Институт математики им. С. Л. Соболева
Новосибирский государственный университет

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

посвящённая 70-летию Академика
Юрия Леонидовича Ершова

2–6 мая 2010 г.

Тезисы докладов

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 10–01–06016–г)

Новосибирск • 2010

Sobolev Institute of Mathematics
Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

dedicated to the 70th anniversary of Academician
Yurii Leonidovich Ershov

May 2–6, 2010

Collection of Abstracts

РФФИ

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 10-01-06016-g)

Novosibirsk • 2010

Содержание

I. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Некоторые приложения теории конформных алгебр

П. С. Колесников

Будут рассмотрены задачи структурной и комбинаторной теории неассоциативных алгебр, в решении которых ключевую роль играют конформные алгебры.

Новосибирск, Россия
E-mail: pavelsk@math.nsc.ru

Универсальные функции над локально конечными алгебраическими системами

А. Н. Хисамиев

Одним из принципиальных результатов обычной теории вычислимости является существование универсальной частично вычислимой функции. Как известно (см.[1]) в любом допустимом множестве существует универсальный Σ-предикат, но это не верно для Σ-функций [2]. Поэтому представляет интерес нахождение условия на алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над $\mathfrak{M}$. В [2,3–6] для некоторых классов систем даны такие условия.

В данном сообщении введены понятия Σ–ограниченной и Σ-однородной алгебраической системы $\mathfrak{M}$ и получено необходимое и достаточное условие для существования универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Эти критерии применены для некоторых известных классов локально конечных алгебраических систем: алгебры Ершова, булевы алгебры, линейные порядки, абелевы p-группы, периодические абелевы группы и других.

Список литературы

[1] Ю. Л. Ершов, Определимость и вычислимость. Новосибирск: научная книга, 1996. (Сибирская школа алгебры и логики).

[2] В. А. Руднев, Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах, Алгебра и логика, **25**, N. 4, 1986, 425—436.

[3] А. С. Морозов, В. Г. Пузаренко, О Σ-подмножествах натуральных чисел, Алгебра и Логика,**43**, N. 3, 2004, 291—320.

[4] И. Ш. Калимулин, В. Г Пузаренко, О вычислимости на структурах, Мататематические труды, **1**, N. 2, 35—72.

[5] В. Г. Пузаренко, К вычислимости на специальных моделях, Сибирский матемематический журнал, 2005, **46**, N. 1, 185—208.

[6] А. Н. Хисамиев, О Σ-подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами, Сибирский математический журнал, **45**, N. 3, 2006, 211—228.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: hisamiev@math.nsc.ru

Applications of the Ershov difference hierarchy in the computable algebra and the complexity theory

M. M. Arslanov

Recently the Ershov difference hierarchy finds an extensive use in applications of the computability theory. In my talk I will give a survey of most important results of such applications in the model theory, computable algebra and the computational complexity theory. Also some related open problems will be discussed.

Kazan', Russia
E-mail: Marat.Arslanov@ksu.ru

Provability algebras and scattered topology

L. D. Beklemishev

Provability algebra of a reasonable arithmetical theory T is its Lindenbaum boolean algebra enriched by the operators $\langle n\rangle$ mapping a sentence A to the Gödelian sentence expressing n-consistency of A over T. We consider settheoretic interpretation of propositions as subsets of a set X, boolean connectives as boolean operations, and operators $\langle n\rangle$ as operators on the set of all subsets of X. The identities of the provability algebra then impose some restrictions on the choice of possible operators which amount to the following ones:

(1) every operator $\langle n\rangle$ is a derived set operator w.r.t. some topology T_n, that is, $\langle n\rangle A$ is the set of limit points of A w.r.t. T_n;

(2) each T_n is scattered, that is, every non-empty subspace A of X has an isolated point;

(3) each T_{n+1} is finer than T_n;

(4) $\langle n\rangle A$ is open in T_{n+1}, for each subset A of X.

We study the properties of such spaces and their connections with the questions of proof theory and set theory. In particular, the problem of completeness of the system of identities of provability algebras w.r.t. GLP-spaces has unexpected relationships with the axioms of large cardinals and stationary reflection.

Moscow, Russia
E-mail: `lbekl@yandex.ru`

Realisability for coinduction with applications in computable analysis

U. Berger

We introduce a formalised realisability interpretation of extensions of first-order theories by inductive and coinductive definitions in an untyped lambda-calculus. In order to demonstrate that this interpretation is practically useful we give a coinductive characterisation of uniformly continuous real functions and derive from this several (proven correct) lazy algorithms for exact real number computation.

Swansea, UK
E-mail: u.berger@swan.ac.uk

Aspects of the Ershov hierarchy

S. B. Cooper

Ever since Turing's 1939 paper in the Proceedings of the London Mathematical Society, an important part of computability theory has concerned the characterising of information which is incomputable, but is close to being computable. One approach to this is via computable approximations.

From this point of view, the Ershov hierarchy has become an increasingly valuable tool in a variety of contexts. We will present an inevitably selective overview of recent work aimed at relating particular mathematical structure to appropriate lower levels of the hierarchy, in a degree-theoretic setting.

Leeds, UK
E-mail: pmt6sbc@leeds.ac.uk

The complexity of the upper and lower central series of computable nilpotent groups

B. Csima

It is easy to see that the terms of the upper and lower central series of a computable nilpotent group must have c.e. Degree. We address the question: Can any combination (of the correct size) of c.e. degrees be realized as the non-trivial terms of the upper and lower central series of a computable nilpotent group? This is joint work with Reed Solomon.

Waterloo, Canada
E-mail: `csima@math.uwaterloo.ca`

Equivalence relations in set theory, computation theory and complexity theory

S.-D. Friedman

The noneffective study of Borel reducibility for Borel and analytic equivalence relations on the reals is now a vast subject, with many applications within logic and to other areas of mathematics. The effective theory has however been neglected, and in this talk I'll describe work on this topic which reveals an unexpectedly rich structure. This theory has been adapted to the study of isomorphism relations on computable structures, or more generally, to the study of Sigma-1-1 equivalence relations on the natural numbers. This theory differs dramatically from the classical one: isomorphism of computable graphs is complete for the class of Sigma-1-1 equivalence relations as a whole. My third and final topic regards isomorphism relations on finite structures, which has interesting connections to computational complexity theory. The work in this talk is joint with many authors, including Buss, Flum, Fokina, Knight, Montalban, Mueller and Toernquist.

Vienna, Austria
E-mail: `sdf@logic.univie.ac.at`

Effective properties of uncountable linear orderings

N. Greenberg

Using admissible computability, we examine effectively presented linear orderings of size $\aleph_1$. In particular, we consider computable categoricity for such linear orderings, and the degree spectrum of the successor relation on these orderings. This is one part of a greater plan of developing effective model theory for uncountable structures.

University of Wellington, Wellington, New Zealand
E-mail: Noam.Greenberg@msor.vuw.ac.nz

Numberings, immunity, and randomness

B. Kjos-Hanssen

The theory of numberings was initiated by Kolmogorov in the 1950s and developed further by Mal'tsev and Ershov. Recently with Brodhead and with Teutsch we investigated the extent to which one can find effective numberings of objects related to algorithmic randomness and to other notions in computability such as immunity. I will present the results we obtained, and some questions left open.

Honolulu, USA
E-mail:

Valued differential fields of exponential logarithmic series

S. Kuhlmann

Consider a set Γ of germs at $+\infty$ of real valued functions of a real variable; which is totally ordered under the order relation $f > g$ if and only if $f(x) > g(x)$ ultimately. An order preserving automorphism $\sigma \in Aut\Gamma$ with the property that $\sigma(f) < f$ is a *left shift*. We explain how this data determines a eld of Exponential Logarithmic series in the initial germs. More precisely, we associate to a left shift σ an induced logarithmic function $log := log_\sigma$ on the field $R((G))_{\aleph_1}$, where $R((G))_{\aleph_1}$ is the field of generalized series with countable support, real coefficients and exponents in the group G of transmonomials at $+\infty$ defined by Γ. We show that distinct automorphisms induce logarithmic functions of distinct growth rates. We show how to endow $R((G))_{\aleph_1}$ with a derivative δ (satisfying $\delta log f = f'/f$), so that $(R((G))_{\aleph_1}, \delta)$ is a valued differential field in the sense of Maxwell Rosenlicht.

Fachbereich Mathematik und Statistik, Universitat Konstanz, Germany
E-mail: salma.kuhlmann@uni-konstanz.de

Counting the back-and-forth types

A. Montalban

Given a class of structures $\mathbb{K}$ and $n \in \omega$, we study the dichotomy between there being countably many n-back-and-forth equivalence classes and there being continuum many.

In the latter case we show that, relative to some oracle, every set can be coded in the $(n-1)$st jump of some structure in $\mathbb{K}$. In this case we also show that if $\mathbb{K}$ is Π_2 axiomatizable, every Turing degree above $0^{(n-1)}$ is the $(n-1)$st jump degree of some structure in $\mathbb{K}$.

In the former case we show that there is a countable set of infinitary Π_n relations that captures all of the Π_n information about the structures in $\mathbb{K}$. In most cases where there are countably many n-back-and-forth equivalence classes, there is a computable description of them. We will show how to use this computable description to get a complete set of computably infinitary Π_n formulas. This will allow us to completely characterize the relatively intrinsically Σ^0_{n+1} relations in the computable structures of $\mathbb{K}$, and to prove that no Turing degree can be coded by the $(n-1)$st jump of any structure in $\mathbb{K}$ unless that degree is already below $0^{(n-1)}$.

The University of Chicago, Chicago, USA
E-mail: antonio@math.uchicago.edu

Discrete nilpotent groups and algebraic geometry

A. Parshin

We give a survey of recent advances on a relation between representation theory of discrete nilpotent groups of class n and algebraic varieties of dimension n. Mostly, we consider the case of algebraic surfaces and the Heisenberg groups. The main issues are the following: moduli of induced representations of the Heisenberg groups as complex-analytical manifolds; characters of representations as Jacobi modular forms on the moduli spaces; local and global Heisenberg groups arising from rank 2 valuations on the algebraic surfaces.

Дискретные нильпотентные группы и алгебраическая геометрия

А. Н. Паршин

Доклад будет содержать обзор недавних результатов о связи теории представлений дискретных нильпотентных групп класса n и алгебраических многообразий размерности n. Преимущественно будет рассмотрен случай алгебраических поверхностей и групп Гейзенберга. Основные вопросы: модули индуцированных представлений групп Гейзенберга как комплексно-аналитические многообразия; характеры представлений как якобиевы модулярные формы на пространстве модулей; локальные и глобальные группы Гейзенберга, возникающие из нормирований ранга 2 на алгебраических поверхностях.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия
Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia
E-mail: parshin@mi.ras.ru

Global structure of Predicate calculus in a finite rich signature over finitary and infinitary lists of model-theoretic properties

M. G. Peretyat'kin

In this abstract, a few statements are presented characterizing global structure of first-order Predicate Calculus of a finite rich signature σ in form of some immediate formulas. The first global formula covers *Finitary list ACL* and represents structure of Tarski-Lindenbaum algebra $\mathcal{L}(PC(\sigma))$ corresponding to *combinatorics over both finite and infinite domains*, while another global formula covers *Infinitary list MQL* and represents structure of Tarski-Lindenbaum algebra $\mathcal{L}(PC(\sigma))$ corresponding to *combinatorics over infinite domains.*

List main concepts used in this characterization.

- Concepts of semantic similarity of theories and semantic types of theories are introduced in [2],
- Operation of direct product of a sequence of semantic types is some natural generalization of corresponding operation over positively numerated Boolean algebras,
- $\mathcal{F}^\star{}_{\{n\}}$ is a *finitely axiomatizable* semantic type with index n, $n \in \mathbb{N}$,
- $\mathcal{E}^\star{}_{\{n\}}$ is a *recursively axiomatizable* semantic type with index n, $n \in \mathbb{N}$,
- Definition of a dense-gra theory is available which is given in some technical terms determining a class of complete decidable theories of finite signatures satisfying some kind of universality property,
- Definition of a dense-inf theory is available which is given in some technical terms determining a class of complete decidable theories satisfying some kind of universality property.

First, we give an immediate formula presenting isomorphism type of Predicate Calculus over Finitary list ACL also called *algebraic Cartesian* list.

Theorem 1. [First Structure Theorem] *Let σ be a finite rich signature, L be an arbitrary list of model-theoretic properties satisfying $L \subseteq ACL$, and*

$$₤\big(PC(\sigma)\big) = \big(\mathcal{L}(PC(\sigma)), \gamma, \xi\big)$$

be generalized Tarski-Lindenbaum algebra of Predicate Calculus of signature σ over total list AL of model-theoretic properties. The following equivalence takes place:

$$\big(\mathcal{L}(PC(\sigma)), \gamma, \xi\big) \equiv_L \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}{}^{[P]} \mathcal{F}^\star{}_{\{n\}}, \tag{1}$$

where P is an arbitrary dense-gra theory over the list L.

Second statement establishes an effective relationship between recursively axiomatizable semantic types and finitely axiomatizable semantic types.

Theorem 2. [Second Structure Theorem] *Let L be an arbitrary list of model-theoretic properties satisfying $L \subseteq MQL$. The following assertions hold:*

(a) *Any recursively axiomatizable type is a finitely axiomatizable type over the list L.*

(b) *There are general recursive functions $p(x)$ and $p'(x,t)$ such that*

$$\mathcal{E}^\star{}_{\{n\}} \equiv_L \mathcal{F}^\star{}_{\{p(n)\}}, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}; \quad \text{moreover,}$$
$$(\lambda t)p'(n,t) \text{ presents this isomorphism.}$$

(c) *There are general recursive functions $q(x)$ and $q'(x,t)$ such that $q(x)$ is a permutation of the set of natural numbers $\mathbb{N}$, and for all $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}^\star{}_{\{n\}} \equiv_L \mathcal{F}^\star{}_{\{q(n)\}}; \text{ moreover,}$$
$$(\lambda t)q'(n,t) \text{ presents this isomorphism;}$$
$$\mathcal{F}^\star{}_{\{n\}} \equiv_L \mathcal{E}^\star{}_{\{q^{-1}(n)\}}.$$

Third claim gives an immediate formula presenting isomorphism type of Predicate Calculus over Infinitary list MQL also called *model quasiexact* list.

Theorem 3. [Third Structure Theorem] *Let σ be a finite rich signature, L be an arbitrary list of model-theoretic properties satisfying $L \subseteq MQL$, and*

$$₤\big(PC(\sigma)\big) = \big(\mathcal{L}(PC(\sigma)), \gamma, \xi\big)$$

be generalized Tarski-Lindenbaum algebra of Predicate Calculus of signature σ over total list AL of model-theoretic properties. The following equivalence takes place:

$$\big(\mathcal{L}(PC(\sigma)), \gamma, \xi\big) \equiv_L \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}{}^{[R]} \mathcal{E}^{\star}\{n\}, \tag{2}$$

where R is an arbitrary dense-inf theory over the list L.

Fourth main claim establishes that available definitions of dense-gra and dense-inf theories are in perfect correspondence with mentioned above global formulas.

Theorem 4. [Fourth Perfectness Structure Theorem] *The following statements are satisfied*:

(a) *Let P be an arbitrary recursively axiomatizable complete theory such that the relation (1) is satisfied for a list $L \subseteq ACL$. There is a recursively axiomatizable complete theory P^* in a finite signature such that the similarity $P \equiv_L P^*$ takes place and P^* is a dense-gra theory over the list L.*

(b) *Let R be an arbitrary recursively axiomatizable complete theory such that the relation (2) is satisfied for a list $L \subseteq MQL$. There is a recursively axiomatizable complete theory R^* in a finite signature such that the similarity $R \equiv_L R^*$ takes place and R^* is a dense-inf theory over the list L.*

Formulated results are included in the book [3]. As for immediate formulas given in Theorem 1 and Theorem 3, they represent generalization of fundamental Hanf's result in [1] describing isomorphism type of Tarski-Lindenbaum algebra of Predicate Calculus in signature with a single binary predicate and thus in an arbitrary finite rich signature.

References

[1] W. Hanf, *The Boolean algebra of Logic*, Bull. American Math. Soc., v. 31, 1975, p. 587–589.

[2] M.G. Peretyat'kin, *Finitely axiomatizable theories*, Plenum, New York, 1997, 297 p. Russian equivalent in: Novosibirsk, Scientific Books, 1997, 318 p.

[3] M.G. Peretyat'kin, *Expressive power of first-order Predicate Logic*, Monograph (final version of the text is presented in publication), 550 p.

Institute of Mathematics, Almaty, Kazakhstan
E-mail: mikhail.peretyatkin@gmail.com

Expansion of the ring in numerical computations

B. Poizat

We consider an arbitrary finitely generated ring A, and functions in several boolean variables with values in A. We define some classes of complexity, such as the class $P(A)$ of sequences of functions computable in a polynomial number of operations, or the class $SP(A)$ defined by summations in the Valiant's way, and we shall see what happen to various hypothesizes of inclusion of one class into another when the ring A varies. We shall also link these (unlikely) hypothesizes to some well-known hypothesizes concerning ordinary, boolean, calculus.

Lyon, France

Natural numbers and the generalized computability

V. G. Puzarenko

We talk about relationships between properties from the descriptive set theory on admissible structures such as the uniformization, the reduction, the separation, the extension principles. Furthermore, the existence of a universal function is considered. Also, we consider in detail these properties on the hereditarily finite superstructures over classical and computable structures. In the end of the talk, we discuss descriptions of the semilattices of m-degrees over some hereditarily finite superstructures.

IM SB RAS, Novosibirsk
E-mail: `vagrig@math.nsc.ru`

Automatic structures and model theory

P. Semukhin, F. Stephan

In the field of Automatic structures, the functions, relations and domains of automatic models have all to be recognisable by finite automata. In the recent years, various approaches from computable model theory have been transferred to the field of automatic structures and questions parallel to those in computable model theory were investigated; in particular one is interested in the questions which of the countable models of a theory can be automatic. Khoussainov and Nerode [1] posed various open questions on automatic structures and model theory. Recently, we made the following progress on the problems of Khoussainov and Nerode.

Theorem 1. *There is an uncountably categorical but not countably categorical complete theory for which only the prime model is automatic.*

Theorem 2. *There are complete theories with exactly* $3, 4, 5, \ldots$ *countable models, respectively, and every countable model has an automatic presentation.*

Theorem 3. *There is a complete theory for which exactly* 2 *countable models have an automatic presentation.*

Theorem 4. *If LOGSPACE = P then there is an uncountably categorical but not countably categorical complete theory for which the prime model is not automatic but all other models have an automatic presentation.*

Theorem 5. *There is a complete theory with countably many countable models including a countable prime model and countable saturated model such that the saturated model has an automatic presentation and the prime model does not have one.*

References

[1] Bakhadyr Khoussainov and Anil Nerode. Open question in the theory of automatic structures. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 94:181–204, 2008.

Speaker: F. Stephan, Department of Mathematics, National University of Singapore, Republic of Singapore
E-mail: `fstephan@comp.nus.edu.sg`

Modular representations of the classical algebraic groups: restrictions to subsystem subgroups and properties of individual elements

I. D. Suprunenko

The goal of the talk is to discuss an approach to investigating the behaviour of unipotent elements in irreducible representations of the classical algebraic groups based on the analysis of restrictions of these representations to subsystem subgroups, especially to such subgroups with several simple components. Representations in positive characteristic are considered. Here a subsystem subgroup is a subgroup generated by the root subgroups associated with all roots of some subsystem of the root system of a relevant group. It occurs that usually the restriction of an irreducible representation with a large highest weight with respect to the characteristic to a semisimple subsystem subgroup with two simple components H_1 and H_2 has a composition factor of the form $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ where φ_1 is an irreducible representation of H_1 with a large highest weight and φ_2 is a nontrivial irreducible representation of H_2. In some cases lower estimates for the number of such factors are obtained. These results permit us to get lower estimates for the number of Jordan blocks of the maximal possible size in the images of unipotent elements of the irreducible representations of the classical groups with large highest weights.

Arguments connected with restrictions to semisimple subsystem subgroups play a crucial role in the proof of the following fact that concerns almost all irreducible representations of the special linear group.

Theorem. *Let K be a field of characteristic $p > 0$, $G = A_r(K)$, and φ be an irreducible representation of G. Assume that $x \in G$ is a unipotent element of order $p^{s+1} > p$. Then $\varphi(x)$ has at least two Jordan blocks of size greater than p^s unless one of the following holds:*

1) $\varphi(G)$ coincides with the standard realization of G;

2) $r = p^s$, x is a regular unipotent element and $\varphi(G)$ is conjugate to the image of the wedge square of the standard representation or to that of its symmetric square (in the latter case $p > 2$);

3) $p = 2$, $r = 3$ or $p = 3$, $r = 4$ or 5, x is a regular unipotent element and $\varphi(G)$ is conjugate to the image of the wedge square of the standard representation.

A detailed information on the behaviour of individual elements in representations of algebraic groups is important for recognizing representations and linear groups.

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
E-mail: suprunenko@im.bas-net.by

Characterization of finite simple groups by arithmetical properties

A. V. Vasil'ev

The spectrum of a group is the set of its element orders. Two groups are isospectral if their spectra coincide. Given a finite group G, we write $h(G)$ to denote the number of pairwise non-isomorphic finite groups isospectral to G. If G is a finite group with nontrivial normal soluble subgroup then $h(G) = \infty$, while, as shown by various authors in the last twenty five years, for many finite simple groups G, either $h(G) = 1$ or at least $h(G) < \infty$. We will discuss new results and methods in this field. In particular, we present the following assertion: every finite simple group is uniquely determined by its spectrum and order in the class of all groups.

Novosibirsk, Russia
E-mail: vasand@math.nsc.ru

On the intersection of conjugate subgroups of finite index

E. P. Vdovin

The Cayley theorem states that if H is a subgroup of G of index n, then H possesses a normal subgroup of G of index at most $n!$. This bound is best possible, to get this bound one need to consider a symmetric group G of degree n and its point stabilizer H in the natural permutation representation. Although in many other interesting cases (for example if H is nilpotent, solvable, etc) the bound is smaller. The main goal of the talk is to discuss bounds in Cayley theorem for various classes of subgroups.

Novosibirsk, Russia
E-mail: vdovin@math.nsc.ru

II. Секция “НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ”

О многозначных модальностях

Г. Вансинг, С. П. Одинцов

Одной из главных мотиваций К. Льюиса при изучении модальных логик являлось точное определение различных версий строгой импликации. В многозначном контексте логики со строгой (интуиционистской) импликацией были определены независимо от модальнойстей. Имеются ввиду логики Нельсона **N3**, **N4** и четырех-значная коннексивная логика **C** [3, 4]. Тем не менее, **C** и различные расширения логики **N4** можно определить посредством модальных трансляций в четырех-значную версию **BS4** логики **S4**. Более того, различные расширения би-интуиционистской логики с сильным отрицанием точно вкладываются в логику **BtS4**, темпоральную версию логики **BS4**. Данные вложения не требуют введения новых атомных формул как в случае вложения Воробьева логики **N3** в интуиционистскую логику.

Мы определим логику **BK**, четырех-значную версию наименьшей нормальной модальной логики **K**, как консервативное расширение логики **K** с помощью сильного, четырехзначного отрицания $\sim$. Семантически логика **BK** характеризуется моделями вида $\langle W, R, v\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ — обычная шкала Крипке для логики **K**, а v отображает пропозициональные переменные $Prop$ в универсум матрицы Белнапа **B4**. Логику **BK** можно задать также с помощью моделей $\langle W, R, v^+, v^-\rangle$ с двумя означиваниями. С такими моделями ассоциируются два отношения форсинга. Одно — для верификации формул, другое — для фальсификации формул. В случае логики **BS4**, отношение R является предпорядком. Для логик **BK** и **BS4**, а также для их трех-значных версий заданы системы аксиом и доказаны теоремы полноты.

Алгебраическая семантика логики **BK** (**BS4**) задается с помощью твист-структур [1, 2] над модальными алгебрами (топологическими булевыми алгебрами). Наконец, мы определим табличные исчисления для рассматриваемых логик.

Список литературы

[1] Fidel, M.M. (1978). An algebraic study of a propositional system of Nelson. *Mathematical Logic, Proc. of the First Brasilian Conference, Campinas 1977*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 39, 99–117.

[2] Vakarelov, D. (1977). Notes on N-lattices and чconstructive logic with strong negation. *Studia Logica*, 36, 109–125.

[3] Wansing, H. (2005). Connexive Modal Logic. In R. Schmidt et al. (Eds.), *Advances in Modal Logic. Volume 5*, London: King's College Publications, 367–383. Available at: http://www.aiml.net/volumes/volume5/

[4] Wansing, H. (2006). Connexive Logic. In Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2006 Edition). URL = http://plato.stanford.edu/entries/logic-connexive/

Технический университет, Дрезден
E-mail: `Heinrich.Wansing@tu-dresden.de`
Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: `odintsov@math.nsc.ru`

Амальгамируемые многообразия DL-алгебр

А. В. Карпенко

В настоящее время распространен алгебраический подход к исследованию модальных логик. В частности, исследуются простые, а также финитно неразложимые модальные алгебры. Следуя [1], назовем модальную алгебру $\mathcal{A}$ *слабо транзитивной*, если $\boxdot x = x \& \Box x \leq \Box\Box x$. Слабо транзитивная $\mathcal{A}$ называется *DL-алгеброй* [2], если она удовлетворяет условию $x \leq \Box\Diamond x$.

Через V_n^m обозначим конечную модальную алгебру с $(n+m)$ атомами $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ такими, что для любого атома x:

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & x = a_i \quad \text{для некоторого } 1 \leq i \leq n; \\ \neg x, & x = b_j \quad \text{для некоторого } 1 \leq j \leq m; \end{cases}$$

Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *амальгамируемым*, если выполнено условие (AP): для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, если $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы, то существуют алгебра $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ и мономорфизмы $\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, такие что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *слабо амальгамируемым*, если выполнено условие (WAP): для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathcal{K}$, если $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — мономорфизмы, то существуют алгебра $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ и гомоморфизмы $\delta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\varepsilon : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, такие что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ для всех $x \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ невырожденная, если $\mathfrak{A}$ невырожденная.

Теорема 1. [3] Многообразие V модальных алгебр имеет WAP тогда и только тогда, когда класс конечно порожденных простых алгебр из V имеет AP.

Алгебра называется *простой*, если она имеет в точности две конгруэнции.

Теорема 2. *Любая конечно порожденная финитно неразложимая DL - алгебра является простой и изоморфной алгебре V_n^m для подходящих $n + m \geq 0$.*

Теорема 3. *Свойства WAP и AP эквивалентны над DL*

Теорема 4. *Существует в точности 16 амальгамируемых мнообразий DL-алгебр, они же являются слабо амальгамируемыми.*

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00090а).

Список литературы

[1] **Л. Л. Эсакиа**. Слабая транзитивность - реституция// Логические исследования, Выпуск 8 — Москва: Наука, 2001.

