family).*

Theorem 2. *For each computable successor ordinal α there is computable structure $\mathcal{A}$ that is Δ^0_α with a relation that is intrinsically Σ^0_α but not relatively intrinsically Σ^0_α.*

Theorem 3. *For each computable successor ordinal α for each finite n there is computable structure $\mathcal{A}$ with Δ^0_α dimension n.*

Theorem 4. *For each computable successor ordinal α there is computable structure $\mathcal{A}$ with presentations in just the degrees of sets X such that $\Delta^0_\alpha(X) \neq \Delta^0_\alpha$. In particular, for each finite n there is computable structure $\mathcal{A}$ with presentations in just the $non-low_n$ degrees.*

Supported by the grant Fundamental Sciences — 1.18 "Spectra of universe theory and minimal models".

References

[1] Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., McCoy C., Miller R. G., Solomon R. Enumerations in computable structure theory. Annals of Pure and Applied Logic, 136 (2005), N. 3, 219–246.

[2] Tussupov J. A. Isomorphisms, Definable Relations Scott Family on the Integral Domains and the Commutative Semigroups. Siberian Advances in Mathematics, 1 (2007).

Taraz State University, Taraz
E-mail: `tussupov@mail.ru`

Index Sets of Free Groups

J. Wallbaum

We use computable infinitary logic to investigate how hard it is to distinguish a free group within the class of all free groups and then within the class of all groups. Let F_n denote the free group of rank n and F_∞ the free group of countable infinite rank. For a group G, let $I(G)$ be the set of computable indices of copies of G. We prove the following:

Within the class of free groups, $I(F_2)$ *is m-complete* Π^0_2, $I(F_n)$ *for* $n \geq 3$ *is m-complete* $d-\Sigma^0_2$, *and* $I(F_\infty)$ *is m-complete* Π^0_3.

Within the class of all groups, $I(F_n)$ *for* $n \geq 2$ *is m-complete* $d-\Sigma^0_2$ *while* $I(F_\infty)$ *is* Π^0_4.

We leave open the question of whether $I(F_\infty)$ is m-complete Π^0_4 or there is a better description. This is joint work with J. Carson, V. Harizanov, J. Knight, K. Lange, C. Maher, C. McCoy, A. Morozov, and S. Quinn.

Notre Dame, U.S.A.
E-mail: `jwallbau@nd.edu`

Splitting properties in 2-c.e. degrees

M. M. Yamaleev

A Turing degree a is splittable in a class of degrees $\mathcal{C}$ avoiding an upper cone of a degree d if there exist degrees $x_0, x_1 \in \mathcal{C}$ such that $a = x_0 \cup x_1$, $x_i < a$ and $d \nleq x_i$ for $i = 0, 1$. The following theorem presents sufficient conditions for a properly 2-computably enumerable (2-c.e.) degree to be splittable in D_2 avoiding the upper cone of another properly 2-c.e. degree.

Theorem 1. *Let a and d be properly 2-c.e. degrees such that $0 < d < a$ and there are no c.e. degrees between a and d. Then the degree a is splittable in D_2 avoiding the upper cone of d.*

Theorem 1 holds when d is a Δ_2^0-degree, which does not contain c.e. sets. Theorem 2 states that the well-known bubble (see [1]) can be constructed in low 2-c.e. degrees.

Theorem 2. *There exist low noncomputable 2-c.e. degrees $b < a$ such that for any 2-c.e. degree $v \leq a$ either $v \leq b$ or $b \leq v$.*

As a consequence we obtain the following: the partial orders of m-low c.e. and m-low 2-c.e. degrees are not elementarily equivalent for any $m \geq 1$. Also, I will talk about a link between splitting properties (Theorem 1) and the bubbles and how the link could be uniformly adapted to higher levels of the Ershov's hierarchy.

References

[1] Arslanov M. M., Kalimullin I. Sh., Lempp S. On Downey's conjecture. The Journal of Symbolic Logic, to appear, http://www.math.wisc.edu/ lempp/papers.

Kazan State University, Department of Mathematics, Kazan
E-mail: `marsiam2@yandex.ru`

Undecidability in the 2-quasiorder of labeled forests

A. V. Zhukov

By *a forest* we mean an (at most) countable poset in which every lower cone is a chain. A *k-labeled forest* (or just a k-forest) is an object $(F;\leq,c)$ consisting of a forest $(F;\leq)$ and a labeling $c:P\to k$ (a natural number $k\geq 2$ is identified with the set $\{0,\ldots,\text{k-1}\}$). Let $\mathcal{F}_k$ and $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ be the classes of all finite k-forests and all (at most) countable k-forests without infinite chains, respectively.

We study the 2-quasiorder on $\mathcal{F}_k$ and $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ which can be defined as follows [1]: $(F;\leq,c)\leq_2(F';\leq',c')$ iff there is a monotone function $f:(P;\leq)\to(P';\leq')$ such that for all $x,y\in F$, $c(x)\neq c(y)$ implies $c'(f(x))\neq c'(f(y))$. The 2-quasiorder is a generalization of the h-quasiorder for which the undecidability results were proven in [2, 3].

Theorem. *For $k\geq 3$, the first-order theories of $(\mathcal{F}_k,\leq_2)$ and $(\widetilde{\mathcal{F}}_k,\leq_2)$ are hereditary undecidable.*

References

[1] Hertling P. Unstetigkeitsgrade von Funktionen in der effektiven Analysis. Doktorarbeit (PhD thesis, in German). FernUniversität Hagen, Informatik-Bericht 208, November 1996.

[2] Kudinov O. V., Selivanov V. L. Undecidability in the Homomorphic Quasiorder of Finite Labeled Forests. J. Log. Comput., 17 (2007), N. 6, 1135–1151.

[3] Selivanov V. L. Undecidability in Some Structures Related to Computation Theory. J. Log. Comput., 19 (2009), N. 1, 177–197.

Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk
E-mail: zhukan@ngs.ru

VII. Секция «Философия математики»

Приложения теории групп в естествознании и в информационных технологиях: возможности и ограничения

Г. С. Садовой

По словам А. И. Мальцева теория групп представляет собой язык для выражения глубоких законов природы и дает средства для технических вычислений. Цели настоящего доклада — показать, что в последние десятилетия теория групп была одной из самых востребованных естествознанием и техникой разделов математики; привести новые приложения теории групп; выяснить ограничения на применение теоретико-групповых методов.

Теория групп широко применяется для изучения закономерностей симметрии или приближенной симметрии.

Если какой-либо объект или закон природы обладает симметрией, то существует вполне определённая группа операций, сохраняющих эту симметрию. А все возможные состояния объекта находятся в точном соответствии с представлениями группы. Перечисление и классификация групп и их представлений известны из математики.

Зная симметрию, можно сделать определённые заключения о свойствах объекта, не выполняя сложные вычисления. Аппарат теории групп связан с преобразованиями симметрии молекул и твердых тел, с их матричными представлениями, характерами и классами и с рассмотрением неприводимых представлений.

Применение теории групп позволило исследовать вырождение, расщепление термов в кристалле, зонные диаграммы.

Анализ закономерностей, сопутствующих нарушению симметрии, позволил создать количественную теорию сверхпроводимости и основания Стандартной модели.

Теория групп применяется при кодовом разделении сигналов в цифровых системах связи.

К ограничениям теории групп относят следующие обстоятельства. Она не объясняет проявлений живой материи, времен жизни частиц, различной интенсивности их взаимодействия. Это настолько сильная абстракция, что многие существенные и конкретные детали реального мира выпадают из ее поля зрения.

Теория групп неприменима, если свойства объектов зависят от взаимодействия между частями объекта или от вида потенциальной энергии.

Данная работа была выполнена в связи с необходимостью изучения аналогий между теорией информации и теорией групп. Результатом исследования явилось обнаружение такой аналогии.