[2] **M. de Rijke**. The Modal logic of inequality// The Journal of Symbol Logic, vol. 57, no. 2 (1992), p. 566-584

[3] **L. L. Maksimova**. Definability and Interpolation in Non-Classical Logics// Stud. Log., 82, No. 2 (2006), 271–291.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: karpenko@post.nsu.ru

О двух понятиях непрерывности функции и топологизируемости λ-моделей

А. А. Лялецкий

Приводятся результаты исследования двух понятий непрерывности функций над так называемыми биполными частично упорядоченными множествами, введенных автором работы и названных им (Ω')-и (Ω)-непрерывностями, которые совпадают с обычной непрерывностью функций, заданных на расширенной действительной числовой оси. Даются абстрактные характеризации классов (Ω')- и (Ω)-непрерывных функций в терминах теоретико-множественного упорядочения. На базе полученных характеризационных теорем, (Ω')- и (Ω)-непрерывности исследуются на предмет возможность построения моделей для бестиповой теории лямбда при помощи теоретико-категорного метода Койманса [1]. Показывается, что (Ω')-непрерывность не удовлетворяет одному из условий применимости метода Койманса, в то время, как для (Ω)-непрерывности все условия его применимости выполняются. Кроме того, предлагается простой и удобный критерий топологизируемости класса (Ω)-непрерывных функций. В результате удается доказать, что (Ω)-непрерывность определяет только нетопологизируемые λ-модели (за исключением тривиальных).

Проведенное исследование показывает, что даже незначительные изменения понятия непрерывной функции могут привести к существенным изменениям в строении моделей теории лямбда.

Список литературы

[1] Koymans C. P. J. Models of the lambda calculus. PhD thesis, University of Utrecht, the Netherlands, 1984.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев
E-mail: foraal@mail.ru

О таблицах Бета для модальных логик со свойством подформульности

А. В. Лялецкий

Предлагается метод установления общезначимости (т.е. истинности во всех структурах Крипке) замкнутых формул первого порядка для интуиционистских и классических модальных логик из [1], обладающих свойством подформульности в их секвенциальной трактовке. Метод основан на определенном способе построении таблиц Бета [2], использующем отношение "быть подформулой формулы". В зависимости от рассматриваемой логики, он может быть "транслирован" в табличную модификацию классического или интуиционистского секвенциального исчисления из [3], в которую добавлены те или иные модальные правила.

Различные вхождения в F одной и той же подформулы определяют различные ее подформулы. Каждая подформула G из F имеет знак "+" (G_F^+), если G входит в F положительно, и знак "-" (G_F^-), если отрицательно.

Для формулы F ее таблица Бета $BT(F)$ определяется как частично упорядоченное определенным образом конечное множество конечных индуктивно задаваемых мультимножеств, состоящих только из подформул формулы F. Таблицы $BT(F)$ всегда существуют, их конечное число, они содержат $\{F\}$ в качестве наименьшего элемента (относительно упомянутого частичного порядка), и все их максимальные элементы представляет собой мультимножества, содержащие только атомарные формулы (со знаком).

Таблица $BT(F)$ называется замкнутой относительно подстановки σ термов вместо переменных, если каждый ее максимальный элемент содержит атомарные формулы A_F^+ и A'^-_F, такие, что $A_F^+ \cdot \sigma$ совпадает с $A'^-_F \cdot \sigma$, где $\cdot$ - операция умножения выражения на подстановку.

Результат удаления из формулы F всех кванторов обозначается $\mu(F)$. Эрбрановское расширение $HE(F)$, эрбрановский универсум $HU(F)$ и допустимость подстановки σ понимаются в смысле работы [4]. Используемое в [4] понятие совместимости с подстановкой адаптируется к случаю таблицы.

Теорема. *Замкнутая формула F интуиционистской (классической) модальной логики первого порядка является общезначимой тогда и только тогда, когда существуют эрбрановское расширение $HE(F)$, таблица Бета $BT(\mu(HE(F)))$ и подстановка σ термов из эрбрановского универсума $HQ(HE(F))$ вместо всех отрицательных переменных формулы $HE(F)$, такие, что (1), (2) и (3) (только (1) и (2)) выполняются: (1) $BT(\mu(HE(F)))$ является замкнутой таблицей относительно σ; (2) σ является допустимой подстановкой для $HE(F)$; (3) таблица $BT(\mu(HE(F)))$ совместима с подстановкой σ.*

Список литературы

[1] Hiroakira O. Proof-Theoretic Methods in Non-classical Logic: an Introduction. Theories of Types and Proofs, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1998, 207–254.

[2] Beth E.W. Remarks on natural deduction. Indagationes Mathematicae, 17, 1955, 322–325.

[3] Fitting M.C. Intuitionistic logic, model theory and forcing. Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland, 1969.

[4] Lyaletski A. On some problems of efficient inference search in first-order cut-free modal sequent calculi. Proceedings of the 10th International SYNASC 2008 Symposium, Timisoara, Romania, IEEE Inc., 2008, 39–46.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев
E-mail: `forlav@mail.ru`

Логическая основа общей теории программирования

Х. М. Рухая, Л. М. Тибуа

Работа является естественным продолжением статьи [1], в том смысле, что для создания общей теории программирования надо применить тот самый метод, который применяется для создания теории обозначений [2]. В частности, для операторов программирования нужно найти логическую форму и включить их в ряд языковых символов логической теории.

В качестве примера в статье обобщен оператор присваивания, где переменной присваивается не только числовое значение, но и любой терм [3]. Заметим, что переменная, к которой происходит присваивание терма, встречается как в терме так и в формуле. Соответственно, оператор присваивания имеет две логические формы, т.е. имеем два типа оператора присваивания Rx и Sx.Результатом действия первого из них является формула, а другого — терм. Общей характеристикой этих операторов является следующее:

1. Оператор Rx $(RxTA)$ является двухместным логико-специальным реляционным частичным квантором, показатель логичности и связанности которого является (2) (т.е. вторым операндом оператора Rx является формула, где происходит связывание всех свободных вхождений буквы x).

Легко увидеть, что первый операнд оператора Rx является термом. При этом все свободные вхождения буквы x в первом операнде остаются свободными.

2. Оператор Sx $(SxTU)$ является двухместным специальным субстантивным (т.е. оба операнда — термы, а результат действий также терм) частичным квантором, показателем связанности которого является (2) (т.е. квантор Sx связывает все свободные вхождения буквы x только во втором операнде).

В статье изучены свойства операторов присваивания обеих типов.

Список литературы

[1] Rukhaia Kh., Tibua L., Chankvetadze G., Dundua B., One Method of constructing a formal system, Aplied Mathematics, Informatics and Mechanics (AMIM), T.11, N 2, 2006.

[2] Ш. С. Пхакадзе, Некоторые вопросы теории обозначений. Изд. ТГУ, Тбилиси, 1977.

[3] В. М. Глушков, Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интелекта. Кибернетика N 2. 1970.

Тбилиси, Грузия
E-mail: khimuri.rukhaia@viam.sci.tsu.ge;lali.tibua@viam.sci.tsu.ge

О неразрешимости свойства максимальной специфичности

С. О. Сперанский

Пусть μ — это вероятность над формулами в фиксированном пропозициональном языке $\mathcal{L}$ (например, см. [2]). Нижеследующие определения призваны дать формализацию интуитивных идей, высказанных Гемпелем [1], и теснейшим образом связаны с индуктивно-статистическим подходом к предсказанию [3, 4].

Предположим, что $\mathtt{Fact}_{\mathrm{o}}^{*}$ составляют все литералы, допускающие проверку на практике [3]. Обозначим через Rule^{μ} множество всех тех правил, чья условная вероятность определена; $\mathsf{VeR}^{*} \leftrightharpoons \{R \in \mathrm{Rule}^{\mu} \mid \mathtt{Body}\,[R] \subseteq \mathtt{Fact}_{\mathrm{o}}^{*}\}$, где $\mathtt{Body}\,[\cdot]$ означает совокупность всех литералов из посылки рассматриваемого правила. Затем введём бинарное *отношение общности* на правилах: $R \succ R'$ равносильно тому, что $\mathtt{Body}\,[R] \subset \mathtt{Body}\,[R']$, причём R и R' имеют одни и те же заголовки. Правило $R \in \mathsf{VeR}^{*}$ *максимально специфично* (*мс-правило*), если не существует $R' \in \mathsf{VeR}^{*}$ такого, что $R \succ R'$ и для условных вероятностей выполнено $\mu\,(R) < \mu\,(R')$. Мс-правило R называется *мс-законом*, если нет такого мс-правила R', что $R' \succ R$. Множества мс-правил и мс-законов обозначаются MSR^{μ} и MSL^{μ} соответственно; наконец, $R \in \mathsf{VeR}^{*}$ *улучшаемо* (пишем "$R \in \mathsf{ImR}^{\mu}$"), если оно не лежит в MSR^{μ}.

Пусть γ — гёделевская нумерация всех формул в $\mathcal{L}$, а κ — аналогичное кодирование для $\{r \in \mathbb{Q} \mid r \geqslant 0\}$. Разумеется, действие γ можно распространить также и на правила. Далее мы полагаем, что множество $\mathtt{Fact}_{\mathrm{o}}^{*}$ вычислимо. Обозначим $\mathfrak{P}_{\mathsf{c}}$ — совокупность всех вычислимых (рационально-значных) вероятностных мер; элементы $\mathfrak{P}_{\mathsf{c}}$ суть вычислимые функции, преобразующие коды формул в коды рациональных чисел и удовлетворяющие известным аддитивным свойствам.

Теорема 1. *Найдётся мера $\mu \in \mathfrak{P}_{\mathsf{c}}$ такая, что ImR^{μ} есть m-универсальное множество (и поэтому невычислимое, т.е. проблема "$R \in \mathsf{ImR}^{\mu}$?" неразрешима); как следствие, для этой μ множества MSR^{μ} и MSL^{μ} не вычислимо перечислимы.*

Теорема 2. *Пусть Ξ — множество тех мер $\mu \in \mathfrak{P}_{\mathsf{c}}$, для которых ImR^{μ} вычислимо. Тогда проблема "$\mu \in \Xi$?", где $\mu \in \mathfrak{P}_{\mathsf{c}}$, неразрешима.*

Список литературы

[1] C. Hempel, *Maximal specificity and lawlikeness in probabilistic explanation*, ***Philosophy of Science***, Vol. 35, No. 2 (1968), pp. 116–133.

[2] D. Scott, P. Krauss, *Assigning probabilities to logical formulas*, ***Aspects of Inductive Logic*** (J. Hintikka et al, eds.), North-Holland Publishing, 1966, pp. 219–264.

[3] S. Smerdov, E. Vityaev, *Probability, logic & learning synthesis: formalizing prediction concept*, ***Siberian Electronic Mathematical Reports***, Vol. 9 (2009), pp. 340–365.

[4] E. Vityaev, *The logic of prediction*, ***Mathematical Logic in Asia 2005, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference*** (S. Goncharov et al, eds.), World Scientific Publisher, 2006, pp. 263–276.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: netid@ya.ru

К определению дескриптивной логики на решетках формальных понятий

Н. В. Шилов

С основными определениями и теоремами логик описаний понятий (или дескриптивной логики, Description Logic, DL) можно познакомиться по справочной монографии [1], а с основами анализа формальных понятий (Formal Concept Analysis, FCA) — по монографии [2]. Краткое введение в DL и FCA (а также вложение FCA в DL) представлено в первой главе коллективной монографии [3].

В докладе предложен следующий вариант определения семантики дескриптивной логики $\mathcal{ALC}$ на решетках формальных понятий.

Определение. Пусть $K = (G, M, I)$ — формальный контекст, $\mathcal{B} = ((FC(K), \preceq_K, \top_K, \bot_K, \sup_K, \inf_K)$ — полная решетка формальных понятий над K, а Υ — интерпретация символов понятий и ролей элементами $\mathcal{B}$ и бинарными отношениями на $\mathcal{B}$ соответственно. Тогда Υ может быть продолжена на все понятийные термы $\mathcal{ALC}$:

- $\Upsilon(\top) = \top_K$ and $\Upsilon(\bot) = \bot_K$;
- $\Upsilon(X \sqcup Y) = \sup_K(\Upsilon(X), \Upsilon(Y))$, and $\Upsilon(X \sqcap Y) = \inf_K(\Upsilon(X), \Upsilon(Y))$;
- Если K — симметричный контекст и $\Upsilon(X) = (Ex, In) \in \mathcal{B}(K)$, то $\Upsilon(\neg X) = (In, Ex)$.
- Если $\Upsilon(X) = (Ex', In') \in \mathcal{B}(K)$ то
  - $\Upsilon(\forall R.\ X) = \sup_K\{(Ex, In) \in \mathcal{B}(K) : \forall o \in Ex\ \forall a \in In\ \forall o' \in G\ \exists a' \in M$ $((o, o') \in \Upsilon(R) \Rightarrow o' \in Ex',\ (a, a') \in \Upsilon(R), \text{ and } a' \in In')\}$,
  - $I(\exists R.\ X) = \sup_K\{(Ex, In) \in \mathcal{B}(K) : \forall o \in Ex\ \forall a \in In\ \exists o' \in G\ \forall a' \in M$ $((a, a') \in \Upsilon(R) \Rightarrow (o, o') \in \Upsilon(R),\ o' \in Ex', \text{ and } a' \in In')\}$.

В работе доказано следующее

Утверждение. *Для любого понятийного терма Z дескриптивной логики $\mathcal{ALC}$ и любой терминологической интерпретации (Δ, Υ) имеет место следующее равенство $(\iota\Upsilon)(Z) = \iota(\Upsilon(Z))$, где ι — канонический изоморфизм решетки подмножеств Δ и решетки $\mathcal{B}(\Delta, \Delta, \neq)$, а $(\iota\Upsilon)$ — индуцированная интерпретация $\mathcal{ALC}$ на решетке понятий.*

Список литературы

[1] F. Baader, D. Calvanese, D. Nardi D.McGuinness, and P. Patel-Schneider, editors. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications.* Cambridge University Press, 2003.

[2] Ganter B., Wille R. *Formal Concept Analysis.* Mathematical Foundations. Springer Verlag, 1996.

[3] Ануреев И.С., Батура Т.В., Боровикова О.И., Загорулько Ю.А., Кононенко И.С., Марчук А.Г., Марчук П.А., Мурзин Ф.А., Сидорова Е.А., Шилов Н.В., Модели и методы построения информационных систем, основанных на формальных, логических и лингвистических подходах. — Новосибирск: И-во СО РАН, 2009.

Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск
E-mail: shilov@iis.nsk.su

Автоматическое распознавание интерполяции в локально табличных расширениях логики Grz

П. А. Шрайнер

Л. Л. Максимовой в [1] было дано описание всех локально табличных расширений логики Гжегорчика, обладающих интерполяционным свойством, а именно доказано, что в $NE(Grz)$ существуют в точности пять локально табличных логик с интерполяционным свойством Крейга.

Получаем что для того, чтобы проверить, будет ли модальная логика, полученная добавлением новой схемы аксиом к логике Гржегорчика Grz, локально табличной логикой с интерполяционным свойством Крейга , нам достаточно выяснить, будет ли она совпадать с одной из вышеупомянутых пяти логик.

Введем обозначения: $Z_n = \{1, \ldots n\}$ с естественным линейным порядком; $V_n = \{0, 1, \ldots n\}$ где $0Rx$ для любого x и $\neg xRy$ для $1 \leq x, y \leq n$, $x \neq y$.

Следующее предложение получается улучшением оценок, приведенных в работе [2].

Предложение. *Пусть $L = Grz + \{A_1, \ldots, A_k\}$, $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$, A не выводима в $Grz.2$, формула A содержит n переменных, r — общее количество вхождений модальностей в A. Тогда L имеет CIP тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих условий:*

(1) *Формула A опровергается на Z_1.*
(2) *Формула A истинна на Z_1 и опровергается на Z_2.*
(3) *Формула A истинна на Z_2 и опровергается на Z_3 и V_2.*
(4) *Формула A истинна на V_2 и опровергается на Z_3 и V_3.*
(5) *Формула A истинна на $V_{min(2^n+1, m+2)}$ и опровергается на Z_3.*

Разработка алгоритма автоматического распознавания интерполяции в локально табличных расширениях Grz и создание на его основе программы, осуществляющей проверку наличия либо отсутствия этого свойства.

Автором создана программа, осуществляющая автоматическую проверку наличия либо отсутствия интерполяции в локально табличных расширениях логики Гжегорчика Grz.

Работа поддержана грантом РФФИ (номер гранта 09-01-00090-а).

Список литературы

[1] Л. Л. Максимова, Определимость в нормальных расширениях логики S4, Алгебра и логика, 43, N 4(2004), 387—410.

[2] *L. Maksimova*, Projective Beth Property in Extensions of Grzegorczyk Logic, Studia Logica, 83 (2006), 365—391.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: `schr@ngs.ru`

Временная логика линейных по времени фреймов

В. Ф. Юн

Исследуется полимодальная логика, связанная с линейными временными моделями с моментами времени, которые являются кластерами состояний. Более точно, в *V. V. Rybakov, Discrete linear temporal logic with current time point clasters, deciding algorithms, LLP,* **17**:*1–2, 2008*, рассматриваются фреймы $\langle \bigcup_{i \in N} C(i),\ R \rangle$ с линейно упорядоченными R-кластерами состояний $C(i)$, и изучается логика класса таких фреймов в языке с временными модальными операторами и слабыми модальностями. Введем дополнительное отношение R_1 между элементами соседних кластеров и рассмотрим класс фреймов вида $\langle X,\ R,\ R_1 \rangle$, которые назовем линейными по времени Ind-фреймами.

При задании логики посредством моделей важнейшими задачами являются выбор модального языка и проблема аксиоматизации данной логики. Поскольку слабые модальности не являются нормальными, то задача аксиоматизации существенно усложняется. Но ранее доказано (см. *В. Ф. Юн, Временная логика линейных по времени фреймов с аксиомой индукции, СЭМИ,* **6**, *2009, 312–325*), что если добавить к языку временные модальности, связанные с отношением R_1, то слабые модальности выражаются через другие. Поэтому при аксиоматизации класса линейных по времени Ind-фреймов естественно выбрать временной язык с четырьмя временными модальностями.

Построено исчисление $\mathbf{L_1Ind}$ в этом языке, полное относительно линейных по времени Ind-фреймов. Доказано, что оно финитно аппроксимируемо конечными Ind-фреймами и, следовательно, является разрешимым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00090-а), гранта Президента РФ по поддержке научных исследований молодых докторов наук МД-2587.2010.1, и при поддержке гранта АВЦП Минобразования России “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1.419).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: veta_v@mail.ru

Новая константа в суперинтуиционистской логике $L2$

А. Д. Яшин

Пусть Fm — множество формул стандартного пропозиционального языка.

Логикой $L2$ называется [1] суперинтуиционистская логика, характеризуемая классом $\mathbb{F} = \{F_n \mid n \in \omega\}$ шкал F_n вида  . Пусть a_0 — корень, и $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — “крыша” этой шкалы.

Добавим к языку пропозициональную константу φ. Расширенный класс формул обозначим через $Fm(\varphi)$, при этом формулы из Fm называем *чистыми*.

φ-*Логикой* называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки [2]. φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* логики L, если $L \subset \mathcal{L}$ и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$.

φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *полным по П.С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L.

Под *проблемой Новикова для* $L2$ понимается описание класса всех пополнений по Новикову логики $L2$ в языке с дополнительной константой.

Моделями φ-логик являются т.н. φ-*шкалы*, т.е. шкалы с выделенным конусом, интерпретирующим константу.

На каждой шкале $F_n \in \mathbb{F}$ зададим константу φ пятью способами:

$\mathcal{F}_n^1 = (F_n, \varnothing)$ — φ “нигде”;

$\mathcal{F}_n^2 = (F_n, F_n)$ — φ “везде”;

$\mathcal{F}_n^3 = (F_n, \{a_1, \ldots, a_n\})$ — φ есть “крыша”;

$\mathcal{F}_n^4 = (F_n, \{a_1\})$ — φ в единственной точке “крыши”;

$\mathcal{F}_n^5 = (F_n, \{a_1, \ldots, a_{n-1}\})$ — φ “почти везде в крыше”.

Пусть $\mathbf{F}^k = \{\mathcal{F}_n^k \mid n = 1, 2, \ldots\}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Теорема. *Существует ровно 5 полных по Новикову расширений логики* $L2$. *Они определяются классами* φ-*шкал* $\mathbf{F}^k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Список литературы

[1] Л. Л. Максимова. Предтабличные суперинтуиционистские логики, Алгебра и логика, 11, N 5 (1972), 558–570.

[2] Д. П. Скворцов. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнтельной логической связкой. В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам, М.: Наука, 1983, 154–174.

Московский городской психолого–педагогический университет, Москва

E-mail: yashin.alexandr@yandex.ru

Filtration for logic N*

S. A. Drobyshevich

Logic N* in the language $\mathcal{L} := \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$ was first suggested as a logical framework for investigation of well founded semantics and is obtained from Dosen's logic N by adding the following axioms: $\neg(p \rightarrow p) \rightarrow q$, $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$ and $\neg((p \rightarrow p) \rightarrow \neg(q \rightarrow q))$.

We define semantics of logic N* using Routley operator $*$ to interpret negation as a modal operator of immpossibility

Definition. *$\mathcal{W} = \langle W, \leq, *, \rangle$ is an Routley frame if: (i) W is a non-empty set of possible worlds; (ii) $\leq$ is a partial ordering of W; (iii) $*$ is an anti-monotonic function on W. Routley model is a Routley frame together with a valuation satisfying the intuitionistic heredity.*

Logical connectives $\vee, \wedge$ and $\rightarrow$ are defined as in intutionistic logic. The definition for negation is: $x \vDash \neg\phi$ iff $x^* \nvDash \phi$.

Logic N* is complete with respect to a class of Routley frames.

Given a set Φ of formulas closed under taking subformulas we divide it into sets Φ_i $(i = 0, .., n)$ the following way: $\phi \in \Phi_0$ iff there is no $\neg\psi \in \Phi$ such that ϕ is a subformula of ψ; $\phi \in \Phi_i$ $(i > 0)$ iff there exists $\neg\psi \in \Phi_{(i-1)}$ such that ϕ is a subformula of ψ; and n is a largest number such that Φ_n is non-empty.

For Routley model $\mu = \langle W, \leq, *, v\rangle$ we then define equivalence classes on W using this sets: *(i) $x \in [y]_n$ iff $\forall\phi \in \Phi_n(x \vDash \phi \Leftrightarrow y \vDash \phi)$; (ii) for $i = 0, \ldots, n-1$: $x \in [y]_i$ iff $\forall\phi \in \Phi_i(x \vDash \phi \Leftrightarrow y \vDash \phi)$ and $x^* \in [y^*]_{i+1}$;*

Proposition. *If $\mu = \langle W, \leq, *, v\rangle$ is a Routley model then so is $\mu_\Phi = \langle W_\Phi, \leq, *, v_\Phi\rangle$ where*

1. *$W_\Phi = \{[x]_o, .., [x]_n \mid x \in W\} \cup \{y\}$ $(y \notin W)$;*
2. *(i) $[x]_n \leq [y]_n$ iff $\forall\phi \in \Phi_n(x \vDash \phi \Rightarrow y \vDash \phi)$;*
   (ii) for $i = 0, \ldots, n-1$: $[x]_i \leq [y]_i$ iff $\forall\phi \in \Phi_{n-i}(x \vDash \phi \Rightarrow y \vDash \phi)$ and $[y^*]_{i+1} \leq [x^*]_{i+1}$;
3. *$y^* = y$, $([x]_n)^* = y$ and for $i < n$: $([x]_i)^* = [x^*]_{i+1}$;*
4. *$[x]_i \in v_\Phi(p)$ iff $p \in \Phi_i$ and $x \in v(p)$*

Lemma. *If $\mu = \langle W, \leq, *, v\rangle$ is a Routley model, Φ is a set of formulas closed under taking subformulas, $x \in W$ and $\phi \in \Phi_i$ then $x \vDash \phi$ iff $[x]_i \vDash \phi$.*

Theorem. *Logic N* has finite model property.*

Corollary. *Logic N* is decidable.*

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: 2searcher@inbox.ru

The complexity of logical inferences in Gentzen-type system and in Martin–Lof's theory of small types

G. Marikyan

To characterize a theory it is important to evaluate the complexity of its logical inferences. For this purpose I compare the complexity of inferences in a well-known formal system with the complexity of inferences in Martin–Löf's Theory of Small Types [1] (hereafter $MLTT_0$).

For comparison I have chosen the Gentzen-type system (hereafter G) defined in [2]. Both G and $MLTT_0$ are formalizations of arithmetic, that is why it is an interesting problem to compare the complexity of logical inferences in these two formal systems.

In order to compare complexities of inferences I build three methods of complexity measurements universal for both systems, and I use them to compare the complexities of logical inferences in them.

L-complexity of an inference is the number of axioms and rules of inference in it.

D-complexity of an inference in $MLTT_0$ is the total number of symbols of all assumptions and expressions in the inference, plus the number of separating symbol ; in it.

D_1-complexity of an inference in G and in $MLTT_0$ is the total number of symbols of all expressions in the inference, plus the number of separating symbol ; in it.

D_2-complexity of an inference in G and in $MLTT_0$ is the total number of symbols of all expressions in the longest step of the inference. In order to calculate D_2, we first find the total number of symbols of all expressions involved in each step (plus the number of separating symbol ;). Then, we find the maximum of these numbers.

I define the mapping of terms of G into the set of objects of small types of $MLTT_0$, and mapping of objects of small types of $MLTT_0$ into the set of terms of G. Also, I define mapping of formulas of G into the set of types of $MLTT_0$, and mapping of small types of $MLTT_0$ into the set of formulas of G. Then I define Shannon's Functions, and I prove that the following theorems are true.

Theorem. $S_L^{G,MLTT_0}(n) \leq 10n$.

Theorem. $S_D^{G,MLTT_0}(n) \leq 28n$.

Theorem. $S_{D_1}^{MLTT_0,G}(n) > 19n$.

Theorem. $S_{D_2}^{MLTT_0,G}(n) > 13n$.

Theorem. $S_L^{MLTT_0,G}(n)/geq15n$.

References

[1] Per Martin–Löf. An Intuitionistic Theory of Types: Predicative Part. Logic Colloquium '73, H. E. Rose and J. C. Shepherdson. North–Holland, Amsterdam, 1973, pages 73–118.

[2] Stephen C. Kleene. Mathematical Logic (John Wiley and Sons, Inc.)

State University of New York Empire State College, New York, U.S.A.
E-mail: `Gohar.Marikyan@esc.edu`

III. Секция “ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛИМОСТИ”

О допустимых множествах вида $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ над рекурсивно–насыщенными моделями

Р. Р. Авдеев

В работе рассматриваются модели, называемые допустимыми множествами, которые строятся определенным образом по исходной модели $\mathfrak{M}$ конечной предикатной сигнатуры σ. Для допустимых множеств вида $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ в случае, когда $\mathfrak{M}$ — рекурсивно–насыщенная модель получено несколько результатов.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ – рекурсивно–насыщенная модель регулярной теории. Тогда $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ ($\sqsubseteq_\Sigma$ — отношение Σ–сводимости).*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ – рекурсивно–насыщенная модель. Следующие условия эквивалентны:*

1. Для любой пары $\varphi(\overline{u}, \overline{p})$ и $\psi(\overline{u}, \overline{v}, \overline{p})$ формул сигнатуры σ с параметрами $\overline{p}$ таких, что ψ определяет отношение эквивалентности η на $\varphi(\mathfrak{M}^k)$, существует вычислимое семейство формул $\chi_i(\overline{u}, \overline{p})$, дизъюнкция которых определяет подмножество $\varphi(\mathfrak{M}^k)$, пересекающееся с каждым классом эквивалентности по отношению η ровно на одном элементе.

2. На $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации.

3. Для любого $A \subset P(M) \setminus \{\varnothing\}$, $A \in \mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$, существует Σ–функция $f : A \to M$ такая, что для любого $a \in A$ выполняется $f(a) \in a$.

Полученная техника и результат использованы на конкретных примерах. Вот некоторые из них.

Предложение. *Пусть $\mathfrak{M}$ – рекурсивно–насыщенная модель арифметики. Тогда на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации.*

Предложение. *Пусть $\mathfrak{N}$ — рекурсивно–насыщенная модель теории следования ($Th(\langle \omega, 0, s^1 \rangle)$). Тогда на $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ выполняется принцип униформизации, а на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$ — нет.*

Предложение. *Пусть $\mathfrak{R}'$ — рекурсивно–насыщенная модель теории вещественных чисел ($Th(\langle R, 0, 1, +^2, \cdot^2, <^2 \rangle)$). Тогда на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{R}')$ выполняется принцип униформизации.*

Предложение. *Пусть $\mathfrak{M}$ — ω–насыщенная модель теории линейного порядка на натуральных числах ($Th(\langle \omega, \leq \rangle)$). Тогда на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ выполняется принцип униформизации, а на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — нет.*

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: avdeyev@math.nsc.ru

О Δ^0_α–категоричности булевой алгебры $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$

Н. А. Баженов

Эш в работе [2] определил, для каких ординалов α данная суператомная булева алгебра является Δ^0_α–категоричной. Подобный вопрос может быть поставлен и для других типов булевых алгебр. Целью данной работы является изучение гиперарифметических классов категоричности булевой алгебры $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$.

В работе используются основные понятия и определения из [1] и [3]. Пусть δ — предельный ординал или нуль и $n < \omega$.

Показано, что $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta)$ обладает формальным $\Sigma^0_{\delta+2n+1}$–семейством Скотта. При рассмотрении челночных отношений между булевыми алгебрами получена следующая

Лемма. *Пусть β и γ — ординалы, l, k — натуральные числа, $l \neq 0$.*

(a) Предположим, что $\delta + k \geqslant 1$.

(1) $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\gamma \times l)$ тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant \delta+k$ и $\gamma \geqslant \delta+k$.

(2) $\mathfrak{B}(\omega^\gamma \times l) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ тогда и только тогда, когда $\beta+1 \geqslant \delta+k$ и $\gamma \geqslant \delta+k$.

(b) (1) $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_{\delta+2k+1} \mathfrak{B}(\omega^\gamma \times l)$ тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant \delta+k$ и $\gamma \geqslant \delta+k$.

(2) $\mathfrak{B}(\omega^\gamma \times l) \leqslant_{\delta+2k+1} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant \delta+k$ и $\gamma \geqslant \delta+k+1$.

Доказана следующая

Теорема. *Булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta)$ является $\Delta^0_{\delta+2n+1}$–категоричной и не является $\Delta^0_{\delta+2n}$–категоричной.*

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно–педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (гос. контракт N 02.740.11.0429) и РФФИ (грант 08-01-00336).

Список литературы

[1] Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск, Научная книга, 1996.

[2] Ash C. J. Categoricity in hyperarithmetical degrees. Annals of Pure and Applied Logic, vol. 34 (1987), no. 1, pp. 1–14.

[3] Ash C. J., Khight J. Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam, Elsevier Science, 2000.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: nickbazh@yandex.ru

Новые спектры вычислимых моделей

А. Н. Гаврюшкин

Все теории, рассматриваемые в работе, предполагаются не ω-категоричными. Проблема описания спектра вычислимых моделей ω_1-категоричных теорий хорошо известна и далека от полного решения. Этой проблеме посвящены работы таких математиков, как С. Гончаров, Б. Хусаинов и др. Из теоремы Л. Харрингтона и Н. Хисамиева о разрешимости всех моделей ω_1-категоричной теорий, имеющей разрешимую модель, следует, что понятие спектра разрешимых моделей ω_1-категоричной теории тривиально. Такой спектр равен $\varnothing$ или $\omega + 1$. В работах автора введены понятия спектра разрешимых и спектра вычислимых моделей эренфойхтовой теории. Оба эти понятия не тривиальны. Пара $\langle X, F\rangle$, где X — конечное предупорядоченное множество, $F : X \to \omega$, называется **е-параметрами** теории T, если упорядоченное относительно отношения элементарной вложимости $\hookrightarrow$ множество квази-простых моделей теории T изоморфно X, и для всех $x \in X$ количество предельных моделей над квази-простой моделью, соответствующей элементу x, совпадает с $F(x)$. **Спектром вычислимых (разрешимых) моделей** эренфойхтовой теории T с е-параметрами $\langle X, F\rangle$ называется пара $\langle Y, G\rangle$, где Y — подмножество X, соответствующее вычислимым (разрешимым) квази-простым моделям теории T, $G(x) \leqslant F(x)$ для всех x, значения функции G соответствуют количеству вычислимых (разрешимых) предельных моделей.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 2$, $m \leqslant n - 1$, $\langle X, F\rangle$ — такие что*
$X = \{x_0 < x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \mid x_n \leqslant \ldots \leqslant x_1\}, F(x_0) = 0, F(x_1) = \ldots = F(x_n) = 1,$
$Y = \{x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m \mid x_m \leqslant \ldots \leqslant x_1\}, G(x_0) = 0, G(x_1) = \ldots = G(x_n) = 1.$
Тогда существует теория T, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) *$\langle X, F\rangle$ — е-параметры теории T;*
(2) *T имеет в точности $n + 2$ неизоморфных счётных моделей;*
(3) *$\langle Y, G\rangle$ — спектр вычислимых моделей теории T.*

Т. о., для любых m и n существует n взаимно подчиняемых квази-простых моделей, среди которых ровно m вычислимы. В случае разрешимых моделей все квази-простые модели, $\hookrightarrow$-эквивалентные разрешимой, разрешимы.

Теорема 2. *Пусть $\langle X, F\rangle$ — такие что $X = \{x_0 < x_1 < x_2\}$, $F(x_0) = F(x_1) = 0$, $F(x_2) = 3$, и $G : X \to \omega$ определяеся $G(x_0) = G(x_1) = 0$, $G(x_2) = 2$. Тогда существует теория T, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *$\langle X, F\rangle$ — е-параметры теории T;*
(2) *T имеет в точности 6 неизоморфных счётных моделей;*
(3) *$\langle\{x_0\}, G\rangle$ — спектр вычислимых моделей теории T.*

Т. о. существуют предельные над одним и тем же типом модели, одна из которых вычислима, другая — нет. В случае разрешимых моделей вопрос существования таких моделей известен как Проблема Морли.

Институт математики, экономики и информатики, Иркутск
E-mail: gavryushkin@gmail.com

Иерархическая структура оценки интереса

В. П. Добрица

Понятие субъекта в работе будет рассматриваться в широком смысле: физическое лицо, юридическое лицо, различные организации и объединения, СМИ и т.д. Будем говорить, что субъект $\mathcal{A}$ непосредственно интересуется субъектом $\mathcal{B}$, если $\mathcal{A}$ вошел в непосредственые отношения с $\mathcal{B}$ (знакомство, получение информации через субъект $\mathcal{B}$, работа в организации $\mathcal{B}$, субъект $\mathcal{A}$ имеет сотрудника $\mathcal{B}$ и тому подобное).

Субъект $\mathcal{A}$ опосредованно интересуется субъектом $\mathcal{B}$, если имеется последовательность субъектов $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ такая,что субъект $\mathcal{A}$ непосредственно интересуется субъектом $\mathcal{B}_1$, субъект $\mathcal{B}_i$ непосредственно интересуется субъектом $\mathcal{B}_{i+1}$, а субъект $\mathcal{B}_n$ непосредственно интересуется субъектом $\mathcal{B}$. Эту последовательность будем называть цепочкой опосредованного интереса длины n.

Степень интереса субъекта $\mathcal{A}$ к субъекту $\mathcal{B}$ будем оценивать парой $\langle n, m\rangle$. Если субъект $\mathcal{A}$ непосредственно интересуется субъектом $\mathcal{B}$, то $n = 0$, а m — это число непосредственных контактов субъекта $\mathcal{A}$ с субъектом $\mathcal{B}$ за определённый период времени (месяц, год, час или др.). Если рассматривать интерес субъекта $\mathcal{A}$ к самому себе, то этому "интересу" будет соответствовать пара $\langle 0, \propto\rangle$. Если субъект $\mathcal{A}$ опосредованно интересуется субъектом $\mathcal{B}$, то в соответствующей паре $\langle n, m\rangle$ первая координата указывает на минимальную длину опосредованной цепочки, вторая координата определяет количество различных опосредованных последовательностей минимальной длины.

Нетрудно понять, что иерархической шкалой оценки интереса одного субъекта к другому служит множество $\omega^* \times (\omega + 1)$ с порядком, определяемым по следующему правилу:

$$\langle n, m\rangle \preceq \langle n_1, m_1\rangle \Leftrightarrow (n_1 < n) \vee ((n_1 = n) \wedge (m < m_1)).$$

Субъект $\mathcal{A}_1$ проявляет больший интерес к субъекту $\mathcal{B}$ чем субъект $\mathcal{A}_2$, если имеет место отношение

$$\langle n_1, m_1\rangle \prec \langle n_2, m_2\rangle,$$

где пара $\langle n_i, m_i\rangle$ является оценкой степени интереса субъекта $\mathcal{A}_i$ к субъекту $\mathcal{B}$.

Отношение интереса одного субъекта к другому является рефлексивным, транзитивным, но в общем случае оно не является симметричным.

Введённая иерархия оценки степени интереса позволяет субъектам обоснованно принимать решения, выбирать стратегию поведения, определять приоритеты в своей деятельности.

Курский государтвенный технический университет, Курск
E-mail: `dobritsa@mail.ru`

О методологическом потенциале логико-алгебраических дисциплин

Б. Н. Дроботун

Глобальное противоречие между ускоряющимися темпами развития знаний и ограниченными возможностями усвоения этих знаний человеком обуславливает неизбежность их периодического обновления для специалиста любого профиля в течении всей его жизни. Определяющая роль в разрешении этого противоречия принадлежит системе высшей школы, в рамках которой особую значимость приобретает качество математической, в частности, логико-алгебраической подготовки. Особое место логико-алгебраических дисциплин в образовании обусловлено универсальной применимостью средств идейно-методологического и научно-теоретического потенциала, органичного природе логико-алгебраических наук, педагогическим отражением которых являются данные дисциплины. В связи с этим, задача подготовки педагогов-математиков для системы высшей школы, способных "вооружить" каждого студента в период получения ими первого (базового) высшего образования таким арсеналом познавательных методов, технологических приемов и средств, которые позволили бы ему, в достаточной степени беспроблемно, на основе возможностей академической мобильности реализовывать свои образовательные интересы на протяжении всей своей жизни, становится одной из наиболее актуальных проблем дидактики высшей школы. Успешное решение этой задачи сопряжено с поисками путей обогащения традиционной педагогической технологии, ориентированного на обеспечение возможностей овладения методологией научного познания, на создание условий для самообразования, саморазвития и самопознания. В процессе ее решения нами были выявлены, сформулированы и обоснованы следующие частнодидактические принципы обучения логико-алгебраическим дисциплинам[1]: 1. Принцип методологической обусловленности; 2. Принцип идейно-содержательной мотивации; 3. Принцип предметно-стимулирующего самопознания. Полученное обогащение системы дидактических принципов потребовало включения в технологическую составляющую традиционной педагогической системы дополнительных методов, способных обеспечить возможности следования привнесенным принципам. Касаясь дисциплин логико-алгебраического цикла, следует отметить, что особенности введения базовых объектов на основе использования индуктивных методов определений, построений и доказательств, свойственные этим дисциплинам, позволили включить с этой целью в методологическую компоненту педагогической технологии синтезированный нами метод спиралевидного развертывания. Этот метод определяется в работе [2], как результат интеграции генетического метода, метода развертывания и концентрического метода. Опыт аккумулирования в содержании логико-алгебраических дисциплин возможностей следования привнесенным частнодидактическим принципам был обобщен в процессе написания монографии [3].

Список литературы

[1] Дроботун Б. Н., К вопросу обогащения педагогической технологии // Материалы Всерос. конф. по математике и механике. - Томск, 2008. - с. 222.

[2] Дроботун Б. Н., Методическая система обучения логико-алгебраическим дисциплинам в высших учебных заведениях. Диссертация на соискания степени доктора педагогических наук. - Алматы, 2008. - 338 с.

[3] Гончаров С. С., Дроботун Б. Н., Никитин А. А., Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Ч.I, Новосибирск: РИЦ НГУ, 2008, 220с., Ч. II, Новосибирск: РИЦ НГУ, 2008, 370с.

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова Республика Казахстан, Павлодар

Примеры “сложных” η-схожих линейных порядков, имеющих вычислимые копии

М. В. Зубков, А. Н. Фролов

Рассмотрим η-схожие линейные порядки, то есть порядки имеющие тип $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ для некоторой функции $F:\mathbb{Q}\to\omega\backslash\{0\}$. Функцию F называется в этом случае η-функцией линейного порядка. Естественным образом возникает вопрос об описании η-функций η-схожих линейных порядков, имеющих вычислимые копии.

С. Феллнер показал, что если F является Π^0_2-функцией, то линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ имеет вычислимое представление. Аналогичный результат имеет место и для Σ^0_2-функций. Возникает естественный вопрос, можно ли эти результаты распространить на Δ^0_3-уровень арифметической иерархии? М. Лерман и Дж. Розенштейн построили такую Δ^0_3-функцию, что порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ не имеет вычислимой копии. Более того, Р. Доуни показал, что при этом функция f может иметь конечное число значений.

Эти результаты оставляли открытым следующий вопрос: если $\mathcal{L}$ — вычислимый η-схожий линейный порядок, то всегда ли можно его η-функцию выбрать Π^0_2-функцией?

Ранее авторами был усилен результат Феллнера о Π^0_2-функции, в частности, было показано [1], что если $F(q)=\liminf\limits_{s\to\infty} f(q,s)$ для некоторой вычислимой функции f, то $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ имеет вычислимую копию.

А. Н. Фролов дал отрицательный ответ на указанный выше вопрос, построив пример линейного порядка, η-функция которого представляется в виде $F(q)=\liminf\limits_{s\to\infty} f(q,s)$ для некоторой вычислимой функции f, но не может быть Π^0_2-функцией. Естественным образом возникает вопрос, можно ли η-функцию выбрать в виде $F(q)=\liminf\limits_{s\to\infty} f(q,s)$ для некоторой вычислимой функции f? Отрицательный ответ дает следующая теорема:

Теорема. *Существует вычислимый η-схожий линейный порядок $\mathcal{L}$, который нельзя представить в виде $\mathcal{L}\cong\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, где $F(q)=\liminf\limits_{s\to\infty} f(q,s)$ для некоторой вычислимой функции f.*

Список литературы

[1] Frolov A. N., Zubkov M. V. *Increasing η-representable degrees* // Mathematical Logic Quarterly. – 2009. – V. 55. – N 6. – P. 633–636.

Казанский государственный университет, Казань
E-mail: maxim.zubkov@ksu.ru

Степени автоматных преобразований бесконечных последовательностей

Н. Н. Корнеева

В работе изучается структура степеней асинхронно автоматных преобразований бесконечных последовательностей над конечными алфавитами. Под асинхронным автоматом понимается набор $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$, где S, Σ, Σ' — конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно; $\delta : S \times \Sigma \longrightarrow S$ — функция переходов; $\omega : S \times \Sigma \longrightarrow (\Sigma')^*$ — функция выходов.

Определение 1. *Последовательность y сводится к последовательности x (обозначение: $y \leq x$), если существует конечный асинхронный инициальный автомат (T, s) такой, что*

$$\omega_T(s, x) = y.$$

Отношение сводимости $\leq$ индуцирует отношение эквивалентности на множестве бесконечных последовательностей. Класс эквивалентности последовательности x (обозначим его $[x]$) назовем степенью асинхронно автоматных преобразований.

Частично упорядоченное множество степеней асинхронно автоматных преобразований обозначим через V.

В множестве V существует наименьший класс, который состоит из периодических последовательностей с предпериодом; существует континуум атомов.

Теорема 1. *Любое конечное линейно упорядоченное множество вложимо как начальный сегмент V.*

Теорема 2. *Для любых двух последовательностей a и x таких, что $[a] < [x]$ существует последовательность c такая, что $[c] > [a]$ и $[c] | [x]$.*

Из полученных результатов следует существование минимальной пары в V.

Определение 2. *Пусть f — одноместная функция, определенная на множестве натуральных чисел с натуральными значениями. Последовательность x называется f-полной над алвафитом Σ, если любой блок длины k над Σ встречается в последовательности x на начальном отрезке длины $f(k)$.*

Теорема 3. *Монадическая теория полной последовательности x разрешима тогда и только тогда, когда x — вычислима и x является f-полной для некоторой вычислимой функции f.*

Кафедра алгебры и математической логики, механико-математический факультет, Казанский государственный университет, Казань
E-mail: `Natalia.Korneeva@ksu.ru`

Способность теории моделировать вычисления и сложность ее распознавания

И. В. Латкин

Напомним некоторые результаты о сложности распознавания разрешимых теорий [1]. Разрешающая процедура для теории $Th\mathbb{R}$ поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел и даже для $Th(\langle\mathbb{R},+\rangle)$ имеет сложность больше экспоненциальной: существует такая константа $d_1>0$, что для всякой машины Тьюринга P, решающей проблему вхождения в $Th\mathbb{R}$ (или в $Th(\langle\mathbb{R},+\rangle)$), найдётся бесконечно много формул φ, для которых P работает более чем $\exp(2,d_1|\varphi|)$ шагов, т.е. $ACS(Th\mathbb{R})\geqslant ACS(Th\langle\mathbb{R},+\rangle)\geqslant\exp(2,d_1|\varphi|)$. Здесь и далее $|E|$ — длина объекта E, а $ACS(T)$ — (абсолютная) сложность распознавания теории T (соответствует ««внутренней сложности»» в [1]). Для арифметики Пресбургера PAR, и для теории натуральных чисел с умножением сложность распознавания ещё больше: $ACS(PAR)\geqslant\exp(2,\exp(2,d_2|\varphi|))$, $ACS(Th\langle\omega,\cdot\rangle)\geqslant\exp(2,\exp(2,d_3|\varphi|))$.

В докладе обобщается метод получения подобных оценок. Это позволило заметно усилить все эти результаты и многие другие из [1], но при этом константы d_i, оказались зависимыми от машины P. Обозначим код объекта E как cE.

Теорема 1. *Пусть функция f такова, что для любого многочлена p найдётся n, что для всех m, больших n верно $f(m)>p(m)$; и для разрешимой теории T доказаны утверждения i)–iii) из п. 4.1 в [1]. Тогда для всякого $k>0$ и любой детерминированной машины Тьюринга P, решающей задачу принадлежности формул к теории T, существует бесконечно много формул φ, которые P распознает не менее, чем за $f(D_1\cdot|c\varphi|^k)$ шагов, где $D_1=(3d)^{-k}\cdot|cP|^{1-k}$, d — константа зависящая от кодировки, т.е. относительная сложность распознавания $RCS(T)$ теории T не меньше $f(D_1\cdot|c\varphi|^k)$.*

В частности, получаем: для любого $k>0$ и всякой машины Тьюринга P, решающей проблему вхождения в $Th(\langle\mathbb{R},+\rangle)$, существует такая константа $e_1>0$ и бесконечно много формул φ, для которых P работает более чем $\exp(2,e_1|\varphi|^k)$ шагов, т.е. $RCS(Th\langle\mathbb{R},+\rangle)\geqslant\exp(2,e_1|\varphi|^k)$. Кроме того, $RCS(PAR)\geqslant\exp(2,\exp(2,e_2|\varphi|^k))$, $RCS(Th\langle\omega,\cdot\rangle)\geqslant\exp(2,\exp(2,e_3|\varphi|^k))$.

Теорема 2. *Для всякого наперёд заданного $\varepsilon>0$ и подходящей константы E, зависящей от кодировки имеем: абсолютная сложность $ACS(Th\mathfrak{B})$ распознавания теории $Th(\mathfrak{B})$ булевых алгебр — не меньше $\exp(2,D_2|X|^\delta)$ при $\delta=(3+\varepsilon)^{-1}$ и $D_2=(2E)^{-1}$; относительная сложность $RCS(Th\mathfrak{B})$ — не меньше $\exp(2,D_3|X|^k)$, для любого $k>0$ и $D_3=2^{-1}E^{-k}|cP|^{1-k(3+\varepsilon)}$.*

Список литературы

[1] М. О. Рабин, *Разрешимые теории /В Справочная книга по математической логике*, Наука, Москва, 1982, Ч. III, 77–111.

ВКГТУ
E-mail: lativan@yandex.ru

Разрешимость булевых алгебр фиксированной элементарной теории.

М. Н. Леонтьева

Пусть T — элементарная теория некоторой булевой алгебры $\mathfrak{B}$. Для каждой такой теории, за одним исключением, Ю. Л. Ершов в [1] нашел конечный набор одноместных предикатов $P_0, \ldots, P_n$, определяемых формулами первого порядка, такой, что $\mathfrak{B}$ сильно вычислима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ вычислима и вычислимы все предикаты $P_0, \ldots, P_n$. Под сильно вычислимой структурой мы понимаем вычислимую структуру, в которой вычислима также диаграмма первого порядка. Позже С. С. Гончаровым было показано, что при $k \le n$ вычислимость $\mathfrak{B}$ вместе с вычислимостью предикатов $P_0, \ldots, P_k$ равносильна вычислимости Σ_k-диаграммы в $\mathfrak{B}$.

Мы рассматриваем следующую задачу: если $S \subseteq \{P_0, \ldots, P_n\}$ — некоторое подмножество и известно, что $\mathfrak{B}$ вычислима и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S, то можно ли утверждать, что $\mathfrak{B}$ разрешима, то есть обладает сильно вычислимым представлением?

Некоторые частные случаи были ранее рассмотрены в работах Гончарова, Одинцова, Власова и Алаева. В частности, Алаевым был получен ответ для всех начальных отрезков S вида $\{P_0, \ldots, P_k\}$. В данной работе ответ найден для всех возможных подмножеств S.

Теперь перейдем к точным формулировкам. Элементарная теория булевой алгебры $\mathfrak{B}$ описывается её элементарной характеристикой. Пусть $\{\mathrm{E}_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность идеалов Ершова-Тарского. Пусть $\mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0$ — предикаты, выделяющие множество атомов, идеал безатомных и идеал атомных элементов, соответственно. Для каждого $k \in \omega$ обозначим через At_k предикат, выделяющий в каждой булевой алгебре множество таких элементов x, что x/E_k — атом. Аналогично определяются предикаты Als_k и Atm_k. Набор $P_0, \ldots, P_n$, указанный выше, имеет вид $\mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{At}_t, \mathrm{Als}_t, \mathrm{Atm}_t, \mathrm{E}_{t+1}$, где число t зависит от теории T.

Теорема 1. *Пусть $n, p \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра с первой элементарной характеристикой равной n, $S \subseteq \{P_0, \ldots, P_{4n+3}\}$ и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S.*

1. Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p, 1)$. Если для каждого $k < n$ в S содержится At_k и хотя бы один из предикатов Als_k и Atm_k, то $\mathfrak{B}$ разрешима; в противном случае она не является, вообще говоря, разрешимой.

2. Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p+1, 0)$. Если для каждого $k < n$ в S содержится At_k и для каждого $m < n-1$ хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ — разрешима; в противном случае она не является, вообще говоря, разрешимой.

3. Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, \omega, 0)$ или $(n, \omega, 1)$. Если для каждого $k \le n$ в S содержится At_k и для каждого $m < n$ хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ — разрешима; в противном случае она не является, вообще говоря, разрешимой.

Как показано Гончаровым, для булевой алгебры характеристики $(\omega, 0, 0)$ не существует конечного набора предикатов, определяемых формулами первого порядка, который мог бы обеспечить разрешимость.

Список литературы

[1] *Ю. Л. Ершов*, Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика, т.3, N3, 1964, с. 17–38.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: margarita.leontyeva@gmail.com

Фридберговы нумерации в иерархии Ершова

С. С. Оспичев

В работе рассматриваются вычислимые [1] нумерации семейств Σ_a^{-1}-множеств [2], a – конструктивный ординал. В [3] были поставлены открытые вопросы современной теории нумераций. Одним из таких вопросов является существование фридберговых нумераций семейств Σ_a^{-1}-множеств. В [4] была построена Σ_n^{-1}-вычислимая фридбергова нумерация семейства всех Σ_n^{-1}-множеств($n \in \omega$), а также был построен пример Σ_2^{-1}-вычислимого семейства без Σ_2^{-1}-вычислимой фридберговой нумерации. В данной работе анонсируется

Теорема. *Существует Σ_a^{-1}-вычислимое семейство без Σ_a^{-1}-вычислимой фридберговой нумерации.*

А также

Теорема. *Существует Σ_a^{-1}-вычислимая фридбергова нумерация семейства всех Σ_a^{-1}-множеств.*

Кроме того, построена Σ_a^{-1}-вычислимая нумерация семейства всех Δ_a^{-1}-множеств. С помощью данного факта анонсируется

Следствие. *Существует Σ_a^{-1}-вычислимая фридбергова нумерация семейства всех Δ_a^{-1}-множеств.*

Список литературы

[1] *С. С. Гончаров, А. Сорби.*, Алгебра и логика, 1997, т. 36, N 6, с. 621–641.

[2] *Ю. Л. Ершов*, Об одной иерархии множеств III. Алгебра и логика. 1970, т. 9, N 1, с. 34–51.

[3] *S. S. Goncharov, S. Badaev*, Theory of numberings, open problems, Contemporary Mathematics, vol. 257, pp. 23–38.

[4] *S. S. Goncharov, S. Lempp, D. R. Solomon*, Friedberg numberings of families of n-computably enumerable sets, Algebra and Logic, vol. 41, no. 2, pp. 143–154.