Новосибирский государственный технический университет
E-mail: `sadovoi g@mail.ru`

K. Godel's incompleteness theorems and a hitherto unknown non-trivial formal equivalence of "true" and "provable"

V. Lobovikov

According to the incompleteness theorems of Godel, in general, the formal-logical equivalence of "true" and "provable" is not true. Nevertheless, in general, terms "the formal-logical equivalence" and "a formal equivalence (equivalence of forms)" are not synonyms. Consequently, there is a possibility of existence of such a formal equivalence (equivalence of forms) of "true" and "provable", which does not imply (logically) their formal-logical equivalence. The submitted paper demonstrates (constructs) just such an unusual (hitherto unknown) formal equivalence (equivalence of forms) of "true" and "provable". This result is obtained within the framework of two-valued algebra of formal axiology. In this algebra formal-axiological meanings of the words "true" and "provable" are considered as binary formal-axiological operations. The evaluation-functional sense of these operations is defined by tables. A formal-axiological equivalence relation is defined precisely and by means of the mentioned definitions it is demonstrated that there is the above-mentioned formal-axiological equivalence between axiological forms of "true" and "provable". As, in general, there is no logical identity between the notions "axiological forms" and "logical forms" (of "true" and "provable"), there is no logical contradiction between the above-affirmed hitherto unknown non-trivial formal-axiological equivalence and the famous incompleteness theorems of Godel. This result is too elementary from the proper mathematical point of view as the technical aspect of this submission is basic, but the result is very interesting and important for illuminating hitherto unknown (ignored on principle) properly philosophical (axiological) grounds of D. Hilbert's formalism.

Institute of Philosophy and Law, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: vlobovikov@mail.ru

On Kolmogorov's analysis of applicability of probability theory

V. M. Reznikov

In [1] are given analysis of the conditions for the applicability of mathematics formulated by Kolmogorov in his book "The Main Concepts of Probability Theory". He introduces two postulates to explicate the connection between mathematics and the world of experience:

A. If, with a large number of repetitions of the set of conditions (n), the event under study (A) takes place m times, the frequency of $\frac{m}{n}$ will be close to the probability of $P(A)$ of event A.

B. During an one-time experiment a low-probability event will not occur. It is the so-called Cournot's principle.

A is inferred from B on the basis of the Theorem of the Law of Large Numbers [1]. However, condition B is inadequate to Mises's requirement about the impossibility of singular probabilities [2]. Besides, the theorem is inadequate for practical use, so requirement A is not redundant [1].

Under the statistical interpretation of postulates a number of problems disappear: the problem of differences in the requirements for the convergence of frequencies; the problem of data choice adequate to the principle of impossibility of the game system; the problem of dependency of postulates, (as the Theorem of the Law of Large Number is inapplicable in statistics,) and the problem of non-acceptance of Cournot's principle.

This research was supported by Integration Project N 47.

References

[1] Shafer G., Vovk V. The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. Statistical science, 21 (2006), N. 1, 70–98.

[2] Reznikov V. M. Probabilistic concepts: analysis of foundations and applications, 2005 [in Russian].

Institute of Philosophy and Law SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: rvm@philosophy.nsc.ru

VIII. Секция «Неклассические логики и теория доказательств»

Устойчивость формульных предикатов при морфизмах некоторых обобщений многоосновных алгебраических систем с приложениями в динамике систем

С. Н. Васильев, Н. В. Нагул

Вводится понятие обобщенной шкалы ступеней (ОШС), порождаемых по разным схемам на базе конечного набора основных множеств (носителей, как базисных ступеней), операциями декартового произведения и булеана (как у Н. Бурбаки), а также операцией образования всех счетных последовательностей элементов некоторого множества. На ступенях ОШС определяются функции и отношения так называемой обобщенной многоосновной алгебраической системы конечного типа (ОМАСК). В приложениях такое расширение сигнатуры языка с этой интерпретацией обеспечивает, например, естественное представление динамических систем с дискретным временем.

Для пары ОМАСК одного типа, выделенной схемы образования ступени и соответствующих ей ступеней этих систем рассматриваются отображения носителей одной системы в носители второй (основные отображения) и вводится каноническое распространение этих отображений (КРО) на рассматриваемую ступень первой системы со значениями в соответствующей ступени второй системы. В терминах КРО (в том числе основных отображений) вводятся аналоги известных морфизмов классических и обычных многоосновных алгебраических систем. В обобщение известных результатов о сохранении (устойчивости) некоторых свойств алгебраических систем при морфизмах, разработан метод формирования условий сохранения истинности рассматриваемого формульного предиката (в сигнатуре ОМАСК), накладываемых на КРО.

К той или иной форме ОМАСК, с учетом вида изучаемых динамических свойств, сводимы дискретно-событийные системы (ДСС), интенсивно исследуемые в настоящее время в динамике систем и математической теории управления. Получены критерии сохранения некоторых динамических свойств относительно морфизмов ДСС. В частности, изучены свойства типа достижимости целевого множества при фазовых ограничениях и инвариантности множеств относительно ДСС. С существенным использованием ОШС выполнено представление в форме ОМАСК известной в виде ДСС модели сети железнодорожного транспорта и изучено свойство стабилизируемости реального графика движения транспорта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума РАН (программа «Математическая теория управления»), СО РАН (интеграционный проект №45) и РФФИ (проект 08-08-90026-Бел-а).

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: snv@ipu.ru
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
E-mail: sapling@icc.ru

О стратегиях поиска вывода в исчислении позитивно-образованных формул с функциональными символами

А. В. Давыдов, А. А. Ларионов

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с автоматическим поиском логического вывода в исчислении позитивно-образованных формул (ПО-формул) с функциональными символами — $\boldsymbol{JF}$. Рассматриваемое исчисление является расширением исчисления $\boldsymbol{J}$, разработанного в ИДСТУ СО РАН Васильевым С. Н. и Жерловым А. К. [1], которое получается с помощью введения в язык функциональных символов. Язык исчисления $\boldsymbol{JF}$ — полный язык первого порядка, формулы которого представляются как деревья: каждый узел суть позитивный квантор $\forall\bar{x}\colon A(\bar{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} \forall\bar{x}\,(A(\bar{x}) \to \ldots)$ или $\exists\bar{x}\colon A(\bar{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} \exists\bar{x}\,(A(\bar{x})\ \&\ \ldots)$ с условием на кванторную переменную в виде конъюнкции атомов (или тождественно истинного предиката $\boldsymbol{True}$), а вдоль ветвей дерева структуры формулы типовые кванторы всеобщности и существования чередуются. В расширенном исчислении возникает ряд трудностей при автоматическом построении логического вывода. Несмотря на то, что исчисление $\boldsymbol{JF}$ является полным, применение единственного правила вывода исчисления к некоторой ПО-формуле A требует поиска подстановок, вообще говоря, содержащих элементы эрбрановского универсума, соответствующего формуле A. Таким образом, поиск вывода напрямую связан с перебором эрбрановского универсума, что является весьма неэффективным.

Для устранения указанных трудностей предлагается новый способ поиска подстановок для применения правила вывода, а также стратегии поиска логического вывода, обобщающие существующие для исчисления $\boldsymbol{J}$. Предложенные стратегии являются полными и позволяют избежать использование напрямую эрбрановского универсума для поиска вывода.

Рассматривается программная система, реализующая новые подходы для поиска выводов в исчислении $\boldsymbol{JF}$. Приводятся результаты компьютерных экспериментов на основе задач из библиотеки TPTP (Thousands problems for theorem provers) [2] и сравнение с существующими лидирующими программными системами для автоматического доказательства теорем.

Работа выполнена при поддержке совместного интеграционного проекта № 45 СО РАН.

Список литературы

[1] Васильев С. Н., Жерлов А. К., Федосов Е. А., Федунов Б. Е. Интеллектное управление динамическими системами. М.: Физматлит, 2000.

[2] Sutcliffe G. The TPTP Problem Library and Associated Infrastructure. The FOF and CNF Parts, v3.5.0. Journal of Automated Reasoning, 2009, to appear.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
E-mail: `artem@icc.ru`

Описание простых слабо транзитивных модальных алгебр

А. В. Карпенко

В настоящее время распространен алгебраический подход к исследованию модальных логик. В частности, исследуются простые, а также финитно неразложимые модальные алгебры. В [1] описаны простые транзитивые алгебры. Следуя [2], назовем модальную алгебру $\mathcal{A}$ *слабо транзитивной*, если $\boxdot x = x \& \Box x \leq \Box\Box x$. Слабо транзитивная $\mathcal{A}$ называется DL-*алгеброй* [3], если она удовлетворяет условию $x \leq \Box\Diamond x$.

Через V_n^m обозначим конечную модальную алгебру с $(n+m)$ атомами $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ такими, что для любого атома x

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & x = a_i \quad \text{для некоторого } 1 \leq i \leq n; \\ \neg x, & x = b_j \quad \text{для некоторого } 1 \leq j \leq m; \end{cases}$$

Получен критерий простоты слабо транзитивных модальных алгебр:

Теорема 1. *Слабо транзитивная алгебра $\mathcal{A}$ является простой тогда и только тогда, когда выполнено*

$$x \& \Box x = \boxdot x = \begin{cases} 1, \text{ при } x = 1; \\ 0, \text{ при } x \neq 1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Любая конечно порожденная финитно неразложимая DL-алгебра является простой и изоморфной алгебре V_n^m для подходящих $n + m \geq 0$.*

Получено описание структуры вложений для алгебр V_n^m. Для конечных простых DL-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пишем $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ если и только если $\mathcal{A}$ изоморфно вложима в $\mathcal{B}$.

Теорема 3. *Отношение $\preccurlyeq$ является рефлексивным и транзитивным замыканием отношения*

$$V_n^m \prec V_{n+1}^m, V_n^m \prec V_n^{m+1}, V_n^m \prec V_{n-1}^{m+2},$$

для $m \geq 0, n \geq 1$.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00090а).

Список литературы

[1] Карпенко А. В. Слабое интерполяционное свойство в расширениях логик $S4$ и $K4$. Алгебра и логика, 47 (2008), 705–722.

[2] Эсакиа Л. Л. Слабая транзитивность — реституция. Логические исследования. Выпуск 8, Москва: Наука, 2001.

[3] de Rijke M. The Modal logic of inequality. The Journal of Symbol Logic, 57 (1992), no. 2, 566–584.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: karpenko@post.nsu.ru

Об экстремальных значениях одного параметра для максимальных шпернеровых семейств (м.ш.с.) типа $(k, k+1)$.

Б. С. Кочкарев

Рассматриваются м.ш.с. подмножеств типа $(k, k+1)$, $k \neq 0$, $k \neq n-1$, конечного n-элементного множества $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ [1, 2]. Если F м.ш.с. указанного вида, то обозначим через $r_i = p_i + q_i$, где p_i — число подмножеств $A \in F$ таких, что $|A| = k$ и $a_i \notin A$, а q_i — число подмножеств $B \in F$ таких, что $|B| = k+1$ и $a_i \in B$. Обозначим также $r = \max\limits_{1 \leq i \leq n} r_i$ и $r' = \min\limits_{1 \leq i \leq n} r_i$.

Теорема. *Для всех м.ш.с., кроме двух,* $r' \leq \binom{n-1}{k} - 2$.

Теорема. *Для того, чтобы* $r < \binom{n-1}{k}$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $i = \overline{1, n}$ *существовало множество* A *такое, что* $|A| = k$, $a_i \notin A$ *и ни* A *ни* $A \bigcup \{a_i\}$ *не принадлежат* F.

Теорема. *Только для* $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ *при* $n \geq 6$ *существуют м.ш.с. типа* $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ *такие, что* $r < \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$.

Теорема. *Почти все м.ш.с. удовлетворяют условию* $r = \binom{n-1}{k}$.

Следствие. *Число м.ш.с. типа* $(k, k+1)$ *(обозначим* $g(n, k)$*), удовлетворяет неравенствам*

$$2^{\binom{n-1}{k}} < g(n, k) < n \cdot 2^{\binom{n-1}{k}}.$$

Список литературы

[1] Кочкарев Б. С. Структурные свойства одного класса максимальных шпернеровых семейств подмножеств. Известия вузов. Математика, 2005, № 7, 37–42.

[2] Kochkarev B. S. Admissible Values of One Parameter for Maximal Sperner Families of Subsets of The Type $(k, k+1)$. Известия вузов. Математика, 2008, № 6, 25–28.

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань
E-mail: bkochkarev@rambler.ru

Секвенциальные формы теорем эрбрановского типа для классических и интуиционистских модальных логик

А. В. Лялецкий

В своей работе [1] Ж. Эрбран предложил три формы (A, B и C) редукционной теоремы, носящей его имя, относящейся к классической логике и сводящей установление выводимости (общезначимости) формулы F в логике первого порядка к установлению выводимости (истинности) бескванторной формулы (строимой по F), но только средствами классической пропозициональной логики. Формы B и C требуют проведения скулемизации, в то время как A не использует ее. Поскольку скулемизация не является корректной операцией для многих логик, в частности, для интуиционистской логики, для них отсутствует возможность получения аналогов форм B и C даже в чисто интуиционистском случае. Поэтому в ряде работ автора были использованы понятия допустимости (admissibility) и совместимости (compatibility), которые привели к редукционным теоремам эрбрановского типа по выводимости для классической и интуиционистской секвенциальных логик, не требующим скулемизации и отличным от A (см., например, [2]).

Предложенный в [2] подход распространяется здесь на случай определенных классических и интуиционистских *модальных секвенциальных исчислений* без правила сечения, обладающих свойством подформульности и использующих аналоги эрбрановского универсума $QH(F)$ и эрбрановского расширения $HE(F)$ для формулы F при проведении редукции. (Рассматриваемые модальные исчисления можно получить, например, из исчислений **LK** и **LJ** без сечения [3] добавлением к ним необходимых секвенциальных модальных правил **Mod**.)

Теорема. *Для замкнутой формулы F, секвенция $\to F$ выводима в* **LJ+Mod** *(***LK+Mod***) тогда и только тогда, когда существуют $HE(F)$ и подстановка σ термов из $QH(HE(F))$ вместо всех отрицательных переменных из $HE(F)$, такие, что (1), (2) и (3) ((1) и (2)) имеют место:*

(1) можно построить дерево вывода Tr для секвенции $\to \mu(HE(F)) \cdot \sigma$ в пропозициональном фрагменте исчисления **LJ+Mod** *(***LK+Mod***), где $\mu(HE(F))$ – результат опускания всех кванторов в $HE(F)$ и $\mu(HE(F)) \cdot \sigma$ – результат умножения $\mu(HE(F))$ на σ;*

(2) σ является допустимой подстановкой для $HE(F)$;

(3) дерево Tr является совместимым с σ.

Список литературы

[1] Herbrand J. Recherches sur la theorie de la demonstration. Travaux de la Societe des Sciences et de Lettres de Varsovie, Class III, Sci. Math. et Phys., 33 (1930).

[2] Lyaletski A. Herbrand theorems: the classical and intuitionistic cases. Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, 14(27) (2008), 101–122.

[3] Gentzen G. Untersuchungen uber das Logische Schliessen. Math. Z., 39 (1934), 176–210.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев
E-mail: forlav@mail.ru

Модели логических систем продукционного типа, основанные на решетках

С. Д. Махортов

Алгебраическая логика представляет эффективный аппарат для моделирования логических систем. Однако в силу универсальности она оказывается недостаточно полезной в решении ряда важных задач, связанных с широко применяемыми на практике системами продукционного типа. К задачам такого рода относятся вопросы об эквивалентности, эквивалентных преобразованиях, верификации продукционных и подобных им систем, которые рассматриваются в ряде работ и решаются частными методами. Особое место здесь занимает задача минимизации. В общей математической логике минимальная система аксиом называется базисом. Вопросы существования базисов допустимых правил для широкого спектра логик рассматривались В. В. Рыбаковым и его последователями. Однако продукционные системы имеют особенности, предоставляющие дополнительные возможности в плане минимизации.

В докладе рассматривается класс алгебраических структур, на основе решеток адекватно моделирующих свойства продукционно-логических систем. Основная идея состоит в моделировании связей (совокупности правил) дополнительным бинарным отношением с заданными свойствами. При этом определяющее решетку исходное отношение частичного порядка отражает универсальные тавтологии и является фиксированным. Второе отношение порождается логическими связями конкретной предметной области и может подвергаться эквивалентным преобразованиям.

В каждой из предложенных моделей доказана теорема о существовании продукционно-логического замыкания бинарного отношения, что позволяет ввести понятие эквивалентного отношения. Доказаны теоремы о возможностях локально-эквивалентных преобразований исходного отношения. Эти результаты обосновывают формальные преобразования знаний продукционного типа. Доказаны теоремы о существовании логической редукции и указаны способы ее построения, что позволяет формулировать и успешно решать задачи автоматической оптимизации формальных знаний. Введено новое понятие продукционно-логического уравнения и обоснован метод его решения, что в применении к продукционным системам соответствует полному обратному выводу с минимизацией медленных запросов.

Воронежский госуниверситет, Воронеж
E-mail: `sd@expert.vrn.ru`

Глобально допустимые правила WCP логик.

В. В. Римацкий

Говорим, что правило r *глобально допустимо в логике* $\mathcal{L}$, если r допустимо во всех фининто аппроксимируемых логиках, расширяющих логику $\mathcal{L}$. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется *базисом глобально допустимых правил логики* $\mathcal{L}$, если (i) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в $\mathcal{L}$; (ii) любое глобально допустимое в $\mathcal{L}$ правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих $\mathcal{L}$.