Новосибирский государственный Университет, Новосибирск
E-mail: ospichev@gmail.com

Алгоритмическая зависимость отношений соседства и блока вычислимых линейных порядков

А. Н. Фролов

Как известно, отношение соседства произвольного вычислимого линейного порядка принадлежит Π^0_1-классу арифметической иерархии. Причем, существует пример вычислимого линейного порядка, отношение соседства любого вычислимого представления которого является Π^0_1-полным. Другими словами, вышеприведенная алгоритмическая оценка сложности отношения соседства вычислимого линейного порядка является точной. Также известно, что отношение блока произвольного вычислимого линейного порядка является Σ^0_2 и, аналогично, эта оценка является точной.

М. Мозес показал, что если вычислимый линейный порядок имеет вычислимое отношение блока, то он имеет вычислимое представление с вычислимыми отношениями соседства и блока. Этот результат указывает на существование некоторой алгоритмической зависимости отношений соседства и блока. В настоящей работе показывается более "тонкая" алгоритмическая зависимость между этими отношениями. А именно, доказывается, что вычислимый линейный порядок имеет X-вычислимое отношение блока, где X — вычислимо перечислимое множество, то этот порядок имеет вычислимое представление с X-вычислимыми отношениями соседства и блока.

Теорема. *Пусть X — вычислимо перечислимое множество. Если L является вычислимым линейным порядком таким, что F_L является X-вычислимым, то L имеет вычислимое представление R такое, что S_R и F_R оба являются X-вычислимыми. Более того, если $F_L \equiv_T X$, то $S_R \equiv_T F_R \equiv_T X$.*

НИИ математики и механики КГУ, Казань
E-mail: `Andrey.Frolov@ksu.ru`

On cycles in boolean models of gene networks with negative feedbacks

I. V. Golubyatnikov, V. P. Golubyatnikov

We consider non-linear odd-dimensional chemical kinetics dynamical system

$$\dot{x}_1 = f_1(x_{2k+1}) - x_1;\ \ \dot{x}_2 = f_2(x_1) - x_2; \dots\ \ \dot{x}_{2k+1} = f_{2k+1}(x_{2k}) - x_{2k+1}, \qquad (1)$$

as a model of gene network. All the functions f_i here are smooth and monotonically decreasing, this corresponds to negative feedbacks in the gene network. This system has a unique stationary point S_0 surrounded by an invariant parallelepiped Q of the system (1). We decompose Q by hyperpalnes parallel to the coordinate planes and containing the point S_0, and construct an oriented graph with vertices $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k+1})$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots 2k+1$, on the boolean cube generated by this decomposition. The orientations of its edges are determined by the directions of trajectories of the system (1) on the faces separating the adjacent parallelepipeds of the decomposition. This graph contains a cycle with $4k+2$ edges, in the case $k = 2$ it has the form

$$\dots \to (10101) \to (00101) \to (01101) \to (01001) \to (01011) \to$$
$$(01010) \to (11010) \to (10010) \to (10110) \to (10100) \to (10101) \to \dots$$

We prove that the union Q' of the parallelepipeds listed in this diagram (and in its higher-dimensional analogues) is an invariant domain of the system (1). Actually, each of these small parallelepipeds $Q(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k+1})$ can be reduced to a triangle prism $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k+1})$ by an appropriate diagonal plane section so, that the union Δ' of the prisms listed in the diagram is again an invariant domain of the system (1).

Theorem. *If the linearization of the system* (1) *near the point* S_0 *has eigenvalues with positive real parts, then the domain* Δ' *contains a cycle of the system* (1).

In the case $k = 1$ this theorem was obtained in [1]. Now following [2], we find for all $k \geq 1$ sufficient conditions of existence of stable cycles in Δ':

$$| \eta + f_i'(x_{i-1}) | < \eta \cdot \sin \frac{2\pi}{2k+1} \cdot \sin \frac{\pi}{2k+1},$$

for all $i = 1, \dots, 2k+1$, all $(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in \Delta'$, and for some positive parameter η.

The work was supported by grant 2.1.1/3707 of ADS-Program Development of Scientific Potential of Higher School, by grant RFBR 09-01-00070, and by interdisciplinary grant 119 of SB RAS.

References

[1] Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P. On some nonlinear dynamical systems modleing asymmetic gene networks (Russian) // Herald of Novosibirsk State University, Mathematical series. 2007. V. 7, N 2. P. 8–17.

[2] Smith R. A. Orbital Stability for Ordinary Differential Equations // Journal of Differential Equations. 1987. V. 69. P. 265–287.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
E-mail: glbtn@math.nsc.ru; ivan.golubyatnikov@gmail.com

On Boolean algebras of regular languages

A. S. Konovalov, V. L. Selivanov

Boolean algebras (BA's) are of principal importance for several branches of logic and computation theory. Accordingly, characterization of naturally arising BA's attracts attention of many researchers (several examples may be found in [2, 3, 4, 1]).

In automata theory, people consider many classes of languages which form BA's. In this work we characterize some of these BA's up to isomorphism. If $\mathbb{B}$ is a BA and α an ordinal, let $F_\alpha(\mathbb{B})$ be the α-th iterated Frechet ideal of $\mathbb{B}$ [1], $\mathbb{B}^{(\alpha)} = \mathbb{B}/F_\alpha(\mathbb{B})$ and $\mathbb{B}' = \mathbb{B}^{(1)}$. For a finite alphabet Σ, let $\mathcal{R}_\Sigma$ (resp. $\mathcal{A}_\Sigma$) denote the BA of all regular (resp. all regular aperiodic) languages over Σ. A typical result of this paper looks as follows:

Theorem. *1. For any Σ, $\mathcal{R}_\Sigma$ is an atomic BA such that $\mathcal{R}'_\Sigma$ is a countably infinite atomless BA.*

2. For unary alphabet Σ, $\mathcal{A}_\Sigma$ is an atomic BA such that $\mathcal{A}'_\Sigma$ is a two-element BA.

3. For any alphabet Σ with at least two symbols, $F_0(\mathcal{A}_\Sigma) \subset F_1(\mathcal{A}_\Sigma) \subset \cdots$, $\mathcal{A}_\Sigma^{(n)}$ is an atomic BA for each $n < \alpha$, and $\mathcal{A}_\Sigma^{(\omega)}$ is a countably infinite atomless BA.

From well-known facts [1] it follows that assertions 1 — 3 characterize the corresponding BA's up to isomorphism.

References

[1] S. S. Goncharov. *Countable Boolean Algebras and Decidability.* Novosibirsk, Scientific Book, 1996 (in Russian, there is an English Translation).

[2] W. Hanf, The boolean algebra of logic. *Bull. Amer.Math. Soc.*, 20, No 4 (1975), 456–502.

[3] S. Lempp, M. Peretyat'kin, R. Solomon. The Lindenbaum algebra of the theory of the class of all finite models. *Journal of Mathematical Logic* 2, No 2 (2002), 145–225.

[4] V. L. Selivanov. Positive structures. In: *Computability and Models, Perspectives East and West*, S. Barry Cooper and Sergei S. Goncharov, eds., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003, 321–350.

Institute of Informatics Systems, Novosibirsk
E-mail: `jack@sibmail.ru, vseliv@iis.nsk.su`

Jump degree spectra of torsion-free abelian groups

A. G. Melnikov

The degree spectrum $DegSpec(\mathcal{A})$ of a given structure $\mathcal{A}$ is the collection of Turing degrees of atomic diagrams of all isomorphic copies of $\mathcal{A}$. Degree spectra of structures have been intencively studuied during the past 30 years. The degree spectum of a structure may not contain the least element (see e.g. [7]). In this case one chooses a computable ordinal α and studies the α^{th}-jump degree spectrum $DegSpec_\alpha(\mathcal{A}) = \{\mathbf{d}^{(\alpha)} : \mathbf{d} \in \mathrm{DegSpec}(\mathcal{A})\}$ of a structure $\mathcal{A}$. In particular, $\mathcal{A}$ is said to have α^{th}-jump degree $\mathbf{d}$ if $DegSpec_\alpha(\mathcal{A}) = \{\mathbf{b} : \mathbf{d} \leq \mathbf{b}\}$. In [5] Jockusch and Soare study α^{th}-jump degtrees of boolean algebras. In [4] Downey and Knight study α^{th}-jump degrees of linear orderings. It is known that every torsion-free abelian group of finite rank has a jump degree (see [2] and [6]). On the other hand, there is a torsion-free abelian group which has second-jump degree $0''$, but has no jump degree (see [6]). In this case we say that the second jump degree is *proper*. The following generalization holds:

Theorem (Andersen, Kach, Melnikov, Solomon [1]). *For every computable ordinal α and degree $\mathbf{a} > \mathbf{0}^{(\alpha)}$, there is a torsion-free abelian group with proper α^{th} jump degree $\mathbf{a}$.*

The proof uses the codings of arbitrary Σ^0_α sets into computable torsion-free abelian groups. Some of these codings for small α are interesting themselves. In particular, we answer the question posed by Khisamiev (unpublished, see [6]):

Theorem (Downey, Kach, Goncharov, Knight, Kudinov, Melnikov, Turetsky [3]). *Let $S \subseteq \omega$ and $A_S \cong \bigoplus_{s\in S} Q^{(p_s)}$, where $Q^{(p)} = \langle\{\frac{1}{p^k} : k \in \omega\}\rangle$. Then A_S has a computable (decidable) copy if and only if S is in Σ^0_3 (Σ^0_2).*

References

[1] Brook M. Andersen, Asher M. Kach, Alexander G. Melnikov, and D. Reed Solomon, Jump degrees of torsion-free abelian groups, in prep.

[2] Richard J. Coles, Rod G. Downey, and Theodore A. Slaman. Every set has a least jump enumeration, J. London Math. Soc. (2), 62(3), 641–649, 2000.

[3] Downey, Kach, Goncharov, Knight, Kudinov, Melnikov, and Turetsky, decidability and computability of certain torsion-free abelian groups, submitted.

[4] Rodney Downey and Julia F. Knight. Orderings with αth jump degree $0^{(\alpha)}$. Proc. Amer. Math. Soc., 114(2), 545–552, 1992.

[5] Carl G. Jockusch, Jr. and Robert I. Soare, Boolean algebras, Stone spaces, and the iterated Turing jump. J. Symbolic Logic 59(4), 1121–1138, 1994.

[6] Alexander G. Melnikov, Enumerations and completely decomposable torsion-free abelian groups, Theory of Comp. Sys. 45(4), 897–916, 2009.

[7] Richter L. J., Degrees of Structures. Journal of Symbolic Logic 46, 723–731 (1981)

The University of Auckland, and The Novosibirsk State University
E-mail: a.melnikov@cs.auckland.ac.nz

Q_1-degrees of c.e. sets

I. O. Chitaia, R. Sh. Omanadze

Tennenbaum (as quoted by Rogers [3], p.159) defined the notion of Q-reducibility on sets of natural numbers as follows: a set A is Q-reducible to a set B (in symbol $A \leq_Q B$) if there is a computable function f such that for every $x \in \omega$ (where ω denotes the set of natural numbers),

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B.$$

In this case we say that $A \leq_Q B$ via f. The relation of Q-reducibility is reflexive and transitive, so that it generates a degree structure on the subsets of ω. If $A \leq_Q B$ via f and for all x and y

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \varnothing,$$

then we say that a is Q_1-reducible to B, denoted by $A \leq_{Q_1} B$. A computably enumerable (c.e.) set A is Q-complete (respectively, Q_1-complete) if every c.e. set is Q-reducible (respectively, Q_1-reducible) to A. Gill and Morris [2] have shown that the two notions are equivalent, i.e., a c.e. set A is Q-complete if and only if it is Q_1-complete.

We have obtained the following results.

Theorem 1. *The Q-degree of a hyperhypersimple set includes an infinite collection of Q_1-degrees linearly ordered under $\leq_{Q_1}$ with order type of the rational integers $(\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$ and consisting entirely of hyperhypersimple sets.*

Theorem 2. *There exists two c.e. sets having no least upper bound in the Q_1-reducibility ordering.*

If A is any noncomputable c.e. set, a nontrivial splitting of A is a pair of disjoint noncomputable c.e. sets A_0, A_1 such that $A = A_0 \cup A_1$.

A set A is hemimaximal [1] if there are a maximal set M and a nontrivial splitting M_0, M_1 of M such that $A = M_0$.

Proposition 3. *Let A be a hemimaximal set and B be a noncomputable c.e. set such that $B \leq_{Q_1} A$. Then B is hemimaximal.*

Theorem 4. *If C, D are hemimaximal sets then $C \equiv_{Q_1} D$ if and only if $C \equiv_1 D$.*

References

[1] Downey R. G., Stob M. Automorphizm of the Lattice of Recursively Enumerable Sets: Orbits. Advances in mathematics. 1992. vol.92. p.237–265;

[2] Gill J. T., Morris P. H., On Subcreative sets and S-reducibility; J. Symbolic logic; 1974. vol. 39. p.669–677.

[3] Rogers H. Jr., Theory of Recursive Functions and Effective Computability; McGraw; Hill, New Yark 1967.

I. Javakhishvili Tbilisi State Univesity, Georgia
E-mail: roland.omanadze@tsu.ge

Splitting with avoiding cones in Turing degreess

M. M. Yamaleev

A Turing degree $\mathbf{a}$ is splittable in a class of degrees $\mathcal{C}$ avoiding an upper cone of a degree $\mathbf{d}$ if there exist degrees $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1} \in \mathcal{C}$ such that $\mathbf{a} = \mathbf{x_0} \cup \mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_i} < \mathbf{a}$ and $\mathbf{d} \not\leq \mathbf{x_i}$ for $i = 0, 1$. The following theorem presents sufficient conditions for a properly 3-computably enumerable (3-c.e.) degree to be splittable in $\mathbf{D_3}$ avoiding the upper cone of another properly 3-c.e. degree.

Theorem 1. *Let* $\mathbf{a}$ *and* $\mathbf{d}$ *be properly 3-c.e. degrees such that* $\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{a}$ *and there are no 2-c.e. degrees between* $\mathbf{a}$ *and* $\mathbf{d}$. *Then the degree* $\mathbf{a}$ *is splittable in* $\mathbf{D_3}$ *avoiding the upper cone of* $\mathbf{d}$.

Theorem 1 holds when $\mathbf{d}$ is a $\mathbf{\Delta^0_2}$-degree, which does not contain 2-c.e. sets. Theorem 2 states that there exists a whole interval such that all 2-c.e. degrees from this interval are splittable avoiding the upper cone of some c.e. degree below them.

Theorem 2. *There exist c.e. degrees* $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ *such that any 2-c.e. degree* $\mathbf{d}$, *such that* $\mathbf{b} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{a}$, *is splittable in* $\mathbf{D_2}$ *avoiding the upper cone of* $\mathbf{b}$.

Kazan State University, Department of Mathematics, Kazan
E-mail: marsiam2@yandex.ru

IV. Секция “ТЕОРИЯ ГРУПП”

О группе автоморфизмов некоторых точных расширений графов

М. Б. Абросимов

Граф G^* называется *точным (вершинным) k-расширением* графа G, если граф G изоморфен каждому подграфу графа G^*, получающемуся из G^* путем удаления любых его k вершин и всех связанных с ними дуг (ребер). Термин впервые был введен Харари и Хейзом в [1]. Точное k-расширение является частным случаем минимального (вершинного) k-расширения или в терминах Хейза — оптимальной k-отказоустойчивой реализации.

Задача о k-расширении является NP-полной (см. [2]), поэтому используются различные подходы для аналитического решения частных случаев. Так, например, М.Ф.Каравай [3] использовал групповой подход для построения минимальных k-расширений, полагая, что отказоустойчивость систем есть следствие математической симметрии минимального k-расширения. Однако в случае орграфов ситуация оказывается менее однозначной. Точные k-расширения являются в некоторым смысле наиболее симметричными среди всех минимальных k-расширений. Для неориентированных графов задача описания точных k-расширений была решена в работе [4]. Оказалось, что

Теорема 1. *Граф G является точным 1-расширением некоторого графа тогда и только тогда, когда граф G является вершинно-симметрическим.*

Теорема 2. *Граф G с n вершинами является точным k-расширением некоторого графа при $k > 1$ тогда и только тогда, когда граф G имеет симметрическую группу автоморфизмов S_n.*

Теорема 2 означает, что только полные или вполне несвязные графы могут быть k-расширениями при $k > 1$. Оказывается, что и теорема 1 и теорема 2 для орграфов не имеют места. Любой вершинно-симметрический орграф является точным 1-расширением подходящего орграфа, однако обратное неверно. А для общего случая при $k > 1$ оказалось имеет место следующее утверждение:

Теорема 3. *При любом $k \in N$ существуют точные k-расширениея с тождественной группой автоморфизмов.*

Список литературы

[1] Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol.C.25. 9. P. 875–884.

[2] Абросимов М. Б. О вычислительной сложности расширений графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. 1. С. 94–95.

[3] Каравай М. Ф. Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем // Автоматика и телемеханика. 1996. 6. С. 159–173.

[4] Абросимов М. Б. Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Известия Саратовского университета. 2006. 6. С. 86–91.

Саратовский государственный университет, г.Саратов
E-mail: mic@rambler.ru

Вполне регулярные коды в прямоугольной решетке

С. В. Августинович, А. Ю. Васильева, И. В. Сергеева

Разбиение вершин произвольного графа G на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_s$ называется *совершенной раскраской* этого графа, если для произвольных $i, j \in \{0, 1, \ldots, s\}$ существует такое число α_{ij}, что любая вершина из V_i имеет ровно α_{ij} соседей из V_j. Матрицу $A = (\alpha_{ij})$ будем называть матрицей параметров данной совершенной раскраски.

Подмножество C вершин графа G называется *вполне регулярным кодом* в G, если дистанционная раскраска $C_0, C_1, \ldots, C_R$ графа G относительно C является совершенной. Здесь R – радиус покрытия кода, т.е. максимальное расстояние от C до остальных вершин графа, а C_i – множество вершин, находящихся на расстоянии i от C. Ясно, что в этом случае матрица параметров трехдиагональна. Совершенную раскраску, соответствующую вполне регулярному коду, назовем *вполне регулярной*. Очевидно, что множество C_R также является вполне регулярным кодом.

Объектом нашего исследования является граф $G(Z^2)$ прямоугольной решетки. Матрицы параметров всех совершенных раскрасок этого графа в 2 и 3 цвета, а также сами раскраски, были описаны в [1] и [2] соответственно.

В данной работе получено полное описание всех вполне регулярных раскрасок графа $G(Z^2)$. Список допустимых параметров таких раскрасок исчерпывается пятнадцатью спорадическими матрицами, а также шестью бесконечными однопараметрическими сериями матриц.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 10-01-00424-а), а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт N 02.740.11.0429).

Список литературы

[1] Axenovich M.A. On multiple covering of the infinite rectangular grid with balls constant radius // Discrete Math. 2003. V.268. 1-3. P. 31-49.

[2] Пузынина С.А. Совершенные раскраски графа $G(Z^2)$ в три цвета // Дискретный анализ и исследование операций Сер.2. 2005. Т.12 1. С. 37-54.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: avgust@math.nsc.ru, vasilan@math.nsc.ru

Конечность множества квазимногообразий метабелевых групп без кручения аксиоматического ранга два

Ю. А. Авцинова

Говорят, что аксиоматический ранг квазимногообразия равен n, если данное квазимногообразие можно задать системой квазитождеств от n переменных и нельзя задать системой квазитождеств от меньшего числа переменных.

Множество всех квазимногообразий, имеющих в данном классе $\mathcal{N}$ аксиоматический ранг меньший или равный n, частично упорядочено относительно включения и образует решетку, обозначаемую через $L_q^n(\mathcal{N})$. Известно [1], что решетка $L_q^n(\mathcal{N})$ является гомоморфным образом решетки $L_q(\mathcal{N})$ квазимногообразий, содержащихся в $\mathcal{N}$. Поэтому имеет смысл при изучении решетки $L_q(\mathcal{N})$ исследовать решетки $L_q^n(\mathcal{N})$.

Пусть $\mathcal{M}$ — квазимногообразие всех групп без кручения, удовлетворяющих тождеству

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1).$$

Также, пусть

$\Psi_1 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x,y][x,y]^x \ \& \ [x,y][x,y]^y = 1 \to [x,y]^x[x,y]^y = 1);$
$\Psi_2 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x,y][x,y]^x \ \& \ [x,y]^x[x,y]^y = 1 \to [x,y][x,y]^y = 1);$
$\Psi_3 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x,y][x,y]^x \to [x,y][x,y]^y = 1);$
$\Psi_4 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x,y][x,y]^x \to [x,y]^x[x,y]^y = 1);$
$\Psi_5 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x,y][x,y]^x \ \& \ y^4 = [x,y][x,y]^y \to [x,y] = 1);$

Теорема. *Собственное неабелево квазимногообразие, содержащееся в $\mathcal{M}$, аксиоматического ранга два может быть задано в $\mathcal{M}$ квазитождествами из следующего списка: $\Psi_1,\ \Psi_2,\ \Psi_3,\ \Psi_4,\ \Psi_5$. В частности, решетка $L_q^2(\mathcal{M})$ конечна.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (Мероприятие 1).

Список литературы

[1] В. И. Туманов, Достаточные условия вложимости свободной решетки в решетки квазимногообразий. Препринт 40, Институт матем. СО АН СССР, 1988.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: avcinova@mail.ru

Мальцевские базы в тензорных произведениях абелевых групп

М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников

Доклад посвящен построению удобных базисов в тензорных произведениях абелевых групп. Введено понятие **треугольного представления** абелевой группы с данной **мальцевской базой**.

Определение. Множество $T = \{t_i \mid i \in I\}$ назовем **мальцевской базой** абелевой группы A, если 1. множество I вполне упорядочено; 2. для любого ординала λ, $1 \le \lambda \le \rho$, где ρ –порядковый тип множества I, $t_{\lambda+1} \notin A_\lambda$, где $A_\lambda = \langle t_i \mid i \in I\rangle$ и A_λ – нормальная подгруппа $A_{\lambda+1}$. 3. Группа A порождается множеством T.

Приведенный порядок $\overline{o}(t_{\lambda+1})$ элемента $t_{\lambda+1}$ определим следующим образом: приведенный порядок равен натуральному числу m, если $t_{\lambda+1}^m \in A_\lambda$ и m – наименьшее натуральное число с этим свойством, и равен символу ∞ в противном случае.

Из определения мальцевской базы ясно, что $A_1 < A_2 < \cdots < A_\lambda < A_{\lambda+1} < \cdots$ – строго возрастающая цепочка подгрупп и $A_\rho = A$. Фактор-группа $A_{\lambda+1}/A_\lambda$ – циклическая группа порядка $\overline{o}(t_{\lambda+1})$. Следовательно, любой элемент x из A имеет однозначную запись $x = t_{i_1}^{\alpha_{i_1}} t_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots t_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и $\alpha_{i_k} \in \mathbb{Z}$, если приведенный порядок элемента t_{i_j} равен бесконечности, и $0 \le \alpha_{i_j} < m_{i_j}$, если $m_{i_j} = \overline{o}(t_{i_j})$.

Введем понятие **треугольного представления**, связанного с мальцевской базой T. Пусть $\overline{o}(t_{\lambda+1}) = m_{\lambda+1} < \infty$. Тогда, по определению, $t_{\lambda+1}^{m_{\lambda+1}} \in A_\lambda$ и

$$t_{\lambda+1}^{m_{\lambda+1}} = t_{i_1}^{\alpha_{i_1}} t_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots t_{i_k}^{\alpha_{i_k}}, \quad i_1 < i_2 < \cdots i_k < \lambda + 1. \tag{1}$$

Обозначив через R множество равенств вида (1) для всех базисных элементов с конечными приведенными порядками.

Теорема. *Абелева группа A на множестве порождающих T имеет представление $A = \langle T \mid R\rangle$.*

Указывается, как естественным образом находить треугольные представления для периодических абелевых групп. Далее ищутся треугольные представления тензорных произведений абелевых групп, сначала для случая S-групп, т.е. таких, у которых фактор-группа по периодической части разлагается в прямую сумму групп, изоморфных $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$, а затем для случая абелевых групп без кручения и в общей ситуации.

Список литературы

[1] M. Amaglobeli, V. Remeslennikov, Maltsev Bases and Truiangular Representation of Tensor Producst of Abelian Groups. Bull. Georgian Nats. Acad. Sci. vol. 1, no. 1, 2010, 23–29.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Грузия
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

О группах с относительно малыми нормализаторами примарных подгрупп

В. А. Антонов

Если A — произвольная подгруппа группы G, то $N(A) \geq A \cdot C(A)$, а индекс $|N(A) : A \cdot C(A)|$ определяет порядок группы внешних автоморфизмов подгруппы A, индуцированных элементами группы G. В данной работе изучается строение конечных групп G, в которых для любой примарной подгруппы A почти каждый автоморфизм, индуцированный элементами из G, является внутренним. Точнее, для любой такой подгруппы A индекс $|N(A) : A \cdot C(A)|$ делит некоторое простое число. Такие группы будем называть NSP-группами.

Конечную p-группу G условимся называть (p, n)-группой, если G обладает абелевой максимальной подгруппой T и фактор-группа $G/Z(G)$ является группой максимального класса n. В частности, $(p, 1)$-группы это p-группы с условием $|G/Z(G)| = p^2$.

Теорема 1. *Нильпотентная группа G в том и только том случае является NSP-группой, когда любая силовская подгруппа из G либо абелева, либо является (p, n)-группой для некоторых p и n.*

Получено полное описание разрешимых NSP-групп. Но в связи с его громоздкостью, приведем это описание только в одном важном частном случае.