Говорим, что финитно аппроксимируемая логика $\mathcal{L}$, расширяющая логику $S4$, имеет *слабое свойство ко-накрытий*, если для любого конечного корневого $\mathcal{L}$-фрейма $\mathcal{F}$ и произвольной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F}$, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup_{c\in\mathcal{X}^R} c^R$, также является $\mathcal{L}$-фреймом. Логики, обладающие этим свойством будем далее называть *WCP-логиками.*

Теорема. *Правило вывода r допустимо во всех финитно аппроксимируемых WCP-логиках, расширяющих $S4$, тогда и только тогда, когда r допустимо во всех табличных WCP-логиках, расширяющих $S4$.*

Для всех чисел $n > 1,\ 1 \le i, j \le n;\ n \in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1\le i\le n} \Diamond\pi_i; A_{n,1} := \Box\Big[\bigwedge_{1\le i\le n} (p_i \to \neg\Diamond q)\Big];$$
$$B := q \vee \neg\Diamond q.$$

Определим также последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_1 := \frac{\Diamond p \wedge \Diamond\neg p}{p \wedge \neg p}; \qquad \mathcal{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)}{\Box\neg A_n};\ n = 2, 3, \ldots.$$

Теорема. *Множество правил $\{\mathcal{R}_n, n \in N\}$, образует базис правил вывода, допустимых во всех финитно аппроксимируемых WCP-логиках над $S4$.*

Множество $\mathcal{R}$ правил вывода в языке логики $\mathcal{L}$ будем называть **квазибазисом для допустимых в $\mathcal{L}$ правил вывода**, если любое допустимое в логике $\mathcal{L}$ правило вывода выводится из данного набора правил $\mathcal{R}$.

Теорема. *Множество правил $\{\mathcal{R}_n,\ n \in N\}$, образует квазибазис правил вывода, допустимых во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих $S4$.*

Теорема. *Проблема глобальной допустимости произвольного правила r в $S4$ (финитно аппроксимируемой логике L_0, $S4 \subseteq L_0$) разрешима.*

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск
E-mail: `Gemmeny@rambler.ru`

К вопросу непротиворечивости семантического вероятностного предсказания

С. О. Смердов

Сначала определим вероятность на множестве основных предложений в соответствии с [1] (как распределение на подмножествах класса моделей 1-ого порядка $\mathfrak{G}$). Далее позволим литералам (не только атомам) участвовать в классических объектах логического программирования: правилах, фактах и запросах; здесь вероятности основных экземпляров правил определены как условные.

$$\mathtt{Rule}^{\mu}_{\mathrm{L}} \rightleftharpoons \{\mathrm{C} \in \mathtt{Rule}_{\mathrm{L}} \mid \text{ для некоторой основной } \theta \text{ вероятность } \mathrm{C}\theta \text{ определена}\};$$
$$\underline{\mu}\,(\mathrm{C}) \rightleftharpoons \inf\left\{\mu\,(\mathrm{C}\theta) \mid \theta \text{ суть основная подстановка и } \mathrm{C}\theta \in \mathtt{Rule}^{\mu}_{\mathrm{L}}\right\}, \text{ где } \mathrm{C} \in \mathtt{Rule}^{\mu}_{\mathrm{L}}.$$

Пусть $\mathtt{Data}\,(\mathfrak{B})$ — множество актуальных фактов исследуемой модели 1-го порядка $\mathfrak{B}$. Отношение $\mathrm{C}_1 \succ \mathrm{C}_2$ ("*быть более общим*") между $\mathrm{C}_1 = (\mathrm{A}_1 \Leftarrow \mathrm{B}_1, ..., \mathrm{B}_n)$ и $\mathrm{C}_2 = (\mathrm{A}_2 \Leftarrow \mathrm{D}_1, ..., \mathrm{D}_m)$ в $\mathtt{Rule}^{\mu}_{\mathrm{L}}$ имеет место в том лишь случае, когда существует такая подстановка θ, что $\{\mathrm{B}_1\theta, ..., \mathrm{B}_n\theta\} \subseteq \{\mathrm{D}_1, ..., \mathrm{D}_m\}$, $\mathrm{A}_1\theta = \mathrm{A}_2$ и C_1 не является вариантом C_2. Правила из $\mathtt{Rule}^{\mu}_{\mathrm{L}}$, которые нельзя обобщить без потери в величине условной вероятности $\underline{\mu}\,(\cdot)$, называются *μ-законами*; образуемое ими множество обозначим $\mathtt{GLaw}^{\mu}_{\mathrm{L}}$. Для всякого основного литерала H в результате *семантического μ-предсказания* мы получаем *наилучший μ-закон*, если семантическое μ-предсказание H определено (все необходимые определения являют собой естественное расширение представленных в [2]). Каждому наилучшему правилу $\mathrm{C} = \mathrm{A} \Leftarrow \mathrm{B}_1, ..., \mathrm{B}_n$, использованному в предсказании некоторого H, сопоставим все такие основные экземпляры $\mathrm{C}\theta$, что $\{\mathrm{B}_1\theta, ..., \mathrm{B}_n\theta\} \subseteq \mathtt{Data}\,(\mathfrak{B})$, $\mathrm{A}\theta = \mathrm{H}$ и $\{\mathrm{B}_1\theta, ..., \mathrm{B}_n\theta\}$ μ-совместно (набор литералов S назовём *μ-совместным*, если вероятностная мера моделей, на которых он реализуется, отлична от нуля); совокупность описанных $\mathrm{C}\theta$ (пробегая по всем литералам H) обозначим $\mathtt{Prdct}^{\mu,0}_{\mathrm{L}}$.

Теорема 1. *Пусть некоторый основной атом H μ-предсказывается основным экземпляром $\mathrm{C}_{pos} \in \mathtt{Prdct}^{\mu,0}_{\mathrm{L}}$ правила $\mathrm{C}_1 \in \mathtt{GLaw}^{\mu}_{\mathrm{L}}$ ($\mathrm{C}_{pos} = \mathrm{C}_1\theta_{pos}$), в то время как его отрицание $\neg\mathrm{H}$ — с помощью C_{neg} ($\mathrm{C}_{neg} = \mathrm{C}_2\theta_{neg}$). Тогда множество литералов посылок C_{pos} и C_{neg} не μ-совместно.*

$$\Gamma_{\mathfrak{B}} = \left\{\mathrm{B}_1 \wedge ... \wedge \mathrm{B}_n \to \mathrm{A} \mid \mathrm{A} \Leftarrow \mathrm{B}_1 \wedge ... \wedge \mathrm{B}_n \in \mathtt{Prdct}^{\mu,0}_{\mathrm{L}}\right\} \cup \{\mathrm{A} \mid (\mathrm{A} \Leftarrow) \in \mathtt{Data}\,(\mathfrak{B})\}$$

Теорема 2. *Пусть множество $\mathtt{Data}\,(\mathfrak{B})$ μ-совместно. Тогда минимальная теория, содержащая $\Gamma_{\mathfrak{B}}$, логически непротиворечива.*

Список литературы

[1] Halpern J.Y. An Analysis of First-Order Logics of Probability. Artificial Intelligence, 46 (1990), 311–350.

[2] Vityaev E.E. The logic of prediction. Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (Novosibirsk, Russia), (S.S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, editors), Singapore: World Scientific, 2006, pp. 263–276.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: netid@ya.ru

Автоматическое распознавание проективного свойства Бета в позитивно аксиоматизируемых локально табличных расширениях минимальной логики

П. А. Шрайнер

Л. Л. Максимовой в [1] было доказано, что минимальная логика Йохансона J имеет в точности семь позитивно аксиоматизируемых расширений, обладающих проективным свойством Бета. Шесть из этих логик являются локально табличными. Получаем что для того, чтобы проверить, будет ли позитивная логика, полученная добавлением новой схемы аксиом к позитивному фрагменту минимальной логики J, локально табличной логикой с проективным свойством Бета, нам достаточно выяснить, будет ли она совпадать с одной из вышеупомянутых шести логик.

Введем обозначения: $Z_n = \{1, \dots n\}$ с естественным линейным порядком; $V_n = \{0, 1, \dots n\}$ где $0Rx$ для любого x и $\neg xRy$ для $1 \le x, y \le n$, $x \neq y$; $W_{I\times n} = \bigcup_{k=1}^{I} Z_{min(I,n)} \cup \{-1\}$ где $-1Rx$ для любого x; $Y_n = V_n \cup \{-1\}$ где $-1Rx$ для любого x.

Следующее предложение получается улучшением оценок, приведенных в работе [2].

Предложение. *Пусть $L = J^+ + \{A_1, \dots, A_k\}$, $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_k$, A не выводима в J^+, формула A содержит n переменных, r — общее количество вхождений «$\rightarrow$» в A и $I = max(1, r)$. Тогда L имеет PBP тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих условий:*

(1) *Формула A опровергается на Z_1.*
(2) *Формула A истинна на Z_1 и опровергается на Z_2.*
(3) *Формула A истинна на Z_{n+1} и опровергается на V_2.*
(4) *Формула A истинна на Z_2 и опровергается на Z_3 и V_2.*
(5) *Формула A истинна на $V_{min(2^n, I)}$ и опровергается на Z_3.*
(6) *Формула A истинна на $W_{I\times n}$ и опровергается на Y_2.*

Автором создана программа, реализующие вышеописанный алгоритм проверки проективного свойства Бета в позитивно аксиоматизируемых локально табличных расширениях минимальной логики Йохансона J.

Работа поддержана грантом РФФИ (номер гранта 09-01-00090-а).

Список литературы

[1] Максимова Л. Л. Неявная определимость и позитивные логики. Алгебра и логика, 42 (2003), N. 1, 65—93.

[2] Maksimova L. Complexity of some problems in positive and related calculi. Theoretical Computer Science, 303 (2003), 171—185.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: schr@ngs.ru

Временная логика линейных по времени шкал с аксиомой индукции

В. Ф. Юн

Модальная логика отличается большим разнообразием синтаксиса и семантики. Этим можно объяснить широкое применение модальных и временных логик, например, в информационных технологиях, теории искусственного интеллекта, математической лингвистике, и к изучению геометрических структур. Предметом нашего исследования является полимодальная логика, связанная с линейными временными моделями с моментами времени, которые являются кластерами состояний. Более точно, в [1] рассматриваются фреймы $\langle \bigcup_{i\in N} C(i),\ R\rangle$ с линейно упорядоченными R-кластерами состояний $C(i)$, и изучается логика таких фреймов в языке с временными модальными операторами $\Box^+$, $\Box^-$ и слабыми модальностями $\Box^+_w$, $\Box^-_w$. При задании логики посредством моделей важнейшими задачами являются выбор модального языка и проблема аксиоматизации данной логики.

Мы ввели дополнительное отношение R_1 между элементами соседних кластеров и рассмотрели более широкий класс фреймов вида $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$, которые назвали линейными по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймами. Поскольку слабые модальности не являются нормальными, то задача аксиоматизации существенно усложняется. Нами доказано, что если добавить к языку временные модальности $\Box^+_1$, $\Box^-_1$, то слабые модальности $\Box^+_w$ и $\Box^-_w$ выражаются через другие. Поэтому при аксиоматизации класса линейных по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймов естественно выбрать временной язык с четырьмя модальностями $\Box^+$, $\Box^-$ и $\Box^+_1$, $\Box^-_1$.

В этом языке построено исчисление **LInd**, содержащее аксиому индукции, полное относительно линейных по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймов. Доказано, что оно финитно аппроксимируемо и, следовательно, является разрешимым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00090-а) и при поддержке гранта АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

Список литературы

[1] Rybakov V. Discrete linear temporal logic with current time point clusters, deciding algorithms. Logic Log. Philos., 17 (2008), N. 1–2, 143–161.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: veta_v@mail.ru

Новые константы в логике Даммета

А. Д. Яшин

Пусть Fm — множество формул пропозиционального языка со стандартными связками $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$ и константами 0 и 1. Суперинтуиционистской логикой называется произвольное подмножество $L \subset Fm$, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки. Например, *логикой Даммета* называется суперинтуиционистская логика, полученная добавлением к Int схемы аксиом $(A \to B) \vee (B \to A)$. Характеристическим для логики Даммета является, в частности, класс конечных линейно упорядоченных шкал (цепей).

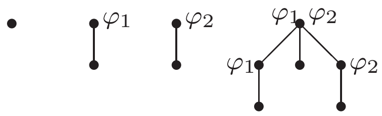
Добавим к пропозициональному языку конечный набор $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ логических констант. Расширенный класс формул обозначим через $Fm(\overline{\varphi})$. Формулы из Fm называются *чистыми.*

$\overline{\varphi}$-Логикой называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки. $\overline{\varphi}$-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* логики L, если $L \subset \mathcal{L}$ и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$. $\overline{\varphi}$-Логика $\mathcal{L}$ называется *полным по П.С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\overline{\varphi})$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, $\overline{\varphi}$-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L. Под *проблемой Новикова для L* понимается описание класса всех полных расширений данной суперинтуиционистской логики в конкретном расширении языка, в рассматриваемом случае с новым набором логических констант.

Для описания полных расширений логики Даммета применяется понятие конечной цепи с наростом определенного типа. Под термином *нарост* понимается конечная $\overline{\varphi}$-цепь, в которой все точки имеют разные цвета. Под *цветом* точки понимается множество дополнительных констант, приписанных к этой точке. Такой нарост присоединяется "сверху" к произвольной конечной цепи, при этом цвет корня нароста дублируется на точки основы.

Теорема. *Семейство полных по Новикову расширений логики Даммета в языке с новыми константами конечно и находится во взаимно однозначном соответствии с множеством попарно неизоморфных наростов.*

Для описания наростов используется понятие *универсальной $\overline{\varphi}$-шкалы.* Например, для двух дополнительных констант она состоит из 4-х компонент и выглядит так:



Московский городской психолого-педагогический университет, Москва
E-mail: yashin_aleksandr@list.ru

Temporal logics based on Kripke structures with embedded local frames

S. Babenyshev, V. Rybakov

We introduce a method for studying propositional logics, that are semantically generated by temporal (with future and past modalities) Kripke structures with embedded local frames. The embedded frames have their own Kripke relations, possibly quite different from that of the parent temporal frame. The only restraining condition is that every embedded frame must reside inside a temporal cluster. We show, that whenever original Kripke structures satisfy constraints of certain modal logics, then the resulting logic retains the effective finite model property and decidability of the constituents. Furthermore, this method allows to add to the language some additional operations (not necessarily Kripke modalities), able to express higher-level properties of the underlying models, while still preserving the decidability of the resulting logic. This paper capitalizes on the previous research of one of the authors [1–5]. The generalization obtained has required a significant technical refining of the original approach.

This research is supported by Engineering and Physical Sciences Research Council, U.K. (EP/F014406/1).

References

[1] Rybakov V. In: Linear Temporal Logic with Until and Before on Integer Numbers, Deciding Algorithms. Volume 3967 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2006, 322–334.

[2] Rybakov V. Logical consecutions in discrete linear temporal logic. Journal of Symbolic Logic, 70(4) (2005), 1137–1149.

[3] Rybakov V. Logical consecutions in intransitive temporal linear logic of finite intervals. Journal of Logic Computation, 15(5) (2005), 633–657.

[4] Rybakov V. Since-until temporal logic based on parallel time with common past. In: Logical Foundation of Computer Science. Volume 4514 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, New York, USA, 2007, 486–497.

[5] Rybakov V. Logic of discovery in uncertain situations—deciding algorithms. In: KES 2007. Volume 4694 of LNAI., Vetri sul Mare, Italy, 2007, 950–968.

[6] Rybakov V. A criterion for admissibility of rules in the modal system S4 and the intuitionistic logic. Algebra and Logica, 23(5) (1984), 369–384.

Institute of Mathematics, Siberian Federal University, 79 Svobodny Prospect, Krasnoyarsk, 660041, Russia
E-mail: Sergey.Babenyshev@gmail.com
Department of Computing and Mathematics, Manchester Metropolitan University, John Dalton Building, Chester Street, Manchester M1 5GD, U.K.
E-mail: V.Rybakov@mmu.ac.uk

Decidability of logic N*

S. A. Drobyshevich

Logic N* is an extension of logic N, suggested by Dosen [1] to study negations weaker then that of Johansson's minimal logic. N is defined in the language $\mathcal{L} := \{\wedge, \vee, \to, \neg\}$, where $\to$ is an intuitionistic implication and $\neg$ is interpreted as a modal operator of impossibility. The axiom schemata contains the axioms of positive logic together with the axiom

$$\neg p \wedge \neg q \to \neg(p \vee q)$$

The rules of inference are modus ponens and the contraposition rule for negation.

Definition. $\mathcal{W} = \langle W, \leq, R, \rangle$ is an N-*frame* if: (i) W is a non-empty set; (ii) $\leq$ is a partial ordering on W; (iii) $R \subseteq W^2$ is an accessibility relation for negation verifying $\leq R \subseteq R$.
An N-model is an N-frame together with a valuation satisfying the intuitionistic heredity.