Теорема 2. *Пусть G — бипримарная группа, $\pi(G) = \{p, q\}$, P и Q — соответствующие силовские подгруппы из G, каждая из которых является группой из теоремы 1. Группа G в том и только том случае является NSP-группой, когда выполняется один из следующих случаев:*

1) $G = P \times Q$ — *группа из теоремы 1;*

2) $G = P\lambda Q$, $Q = C_Q(P) \cdot \langle x \rangle$, $x^q \in C_Q(P)$, *и если подгруппа P не абелева, то она является $(p, 1)$-группой и x действует на фактор-группе $P/Z(P)$ неприводимо;*

3) $P = P_0 \cdot \langle x \rangle = P_0 \cdot Z(P)$, $x^p \in P_0$, $Q = Q_0 \cdot \langle y \rangle = Q_0 \cdot Z(Q)$, $y^q \in Q_0$, $[x, y] = 1$, $P_0 \times Q_0 = F(G)$ *и* $G = (P_0 \times Q_0)\langle xy \rangle$, *по крайней мере одна из подгрупп P_0 или Q_0 абелева и если, например, P_0 неабелева, то она является $(p, 1)$-группой и тогда y действует на $P/Z(P)$ неприводимо.*

Теорема 3. *Конечная неразрешимая группа G в том и только том случае является NSP-группой, когда $G = H \cdot L$, где $[H, L] = 1$, H — разрешимая NSP-группа, $L \cong PSL(2, q)$ или $SL(2, q)$, причем либо $q = 2^n$, $n > 2$ и число $(2^n - 1)$ простое, либо $q = 3^n$ и число $\frac{3^n - 1}{2}$ простое, либо $q \not\equiv -1(8)$ и каждое из чисел q и $\frac{q-1}{2}$ является простым числом, и если p — простой делитель числа $|L|$, то для любой p-подгруппы S группы H выполняется равенство $N_H(S) = H \cdot C_H(S)$.*

Отметим, что последнее ограничение означает в частности, что если U — холлова $\{p, q\}$-подгруппа из H и $p \in \pi(L)$, то $U = Q\lambda P$ — группа типа 1 или 2 из теоремы 2, холлова $(\pi(L) \cap \pi(H))$-подгруппа T из H абелева и $H = K\lambda T$.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
E-mail: ava@susu.ac.ru

О некоторых парах неприводимых характеров симметрических групп

В. А. Белоногов

Ранее автором была высказана гипотеза: знакопеременная группа A_n при любом натуральном n не имеет полупропорциональных неприводимых характеров. В [1 (I)] (там же см. обозначения) выдвинута следующая более общая

Гипотеза A. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε. Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений:*

(1) $\varepsilon = 1$ *и выполнено одно из условий:*

(1а) $\alpha =' 2^k.() + (3)$ *и* $\beta = 2^k.() + (0^k, 2, 1)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(1б) $\alpha =' 2^k.(1) + (3)$ *и* $\beta = 2^k.(1) + (0^k, 1, 2)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(2) $\varepsilon = -1$ *и выполнено одно из условий (везде k, m целые):*

(2а) $\alpha =' 3^k.\Delta_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 1$;

(2б) $\alpha =' 3^k.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$;

(2в) $\alpha =' 3^k.2.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$.

Очевидно, доказательство гипотезы A индукцией по числу n достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие A. *Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\widetilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\widetilde{n}, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы A на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$ следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.*

Итогом работ [1 (I–V)] является следующая

Теорема A5. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие A. Тогда $h_{11}^\alpha \neq h_{11}^\beta$.*

В настоящее время автором доказана

Теорема A6. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие A. Предположим, что $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ не удовлетворяет заключению гипотезы A. Тогда с точностью до перемены мест α и β выполнены условия: $h_2^\alpha = h_{11}^\beta$ и тройка $(\alpha^2, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\beta + 1}\varepsilon$, удовлетворяет заключению гипотезы A на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Список литературы

[1] Белоногов В. А. О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I-V, Труды Института математики и механики УрО РАН, 14 (2008), N. 2, 143–163; N. 3, 58–68; N. 4, 12–30; 15 (2009), N. 2, 12–33; 16 (2010) (в печати).

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

О пересечении абнормальных подгрупп

Р. В. Бородич, М. В. Селькин

Рассматриваются конечные группы. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на строение группы. В настоящее время к исследованию пересечений максимальных подгрупп и изучению свойств классов групп, все чаще, подходят с позиций теории подгрупповых функторов (см. монографии [1], [2], [3]).

Напомним, что m-функтором называется функция Θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ её максимальных подгрупп и саму группу G. При этом предполагаем, что если $M \in \Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$.

Определение. Через $\Phi^p_\Theta(G)$ обозначим подгруппу, равную пересечению не p-нильпотентных Θ-подгрупп группы G. Если в качестве m-функтор Θ выбрать тривиальный m-функтор, то подгруппа $\Phi^p_\Theta(G)$ совпадает с подгруппой, равной пересечению не p-нильпотентных максимальных подгрупп группы G. В частном случае, когда $\Theta(G)$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп, свойства подгруппы $\Phi^p_\Theta(G)$ рассматривались в работе [4].

Напомним, что если G — p-разрешимая группа, то арифметическим p-рангом $\overline{r}_p(G)$ называют наибольший из всех порядков p-главных факторов группы G. Класс p-разрешимых групп со свойством $(|G|, \overline{r}_p(G)) = 1$ является насыщенной формацией.

Теорема. *Пусть Θ — абнормально полный регулярный m-функтор и G — p-разрешимая группа такая, что $(|G|, \overline{r}_p(G)) = 1$. Тогда подгруппа $\Phi^p_\Theta(G)$ либо является p-нильпотентной, либо имеет нормальную силловскую p-подгруппу.*

В случае, когда $\Theta(G)\backslash\{G\}$ совпадает с множеством всех максимальных подгрупп для любой группы G, из теоремы вытекает соответствующий результат работы [5].

Список литературы

[1] Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп — Мн.:Беларуская навука, 1997. — 144 с.

[2] Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. — Мн.: Бел. навука, 2003. — 254 с.

[3] Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

[4] Шлык, В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Мат. заметки. — 1973. — Т.14, 3. — С. 429–439.

[5] Gilotti A. On the intersection of certain class of maximal subgroups of a finite group // Arch. Math. — 1998. — Vol. 71. — P. 89–94.

Учреждение образования "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины", Гомель
E-mail: `Selkin@gsu.by, Borodich@gsu.by`

Доминионы метабелевых групп

А. И. Будкин

Доминион $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H группы A в квазимногообразии $\mathcal{M}$ — это множество всех элементов $a \in A$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из A в каждую группу из $\mathcal{M}$, т.е.

$$\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : A \to M,\ \text{если } f\mid_H = g\mid_H,\ \text{то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : A \to M$ обозначены гомоморфизмы группы A в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы A, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). В результате возникает понятие замкнутой подгруппы.

Направление исследований, представленное в данной работе, связано с нахождением всех групп H, замкнутых в любой метабелевой группе, содержащей H в качестве подгруппы.

Обозначения: $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, гр$(\mathbb{Q}, a)$ — группа, порожденная $\mathbb{Q}$ и элементом a, $\mathcal{A}^2$ — класс метабелевых групп.

Теорема. *Пусть $G =$ гр$(\mathbb{Q}, a)$ — метабелева группа, M — нормальная подгруппа группы G, порожденная (как нормальная подгруппа) $\mathbb{Q}$. Предположим, что $\mathbb{Q} \leq G'$ и M — группа без кручения. Тогда*

$$dom_G^{\mathcal{A}^2}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}.$$

Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (мероприятие 1).

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

О ранге вторых коммутантов 2-групп Альперина

Б. М. Веретенников

Группой Альперина назовем группу, в которой коммутант любой 2-порожденной подгруппы цикличен. Альперин в работе [1] доказал, что при нечетном простом p все конечные p-группы с указанным свойством метабелевы. В настоящее время актуальным является построение примеров неметабелевых конечных 2-групп Альперина. Отметим, что ранее в работах [2] и [3] автор привел примеры конечных 2-групп Альперина с вторыми коммутантами, изоморфными Z_2 и Z_4, а в [4] анонсировал существование конечных 2-групп Альперина с циклическими вторыми коммутантами сколь угодно большого порядка и привел соответствующие примеры. В данном сообщении утверждается, что существуют конечные 2-группы Альперина с элементарными абелевыми вторыми коммутантами сколь угодно большого ранга.

Теорема. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 3$, и группа G задана образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и определяющими соотношениями:*

$a_k^2 = 1$ *для любого* $k = \overline{1, n}$,

$[a_i, a_j, a_k] = [a_j, a_k]^2 [a_k, a_i]^2$ *для любых* $i, j, k = \overline{1, n}$,

$[[a_i, a_j], [a_k, a_l]] = [a_i, a_k]^4 [a_i, a_l]^4 [a_j, a_k]^4 [a_j, a_l]^4$ *для любых* $i, j, k, l = \overline{1, n}$,

$[a_i, a_j]^8 = 1, [[a_i, a_j]^4, a_k] = 1$ *для любых* $i, j, k = \overline{1, n}$.

Тогда

1) $|G| = 2^{3C_n^2 + n} = 2^{\frac{n(3n-1)}{2}}$, *и если обозначить* $f_{ij} = [a_i, a_j], \tau_{ij} = f_{ij}^4$ *для любых* i, j *таких, что* $1 \leq i < j \leq n$, $K = \langle \tau_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$, $H = \langle K, f_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$, *то* K — *элементарная абелева 2-группа порядка* $2^{C_n^2}$, *и* G *имеет нормальный ряд* $K < K\langle f_{12} \rangle < K\langle f_{12} \rangle \langle f_{13} \rangle < \ldots < K\langle f_{12} \rangle \langle f_{13} \rangle \ldots \langle f_{n-1,n} \rangle =$
$= H < H\langle a_1 \rangle < H\langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle < \ldots < H\langle a_1 \rangle \ldots \langle a_n \rangle = G$ *длины* $\frac{n(n-1)}{2} + n$, *в котором первые* $\frac{n(n-1)}{2}$ *фактор-группы — циклические группы порядка 4, а остальные — порядка 2;*

2) G *— группа Альперина.*

Следствие. *Существуют конечные 2-группы Альперина, порожденные инволюциями, с элементарными абелевыми вторыми коммутантами сколь угодно большого порядка.*

Список литературы

[1] Alperin J.L. On a special class of regular groups. Trans. Amer. Math. Soc. 106(1963), c. 77–99.

[2] Веретенников Б.М. Об одной гипотезе Альперина. Сиб. матем. журн. 21(1980), с. 200–202.

[3] Веретенников Б.М. О конечных 3-порожденных 2-группах Альперина. Сиб. электр. матем. известия 4(2007), с. 155–168.

[4] Веретенников Б.М. Конечная 2-группа Альперина с вторым коммутантом произвольного порядка. Тез. докл. международной конференции Мальцевские чтения, Новосибирск, 2009, с. 47.

Уральский государственный технический университет, УГТУ-УПИ, Екатеринбург
E-mail: boris@veretennikov.ru

Критерий определяемости вполне разложимой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов

В. К. Вильданов

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

$\mathbf{F_{cd}}$ – класс всех вполне разложимых групп без кручения.

$\tau(A)$ – тип группы без кручения ранга 1.

$\Omega(G)$ – множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы $G \in \mathbf{F_{cd}}$.

$\mathbf{F_{cdi}}$ – класс вполне разложимых групп без кручения таких, что все прямые слагаемые ранга 1 имеют идемпотентные типы.

Теорема 1. *Группа* $A \in \mathbf{F_{cd}}, 2A = A, r(A) = 2$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда* A *однородная почти делимая группа.*

Теорема 2. *Группа* $A \in \mathbf{F_{cdi}}, 2A = A, r(A) = 2$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда она однородная.*

Теорема 3. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F_{cdi}}$, $r(A) = 2$, $A = A_1 \oplus A_2$ *и* $\tau(A_2) < \tau(A_1)$, *тогда* $Aut(A) \cong Aut(B)$ *тогда и только тогда, когда* $B = A_1 \oplus C$, *где* C *группа ранга 1 такая, что* $\tau(C) \quad \tau(A_1)$ *и* $Aut(C) \cong Aut(A_2)$.

Следствие. *Группа* $A \in \mathbf{F_{cdi}}, r(A) = |\Omega(G)| = 2$ *определяется в этом классе своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда* $A = A_1 \oplus Z$.

НГПУ, Нижний Новгород
E-mail: kadirovi4@googlemail.com

Об одной решетке с дополнением

Л. А. Воробей, С. Ф. Каморников, И. А. Кузменкова

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения стандартны, их можно найти в ([1, 2]). Напомним лишь некоторые. Отображение θ, сопоставляющее каждой группе G некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым функтором, если для любого изоморфизма φ каждой группы G выполняется равенство $(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$.

Подгрупповой функтор θ называется регулярным, если для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место $(\theta(A))^{\varphi} = \theta(B)$, $(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$ и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G.

Если же из $K \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G)$ всегда следует $K \in \theta(G)$, то подгрупповой функтор θ называется транзитивным.

Следуя [1], обозначим через $\mathrm{Reg}_{tr}(\mathfrak{G})$ множество всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов и введем на этом множестве частичный порядок $\leq$, полагая, что отношение $\theta_1 \leq \theta_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо включение

$$\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G).$$

Простая проверка показывает, что $\mathrm{Reg}_{tr}(\mathfrak{G})$ — полная решетка, единицей которой является подгрупповой функтор $1_{\mathfrak{G}}$, выделяющий в каждой группе все ее подгруппы, а нулем — тривиальный подгрупповой функтор $0_{\mathfrak{G}}$, выделяющий в каждой группе G только саму группу G.

Подгрупповой функтор θ, рассматриваемый только на множестве всех разрешимых групп, называется разрешимым. Множество всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов обозначим через $\mathrm{Reg}_{tr}(\mathfrak{S})$.

В [3] под номером 1.5.26 поставлен следующий вопрос: Существуют ли в решетке $\mathrm{Reg}_{tr}(\mathfrak{G})$ дополняемые элементы, отличные от $0_{\mathfrak{G}}$ и $1_{\mathfrak{G}}$?

В данной работе предлагается практически исчерпывающий ответ на вопрос 1.5.26: в $\mathrm{Reg}_{tr}(\mathfrak{G})$ существует континуум дополняемых элементов, а в $\mathrm{Reg}_{tr}(\mathfrak{S})$ все элементы дополняемы.

Список литературы

[1] Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 2003.

[2] Скиба А.Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

[3] Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп // Препринты ГГУ им. Ф. Скорины. 2001. N2 (107). Гомель: ГГУ.

Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель
E-mail: vorobeip@mail.ru
Международный институт трудовых и социальных отношений, Гомель
E-mail: sfkamornikov@mail.ru
Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель

Графы, в которых окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(3,3)$

А. К. Гутнова, А. А. Махнев

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma_1(a)$ будем писать $[a]$.

Пусть F — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально F-графом*, если $[a]$ лежит в F для любой вершины a графа Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный многодольный граф $\{M_1,\ldots,M_n\}$ с долями M_i порядка m_i. Если $m_1=\cdots=m_n=m$, то указанный граф обозначается $K_{n\times m}$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых L называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a,L)\in(P,L)$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$ или pG_α). В случае $\alpha=1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+t(\alpha-1)$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

В [1] проведена редукция классификации графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-2}(s,t)$ к локально псевдо $GQ(3,3)$- и $GQ(3,5)$-графам. В [2] классифицированы псевдогеометрические графы для $GQ(3,t)$. В таких графах окрестность любой вершины — объединение изолированных многоугольников с числом вершин, кратным 3. В данной работе классифицированы вполне регулярные локально псевдо $GQ(3,3)$-графы.

Теорема. *Пусть Γ является связным вполне регулярным графом, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $GQ(3,3)$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *диаметр Γ равен 2, и Γ имеет параметры $(176,40,12,8)$ или $(95,40,12,20)$;*

(2) *диаметр Γ равен 3 и либо $\mu=10$ и $|\Gamma|=151$, либо $\mu=12$ и $|\Gamma|=133$.*

Список литературы

[1] Гутнова А.К., Махнев А.А. О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-2}(s,t)$ // Доклады академии наук 2010, т. 431, N 3, 301–305.

[2] Haemers W., Spence E. The pseudo-geometric graphs for generalized quadrangles of order $(3,t)$ // Eur. J. Comb. 2001, v. 22, N 6, 839–845.

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

О применении условия максимальности для подгрупп при исследовании модулей над групповыми кольцами

О. Ю. Дашкова

В настоящей работе условие максимальности для подгрупп применено к исследованию модулей над групповыми кольцами. В [1] было введено понятие коцентрализатора подгруппы рассматриваемой группы.

Определение. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.*

Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, $\mathbf{R}$ — коммутативное нетерово кольцо, и пусть $\mathbf{L_{nnd}(G)}$ — система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями. На системе $\mathbf{L_{nnd}(G)}$ введем порядок относительно обычного включения подгрупп. Если $\mathbf{L_{nnd}(G)}$ удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями, или, просто, что группа G удовлетворяет условию $\mathbf{max-nnd}$. В работе всюду рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A, централизатор которого в группе G единичен. Символом $ND(G)$ обозначим множество элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $< x >$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, отсюда вытекает, что $ND(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, группа G разрешима и удовлетворяет условию $max - nnd$. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем и фактор-группа $G/[G,G]$ бесконечно порождена, то группа G удовлетворяет следующим условиям:*

(1) A имеет конечный ряд $\mathbf{R}G$-подмодулей $< 0 >= C_0 \leq C_1 = C \leq C_2 = A$ такой, что C_2/C_1 — конечно порожденный $\mathbf{R}$-модуль, а фактор-группа $Q = G/C_G(C_1)$ — прюферова q-группа для некоторого простого числа q.

(2) $H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1)$ — абелева нормальная подгруппа группы G, коцентрализатор которой в модуле A является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем.

(3) группа G имеет ряд нормальных подгрупп $H \leq L \leq N \leq M \leq G$, такой, что фактор-группа G/M конечна, фактор-группа M/N — прюферова q-группа для некоторого простого числа q, N/L конечно порождена, фактор-группа L/H нильпотентна, а подгруппа H абелева.

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечно порожденная разрешимая группа, удовлетворяющая условию $max - nnd$. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, а коцентрализатор подгруппы $ND(G)$ в модуле A — нетеров $\mathbf{R}$-модуль, то G обладает рядом нормальных подгрупп $H \leq L \leq G$ таким, что фактор-группа G/L полициклическая, фактор-группа L/H нильпотентна, а подгруппа H абелева.*

Теорема 3. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечно порожденная разрешимая группа, удовлетворяющая условию $max - nnd$. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, и коцентрализатор подгруппы $ND(G)$ в* *модуле A также не является нетеровым* $\mathbf{R}$*-модулем, то группа G содержит нормальную подгруппу L, удовлетворяющую следующим условиям:*

(1) Фактор-группа G/L — полициклическая.

(2) $L \leq ND(G)$, и коцентрализатор подгруппы L в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$*-модулем.*

(3) Фактор-группа $L/[L, L]$ бесконечно порождена.

Список литературы

[1] Курдаченко Л. А., О группах с минимаксными классами сопряженных элементов, Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Академия наук Украины, Киев, 160–177 (1993).

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск
E-mail: `odashkova@yandex.ru`

О пересечениях силовских 2-подгрупп в группах автоморфизмов групп лиева типа над полем порядка 9

В. И. Зенков, А. И. Макосий

В работе [1, следствие C] было доказано, что в любой конечной группе G для простого числа p и силовской p-подгруппы P найдутся такие элементы x и y, что $P \cap P^x \cap P^y = O_p(G)$, где $O_p(G)$ означает наибольшую нормальную p-подгруппу группы G. Так как подгруппа $O_p(G)$ лежит в любой силовской p-подгруппе из G, то без ограничения общности, изучая пересечения силовских p-подгрупп, можно считать, что $O_p(G) = 1$. Возникает вопрос: при каких условиях на группу G в соотношении $P \cap P^x \cap P^y = 1$ можно обойтись только одним элементом, то есть, когда в группе G найдется такой элемент z, что $P \cap P^z = 1$?

Главным инструментом изучения пересечений силовских подгрупп в конечных группах является параметр $l_p(G)$, который мы сейчас введем. Рассмотрим конечную группу G с силовской p-подгруппой P и условием $O_p(G) = 1$. Пусть $X = \{P^g \mid P^g \cap P = 1, g \in G\}$. Тогда подгруппа P действует сопряжениями на множестве X. Через $l_p(G)$ обозначим число орбит при этом действии. Тогда, к примеру, в случае простой неабелевой группы G имеем $l_p(G) > 0$ (см. [2]).

Поведение числа $l_p(G)$ в разрешимых группах подробно рассмотрено в [1, теорема B], а случай $l_p(G) = 0$ выделен особо в [1, теорема B1]. Это позволяет считать, что разрешимый радикал $S(G)$ группы G единичен. Это приводит к вопросу изучения поведения числа $l_p(G)$ в неразрешимых группах. Ответ на вопрос, когда $l_p(G) = 0$ в [1] сведен к вопросу о том, когда в группе G найдется компонента K такая, что в группе G_1, где $Inn(K) \leqslant G_1 \leqslant Aut(K)$ и K — простая группа лиева типа над полем порядка 3, 9 или p, где p — простое число Ферма или Мерсенна, выполняется условие $l_2(G_1) \leq 2$.

В работе [3] изучается случай $p = 3$. В настоящей работе рассмотрен случай, когда K изоморфна $L_2(9)$, $L_3(9)$, $U_3(9)$ или $PSp_4(9)$. Доказана

Теорема. *Верны следующие соотношения:* $l_2(Aut(L_2(9))) = 0$, $l_2(Aut(L_3(9))) = 549$, $l_2(Aut(U_3(9))) = 10204$ *и* $l_2(Aut(PSp_4(9))) \geq 3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00395 и 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Список литературы

[1] Зенков В. И., Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах. Фундаментальная и прикладная математика, 2 (1996), вып. 1, 1–92.

[2] Зенков В. И., Мазуров В. Д., О пересечении силовских подгрупп в конечных группах. Алгебра и логика, 35 (1996), N. 4, 424–432.

[3] Зенков В. И., Макосий А. И., О пересечениях силовских 2-подгрупп в конечных группах, I. Владикавказский мат. журн., 11 (2009), вып. 4, 16–21.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
E-mail: aimakosi@mail.ru

О решеточных наследственных разрешимо насыщенных формациях

С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные группы.

В развитие результата Виландта о решетке субнормальных подгрупп Л. А. Шеметков в [1] сформулировал следующий вопрос:

В каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G образует решетку?

Назовем класс $\mathfrak{F}$ *решеточным*, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе. В такой терминологии вопрос Л. А. Шеметкова может быть переформулирован в виде следующей общей задачи:

Найти все решеточные классы групп $\mathfrak{F}$.

Эта задача для насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ вошла в "Коуровскую тетрадь" [2] и для насыщенных наследственных формаций была решена в работе [3], инициировав следующее направление:

Найти все ненасыщенные наследственные решеточные формации $\mathfrak{F}$.

В классе разрешимых групп задача получила полное решение в [4]. В [5] она решается в универсуме всех конечных групп для наследственных разрешимо насыщенных формаций. В основе решения лежит отрицательный ответ на следующий вопрос 15.38 из [2]:

Существует ли ненасыщенная наследственная разрешимо насыщенная решеточная формация?

Список литературы

[1] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[2] Коуровская тетрадь: нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск, 2006.

[3] Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.

[4] Васильев А. Ф., Каморников С. Ф. К проблеме Кегеля-Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, N 4. С. 411–428.

[5] Каморников С. Ф. Любая разрешимо насыщенная наследственная решеточная формация является насыщенной // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 430, N 5. С. 592–595.

УО ФПБ Международный институт трудовых и социальных отношений, Гомель
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Конечные группы с перестановочными подгруппами Шмидта

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Конечные группы с ограничениями на некоторые подгруппы Шмидта исследовались в работах [1]–[3].

В настоящей заметке изучаются π'-свойства конечной группы при условии, что существуют π-холлова подгруппа, перестановочная с некоторыми подгруппами Шмидта.

Теорема. *Пусть в конечной группе G существует π-холлова подгруппа A и пусть B — подгруппа такая, что $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A перестановочна со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта из B для всех $p \in \pi$, то G является $E_{\pi'}$-группой.*

2. *Если A нильпотентна и перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то G является $C_{\pi'}$-группой.*

3. *Если A перестановочна со всеми π-подгруппами Шмидта из G, то G является D_{π}-группой.*

Утверждения 1 и 2 доказываются без использования классификации конечных простых групп. При доказательстве утв. 3 используется теорема Е. П. Вдовина и Д. О. Ревина [4], опирающаяся на классификацию конечных простых групп.

Пример. Группа $PSL(2,11) = ([Z_{11}Z_5])A_4$ с $\{5,11\}$-холловой подгруппой $A = [Z_{11}]Z_5$ и подгруппой $B = A_4$ удовлетворяет условию 1, но $PSL(2,11)$ не является $C_{\{5,11\}'}$-группой. Знакопеременная группа $A_5 = Z_5A_4$ с $\{5\}$-холловой подгруппой $A = Z_5$ и подгруппой $B = A_4$ удовлетворяет условию 2, но A_5 не является $D_{\{5\}'}$-группой. Эти примеры указывают на то, что в п. 1 группа G может быть не $C_{\pi'}$-группой, а в п. 2 — не $D_{\pi'}$-группой.

Список литературы

[1] Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, 5. С. 717-722.

[2] Княгина В. Н., Монахов В. С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, 6. С. 1316–1322.

[3] Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, 4. С. 448–458.

[4] Revin D. O., Vdovin E. P. Hall subgroups of finite groups // Contemporary Mathematisc. 2006. V. 402. P. 229–265.

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь
E-mail: knyagina@inbox.ru
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины
E-mail: monakhov@gsu.by

О $\mathcal{U}\Phi$-гиперцентре конечных групп

В. А. Ковалева, А. Н. Скиба

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными. Мы используем символ $\mathcal{U}$ для обозначения класса всех сверхразрешимых групп.

Пусть A, K и H — подгруппы группы G и $K \leq H \leq G$. Тогда мы говорим, что A *покрывает* пару (K, H), если $AH = AK$; A *изолирует* пару (K, H), если $A \cap H = A \cap K$ [1]. Мы говорим также, что A *условно* покрывает или изолирует пару (K, H) [1], если найдется такой элемент $h \in H$, что A покрывает или изолирует пару (K^h, H). Пара (K, H) из G называется максимальной, если K — максимальная подгруппа в H.

Пусть $\mathcal{X}$ — класс групп. Главный фактор H/K группы G называется фраттиньевым, если $H/K \leq \Phi(G/K)$. Главный фактор H/K группы G называется $\mathcal{X}$-центральным [2], если $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathcal{X}$. Произведение всех нормальных подгрупп из G, у которых G-главные факторы являются $\mathcal{X}$-центральными в G, называется $\mathcal{X}$*-гиперцентром* группы G и обозначается через $Z_{\mathcal{X}}(G)$ [3].

В работе Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [4] введено следующее обобщение $\mathcal{X}$-гиперцентра группы. Пусть $Z_{\mathcal{X}\Phi}(G)$ — произведение всех нормальных подгрупп группы G, у которых все их нефраттиньевы G-главные факторы являются $\mathcal{X}$-центральными в G. Тогда $Z_{\mathcal{X}\Phi}(G)$ называется $\mathcal{X}\Phi$*-гиперцентром* группы G.

Заметим, что если в группе G существует такая нормальная подгруппа E, что $G/E \in \mathcal{X}$ и $E \leq Z_{\mathcal{X}\Phi}(G)$, то $G \in \mathcal{X}$ для многих конкретных классов $\mathcal{X}$ (см. [5, раздел 5]). Это показывает, что $\mathcal{X}\Phi$-гиперцентр группы оказывает существенное влияние на ее строение, и поэтому важной задачей является изучение условий, при которых выделенная нормальная подгруппа содержится в $\mathcal{X}\Phi$-гиперцентре. Нами доказан следующий результат в этом направлении.

Теорема. *Пусть $X \leq E$ — разрешимые нормальные подгруппы группы G. Предположим, что каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из X условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M, G), где $MX = G$. Если $X = E$ или $X = F(E)$, то $E \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$.*

Список литературы

[1] Ковалева, В.А. Конечные группы с обобщенным условием покрытия и изолирования для подгрупп / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. — 2009. — 2(53). — С. 145-149.