Logic N* was first suggested as a logical framework for investigation of well founded semantics [2] and it is obtained from N by adding the following axioms:

$$\neg(p \to p) \to q \quad \neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$$

New axioms allow to define Routley style semantics for N*. Routley frame is $\mathcal{W} = \langle W, \leq, * \rangle$ where W, $\leq$ are defined as above and $*$ is anti-monotonic function on W. Routley model is a Routley frame together with a valuation as for N-models. The new definition for negation is

$$x \models \neg\phi \iff x^* \not\models \phi$$

Logic N* is complete with respect to the class of Routley frames. Using Routley style semantics we then prove

Theorem. *Logic N* has a finite model property.*

We obtain this result by constructing a hybrid tableau calculus based on the tableau calculus suggested in [3]. From this theorem we infer in a standard way

Corollary. *Logic N* is decidable.*

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project RFBR-09-01-00090-a.

References

[1] Dosen K. Negation as a modal operator. Reports on Mathematical Logic, 20 (1986), 15–28.
[2] Cabalar P., Odintsov S. P., Pearce D. Logical Foundations of Well-Founded Semantics. In: P. Doherty et al. (eds.) Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 10th International Conference (KR2006), AAAI Press, Menlo Park, California, 2006, 25–36.
[3] Odintsov S. P., Wansing H. Inconsistency-tolerant description logic. Part II: A tableau algorithm for $\mathcal{CALC}^c$. Journal of Applied Logic 6 (2008), 343–360.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: `2searcher@inbox.ru`

Comparison of complexities of logical inferences in Hilbert-type system with complexities of inferences in Martin—Löf's theory of small types

G. Marikyan

In [1] and [2] Per Martin-Löf has introduced his Intuitionistic Type Theory (hereafter $MLTT$). To characterize a theory it is important to evaluate complexity of its logical inferences. For this purpose I compare complexity of inferences in a well-known formal system with complexity of inferences in Martin-Löf's Theory of Small Types [2] (hereafter $MLTT_0$).

For comparison I have chosen the Hilbert-type system (hereafter H) defined in [3]. Both H and $MLTT_0$ are formalizations of arithmetic, that is why it is an interesting problem to compare the complexity of logical inferences in these two formal systems.

In order to compare complexities of inferences I build three methods of complexity measurements universal for both systems, and I use them to compare the complexities of logical inferences in them.

L-complexity of an inference is the number of axioms and rules of inference in it.

D-complexity of an inference in $MLTT_0$ is the total number of symbols of all assumptions and expressions in the inference, plus number of separating symbol ";" in it.

D_1-complexity of an inference in H and in $MLTT_0$ is the total number of symbols of all expressions in the inference, plus the number of separating symbol ";" in it.

Theorem. $S_L^{H,MLTT_0}(n) \leq 10n$.

Theorem. $S_D^{H,MLTT_0}(n) \leq 28n$.

Theorem. $S_{D_1}^{MLTT_0,H}(n) > 4n$.

Theorem. $S_L^{MLTT_0,H}(n) > 5n$.

References

[1] Martin-Löf P. Constructive mathematics and computer programming. Sixth International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Amsterdam: North–Holland, 1982, 153–175.

[2] Martin-Löf P. An Intuitionistic Theory of Types: Predicative Part. Logic Colloquium '73, H. E. Rose and J. C. Shepherdson. Amsterdam: North–Holland, 1973, 73–118.

[3] Kleene S. C. Mathematical Logic. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1967.

State University of New York Empire State College, New York (U.S.A.)
E-mail: `Gohar.Marikyan@esc.edu`

On Topological Presentation of Nelson Lattices

S. P. Odintsov

Priestley duality for **N3**-lattices modelling explosive Nelson's logic **N3** was developed independently by R. Signoli [1] and A. Sendlewski [4]. The algebraic semantics for paraconsistent Nelson's logic was only recently developed by the author of this abstract, see [3]. This allows to pose a question on Priestley duality for algebraic models of paraconsistent Nelson's logic. Here we suggest a Priestley duality for $\mathbf{N4}^{\perp}$-lattices [3] modelling a version $\mathbf{N4}^{\perp}$ of paraconsistent Nelson's logic with additional intuitionistic negation, i.e. we construct a category of ordered topological spaces dually equivalent to the category .texNELS of $\mathbf{N4}^{\perp}$-lattices and their homomorphisms.

Let $\mathrm{X} = (X, X^1, \leq, \tau, g)$ be a tuple, where X is a set, $X^1 \subseteq X$, $\leq$ a partial order on X, $g : X \to X$, and τ is a topology on X. Put

$$X^2 := g(X^1),\ X^+ := \{x \in X \mid x \leq g(x)\},\ X^- := \{x \in X \mid g(x) \leq x\}.$$

The structure X is said to be a *Nelson space* if the following conditions are satisfied:

(1) $(X, \leq, \tau, g)$ is a De Morgan space, i.e., $(X, \leq, \tau)$ is a Priestley space [2] and g is an order-reversing homeomorphism such that $g^2 = id_X$;

(2) X^1 is closed in τ, $X = X^1 \cup X^2$, and $X^1 \cap X^2 = X^+ \cap X^-$;

(3) $(X^1, \leq\restriction_{X^1}, \tau\restriction_{X^1})$ is a Heyting space, i.e., $(U] = \{y \mid y \leq x \text{ for some } x \in U\}$ is open for any set U open in X^1;

(4) for any $x \in X^1$ and $y \in X^2$, if $x \leq y$, then $x \in X^+$, $y \in X^-$, and there exists $z \in X$ such that $x, g(y) \leq z \leq g(x), y$;

(5) for any $x \in X^2$ and $x \in X^1$, if $x \leq y$, then $x \in X^+$, $y \in X^-$, and $x \leq g(y)$.

For Nelson spaces $\mathrm{X} = (X, X^1, \leq, \tau, g)$ and $\mathrm{Y} = (Y, Y^1, \leq', \tau', g')$, a mapping $f : X \to Y$ is said to be a *Nelson function* if 1) $f : (X \leq, \tau, g) \to (Y, \leq', \tau', g')$ is a De Morgan function, i.e., an order preserving continuous mapping such that $f \circ g = g' \circ f$; 2) $f(X^1) \subseteq Y^1$; 3) $f\restriction_{X^1}$ is a Heyting function, i.e., for any U open in τ', $f^{-1}((U \cap Y^1]) \cap X^1 = (f^{-1}(U \cap Y^1)] \cap X^1$.

Denote by NELS* the category of Nelson spaces and Nelson functions.

Theorem. *The categories* NELS *and* NELS* *are dually equivalent.*

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project RFBR-09-01-00090-a.

References

[1] Cignoli R. The class of Kleene algebras satisfying interpolation preperty and Nelson algebras. Algebra Universalis 23, 1986, 262–292.

[2] Davey B., Priestley H. Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[3] Odintsov S. P. Constructive Negations and Paraconsistency, Springer, Dordrecht, 2008.

[4] Sendlewski A. Nelson algebras through Heyting ones. Studia Logica 49, 1990, 106-126.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: odintsov@math.nsc.ru

Tableau-like automata-based axiomatization for fix-point propositional modal calculus

N. V. Shilov

We develop sound and complete *experimental* tableau-like axiomatization for the propositional μ-Calculus of D. Kozen (μC) [1]. This axiomatization is automata decision procedure augmented by model checking deciding automata as a finite model. A deduction strategy within the axiomatization consists of a number of stages. These stages are sketched below along with outlines of the approach.

First we introduce the rewriting rules that eliminate negations outside literals. The rules preserve tautologies and lead to a so-called simple formulae. Then we study a special class of automata on infinite words. An automaton in this class accepts an infinite word as soon as it enters any accepting control state. A (fairness) constraint is a set of input symbols. An infinite word meets the constraint iff all specified symbols occur finite number of times at most. The halting (termination) problem with the constraint consists in checking whether an automaton accepts all infinite words that meet the constraint (if it is the case than we say that the automaton totally accept the constraint). We prove that the problem is decidable. We do believe that automata-theoretic approach to decidability can exploit different variants of automata, not necessary well-known (i.e. Büchi or Rabin) automata.

At the next step we translate simple formulae of μC into automata with fairness constraint. Control states of the automata are finite sets of formulae. The main property of this translation follows: a formula is a tautology iff the automaton totally accepts the constraint. After that we consider automata as finite labeled transition systems (i.e. Kripke structures) for μC, and encode the halting problem with constrains by a particular formula of μC. An automaton totally accepts a constraint iff the formula holds in some initial state of the corresponding model. In simple words: we interpret halting problem with fairness constraint as the local model checking problem for some fixed formula of the propositional μ-Calculus.