[2] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — М.: Наука, 1989.

[3] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

[4] Shemetkov, L.A. On the $\mathcal{X}\Phi$-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // J. Algebra, 2009. — 322. — P. 2106-2117.

[5] Skiba, A.N. On weakly S-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2007. — 315. — P. 192-209.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
E-mail: vika.kovalyova@rambler.ru, alexander.skiba49@gmail.com

О распознаваемости по спектру групп $E_8(q)$

А. С. Кондратьев

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (граф Грюнберга — Кегеля) $GK(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $GK(G)$ через $s(G)$.

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по спектру (см., например, обзор В. Д. Мазурова [1]). Конечная группа G называется *распознаваемой (по спектру)*, если для любой конечной группы H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P

В работах [2, 3] была доказана квазираспознаваемость конечных простых групп, граф Грюнберга —Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности, за исключением группы A_6. В своем обзоре [1] В. Д. Мазуров поставил следующий нерешенный вопрос: верно ли, что любая конечная простая группа G с условием $s(G) \geq 3$ либо распознаваема, либо изоморфна A_6?

В настоящей работе доказана

Теорема. *Пусть G — конечная группы и $\omega(G) = \omega(E_8(q))$. Тогда $G' \cong E_8(q)$ и G/G' — циклическая 3-группа. Кроме того, если $q \equiv 0, 1, 4$ $(mod\ 5)$, то $G = G'$.*

Заметим, что граф Грюнберга —Кегеля группы $E_8(q)$ имеет при $q \equiv 2, 3$ $(mod\ 5)$ четыре, а при $q \equiv 0, 1, 4$ $(mod\ 5)$ — пять компонент связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Список литературы

[1] Мазуров В.Д. Группы с заданным спектром. Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. Математика и механика, 36 (2005)б вып. 7, 119-138.

[2] Алексеева О.А., Кондратьев А.С. О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов. Укр. мат. журн., 54 (2002), N. 7, 998-1003.

[3] Алексеева О.А., Кондратьев А.С. Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов. Сиб. мат. журн., 44 (2003), N. 2, 241-255.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

О свободных подгруппах бесконечной унитреугольной группы

Е. Н. Конышева

Рассматривается группа, $G(C)$ =гр(A_C, B_C), порожденная двумя матрицами из $UT_\infty(Z)$, построенными по матрице C следующим образом:

$$A_C = diag(C, C, \ldots), B_C = diag(1, C, C, \ldots).$$

В работе [1] было показано, что группа $G(t_{12}(1))$ свободная ранга 2. В предыдущей работе автора [2] были взяты трансвекции из $UT_3(Z)$ и доказано, что группы $G(t_{12}(a))$, $G(t_{23}(a))$ и $G(t_{13}(a))$ не свободны. В настоящей работе рассмотрены матрицы из матрицы из $UT_3(Z)$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } C_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } a \cdot c \neq 0$$

Теорема. *Каждая из групп $G(C_i)$, $i = 1, 2, 3$ является свободной ранга 2.*

Список литературы

[1] *W. Holubowski* Free subgroups of infinite unitriangular matrices // Itern. J. of Algebra and Computation, Vol. 13, No. 1 (2003) 81-86.

[2] *Е.Н.Конышева* Двупорожденные подгруппы бесконечной унитреугольной группы // Материалы XLVII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск (2009), с.73-73.

ММФ НГУ, Новосибирск
E-mail: lisa.konysheva@gmail.com

Теоремы о свободе для произведений групп

А. Ф. Красников

Пусть k, m, n — натуральные числа, $k > 0$, $n \geq 0$, $m \geq n$, F — свободное произведение $X * A_{n+1} * \ldots * A_m$ свободной группы X с базой $x_1, \ldots, x_n$, и некоторых нетривиальных групп $A_{n+1}, \ldots, A_m$, N— такая нормальная подгруппа группы F, что $N \cap A_i = 1$ $(i = n+1, \ldots, m)$. Через F_{IJ} будем обозначать подгруппу в F, порожденную $\{x_i | i \in I\}$ и $\{A_j | j \in J\}$, $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $J \subseteq \{n+1, \ldots, m\}$. Вместо F_{IJ} будем писать F_J, если $n = 0$, и F_I, если $m = 0$. Через $\widehat{F}_{IJ}$ обозначим нормальное замыкание в F подгруппы, порожденной $\{x_i | i \notin I\}$ и $\{A_j | j \notin J\}$.

Теорема 1. *Пусть дополнение $I \cup J$ в множестве $\{1, \ldots, m\}$ состоит из одного элемента, $m > 2$, $r \in N$, $r \notin [N, N]$, R — нормальное замыкание элемента r в группе F. Если F/N — разрешимая группа без кручения, то $F_{IJ} \cap R[N, N] = F_{IJ} \cap [N, N]$ тогда и только тогда, когда $F_{IJ} \cap RN^{(k)} = F_{IJ} \cap N^{(k)}$.*

Следствие 1. *Пусть F/N — разрешимая и упорядоченная группа, дополнение $I \cup J$ в множестве $\{1, \ldots, m\}$ состоит из одного элемента, $m > 2$, $r \in N$, $r \notin [N, N]$ и F/N — полупрямое произведение своих подгрупп $F_{IJ}N/N$, $\widehat{F}_{IJ}N/N$. Равенство $F_{IJ} \cap RN^{(k)} = F_{IJ} \cap N^{(k)}$ имеет место тогда и только тогда, когда элемент r не сопряжен по модулю $[N, N]$ ни с каким словом из F_{IJ}.*

Теорема 2. *Пусть R — нормальное замыкание элементов $r_1, \ldots, r_p$ в группе F, где $p < m$, $R \leq N$ и F/N — разрешимая группа, обладающая субнормальным рядом факторы которого — упорядочиваемые группы. Тогда найдутся I и J такие, что $F_{IJ} \cap RN^{(k)} = F_{IJ} \cap N^{(k)}$ и $I \cup J$ состоит не менее чем из $m - p$ элементов.*

Следствие 2 ([1]). *Пусть F — свободная группа с базой $x_1, \ldots, x_n$ и R — нормальная подгруппа, порожденная в F элементами $r_1, \ldots, r_p$, где $p < n$. Тогда существует такое подмножество I множества $\{1, \ldots, n\}$, состоящее не менее чем из $n-p$ элементов, что для любого натурального k имеет место равенство $F_I \cap RF^{(k)} = F_I^{(k)}$.*

Следствие 3 ([2]). *Пусть F — свободное произведение $A_1 * \ldots * A_m$ некоторых нетривиальных групп $A_1, \ldots, A_m$ и R — нормальная подгруппа, порожденная в F элементами $r_1, \ldots, r_p$, где $p < m$. Предположим, что $R \subseteq D$, где D — декартова подгруппа группы F, а группы $A_1, \ldots, A_m$ — разрешимые группы, имеющие конечный нормальный ряд с абелевыми факторами без кручения. Тогда существует такое подмножество J множества $\{1, \ldots, m\}$, состоящее не менее чем из $m - p$ элементов, что $F_J \cap RD^{(k)} = F_J \cap D^{(k)}$.*

Список литературы

[1] Романовский Н. С., *Свободные подгруппы в конечно-определенных группах*, Алгебра и логика, 1977, т.16, N 1, 88-97.

[2] Романовский Н. С., *К теореме о свободе для произведений групп*, Алгебра и логика, 1999, т.38, N 3, 354-367.

Омск
E-mail: `phomsk@mail.ru`

Об одном инволютивном автоморфизме бернсайдовой группы $B_0(2,5)$

А. А. Кузнецов, А. К. Шлепкин, К. А. Филиппов

Пусть $\{x, y\}$ — образующие группы $B_0(2,5)$, где $B_0(2,5)$ — максимальная универсальная конечная двупорожденная группа периода 5 (ее порядок равен 5^{34}). Рассмотрим отображение φ следующего вида:

$$\varphi: \begin{cases} x \to y \\ y \to x. \end{cases}$$

Очевидно, φ является автоморфизмом группы $B_0(2,5)$.

Пусть $C_{B_0(2,5)}(\varphi)$ — централизатор автоморфизма φ в $B_0(2,5)$. Далее для краткости будем обозначать $C_{B_0(2,5)}(\varphi)$ через C.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Для C имеют место следующие утверждения:*

(1) $|C| = 5^{17}$.

(2) *Ступени нильпотентности и разрешимости для C равны 6 и 3, соответственно.*

(3) 3 — *минимальное число порождающих C.*

СибГАУ, КрасГАУ, Красноярск
E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru, ak_kgau@mail.ru

О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s

В. В. Лодейщикова

Для произвольного класса $\mathcal{M}$ групп обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание любого элемента принадлежит $\mathcal{M}$; $q\mathcal{M}$ — квазимногообразие, порожденное классом $\mathcal{M}$; $\mathcal{N}_c$ — многообразие нильпотентных групп ступени $\leq c$; $F_n(\mathcal{M})$ — свободная группа в квазимногообразии $\mathcal{M}$ ранга n.

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$, и натуральное число s, $s \geq 2$. Пусть $\mathcal{R}_{p^s}$ — многообразие групп, заданное в $\mathcal{N}_2$ тождествами:

$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^p = 1), \tag{1}$$

$$(\forall x)(x^{p^s} = 1). \tag{2}$$

В данной работе найдено описание класса Леви, порожденного квазимногообразием $qF_2(\mathcal{R}_{p^s})$.

Зафиксируем натуральное число n, $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{R}_{2^n}$ — многообразие групп, заданное в $\mathcal{N}_2$ формулами

$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^2 = 1), \tag{3}$$

$$(\forall x)(x^{2^n} = 1). \tag{4}$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ квазимногообразие групп, задаваемое в $\mathcal{R}_{2^n}$ квазитождеством

$$(\forall x)(\forall y)(x^{2^{n-1}} = 1 \to [x,y] = 1). \tag{5}$$

Теорема 1. *Класс $L(\mathcal{R})$ совпадает с многообразием $\mathcal{R}_{2^n}$.*

Следствие 1. *Класс $L(qF_2(\mathcal{R}_{2^n}))$ совпадает с многообразием $\mathcal{R}_{2^n}$.*

Следствие 2. *Множество квазимногообразий $\mathcal{K}$ из $\mathcal{R}_4$ таких, что $L(\mathcal{K}) = \mathcal{R}_4$, континуально.*

Теорема 2. *Существует класс $\mathcal{K}$ из $\mathcal{R}_8$ такой, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, — абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ не является нильпотентным ступени ≤ 2.*

Алтайский государственный технический университет, Барнаул
E-mail: victoria0504@mail.ru

О p-сверхразрешимости конечной группы

В. О. Лукьяненко

В данном сообщении рассматриваются только конечные группы.

Напомним, что подгруппы A и B группы G называются перестановочными, если $AB = BA$. Будем говорить, согласно [1], что подгруппа H группы G τ-квазинормальна в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами Q из G такими, что $(|H|, |Q|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$.

Согласно известной теореме Ф. Холла [2], группа разрешима, если каждая ее силовская подгруппа дополняема. Пример знакопеременной группы A_5 показывает, что в локальном случае данный результат неверен. Тем не менее, Б. Хупперт [3] доказал, что если силовская p-подгруппа P группы G имеет дополнение T в G, $|P| > p$ и подгруппа T перестановочна со всеми максимальными подгруппами из P, тогда группа G p-разрешима. Этот результат получил развитие в нескольких направлениях. Так, например, В.И. Сергиенко [4] доказал, что если группа G содержит дополнение T для некоторой своей силовской p-подгруппы P и существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$, подгруппа T перестановочна со всеми подгруппами из P порядка p^k и в случае $p^k = 2$ подгруппа P абелева, тогда группа G p-разрешима и ее p-длина равна 1. В дальнейшем М.Т. Боровиков [5] усилил этот результат доказав, что если группа G удовлетворяет данным условиям, тогда G p-сверхразрешима.

Нами установлен следующий факт в данном направлении, который обобщает все эти результаты.

Теорема. *Пусть $G = AT$, где A — холлова π-подгруппа группы G и подгруппа T p-нильпотентна для некоторого простого числа $p \notin \pi$, пусть P — силовская p-подгруппа из T и A τ-квазинормальна в G. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и A перестановочна со всеми подгруппами из P порядка p^k и со всеми циклическими подгруппами из P порядка 4 (если $p^k = 2$ и P — неабелева группа). Тогда группа G p-сверхразрешима.*

Список литературы

[1] Lukyanenko V. O., Skiba A. N. On weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups. Acta Math. Hungar., 125(3) (2009), 237–248.

[2] Hall P. A characteristic property of soluble groups. J. London Math. Soc., 12(2) (1937), 188–200.

[3] Huppert B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen. Arch. Math., 12 (1961), 161–169.

[4] Сергиенко В. И. Критерий p-разрешимости для конечных групп. Мат. зам., 9 (1971), 216–220.

[5] Боровиков М. Т. Группы с перестановочными подгруппами взаимно простых порядков. Вопр. алгебры, 5 (1990), 80–82.

Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины, Гомель
E-mail: vladimir.lukyanenko84@gmail.com

Дистанционно регулярные графы и их автоморфизмы

А. А. Махнев

Метод Хигмена состоит в применении теории характеров конечных групп к изучению автоморфизмов дистанционно регулярных графов. Следующий результат, полученный А.Л. Гаврилюком, развивает метод Хигмена.

Предложение. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с* i*-м целочисленным собственным значением* θ_i, H *— подгруппа из группы автоморфизмов графа* Γ, $r_1, \dots, r_u$ *— все неприводимые рациональные характеры группы* H, $x_1, \dots, x_u$ *— представители попарно различных рациональных классов элементов группы* H. *Пусть* χ_i *— характер проекции* ψ_{W_i} *мономиального представления* ψ *группы* H *на подпространство* W_i *из* $\mathbf{C}^v$ *размерности* m_i, *порожденное собственными векторами матрицы смежности графа* Γ, *отвечающими* θ_i. *Тогда для любого* $i = 0, \dots, d$ *выполняются следующие утверждения:*

(1) *существуют целые неотрицательные числа* $n_0, \dots, n_u$ *такие, что для любого* $j = 0, \dots, u$ *выполняется равенство* $\chi_i(x_j) = n_1 r_1(x_j) + \ldots + n_u r_u(x_j)$;

(2) *если* Q *– рациональная матрица, то для* $g \in H$ *имеем* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l, *взимно простого с* $|g|$;

(3) *если* H *– циклическая группа, порожденная элементом* g *простого порядка* p, *то* p *делит* $m_i - \chi_i(g)$, *в случае, когда* p *не делит* v/Q_{ij} *ни для какого* $j \in \{1, \dots, d\}$ *данное свойство делимости выполняется.*

Это предложение позволяет уточнить ряд результатов об автоморфизмов дистанционно регулярных графов. Например, А. Гаврилюк, А. Махнев и Д. Падучих классифицировали дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца. В частнсти, если диаметр Γ равен 3, то Γ — граф с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ и спектром $56^1, 8^{133}, -1^{56}, -7^{152}$.

Теорема. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, g *— автоморфизм простого порядка* p *графа* Γ, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω *— пустой граф и* $p \in \{2, 3, 19\}$;

(2) $p = 5$, Ω *является* n*-кликой,* $\alpha_3(g) = 5n$ *и либо* $n = 2$ *и* $\alpha_1(g) \in \{25, 100, 175, 250, 325\}$, *либо* $n = 7$ *и* $\alpha_1(g) \in \{20, 95, 170, 245\}$;

(3) $p = 3$, *и либо*

(*i*) Ω *— объединение* t *антиподальных классов,* $t = 3$, Ω *— объединение 6 изолированных треугольников и* $\alpha_1(g) = 15r - 6$ *или* $t = 6$, Ω *— объединение шести изолированных 6-клик и* $\alpha_1(g) = 15r - 9$, *либо*

(*ii*) Γ *содержит* t *антиподальных классов, пересекающих* Ω *по трем вершинам,* $|\Omega| = 3t$, $t \in \{3, 6, \dots, 15\}$ *и* $\alpha_1(g) = 15r - 3$;

(4) $p = 2$, *и либо*

(*i*) Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{6, 5, 1; 1, 1, 6\}$ *на 42 вершинах, и число* $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 5)/15$ *целое, либо*

(*ii*) Γ *содержит* t *антиподальных классов, пересекающих* Ω *по четырем вершинам,* $|\Omega| = 4t$, $t \in \{7, 9, \dots, 15\}$ *и число* $\chi_1(g) = (22t + \alpha_1(g))/15 - 19/5$ *целое, либо*

(*iii*) Γ *содержит* t *антиподальных классов, пересекающих* Ω *по двум вершинам,* $|\Omega| = 2t$, $t \in \{3, 5, \dots, 29\}$ *и число* $\chi_1(g) = (8t + \alpha_1(g))/15 - 19/5$ *целое.*

Институт математики и механики, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

В [1] доказано, что вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны сильно регулярному графу с параметрами $(81, 20, 1, 6)$, является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$ и спектром $81^1, 9^{123}$, $-1^{81}, -9^{123}$. В работе изучены автоморфизмы этого графа.

Теорема. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$, g — *автоморфизм простого порядка* p *графа* Γ, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $v = 328$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) Ω — *пустой граф,* $p = 41$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 82$ *или* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 18r + 144t - 72$ *и* $\alpha_3(g) = 72t - 32$;

(2) $p = 5$ *и либо*

(*i*) Ω — *объединение четырех изолированных ребер и* $\alpha_1(g) = 90t - 10$, *либо*

(*ii*) Ω — *объединение двух полных двудольных графов на* 14 *вершинах с удаленным максимальным паросочетанием и* $\alpha_1(g) = 30 + 90t$, *либо*

(*iii*) Ω — *регулярный граф степени* 11 *на* 48 *вершинах и* $\alpha_1(g) = 90t - 20$, *либо*

(*iv*) Ω — *регулярный граф степени* 16 *на* 68 *вершинах,* $\alpha_1(g) = 20 + 90t$ *и* $\Gamma - \Omega$ *не имеет кликовых* $\langle g\rangle$*-орбит;*

(3) $p = 3$, *и либо*

(*i*) Ω — *объединение* t *антиподальных классов,* $t \in \{1, 10, 13, 16, 19\}$ *и* $\alpha_1(g) = 54r + 28 - 28t$, *либо*

(*ii*) Ω *является* t*-кликой,* $t \in \{1, 4, 7\}$, $\alpha_3(g) = 3t$ *и* $\alpha_1(g) + t - 28$ *делится на* 54;

(4) $p = 2$ *и либо*

(*i*) Ω *является объединением* t *антиподальных классов,* $t \in \{6, 8, \ldots, 20\}$ *и число* $(\alpha_1(g) + 28t - 28)/54$ *нечетно, либо*

(*ii*) Γ *содержит* t *антиподальных классов, пересекающих* Ω *по двум вершинам,* $t \in \{2, 4, \ldots, 40\}$ *и число* $(\alpha_1(g) + 10t - 28)/54$ *нечетно.*

С помощью компьютерной программы GAP построен дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$, в котором окрестность каждой вершины — сильно регулярный граф с параметрами $(81, 20, 1, 6)$. Полная группа автоморфизмов этого графа имеет порядок $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 41$ и совпадает с $\mathrm{Aut}(L_2(81))$.

Список литературы

[1] *Кабанов В. В., Махнев А. А., Падучих Д. В.* О сильно регулярных графах с собственным значением 2 и их расширениях // Доклады академии наук 2010. Т. 431, N 5. С. 583–586.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: dpaduchikh@gmail.com

О конечных разрешимых группах ранга 2

В. С. Монахов, А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Пусть G — неединичная разрешимая группа. Это означает, что она обладает главным рядом $1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ \ldots \subseteq G_n = G$, в котором каждая фактор-группа G_{i+1}/G_i является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого p. Если p^n — наибольшая из степеней p, делящая порядки главных факторов группы G, то число $n = r_p(G)$ называется p-рангом группы G, [1, стр. 685]. Ранг $r(G)$ разрешимой неединичной группы G определяется равенством: $r(G) = \max_{p\in\pi(G)} r_p(G)$. Для единичной группы полагают $r(1) = 0 = r_p(1)$.

Разрешимая группа G ранга 1 называется сверхразрешимой. Она обладает, в частности, следующими свойствами: *G дисперсивна по Оре; нильпотентная длина G и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышают 2; p-длина $l_p(G)$ равна 1 для всех $p \in \pi(G)$.* Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини.

Для разрешимой группы G ранга 2 Хупперт [2, теорема 14] установил, что $\{2,3\}'$-*холлова подгруппа $G_{\{2,3\}'}$ нормальна в G и дисперсивна по Оре.* Этот результат развил Роуз [3, следствие 1], доказав, что *разрешимая группа ранга 2 либо дисперсивна по Оре, либо содержит секцию, изоморфную знакопеременной группе A_4.*

Новые свойства разрешимых групп ранга 2 получены в следующей теореме.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа ранга 2. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не выше 4.*
2. *Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше 5.*
3. *$l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$, а $l_2(G) \leq 2$ и $l_3(G) \leq 2$.*

Пример. Пусть S — экстраспециальная группа порядка 27. Полупрямое произведение $G = [S]GL(2,3)$ является разрешимой группой ранга 2 с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ порядка 3. Нильпотентная длина G равна 4; производная длина $G/\Phi(G)$ равна 5; 2-длина и 3-длина этой группы равна 2. Значит, полученные в теореме оценки являются точными.

Список литературы

[1] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.
[2] Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Zeitschr., 60 (1954), 409–434.
[3] Rose J. Sufficient conditions for the existence of ordered Sylow towers in finite groups. Journal of Algebra, 28 (1974), 116-126.

Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины
E-mail: monakhov@gsu.by, trofim08@yandex.ru

О симметрических расширениях графов

Е. А. Неганова, В. И. Трофимов

Пусть Γ и Δ — графы (под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и без кратных ребер). Следуя [1], назовем связный граф $\widetilde{\Gamma}$ *симметрическим расширением графа* Γ *посредством графа* Δ, если существуют такая вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа $\widetilde{\Gamma}$ и такая ее система импримитивности σ на множестве вершин графа $\widetilde{\Gamma}$, что фактор-граф $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ изоморфен графу Γ и блоки системы σ порождают в $\widetilde{\Gamma}$ подграфы, изоморфные Δ. В случае, если каждая вершина x графа Γ смежна не более, чем с одной вершиной из произвольного не содержащего x блока системы σ, назовем $\widetilde{\Gamma}$ *неразветвленным* симметрическим расширением Γ посредством Δ. В случае, если, более того, для произвольной вершины x графа Γ каждый блок системы σ, смежный в графе $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ с x^σ, содержит в точности одну смежную с x вершину, назовем $\widetilde{\Gamma}$ *накрывающим* симметрическим расширением Γ посредством Δ.

Понятие симметрического расширения одного графа посредством другого графа аналогично понятию расширения одной группы посредством другой группы и находит применение в теории групп. Особый интерес представляют симметрические расширения d-мерных решеток посредством конечных графов в связи с кристаллографией частиц ("молекул") с внутренней структурой. Напомним, что для целого положительного числа d под *d-мерной решеткой* Λ^d понимается граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы $(a_1, \dots a_d)$ из d целых чисел, и две вершины $(a'_1, \dots, a'_d)$ и $(a''_1, \dots, a''_d)$ смежны тогда и только тогда, когда $|a'_1 - a''_1| + \ldots + |a'_d - a''_d| = 1$.

Нами доказано, что *существуют такие связный граф* Γ *конечной валентности и конечный граф* Δ*, что имеется бесконечное множество накрывающих симметрических расширений графа* Γ *посредством* Δ*.* С другой стороны, нами показано, что *для любого целого положительного числа* d *и произвольного конечного графа* Δ *имеется лишь конечное множество неразветвленных симметрических расширений решетки* Λ^d *посредством* Δ*.*

Работа поддержана грантом РФФИ N 10-01-00349-а.

Список литературы

[1] *V. I. Trofimov.* Some topics in graph theory related with group theory. *Discrete Math.*, to appear.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nega-le@yandex.ru, trofimov@imm.uran.ru

Ограничения представлений специальных линейных групп на подгруппы типа $A_1 \times A_1$ в характеристике 2

А. А. Осиновская

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 2, $G = A_r(K)$, $r > 2$; $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — фундаментальные веса группы G; $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ — доминантный вес группы G; V_ω — простой G-модуль со старшим весом ω. Вес ω называется p-ограниченным, если все $a_i < p$. Пусть $H \subset G$ — подсистемная подгруппа типа $A_1 \times A_1$, т.е. подгруппа, порожденную корневыми подгруппами, ассоциированными со всеми корнями подсистемы корней $A_1 \times A_1$. Символом $\mathrm{Irr}(V_\omega|H)$ обозначим множество старших весов композиционных факторов (без учета их кратностей) ограничения модуля V_ω на подгруппу H. Множество весов группы H можно отождествить с множеством пар целых чисел при помощи следующего отображения $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \mapsto (a_1, a_2)$, а множество доминантных весов — с множеством $\mathbb{N}^2$ пар неотрицательных целых чисел. Поэтому мы отождествляем вес $\lambda \in \mathrm{Irr}(V_\omega|H)$ с парой (a_1, a_2) и пишем $\mathrm{Irr}(V_\omega|H) \subset \mathbb{N}^2$.

Теорема. *Пусть $p = 2$, $G = A_r(K)$, $H = A_1 \times A_1(K)$ и ω — 2-ограниченный доминантный вес. Тогда при $r = 3$*

$$\mathrm{Irr}(V_\omega|H) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le x_1, x_2 \le a_1 + a_2 + a_3,\ x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + a_3,$$
$$x_1 + x_2 \equiv a_1 + a_3 (\mathrm{mod}\ 2)\},$$

а при $r > 3$

$$\mathrm{Irr}(V_\omega|H) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le x_1, x_2 \le a_1 + \ldots + a_r,$$
$$x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_r\}.$$

Таким образом, оказывается, что, за исключением случая $r = 3$ и $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, множество $\mathrm{Irr}(V_\omega|H)$ совпадает с соответствующим множеством в характеристике 0. В то же время, строение и размерности модулей V_ω в характеристике 2 и характеристике 0 могут существенно различаться. Аналогичные результаты для представлений групп типа A_r в произвольной характеристике с локально малыми относительно характеристики старшими весами получены автором в [1].

Работа выполнена в рамках проекта Ф09М-076 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

[1] Осиновская А.А. Ограничения модулярных представлений специальных линейных групп на подгруппы типа $A_1 \times A_1$ // Сибирский математический журнал (принята к публикации).

Институт математики НАН Беларуси, Минск
E-mail: anna@im.bas-net.by

О решетке квазимногообразий разрешимых групп без кручения

А. Л. Полушин

Для произвольного класса $\mathcal{R}$ групп через $q\mathcal{R}$ обозначаем квазимногообразие, порожденное классом $\mathcal{R}$ (пишем qG, если $\mathcal{R} = \{G\}$), $L_q(\mathcal{M})$ — решетка квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{M}$.

Зафиксируем $n,\ n = p^k - p^{k-1},\ p$ — простое, $p \neq 2,\ k \in \mathbf{N}$. Будем рассматривать следующие группы:

$$G_{p^k} = gp(x_0, \ldots, x_{n-1}, y \,||\, [x_i, x_j] = 1\, (i, j = 0, \ldots, n-1),$$
$$x_i^y = x_{i+1}\, (i = 0, \ldots, n-2), x_{n-1}^y = x_0^{-1} x_{p^{k-1}}^{-1} \ldots x_{n-p^{k-1}}^{-1});$$

ТЕОРЕМА 1. *Решетка $L_q(qG_{p^k})$ является следующей цепью:*

$$\mathcal{E}, qZ, qG_p, \ldots, qG_{p^k}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть неабелева конечно-порожденная группа $K = A\lambda(y) \in \mathcal{AB}_{p^k}$ является расщепляемым расширением абелевой группы A без кручения при помощи бесконечной циклической группы (y). Тогда $qK = qG_{p^s}$, для некоторого $s (s = 1, \ldots, k)$.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (Мероприятие 1).

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: hvostovich@gmail.com

Произведение нильпотентных конечных групп

А. А. Родионов, Л. А. Шеметков

Мы рассматриваем следующую общую задачу: найти такие формации $\mathfrak{F}$, что произведение $G = AB$ нильпотентных холловых подгрупп A и B конечной группы G, чьи нормализаторы в G принадлежат $\mathfrak{F}$, само принадлежит этой формации.

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. Если π — некоторое множество простых чисел, то E^n_π — класс всех конечных групп с нильпотентной π-холловой подгруппой. Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то через $\mathfrak{F}_\pi$ мы обозначаем класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка конечной группы G; $\pi(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\pi(G)$.

Формация — это класс конечных групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется:

1) наследственной, если из $H \leq G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$;

2) насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{S}$ обозначается формация всех конечных разрешимых групп, $\mathfrak{N}$ — формация всех конечных нильпотентных групп. Разрешимая формация — это подформация из $\mathfrak{S}$.

Локальным спутником называют функцию f, сопоставляющую каждому простому числу q некоторую (возможно, пустую) формацию $f(q)$. Локальный спутник f называется полным, если $\mathfrak{N}_q f(q) = f(q)$ для любого простого q. Главный фактор H/K конечной группы G называют f-центральным в G, если $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(q)$ для любого простого делителя q порядка H/K. Через $LF(f)$ обозначают класс всех конечных групп с f-центральныи главными факторами. Согласно теореме Гашюца–Любезедер–Шмида, непустая формация $\mathfrak{F}$ насыщена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторого локального спутника f (в этом случае f называется локальным спутником формации $\mathfrak{F}$).

Определение. Пусть σ, τ — некоторые непустые множества простых чисел. Будем говорить, что насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является $N_{\sigma,\tau}$-замкнутой в классе $E^n_\sigma \cap E^n_\tau$, если из того, что нормализаторы σ-холловой и τ-холловой подгруппы любой группы из $E^n_\sigma \cap E^n_\tau$ принадлежат $\mathfrak{F}$, следует, что сама группа принадлежит $\mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть σ, τ — некоторые непустые множества простых чисел. Непустая наследственная насыщенная разрешимая формация $\mathfrak{F}$ является $N_{\sigma,\tau}$-замкнутой в классе $E^n_\sigma \cap E^n_\tau$ тогда и только тогда, когда формация $\mathfrak{F} \cap E^n_\sigma \cap E^n_\tau$ имеет полный локальный спутник f такой, что выполняются следующие условия:*

1) $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$;

2) $\pi(f(p)) \subseteq \{p\} \cup (\tau \setminus \sigma)$ при $p \in \sigma$ и $\pi(f(p)) \subseteq \{p\} \cup (\sigma \setminus \tau)$ при $p \in \tau$.

3) для любых двух различных простых чисел p, q включение $p \in \pi(f(q))$ влечет $q \in \pi(f(p))$.

Гомельский университет им. Ф. Скорины, Гомель
E-mail: shemetkov@gsu.by

Конечные группы с заданными свойствами примарных подгрупп

В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук

Рассматриваются только конечные группы.

В работе [1] было получено описание конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественным обобщением субнормальности и абнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности и $\mathfrak{F}$-абнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу K группы G назовем $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}$-абнормальной, если либо $H = G$, либо любая максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $H_i(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} = H_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В настоящем сообщении приводится полное описание конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, в случае, когда $\mathfrak{F}$ — класс всех p-нильпотентных, всех p-замкнутых групп.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-замкнутых групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G — группа одного из следующих типов:*

1) G — p-замкнутая группа;

2) $G = G_{p'} \rtimes G_p$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$, G_p — циклическая подгруппа Картера и любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G — группа одного из следующих типов:*

1) G — p-нильпотентная группа;

2) $G = G_p \rtimes G_q$, где $q \neq p$, G_q — циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

Список литературы

[1] Ebert G., Bauman S. A note on subnormal and abnormal chains // J.Algebra. – 1975. – Vol. 36. – 2. – P. 287-293.

УО ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель
E-mail: kolenchukova@gsu.by

Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп

Е. И. Тимошенко

Исследуются свойства частично коммутативных метабелевых групп.

Так как их факторгруппы по коммутанту являются свободными абелевыми, то по модулю коммутанта существует простая каноническая запись элементов. Поэтому важно получить каноническую запись для элементов из коммутанта. Доказана теорема о канонической записи "степени" любого элемента из коммутанта, которая обобщает ранее доказанный автором результат для групп, определенных деревьями.

Из теоремы о канонической записи следует, что существует ненулевой элемент δ из кольца многочленов Лорана такой, что $\delta-$ая степень коммутанта S'_Γ либо нулевая, либо не имеет модульного кручения. Используя каноническую запись, можно получить полезную информацию о строении аннуляторов элементов из коммутанта.

Изучается действие кольца многочленов на коммутанте, как модуле над этим кольцом. Оказывается, что если некоторая степень элемента из кольца аннулирует элемент из коммутанта, то данный элемент из кольца уже сам лежит в аннуляторе элемента из коммутанта. Затем приводится описание всех простых идеалов, являющихся аннуляторами элементов из коммутанта.

Ранее автором были найдены необходимые и достаточные условия для универсальной эквивалентности двух частично коммутативных метабелевых групп, определенных деревьями. Продолжая изучение вопроса об универсальной эквивалентности, на множестве вершин X определяющего графа Γ задается некоторое отношение эквивалентности, а на множестве классов эквивалентности отношение смежности. Таким образом возникает новый граф. Доказана теорема, утверждающая, что универсальные теории частично коммутативных метабелевых групп, определенных графом Γ и новым графом на множестве классов эквивалентности, совпадают. Построен пример, показывающий, что при другом определении эквивалентности на множестве вершин, аналогичная теорема не верна.

Установлено, что две частично коммутативные метабелевы группы, определенные циклами, универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда эти циклы изоморфны.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: `etim1945@live.ru`

Группа дифференциальных операторов, порождающих производящие функции для обобщенных функций Бесселя (ОБФ)

М. Д. Хриптун

Теория производящих функций развивается во многих направлениях и находит применения в различных областях науки и техники. ОБФ применяются в сложных задачах теории массового обслуживания, в теории чисел, в теории оболочек и других.

В этом докладе мы рассмотрим некоторые производящие функции для одного ОБФ вида:

$$U_\nu(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu+mk}}{k!\Gamma\bigl[(m-1)k+\nu+1\bigr]}, \qquad (z \in C\backslash(-\infty,0];\, \nu \in C), \tag{1}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, C — пространство комплексных чисел [1] (см. [1], стр. 287, формула (3)).

Функции (1) удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению m-го порядка

$$L\left(z,\, \frac{d}{dz},\, \nu\right) = 0 \tag{2}$$

специального вида. С помощью замены $\nu = y\,\frac{\partial}{\partial y}$ уравнение (2) превращается в уравнение m-го порядка в частных производных по z и y. Ищем решение этого уравнения с помощью производящих функций вида $U(z,y) = \sum\limits_{\nu} U_\nu(z)y^\nu$, где $U_\nu(z)$ есть решения уравнения (2). Доказано, что уравнение в частных производных является инвариантным по отношению к группе некоторых дифференциальных операторов, и эта группа используется для определения производящих функций для ОБФ.

Список литературы

[1] *Хриптун М. Д.* Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, 2. С. 287–293.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: khriptun@math.nsc.ru

[1] Функция $U_\nu(z,m)$ при $m=2$ есть модифицированная функция Бесселя $I_\nu(z) = U_{\nu_2}(z,2)$, где $\nu_2 = \nu$.

Кристаллографическая группа с двумя решетками типа $(3,3)$

В. А. Чуркин

При классификации кристаллографических групп с точностью до изоморфизма возникает задача однозначной определимости решетки трансляций абстрактными свойствами группы. Бибербах решил ее положительно для кристаллографических групп движений евклидовых пространств, Гарипов [1] — для пространств Минковского.

В [2] построена серия кристаллографических групп движений псевдоевклидовых пространств $\mathbb{R}^{p,\,q}$ при $\min\{p,\,q\} \geqslant 3$, каждая из которых содержит *две* различные автоморфно сопряженные *псевдоевклидовы решетки* — возможные решетки трансляций при реализации группы в качестве кристаллографической группы движений псевдоевклидова пространства. Здесь рассматривается простейшая из таких групп и с ее помощью строится кристаллографическая группа с большим числом псевдоевклидовых решеток.

Теорема. *1) Существует единственная с точностью до изоморфизма кристаллографическая группа W, порожденная двумя различными псевдоевклидовыми решетками ранга $\leqslant 6$, для которой центр и коммутант совпадают.*

2) Группа W реализуется как кристаллографическая группа движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{3,\,3}$.

3) Группа W содержит ровно две псевдоевклидовы решетки и эти решетки автоморфно сопряжены.

4) Группа автоморфизмов W по модулю центральных автоморфизмов изоморфна центральному произведению группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ и диэдральной группы порядка 8.

5) Декартова степень W^n является кристаллографической группой движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{3n,\,3n}$, содержит ровно 2^n псевдоевклидовых решеток и любые две из них автоморфно сопряжены.

Список литературы

[1] *Р.М. Гарипов* Группы орнаментов на плоскости Минковского, Алгебра и логика, 42, N 6 (2003), 655–682.

[2] *В.А. Чуркин* Ослабленная теорема Бибербаха для кристаллографических групп в псевдоевклидовых пространствах, Сибирский матем. журнал, 51, N 3 (2010), 700–714.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: churkin@math.nsc.ru

О доминионе полной подгруппы нильпотентной группы без кручения

С. А. Шахова

Понятие доминиона возникло в [1] и изучалось в различных классах универсальных алгебр, в том числе и в квазимногообразиях [2].

Доминионом подгруппы H группы G в квазимногообразии групп $\mathcal{N}$, обозначаемом $dom_G^{\mathcal{N}}(H)$, называется множество элементов $g \in G$ таких, что для любых двух гомоморфизмов $\varphi, \psi : G \to N \in \mathcal{N}$, совпадающих на H, $\varphi(g) = \psi(g)$.

Обозначим через H^G нормальное замыкание подгруппы H в группе G и зафиксируем натуральное число $n \geq 2$. Верна следующая

Теорема. *Пусть $\mathcal{N}$ — квазимногообразие групп без кручения ступени нильпотентности $\leq n$, $G \in \mathcal{N}$, H — полная подгруппа группы G. Тогда $dom_G^{\mathcal{N}}(H) \subseteq H^G$.*

Список литературы

[1] Isbell J.R., Epimorphisms and dominions, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, Springer, New York, 1965, 232-246.

[2] Budkin A., Dominions in quasivarieties of universal algebras, Studia Logica, 78, 1-2 (2004), 120-127.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: sashakhova@gmail.com

Показатели для круговых полей

А. В. Шпонько

Пусть $\zeta_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. В статье [1] для некоторых случаев дано описание подгруппы круговых единиц $K_m \subseteq U(I(Q(\zeta_m)))$. Из него в частности вытекает, что для простого $m > 3$ и g, являющегося первообразным корнем по модулю m, можно записать

$$K_m = \langle -\zeta_m \rangle \times \prod_{i=1}^{\frac{m-3}{2}} \langle \frac{1-\zeta_m^{g^i}}{1-\zeta_m^{g^{i-1}}} \rangle.$$

Известно, что, при условии справедливости обобщенной гипотезы Римана, для простых $m < 163$ $K_m = U(I(Q(\zeta_m)))$, поэтому 163-круговое поле представляет особый интерес.

Лемма([2]) *Пусть простое рациональное число p не делит простое $m > 3$, тогда показатели*

$$\exp(U(I(Q(\zeta_m))/pI(Q(\zeta_m)))) = p^f - 1, \text{ где } f = \min\{j \geq 1 \mid p^j \equiv 1 \pmod m\}\ .$$

Далее, введем обозначения $K_m^p = K_m + pI(Q(\zeta_m))/pI(Q(\zeta_m))$ и $U_m^p = U(I(Q(\zeta_m))/pI(Q(\zeta_m)))$. Отметим, что в приведенной формуле f зависит только от класса вычетов, к которому принадлежит p по модулю m. Поэтому правдоподобной казалась

Гипотеза 1. *Пусть p и q простые рациональные числа, причем $p \equiv q \pmod{163}$. В таком случае $exp(K_{163}^p) = exp(U_{163}^p) <=> exp(K_{163}^q) = exp(U_{163}^q)$*

Однако, эта гипотеза неверна

Теорема. *Существуют такие простые числа p и q ,что $p \equiv q \pmod{163}$, $exp(K_{163}^p) < exp(U_{163}^p)$ и $exp(K_{163}^q) = exp(U_{163}^q)$*

В качестве конкретных значений p и q можно указать $p = 59$ и $q = 5927$. Кроме того, вычисление показателей позволяет выдвинуть гипотезы

Гипотеза 2. *Для достаточно больших простых $p \neq m$ $exp(K_{163}^p) = exp(U_{163}^p)$.*

Гипотеза 3. *Для простых $p \neq 163$ и $q \neq 163$, таких, что $p < q$ и $p \equiv q \pmod{163}$, из $exp(K_{163}^p) = exp(U_{163}^p)$ следует $exp(K_{163}^q) = exp(U_{163}^q)$*

Список литературы

[1] *Алеев Р.Ж., Такшеева В.С.* Порождающие группы круговых единиц / Вестник Челябинского Государственного Университета: выпуск 10. С. 121–129. - Издательство ЧелГУ: Челябинск, 2008.

[2] *Алеев Р.Ж.* Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: Дис. д-ра физ.-мат. наук. —Р.Ж.Алеев .- 2002. 354 с.

ЮУрГУ, Челябинск
E-mail: ashponko@gmail.com

The Fibonacci automorphism of free Burnside groups

A. S. Pahlevanyan

Consider an automorphism $\varphi : F_2 \to F_2$ of absolutely free group F_2 of rank 2 with free generators $\{a, b\}$, given on generators by formulae $\varphi : a \mapsto b, \varphi : b \mapsto ab$. This automorphism is called after Fibonacci since the lengths of words $\varphi^k(a)$ are equal to members of the numerical Fibonacci sequence. This automorphism naturally induces an automorphism of free Burnside group $B(2, n)$, which we denote by the same letter φ. Let us remind that by free Burnside group $B(2, n)$ is called the quotient $F_2/{F_2}^n$, where ${F_2}^n$ is the subgroup generated by all possible n-powers of elements of F_2. Obviously the group $B(2, n)$ has the presentation $B(2, n) =< a_1, a_2 | A^n = 1, \textit{for all words}\, A = A(a_1, a_2) >$.

Theorem 1. *For arbitrary odd $n \geq 665$ and arbitrary even $n = 16k \geq 8000$ the Fibonacci automorphism φ has infinite order in the group $Aut(B(2, n))$.*

Theorem 1 strengthens similar result of paper [1], decreasing the bound of odd n from $n > 10^{10}$ to $n \geq 665$.

Theorem 2. *Any cyclic shift of arbitrary Fibonacci word contains no fractional power with exponent grater than $2 + ((\sqrt{5} + 1)/2)$ and, for any real number $\varepsilon > 0$, it contains a fractional power with exponent grater than $2 + ((\sqrt{5} + 1)/2) - \varepsilon$.*

Theorem 2 strengthens the lemma 1.3 of paper [1] by E.A.Cherepanov, where it is proved that no 24-th power of a non-empty word occurs in the cyclic Fibonacci sequence. Theorem 2 strengthens the result of paper [2] by F.Mignosi and G.Pirillo, where a similar statement is proved without the assumption of cyclicity of the word f_k.

The proof of Theorem 1 is based on Theorem 2 and some results of famous monograph [3] by S.I.Adian.

References

[1] Cherepanov E. A. Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group, *Communications in Algebra,* **33:2**, (2005), 539-547.

[2] Mignosi F., Pirillo G., Repetitions in the Fibonacci infinite word, *Informatique the'orique et Applications.* **26:3**, (1992), 199-204.

[3] Adian S. I. *The Burnside Problem and Identities in Groups,* M.: Nauka,

Yerevan State University, Yerevan, Armenia
E-mail: apahlevanyan@ysu.am

A generalization of the Baer-Suzuki theorem for π-elements

D. O. Revin

In this communication, p denotes a prime and π denotes a set of primes.

The following two famous theorems hold [1, 2, 3].

Theorem (L. Sylow) *Let G be a finite group and let p be a prime. Then*

(E) *G has a p-subgroup of index not divisible by p (the so-called p-Sylow subgroup);*
(C) *every two p-Sylow subgroups of G are conjugate;*
(D) *every p-subgroup is included in a p-Sylow subgroup.*

Theorem (R. Baer, M. Suzuki) *Let G be a finite group, D be a conjugacy class of G, and let p be a prime. Assume $\langle x, y\rangle$ is a p-group for every $x, y \in G$. Then $\langle D\rangle$ is a p-group.*

It is well known that one cannot replace p by a set of primes π in the Sylow Theorem. Following P. Hall [4], for a finite group G, we write

$G \in E_\pi$, if G has a π-subgroup of index which is divisible by no number in π (the so-called π-Hall subgroup);
$G \in C_\pi$, if $G \in E_\pi$ and every two π-Hall subgroups of G are conjugate;
$G \in D_\pi$, if $G \in C_\pi$ and every π-subroup is included in a π-Hall subgroup.

Following H. Wielandt [5], we say that *the π-Sylow theorem holds for a finite group G* if $G \in D_\pi$.

In the Baer-Suzuki Theorem, one cannot replace p by a set of primes π as well as in the Sylow Theorem. We say that *the π-Baer-Suzuki theorem holds for a finite group G* and write $G \in BS_\pi$ if $\langle D\rangle$ is a π-subgroup for every conjugacy class D of G such that every two elements of D generate a π-subgroup.

The following theorem is a generalization of the original Baer-Suzuki Theorem.

Theorem 1 *$D_\pi \subseteq BS_\pi$ for every set π of primes.*

In other words, if the π-Sylow theorem holds for a finite group G then the π-Baer-Suzuki theorem holds for G.

In the proof of Theorem 1, the Classification of Finite Simple Groups is used. Furthermore Theorem 1 depends on the characterization of the class D_π [6].

References

[1] M. L. Sylow, Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann., 5 (1872), no. 4, 584–594.
[2] R. Baer, Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen, Math. Ann., 133 (1957), 256–270.
[3] M. Suzuki, Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed, Ann. of Math. (2), 82 (1968), 191–212.
[4] P. Hall, Theorems like Sylow‘s, Proc. London Math. Soc., 6, no. 22 (1956), 286–304.
[5] H. Wielandt, Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen, Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960, 268–278.
[6] D. O. Revin, The D_π-property in finite simple groups, Algebra and Logic, 47 (2008), no. 3, 210–227.

Sobolev Insitute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: revin@math.nsc.ru

On a Non-unitarizable groups

H. R. Rostami

A representation $\pi : G \to B(H)$ of a group G on a Hilbert space H is called unitarizable, if there exists an invertible operator T such that the operator $T^{-1}\pi(G)T$ is a unitary operator for any element $g \in G$. The group is called unitarizable, if every uniformly bounded representation $\pi : G \to B(H)$ is unitarizable. J.Dixmier and M.M.Day proved that every amenable group is unitarizable. The question of whether the converse holds has been open since then.

The well-known theorem of Adian (see [1]) asserts that free Burnside group $B(m, n)$ is non-amenable for any odd number $n \geq 665$ and $m > 1$. Using mentioned theorem by Adian N.Monod and N.Ozawa proved (see [2]) that the free Burnside groups are non unitarizable for all composite odd numbers $n = n_1 n_2$, where $n_1 \geq 665$.

V.Atabekyan proved that for the same odd numbers the unitarizability of subgroups of free Burnside groups is equivalent to amenability.

Using the result of paper [3] we prove the following

Theorem. *Suppose $n = n_1 n_2$ is arbitrary composite odd number, where $n_1 \geq 665$. There are continuum many non-isomorphic 4-generated groups that satisfy the identity $X^n = 1$, each one of which is non-unitarizable and at the same time uniformly non-amenable.*

References

[1] S. I. Adian, Random walks on free periodic groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46**:6 (1982), 1139–1149.

[2] N. Monod, N. Ozawa, The Dixmier problem, lamplighters and Burnside groups, *Journal of Functional Analysis* (2010) **258**:1, 255–259.

[3] V. S. Atabekyan, Uniform nonamenability of subgroups of free Burnside groups of odd period, *Mathematical Notes* (2009), **85**:4, 496–502.

Chair of Algebra and Geometry, Yerevan state University, Yerevan
E-mail: `hrrostami@ysu.am`

Uniqueness of the prime graph of $\mathrm{L}_{16}(2)$

A. V. Zavarnitsine

The *prime graph* $\Gamma(G)$ of a finite group G is the graph whose vertex set is the set $\pi(G)$ of prime divisors of the order $|G|$ in which two distinct vertices $p, q \in \pi(G)$ are joined by an edge if and only if G contains an element of order pq.

It is often the case that the structure of the prime graph carries much information about the underlying group. For example, the finite groups whose prime graph is disconnected have a very limited structure as shown by the Gruenberg-Kegel theorem [2].

Of particular interest are the finite groups that are uniquely determined by their prime graph. The group G is said to be *recognizable by graph* if, for every finite group H, the equality of vertex-labeled graphs $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ implies the isomorphism $H \cong G$. Examples of recognizable by graph groups are the simple groups $\mathrm{G}_2(7)$, J_4, ${}^2\mathrm{G}_2(q)$, $q > 3$, see [3]. One observes that all the known examples of such groups G have the property that $\Gamma(G)$ is disconnected. Whether there exists a recognizable-by-graph group whose prime graph is connected or there does not, has been unknown so far.

It turns out that proving recognizability of G by graph may require the knowledge of subtle properties of modular representations for G such as the presence of nontrivial fixed points of large prime-order elements. In this paper, we show how one can use this information in the case of 2-modular representations for $\mathrm{L}_{16}(2)$.

The main result of the present talk can be stated as follows:

Theorem 1. *If G is a finite group such that $\Gamma(G) = \Gamma(\mathrm{L}_{16}(2))$ and $G/\mathrm{O}_2(G) \cong \mathrm{L}_{16}(2)$ then $\mathrm{O}_2(G) = 1$.*

This, together with [1], gives the first example of a recognizable-by-graph group whose prime graph is connected.

Corollary 2. $\mathrm{L}_{16}(2)$ *is recognizable by its prime graph.*

We remark that an attempt to give a complete proof that $\mathrm{L}_{16}(2)$ is recognizable by graph was made in [1]. However, there appears to be a gap in the proof of Lemma 3.4 (p. 56, line 20), where Lemma 2.5 is applied to conclude that $(2^{15} - 1)p$ is an element order of G. However, Lemma 2.5 cannot be used in the case $p = 2$.

References

[1] B. Khosravi, B. Khosravi, B. Khosravi, A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph. Manuscr. Math. 2008. V. 126. N 1. 49–58.

[2] J. S. Williams, Prime graph components of finite groups. J. Algebra. 1981. V. 69. N 2. 487–513.

[3] A. V. Zavarnitsine, On recognition of finite groups by the prime graph. Algebra and Logic. 2006. V. 45. N 4. 220–231.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: zav@math.nsc.ru

V. Секция “ТЕОРИЯ КОЛЕЦ”

Полупростые конечномерные алгебры Хопфа

В. А. Артамонов

Изучается строение полупростых конечномерных алгебр Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k, характеристики которого не делит размерность H. Предполагается, что в каждой размерности $d > 1$ существует не более одного неприводимого H-модуля размерности d. При некоторых предположениях показывается, что число таких неприводимых модулей равно 1. В этом случае порядок группы групповых элементов дуальной алгебры Хопфа делится на d и делит d^2. Если этот порядок равен d^2, то дается явное описание коумножения и антипода в H. Все такие алгебры классифицируются с точностью до изоморфизма.

МГУ, мех-мат, кафедры высшей алгебры, Москва
E-mail: artamon@mech.math.msu.su

Гомоморфные образы специальных йордановых диалгебр

В. Ю. Воронин

Диалгеброй называется линейное пространство с двумя билинейными операциями умножения $\vdash$ и $\dashv$. В работе [1] показано, как для некоторого многообразия алгебр (ассоциативных, альтернативных, лиевых, йордановых и т. п.) определить соответствующее многообразие диалгебр. Йордановы диалгебры далее изучались в работе [2], где по аналогии с обычными алгебрами вводится понятие специальной йордановой диалгебры. Все неспециальные йордановы диалгебры называются исключительными. Авторы работы [2] поставили ряд проблем по обобщению классических результатов для специальных йордановых алгебр на случай диалгебр. Автором решена бóльшая часть из этих проблем. В частности, в данной работе доказано следующее утверждение, которое является обобщением классического результата, принадлежащего Кону.

Теорема. *Существует двупорождённая йорданова диалгебра, гомоморфный образ которой является исключительной йордановой диалгеброй.*

Таким образом, класс специальных йордановых диалгебр незамкнут относительно взятия гомоморфных образов и, следовательно, не является многообразием. Но класс гомоморфных образов специальных йордановых диалгебр уже будет являться многообразием.

В работе [3] показано, как, используя понятие бимодуля в смысле Эйленберга, по данному классу алгебр можно определить соответствующий класс диалгебр. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. *Многообразие диалгебр, соответствующее в смысле Эйленберга многообразию гомоморфных образов специальных йордановых алгебр, совпадает с многообразием гомоморфных образов специальных йордановых диалгебр.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты МД-2438.2009.1, НШ-3669.2010.1), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт N 02.740.11.5191).

Список литературы

[1] *П. С. Колесников,* Многообразия диалгебр и конформные алгебры, Сиб. мат. журн., 49, 2 (2008), 322–339.

[2] *M. Bremner, L. A. Peresi,* Special identities for quasi-Jordan algebras, to appear in Comm. Algebra (accepted 29 March 2010).