Finally we adopt sound and complete tableau designed for local model checking for the μC in finite models [2] and convert it into a tableau-like axiomatization for the propositional μ-Calculus of D. Kozen.

References

[1] Kozen D. Results on the Propositional Mu-Calculus. Theoretical Computer Science, 27 (1983), 333–354.

[2] Cleaveland R. Tableau-based model checking in the propositional mu-calculus. Acta Informatica, 27(1990), 725–747.

A. P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia
E-mail: `shilov@iis.nsk.su`

IX. Секция «Логические аспекты программирования»

Вычислимая логическая спецификация параллельных систем

В. Н. Глушкова

Семантика асинхронных параллельных программ представляется логической спецификацией из Δ_0-формул [1] с ограниченными кванторами всеобщности. Формулы интерпретируются на дереве разбора программы, представленном списком, структуру которого отражает префикс формулы вида $(\forall x_1 \dot{\in} r_1)...(\forall x_n \dot{\in} r_n)$, $\dot{\in}$ — транзитивное замыкание отношения принадлежности списку. Для построения модели используются квазитождества $\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})$, где φ (ψ) конъюнкция атомных формул или их отрицаний вида p, $\tau_1 = \tau_2$ $(f = \tau)$; p, f — предикатный и функциональный символы τ, τ_1, τ_2 — термы.

Спецификация описывает поведение системы через изменение состояний ее переменных. Выделяются многосортные области интерпретации: Var — переменные, Ps – множество всех процессов, Op — операторы и т.д. Для описания последовательности исполнения операторов явно используется переменная сорта “дискретное время”; функция $Val : Ps \times Var \times N \to D$ задает значения переменных процесса в момент времени n в области D. Время является общим для всех процессов программы, а при интерпретации формул изменяется на 1 только одним процессом, поэтому для корректности определения функции и предикаты позитивно продолжаются по n. Для программ с конечным числом состояний можно построить модель Крипке $M = (S, S_0, R.L)$, S, S_0 — множества всех и начальных состояний; $R \subseteq S \times S$ — отношение переходов; $L : S \to 2^{AP}$ — функция, задающая для каждого состояния множество истинных атомных формул. Эта модель представляется графом, количество ”входных” вершин которого равно числу альтернативных начальных значений переменных. Узлы графа содержат помимо значений переменных метки активных операторов. Интерпретатор генерирует граф при реализации правила вывода ”modus ponens”. Из каждой вершины выходит число дуг равное количеству процессов. Дуги соответствуют переходу от времени n к $n + 1$. Новая вершина генерируется только в том случае, если при переходе получены новые значения переменных и меток активных операторов; иначе дуга проводится к старому узлу графа, содержащему эти значения. После завершения построения графа просмотром всех его вершин легко проверить свойство взаимного исключения, чтобы убедиться в корректном использовании разделяемых ресурсов.

Список литературы

[1] Goncharov S.S., Sviridenko D.I. Theoretical aspects of Σ-programming. Mathematical Methods of Specification and Synthesis of Software Systems’ 85. Proc. of the Internat. Spring School. Springer-Verlag, April, 1985.

ДГТУ, Ростов-на-Дону
E-mail: lar@rsu.ru; lar@aaanet.ru

О графах существенной зависимости правильных семейств функций

В. А. Носов, А. Е. Панкратьев

Семейство булевых функций $F = \{f_i\}_{i=1}^n$, $f_i = f_i(z_1, \ldots, z_n)$, называется *правильным* [1], если для произвольных несовпадающих наборов $z' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$ и $z'' = (z''_1, z''_2, \ldots, z''_n)$ найдётся индекс $\alpha \in \overline{1, n}$ такой, что

$$z'_\alpha \neq z''_\alpha \quad \text{и} \quad f_\alpha(z'_1, \ldots, z'_n) = f_\alpha(z''_1, \ldots, z''_n).$$

Напомним, что *графом существенной зависимости* [3] семейства функций $F = \{f_i\}_{i=1}^n$, $f_i = f_i(z_1, \ldots, z_n)$, называется ориентированный граф $G_F = (V, E)$ на множестве вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ такой, что $(i, j) \in E$ если и только если функция f_j существенно зависит от x_i.

Пусть C — ориентированный цикл в орграфе $G(V, E)$. *Стягиванием* цикла C назовём операцию перехода от графа $G(V, E)$ к графу $G^C(V^C, E^C)$, полученному удалением из графа $G(V, E)$ всех рёбер, входящих в цикл C, и отождествлением всех вершин, входящих в цикл C.

Теорема. *Пусть конечный ориентированный граф $G(V, E)$ без петель и кратных рёбер является правильным (реализуется в виде графа существенной зависимости некоторого правильного семейства функций). Тогда для любого простого неукорачиваемого цикла $C \in G$ граф G^C, полученный стягиванием цикла C, содержит кратные ребра.*

Теорема. *Пусть $G(V, E)$ — произвольный ориентированный граф без петель и кратных ребер на n вершинах $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Тогда существует правильный граф $G'(V', E')$ на $n' \leq n + \lceil \log_2 n \rceil$ вершинах $V' = \{1, 2, \ldots, n'\}$, такой, что его вершинный подграф на подмножестве $V \subseteq V'$ совпадает с G.

При этом для любого семейства функций $F = \{f_i\}_{i=1}^n$, реализующего исходный граф G, найдётся правильное семейство функций $F' = \{f'_i\}_{i=1}^{n'}$, реализующее граф G' и такое, что для каждого i, $1 \leq i \leq n$, существует набор значений аргументов $x_{n+1}, \ldots, x_{n'}$, при которых f'_i как функция от n аргументов $x_1, \ldots, x_n$ совпадает с f_i.

Список литературы

[1] Носов В. А. Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделённым входом. Интеллектуальные системы, 3 (1998), вып. 3–4, с. 269–280.

[2] Носов В. А., Панкратьев А. Е. Латинские квадраты над абелевыми группами. Фундаментальная и прикладная математика, 12 (2006), вып. 3, с. 65–71.

[3] Носов В. А., Панкратьев А. Е. О семействах функций, задающих латинские квадраты над абелевыми группами. Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник, 2(51) (2007), с. 141–144.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: vnosov40@mail.ru; anton.pankratiev@gmail.com

On varieties generated by algebras of relations

D. A. Bredikhin

A set of binary relations closed with respect to some collections of operations forms an algebra which is called an algebra of relations. Any algebra of relations can be considered as partial ordered by set-theoretical inclusion. Tarski was the first to treat algebras of relations from the point of view of universal algebra. Now, the theory of algebras of relations is an essential part of modern algebraic logic.

We shall concentrate our attention on the operations of relation product $\circ$, union $\cup$, and two unary operations Δ, ∇ defined as follows:

$$\Delta(\rho) = \{(x,x) : (\exists y,z)(y,z) \in \rho, \quad \nabla(\rho) = \{(x,x) : (\exists y)(y,y) \in \rho\}.$$

Note that $\nabla(\rho)$ is equal to the identical relation if ρ contains a fixed point, and $\nabla(\rho)$ is equal to the empty relation otherwise. For these reasons, the operation ∇ can be considered as the descriptor of fixed points.

In the investigation of algebras of relations, one of the most important problem is the study their properties that can be expressed by identities. It leads us to consideration of varieties generated by classes of algebras of relations.

For any set Ω of operations on relations, denote by $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) the class of algebras (partial ordered algebras) isomorphic to ones whose elements are binary relations and whose operations are members of Ω. Let $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) be the variety generated by $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Theorem 1. *An algebra $(A, \cdot, {}^*, {}^\bullet)$ of the type $(2,1,1)$ belongs to the variety $Var\{\circ, \Delta, \nabla\}$ if and only if it satisfies the identities:*

$(xy)z = x(yz)$,	(1)	$(x^*)^\bullet = x^*$,	(6)
$(x^*)^* = x^*$,	(2)	$(x^\bullet)^* = x^\bullet$,	(7)
$xy^* = y^*x$,	(3)	$(xy)^\bullet = (yx)^\bullet$,	(8)
$(xy^*)^* = x^*y^*$,	(4)	$(xy^\bullet)^\bullet = x^\bullet y^\bullet$,	(9)
$xx^* = x$,	(5)	$x^\bullet(x^p)^\bullet = x^\bullet$ *for any natural number* p.	(10)

Theorem 2. *A partial ordered algebra $(A, \cdot, {}^*, {}^\bullet, \leq)$ of the type $(2,1,1)$ belongs to the variety $Var\{\circ, \Delta, \nabla, \subset\}$ if and only if it satisfies the identities (1)–(10) and the identity $xy^* \leq x$.*

Theorem 3. *An algebra $(A, \cdot, +, {}^*, {}^\bullet)$ of the type $(2,2,1,1)$ belongs to the variety $Var\{\circ, \cup, \Delta, \nabla\}$ if and only if it satisfies the identities (1)–(10) and the identities*

$$(x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz,$$

$$x + xy^* = x, \quad (x+y)^* = x^* + y^*, \quad (x+y)^\bullet = x^\bullet + y^\bullet.$$

Theorem 4. *The varieties $Var\{\circ, \Delta, \nabla\}$, $Var\{\circ, \Delta, \nabla, \subset\}$, and $Var\{\circ, \cup, \Delta, \nabla\}$ are not finitely based.*

Department of Mathematics, Saratov State Technical University, Saratov, Russia
E-mail: bredikhin@mail.ru

X. Секция «Вычислимые модели, топологические пространства и анализ»

Графы корневых симплексов вещественных многочленов

А. В. Чехонадских

В связи с решением прикладных задач строится система n действительных координат для корней многочлена степени n с действительными коэффициентами. На множестве комплексных чисел задаётся предпорядок α, такой, что $\alpha \cup \alpha^{-1} = \mathrm{C}^2$, сужение α на множество действительных чисел оказывается обычным сравнением $\leq$, а фактор-система по отношению эквивалентности $\alpha \cap \alpha^{-1}$ совпадает с моделью $\langle \mathrm{R}, \leq \rangle$. Тогда становится возможным представить множество корней, действительных и комплексных, в виде конечной $\cap$-алгебры, снабжённой семейством *координатных функций*. При этом на пересечениях элементов имеется согласование координат. Области значений координатных функций образуют *корневой симплекс* в R^n, который близок к геометрическому комплексу, изучаемому в комбинаторной топологии.

Отношения n-мерных областей и их границ в корневом симплексе представляются неорграфом H_n. Для неорграфов последовательных порядков установлена рекуррентная связь.

Теорема 1. *$H_{n-1} \tilde{+} H_{n-2} \cong H_n$, где знак $\tilde{+}$ означает неполное соединение неорграфов, при котором разрез между частями H_{n-1} и H_{n-2} состоит из рёбер, соединяющих соответственные вершины (а) графа H_{n-2} и старшего предграфа $H'_{n-1} \cong H_{n-2}$, либо (б) изоморфных предграфов $(H'_n)'' \cong (H''_n)'$.*

Следствие. *С ростом степени многочлена мощность неорграфа H_n растёт как число Фибоначчи и асимптотически экспоненциально: $|H_n| \sim 1.618^n$.*

Отношения областей и границ всех размерностей от n до 1 представляются орграфом G_n. Вершины графа допускают матричную кодировку, позволяющую устанавливать смежность вершин и общие границы сегментов корневого симплекса. Отсюда вытекает оценка скорости роста.

Теорема 2. $|G_n| \sim 2.481^n$.

Быстрый рост мощности симплектических графов побуждает рассматривать сокращённую симплектическую структуру. Во многих примерах реализуются не все соотношения между корнями. Важное значение в задачах оптимизации расположения корней имеют только α-наибольшие корни и их точное равенство или α-равенство (соответственно, *правая* или *слабая* несепарабельность многочлена), за счёт чего становится возможным объединять по нескольку сегментов корневого симплекса. Для неорграфа H_n это приводит к удалению вершин или стягиванию рёбер, соответствующих незначимым границам. Сокращение орграфа G_n требует более сложной индуктивной процедуры.

Новосибирский государственный технический университет, кафедра АиМЛ, Новосибирск
E-mail: alcheh@ngs.ru

Lambek's invariants Ker and Im for commutative squares in quasi-Abelian categories

Ya. A. Kopylov

In [1], Lambek introduced two invariants Ker and Im for commutative squares in the category of groups and proved that if in the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & S & \downarrow & T & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array} \tag{$*$}$$

of groups and group homomorphisms the rows are exact then $\operatorname{Im} S = \operatorname{Ker} T$. Leicht and Nomura pointed out that this theorem holds for arbitrary Puppe-exact categories (see [2, 3]). Nomura also considered the case where the rows in (*) are semi-exact, constructed a morphism $\Lambda : \operatorname{Im} S \to \operatorname{Ker} T$ and some sequence including Λ. We aim at finding out if there are similar results for quasi-abelian categories.

Apart from all abelian categories, the class of quasi-abelian categories (which was first introduced by Yoneda in 1960 and then rediscovered several times) contains many non-abelian additive categories. The categories of (Hausdorff or all) topological abelian groups, torsion-free abelian groups, filtered abelian groups, topological vector spaces, Banach (or normed) spaces are typical examples of quasi-abelian categories. The main difference between the quasi-abelian and abelian categories is that the standard diagram lemmas hold in quasi-abelian categories under some extra conditions which usually amount to the strictness of these morphisms.

It turns out that the "inverse" to Nomura's morphism Λ always exists and Λ itself is defined if the vertical morphism $A \to A'$ is strict. We also study the exactness of Nomura's sequence when this morphism is a kernel (= strict monomorphism) or a cokernel (= strict epimorphism).

References

[1] Lambek J. Goursat's theorem and homological algebra. Can. Math. Bull., 7 (1964), 597–608.
[2] Leicht J. B. Axiomatic proof of J. Lambek's homological theorem. Can. Math. Bull., 7 (1964), 609–613.
[3] Nomura Y. An exact sequence generalizing a theorem of Lambek. Arch. Math., 22 (1971), 467–478.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: yakop@math.nsc.ru

Boolean models and simultaneous inequalities

S. S. Kutateladze

The Farkas Lemma, also known as the Farkas—Minkowski Lemma, plays a key role in linear programming and the relevant areas of optimization (cp. [1]). Some rather simple proof of the lemma is given in [2]. The aim of this talk is to demonstrate how Boolean models may be applied to simultaneous linear inequalities with operators. This particular theme is another illustration of the deep and powerful technique of "stratified validity" which is characteristic of Boolean valued analysis [3].

Assume that X is a real vector space, Y is a *Kantorovich space* also known as a Dedekind complete vector lattice or a complete Riesz space. Let $\mathbb{B} := \mathbb{B}(Y)$ be the *base* of Y, i. e., the complete Boolean algebras of positive projections in Y; and let $m(Y)$ be the universal completion of Y. Denote by $L(X, Y)$ the space of linear operators from X to Y. In case X is furnished with some Y-seminorm on X, by $L^{(m)}(X, Y)$ we mean the *space of dominated operators* from X to Y. As usual, $\{T \leq 0\} := \{x \in X : Tx \leq 0\}$ for $T \in L(X, Y)$.

Theorem 1. *Assume that $A_1, \dots, A_N$ and B belong to $L^{(m)}(X, Y)$.*
The following are equivalent:

(1) *Given $b \in \mathbb{B}$, the operator inequality $bBx \leq 0$ is a consequence of the simultaneous linear operator inequalities $bA_1x \leq 0, \dots, bA_Nx \leq 0$, i. e.,*

$$\{bB \leq 0\} \supset \{bA_1 \leq 0\} \cap \dots \cap \{bA_N \leq 0\}.$$

(2) *There are positive orthomorphisms $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \operatorname{Orth}(m(Y))$ such that*

$$B = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k;$$

i. e., B lies in the operator convex conic hull of $A_1, \dots, A_N$.

Theorem 2. *Take A and B in $L(X, Y)$. The following are equivalent:*

(1) $(\exists \alpha \in m(Y))\ B = \alpha A$;

(2) *There is a projection $\varkappa \in \mathbb{B}$ such that*

$$\{\varkappa bB \leq 0\} \supset \{\varkappa bA \leq 0\};$$
$$\{\neg\varkappa bB \leq 0\} \supset \{\neg\varkappa bA \geq 0\}$$

for all $b \in \mathbb{B}$.

References

[1] Floudas C. A., Pardalos P. M. (eds.) Encyclopedia of Optimization. Berlin and New York: Springer, 2009.

[2] Bartl D. A short algebraic proof of the Farkas lemma. SIAM J. Optim., 19 (2008), N. 1, 234–239.

[3] Kusraev A. G., Kutateladze S. S. Introduction to Boolean Valued Analysis. Moscow: Nauka, 2005.

Sobolev Institute of Mathematics
E-mail: sskut@math.nsc.ru

XI. Авторский указатель