[3] *Пожидаев А. П.,* 0-Диалгебры с бар-единицей и неассоцитивные алгебры Рота—Бакстера, Сиб. матем. журн., 50, 6 (2009), 1356–1369.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: voronin.vasily@gmail.com

Подалгебры в алгебре многочленов над полем положительной характеристики и якобиан

А. Гаврилов

Рассматривается подалгебра R в алгебре многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ над полем характеристики $p > 0$. Пусть $J(R)$ есть идеал, порожденный якобианами семейств многочленов из R. Показано, что если это главный идеал, то его $\frac{p^n(p-1)}{2}$ -я степень содержится в $R[x_1^p, \ldots, x_n^p]$.

Новосибирск
E-mail: gavrilov19@gmail.com

Структура биалгебры Мальцева на простой семимерной алгебре Мальцева

М. Е. Гончаров

Биалгебры Ли — это одновременно алгебры Ли и коалгебры Ли, коумножение которых является 1-коциклом. Биалгебры Ли были введены Дринфельдом [1] для изучения решений классического уравнения Янга — Бакстера. В работах [2, 3] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, были определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга — Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга — Бакстера, был определен в [4], где было доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу. В работе [5] изучались альтернативные Д-биалгебры и их связь с альтернативным уравнением Янга-Бакстера. В частности, были описаны все структуры альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона.

Определение. Пара (A, Δ), где A — векторное пространство над F, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй*. При этом отображение Δ называется *коумножением*.

Для элемента $a \in A$ будем использовать обозначение $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

На пространстве A^* определим умножение, полагая $\langle fg, a\rangle = \sum\limits_a \langle f, a_{(1)}\rangle\langle g, a_{(2)}\rangle$. Полученная алгебра называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ).

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A, Δ) задаёт бимодульное действие на A, которое определяется следующим образом $f \rightharpoonup a = \sum a_{(1)}\langle f, a_{(2)}\rangle$ и $a \leftharpoonup f = \sum\langle f, a_{(1)}\rangle a_{(2)}$.

Пусть теперь A — произвольная алгебра, на которой задано коумножение Δ и A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ). Алгебра A задаёт бимодульное действие на пространстве A^*, определенное формулами

$$\langle f \leftharpoondown a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \text{ и } \langle b \rightharpoondown f, a\rangle = \langle f, ab\rangle.$$

Рассмотрим пространство $D(A) = A \oplus A^*$ и зададим на нём умножение, полагая

$$(a + f) * (b + g) = (ab + f \rightharpoonup b + a \leftharpoonup g) + (fg + f \leftharpoondown b + a \rightharpoondown g).$$

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем F, а A и A^* — подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть дублем Дринфельда.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие F–алгебр и A — алгебра из M, на которой дополнительно задано коумножение Δ. Тогда пару (A, Δ) будем называть *M-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию M.

Определение. Антикоммутативная алгебра M называется алгеброй Мальцева, если для любых $x, y, z, t \in M$ выполняется

$$J(x, y, zt) = J(x, y, z)t,$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — якобиан элементов x, y, z.

Пусть M — простая нелиева алгебра Мальцева, на которой задана структура биалгебры Мальцева с коумножением Δ. Тогда справедлива

Теорема. Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики не равной 2. Дубль либо дубль Дринфельда $D(M) = M + R$, где R — радикал алгебры $D(M)$ с тривиальным умножением, либо $D(M) = M_1 \oplus M_2$ — прямая сумма двух простых алгебр Мальцева. В первом случае $\Delta(a) = [r, a]$, где r — кососимметрическое решение мальцевского аналога классического уравнения Янга-Бакстера, то есть $C_M(r) = 0$, где

$$C_M(r) = \sum_{ij} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j + b_i \otimes b_j \otimes a_i a_j + b_j \otimes a_i a_j \otimes b_i.$$

Во втором случае $\Delta(a) = [r, a]$, где r — кососимметрический элемент из $M \otimes M$ такой, что для любых $a, b \in M$:

$$C_A(r)(1 \otimes J_{b,a} \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes J_{a,b}) = [C_A(r), ab] + [C_A(r), b](1 \otimes 1 \otimes a) - [C_A(r), a](1 \otimes b \otimes 1),$$

где $cJ_{a,b} = [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]$.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-3669.2010.1, МД-2438.2009.1), интеграционного проекта СО РАН N 97, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт 02.740.11.0429), Лаврентьевского гранта для коллективов молодых учёных СО РАН, постановление Президиума СО РАН N 43 от 04.02.2010, а также стипендии Независимого Московского университета.

Список литературы

[1] Дринфельд В. Г., Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера // ДАН СССР, 268, N 2, 1983, 285–287.

[2] Желябин В. Н., Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли // Алгебра и логика 36 (1997), 3–25.

[3] Желябин В. Н., Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли // Сибирский математический журнал, 39, 2 (1998), 299–308.

[4] Желябин В. Н., Об одном классе йордановых Д-биалгебр // Алгебра и анализ 11 (1999), вып. 4, 64–94.

[5] Гончаров М. Е., Классическое уравнение Янга-Бакстера на альтернативных алгебрах. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли-Диксона // Сибирский математический журнал 48 5 (2007), 1009–1025.

[6] Vershinin V. V., On Poisson-Malcev structures // Acta Applicandae Mathematicae 75 (2003), 281–292.

Институт Математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: `gme@math.nsc.ru`

О группе обратимых элементов конечных локальных колец характеристики p

Е. В. Журавлев

Конечное кольцо с единицей называется локальным или вполне примарным, если все его делители нуля образуют единственный максимальный идеал J. В работе [1] полностью описана структура мультипликативной группы колец Галуа. В частности, доказано, что мультипликативная группа обратимых элементов R^* произвольного коммутативного конечного локального кольца R является прямым произведением некоторой циклической подгруппы $< b >$ порядка $p^r - 1$ и подгруппы обратимых элементов $1 + J$.

Пусть R — конечное коммутативное локальное кольцо с единицей такое, что $J^4 = 0$ и $J^3 \neq 0$. Тогда $R/J = GF(p^r) = F$ и характеристика кольца равна p^k для некоторого $1 \leq k \leq 4$. В настоящей работе определено разложение группы обратимых элементов $R^* =< b > \times (1+J)$ кольца R в прямое произведение циклических подгрупп в некоторых частных случаях.

Теорема 1. *Пусть R — конечное коммутативное локальное кольцо характеристики p,*

$$\dim_F J/J^2 = 3,\ \dim_F J^2/J^3 = 1,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

Тогда

(1) *если $p = 2$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times (\mathbb{Z}_4^r)^2 \times \mathbb{Z}_2^r$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{2^r-1} \times \mathbb{Z}_4^r \times (\mathbb{Z}_2^r)^3$;*

(2) *если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times (\mathbb{Z}_3^r)^3$;*

(3) *если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$,*

где $\mathbb{Z}_n$ — кольцо вычетов по модулю n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть R — конечное коммутативное локальное кольцо характеристики p,*

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2/J^3 = 2,\ \dim_F J^3 = 1,\ J^4 = 0.$$

Тогда

(1) *если $p = 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times \mathbb{Z}_9^r \times (\mathbb{Z}_3^r)^3$ или $R^* \cong \mathbb{Z}_{3^r-1} \times (\mathbb{Z}_3^r)^5$;*

(2) *если $p > 3$, то $R^* \cong \mathbb{Z}_{p^r-1} \times \left(\mathbb{Z}_p^r\right)^5$.*

Доказательство теорем основано на результатах классификации конечных локальных колец, полученных автором в работе [2].

Список литературы

[1] Raghavendran R. Finite associative rings // Compositio Math. - 1969. - v.21. - p.195-229.

[2] Журавлев Е.В. Локальные кольца порядка p^6 с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона // Сибирские электронные математические известия [Электронный ресурс]. - 2006. Том 3. - С. 15-59. - Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru.

[3] Chikunji C. J. On unit groups of completely primary finite rings // Math. J. Okayama Univ. - 2008. - v.50. - p.149-160.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: evzhuravlev@mail.ru

О тождествах пространств линейных преобразований

И. М. Исаев, А. В. Кислицин

Пусть F — некоторое поле, $F[X]$ — свободная ассоциативная алгебра от множества порождающих X. Будем говорить, что некоторый полином $f(x_1, x_2, \ldots, x_t) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_t]$ — тождество векторного пространства $\vec{K}$ над полем F, если f является слабым тождеством пары $(K, \vec{K})$, где K — некоторая F-алгебра (подробнее с понятием слабого тождества можно ознакомиться в работе [1]). Назовем векторное пространство $\vec{K}$ конечно базируемым, если все тождества $\vec{K}$ следуют из некоторой конечной совокупности тождеств $\vec{K}$. В противном случае будем говорить, что $\vec{K}$ — не конечно базируемое пространство (НКБ-пространство).

Рассмотрим F-алгебры $A_1 =< e_{11}, e_{12} >$, $A_2 =< e_{11}, e_{21} >$, $A = A_1 \oplus A_2$ и соответствующие векторные пространства $\vec{A_1} =< e_{11}, e_{12} >$, $\vec{A_2} =< e_{11}, e_{21} >$, $\vec{A} = \vec{A_1} \oplus \vec{A_2}$ над полем F.

Для указанных объектов справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Векторное пространство $\vec{A} = \vec{A_1} \oplus \vec{A_2}$ над бесконечным полем F является НКБ-пространством с базисом тождеств*

$$\{x[y,u]v, [x,y][u,v], [x,y]z_1 z_2 \ldots z_k[u,v] | k = 1, 2, \ldots\}.$$

Теорема 2. *Векторное пространство $\vec{A} = \vec{A_1} \oplus \vec{A_2}$ над полем F из q элементов является НКБ-пространством с базисом тождеств*

$$\{x[y,u]v, [x,y][u,v], x(y-y^q)z, (x-x^q)(y-y^q), [x,y](z-z^q),$$
$$(x-x^q)[y,z], [x,y]z_1 z_2 \ldots z_k[u,v] | k = 1, 2, \ldots\}.$$

Замечание. *В рассмотренных случаях алгебры A_1, A_2, A, а также пространства $\vec{A_1}$, $\vec{A_2}$ конечно базируемы.*

В [2] рассматривалась неассоциативная алгебра $\overline{V} = V \oplus E$ (где V — некоторое векторное пространство, E — подпространство пространства линейных преобразований V) с умножением $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = v_1 e_2$ (ve — результат действия преобразования e на вектор v). Если положить $E = \vec{A}$, то из теорем 1, 2 и результатов работы [2] вытекает

Следствие. *Алгебра $\overline{V} = V \oplus \vec{A}$ над полем F не имеет конечного базиса тождеств.*

Список литературы

[1] Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12, N 1.

[2] И. В. Львов. Конечномерные алгебры с бесконечными базисами тождеств // Сибирский математический журнал. – 1978. – Т. XIX, N 1.

Кафедра алгебры ФМиИ АлтГПА, Барнаул
E-mail: isaev@uni-altai.ru, alexey_kislicin@mail.ru

О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок

В. Н. Желябин, И. Б. Кайгородов

Под δ-дифференцированием мы понимаем ϕ — линейное отображение алгебры, удовлетворяющее условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

В ряде работ В. Т. Филиппова рассматривались δ-дифференцирования первичных альтернативных, лиевых и мальцевских алгебр. В дальнейшем, исследование δ-дифференцирований было продолжено И. Б. Кайгородовым и П. Зусмановичем.

Определим супералгебру, называемую дубль Кантора. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с единицей 1 и $\{,\} : \Gamma \to \Gamma$ — суперкососимметрическое билинейное отображение, которое мы будем называть скобкой. По супералгебре Γ и скобке $\{,\}$ можно построить супералгебру $J(\Gamma, \{,\})$. Рассмотрим $J(\Gamma, \{,\}) = \Gamma \oplus \Gamma x$ — прямую сумму пространств, где Γx — изоморфная копия пространства Γ. Пусть a, b — однородные элементы из Γ. Тогда операция умножения $\cdot$ на $J(\Gamma, \{,\})$ определяется формулами

$$a \cdot b = ab, a \cdot bx = (ab)x, ax \cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x, ax \cdot bx = (-1)^{p(b)}\{a, b\}.$$

Положим $A = \Gamma_0 + \Gamma_1 x, M = \Gamma_1 + \Gamma_0 x$. Тогда $J(\Gamma, \{,\}) = A + M$ — Z_2-градуированная алгебра. Скобка $\{,\}$ называется йордановой, если супералгебра $J(\Gamma, \{,\})$ является йордановой супералгеброй. В случае, когда скобка $\{,\}$ супералгебры Γ имеет вид $\{a, b\} = D(a)b - aD(b)$, где D — четное дифференцирование супералгебры Γ, супералгебра $J(\Gamma, \{,\})$ называется супералгеброй векторного типа.

Однородное линейное отображение $\phi : A \to A$ будем называть δ-супердифференцированием, если для однородных $x, y \in A$ выполнено

$$\phi(xy) \quad = \quad \delta(\phi(x)y + (-1)^{p(x)p(\phi)}x\phi(y)).$$

Результатом исследований является следующая

Теорема. *Пусть $J = J(\Gamma, \{,\})$ — простая унитальная супералгебра йордановых скобок над полем характеристики отличной от 2. Тогда либо J не имеет нетривиальных δ-дифференцирований и δ-супердифференцирований, либо J — супералгебра векторного типа. Если J — супералгебра векторного типа, то при $\delta \neq \frac{1}{2}$ супералгебра J не имеет нетривиальных δ-дифференцирований и δ-супердифференцирований. Каждое $\frac{1}{2}$-дифференцирование является четным $\frac{1}{2}$-супердифференцированием и множество $\frac{1}{2}$-супердифференцирований совпадает с $R^*(J) = \{R_z | z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1\}$, причем при $D(z) \neq 0$ отображение R_z будет являться нетривиальным $\frac{1}{2}$-супердифференцированием.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-3669.2010.1, МД-2438.2009.1), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракты N 02.740.11.0429, N 02.740.11.5191), интеграционного проекта СО РАН N 97, Лаврентьевского гранта для коллективов молодых учёных СО РАН, постановление Президиума СО РАН N 43 от 04.02.2010.

Институт Математики СО РАН, Новосибирский гос. университет, Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru, kib@math.nsc.ru

Системы корней, редуцированные слова и базисы Гребнера–Ширшова алгебр Ли A_n^+, B_n^+, C_n^+, D_n^+

А. Н. Корюкин

Над произвольным полем k характеристики 0 вычислены линейные редуцированные базисы и редуцированные базисы Грёбнера–Ширшова (РБГШ) положительных частей A_n^+, B_n^+, C_n^+, D_n^+ простых конечномерных алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n, **при произвольном упорядочении порождающих**.

Это совершенно новый класс задач. Ранее линейные редуцированные базисы и РБГШ вычислялись только при единственном упорядочении порождающих. В данной же постановке задачи порождающие алгебры Ли фиксированы, но порядок на них произвольный, и анализируются произвольный из $n!$ линейных редуцированных базисов и определяемый им РБГШ (n — число порождающих).

При этом воедино связаны системы корней, базисы положительной части классических серийных алгебр Ли и их РБГШ. Это существенно обобщает результаты Л.А.Бокутя и А.Кляйна (1996), касающиеся вычисления РБГШ алгебр Ли A_n^+, B_n^+, C_n^+, D_n^+ над полем характеристики 0.

Институт Математики, Новосибирск
E-mail: `koryukin@ngs.ru`

Ортогональные инварианты матриц малых размерностей

А. А. Лопатин

Подгруппа $G < GL(n)$ действует на прямой сумме $M(n)^{\oplus d}$ матричных $n \times n$ пространств диагонально сопряжениями. Обозначим через $R_{n,d}$ кольцо полиномиальных функций из $M(n)^{\oplus d}$ в основное бесконечное поле K. Алгебра *матричных* инвариантов $R_{n,d}^{G}$ — это множество тех функций из $R_{n,d}$, которые постоянны на орбитах G. Порождающие алгебр матричных инвариантов для групп $GL(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ были описаны в работах [1], [5], [4], где характеристика поля отлична от двух в случае $O(n)$, $SO(n)$.

Обозначим через $D_{\max}(R_{n,d}^{G})$ максимальную степень неразложимых (т.е. невыразимых через инварианты меньшей степени) элементов из $R_{n,d}^{G}$.

Теорема 1. *Пусть* $D_{\max} = D_{\max}(R_{3,d}^{O(3)})$. *Если* $\mathrm{char}(K) = 3$, *то* $2d+4 \leq D_{\max} \leq 2d+7$. *Если* $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$, *то* $D_{\max} = 6$.

Вместо $M(n)$ возьмем пространство кососимметрических матриц. Соответствующую алебру матричных $O(n)$-инварантов обозначим через $I_{n,d}$. Однородная система параметров алгебры (ОСП) — это такое алгебраически независимое подмножество, что алгебра является конечнопорожденным модулем над подалгеброй, порожденной этим множеством.

Теорема 2. *Для* $I_{3,d}$ *мы явно описали минимальную систему порождающих (МСП) и ОСП. Для* $I_{4,2}$, $I_{4,3}$ *и* $I_{5,2}$ *мы также нашли ОСП. Кроме того, МСП найдена для* $I_{4,2}$.

Следствие. *Пусть* $D_{\max} = D_{\max}(R_{4,d}^{GL(4)})$ *и* $\mathrm{char}(K) = 3$. *Если* $d = 2$, *то* $6 \leq D_{\max} \leq 10$. *Если* $d > 2$, *то* $3d-1 \leq D_{\max} \leq 3d+3$.

Отметим, что МСП для $R_{3,d}^{GL(3)}$ была раннее описана докладчиком в [3], а ОСП для $R_{3,3}^{GL(3)}$ — в [2].

Работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00067).

Список литературы

[1] S. Donkin, *Invariants of several matrices*, Invent. Math. **110** (1992), 389–401.

[2] А.А. Лопатин, *Кольцо инвариантов трех* 3×3 *матриц над полем произвольной характеристики*, Сиб. Мат. Журн. **45** (2004), N. 3, 624–633.

[3] A.A. Lopatin, *Relatively free algebras with the identity* $x^3 = 0$, Comm. Algebra **33** (2005), N. 10, 3583–3605.

[4] A.A. Lopatin, *Invariants of quivers under the action of classical groups*, J. Algebra **321** (2009), 1079–1106.

[5] A.N. Zubkov, *Invariants of an adjoint action of classical groups*, Algebra and Logic **38** (1999), N. 5, 299–318.

ОФ ИМ СО РАН, Омск
E-mail: `artemlopatin@yahoo.com`

О наследственно чистых ассоциативных алгебрах над дедекиндовыми кольцами

Л. М. Мартынов

Изучается введенное в [1] понятие чистоты для ассоциативных алгебр. Охарактеризованы наследственно чистые ассоциативные алгебры над дедекиндовым кольцом R, максимальные идеалы которого имеют конечные индексы. Заметим, что при этом охватываются случаи ассоциативных алгебр над конечным полем и ассоциативных колец (одновременно уточнен анонсированный в [2] результат).

Приведем необходимые определения. В дальнейшем под модулем будем понимать левый унитарный R–модуль, а под алгеброй — ассоциативную R–алгебру, под идеалом алгебры или кольца — двусторонний идеал.

Условимся относительно некоторых обозначений: $\mathbf{L}$ — решетка всех многообразий алгебр; $\mathcal{P}$ — атом решетки $\mathbf{L}$; P — максимальный идеал кольца R; Z_P — алгебра с нулевым умножением, полученная из модуля R/P заданием нулевого умножения; $\mathcal{Z}_P = varZ_P$; $F_P = R/P$; $\mathcal{F}_P = varF_P$.

Напомним, что в нашем случае атомы решетки $\mathbf{L}$ исчерпываются многообразиями вида $\mathcal{Z}_P$ и $\mathcal{F}_P$ для некоторого P. Посредством $\mathcal{P}(A)$ обозначается $\mathcal{P}$–вербал алгебры A. Подалгебра S алгебры A называется *чистой*, если $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(A) \cap S$ для любого $\mathcal{P}$. Алгебра называется *наследственно чистой*, если любая ее подалгебра является чистой.

Алгебру с нулевым умножением назовем *элементарной*, если она либо нулевая, либо является прямой суммой алгебр вида Z_P. Алгебру, в которой для любого ее элемента x существует натуральное число $n(x) > 1$ такое, что $x^{n(x)} = x$, условимся называть *джекобсоновской*. Алгебру будем называть *элементарной джекобсоновской*, если каждая ее однопорожденная ненулевая подалгебра является прямой суммой конечного числа конечных R–полей вида F_P.

Основным результатом работы является

Теорема. *Ассоциативная алгебра над дедекиндовым кольцом, максимальные идеалы которого имеют конечные индексы, является наследственно чистой алгеброй тогда и только тогда, когда она есть прямая сумма элементарной алгебры с нулевым умножением и элементарной джекобсоновской алгебры.*

Список литературы

1. Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универс. алгебра и ее приложения: Труды межд. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. — С. 179–190.

2. *Мартынов Л.М.* Наследственно чистые ассоциативные кольца // Международная алгебраическая конференция в Екатеринбурге, посвященная столетию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина (тезисы докладов). — Екатеринбург: Изд–во УрГУ. — 2005. — С. 111–112.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: `mart@omsk.edu`

О структуре свободных дуальных алгебр Лейбница

А. С. Науразбекова, У. У. Умирбаев

Алгебра A над полем k называется дуальной алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(xy)z = x(yz) + x(zy).$$

Дуальные алгебры Лейбница были определены Ж. Лодеем [2] как класс алгебр дуальных к алгебрам Лейбница в смысле двойственности Козуля [1]. Напомним, что алгебры Лейбница определяются тождеством

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Легко проверить, что относительно симметризации $a * b = ab + ba$ любая дуальная алгебра Лейбница становится ассоциативно-коммутативной алгеброй. В [2] доказано, что базис свободных дуальных алгебр Лейбница состоит из левонормированных слов. Используя этот результат, нами доказана следующая

Теорема 1. *Свободная дуальная алгебра Лейбница над полем нулевой характеристики является алгеброй многочленов без единицы относительно операции $a * b$.*

В 1952 году А. И. Мальцев [3] доказал, что любая ассоциативная алгебра не более чем счетной размерности вложима в двупорожденную ассоциативную алгебру. Аналог этого результата для алгебр Ли был доказан А. И. Ширшовым [4] в 1958 году. Нами доказана

Теорема 2. *Любая дуальная алгебра Лейбница над полем нулевой характеристики не более чем счетной размерности вложима в двупорожденную дуальную алгебру Лейбница.*

Список литературы

[1] Ginzburg, V., Kapranov, M., Koszul duality for operads, Duke Math. J., 76 (1994), no. 1, 203–272.

[2] Loday, J.-L., Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras, Math. Scand., 77 (1995), no. 2, 189–196.

[3] Мальцев, А.И., Об одном представлении неассоциативных колец, Усп. мат. наук, 1952, т. 7. вып. 1(47), 181–185.

[4] Ширшов, А.И., О свободных кольцах Ли, Мат. сб., 1958, 45(87), no. 2, 113–122.

Евразийский национальный университет, Астана
E-mail: altyngul.82@mail.ru
Евразийский национальный университет, Астана, и Государственный университет Уейн, Детройт
E-mail: umirbaev@math.wayne.edu

sp-алгебры и диалгебры Мальцева

А. П. Пожидаев

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие Ω-алгебр с множеством операций Ω_0, удовлетворяющих полилинейным тождествам $\Sigma = \{\, t_s(x_1, \ldots, x_n) \mid s \in S \,\}$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Пусть $A \in \mathcal{V}$. Тогда A-*модулем* в смысле Эйленберга называется векторное пространство M, удовлетворяющее следующим условиям: 1) если $\omega \in \Omega$ и $|\omega| = n$, то M наделено n действиями алгебры A, т.е. для любого $i = 1, \ldots, n$ определено полилинейное отображение $A \times \ldots \times M \times \ldots \times A \to M$ (M стоит на i-ой позиции), обозначаемое $\omega(x_1, \ldots, m_i, \ldots, x_n) \in M$, где $m_i \in M$, $x_j \in A$; 2) расщепляемое нулевое расширение $E = A \oplus M$ является $\mathcal{V}$-алгеброй относительно следующего произведения для любого $\omega \in \Omega$: ограничение ω на A совпадает с начальной операцией; если один аргумент ω лежит в M, то значение значение определяется подходящим полилинейным отображением как выше; если два или более аргумента ω лежат в M, то значение равно нулю.

Пусть A — Ω-алгебра с множеством операций Ω_0. Ω-алгебра $D = D(A)$ с множеством операций Ω_1 называется Ω-*алгеброй с расщеплнным произведением* для A (для краткости, *sp-алгеброй* для A), если для каждого $\omega \in \Omega_0$ арности n существует n различных операций $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega_1$ арности n и $\Omega_1 = \dot{\bigcup}_{\omega\in\Omega_0}\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Пусть $\overline{D} = D/I$, где идеал I приравнивает операции $\omega_1, \ldots, \omega_n$ для всех $\omega \in \Omega_0$: I — идеал, порождённый $\langle\, \omega_i(x_1, \ldots, x_n) - \omega_j(x_1, \ldots, x_n) \mid \omega \in \Omega_0;\, i, j = 1, \ldots, n;\, x_k \in D \,\rangle$.

Если D — это sp-алгебра, то для $\omega \in \Omega_0$ и $i, j, k, \ell = 1, \ldots, n = |\omega|$ при $\ell \neq i$ мы определяем

$$\begin{aligned} E_{ijk\ell}(\omega) = {} & \omega_i\big(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \omega_j(x_\ell, \ldots, x_{\ell+n-1}), x_{\ell+n}, \ldots, x_{2n-1}\big) \\ & -\omega_i\big(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \omega_k(x_\ell, \ldots, x_{\ell+n-1}), x_{\ell+n}, \ldots, x_{2n-1}\big). \end{aligned}$$

Рассмотрим множество тождеств

$$\mathcal{T}_D = \{\, E_{ijks}(\omega) \mid \omega \in \Omega_0;\, i, j, k, s = 1, \ldots, n;\, s \neq i \,\}.$$

sp-алгебра D называется *согласованной*, если она удовлетворяет тождествам из $\mathcal{T}_D$. Пусть $\phi(D)$ — изоморфная копия пространства D. sp-алгебра D называется $\mathcal{V}$-*sp-алгеброй* тогда и только тогда, когда D является согласованной, $\overline{D} \in \mathcal{V}$ и $\phi(D)$ является $\overline{D}$-модулем в смысле Эйленберга, где мы определяем действие следующим образом:

$$\omega(\overline{x}_1, \ldots, \phi(x_i), \ldots, \overline{x}_n) = \phi(\omega_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)).$$

Пусть A и B — некоторые категории Ω-алгебр. Обозначим через A^{sp} — категорию Ω-алгебр с расщеплённым произведением для A. Скажем, что функтор $T\colon A \to B$ является *термальным*, если он может быть выражен в терминах операций A.

Теорема. *Пусть A и B — некоторые категории Ω-алгебр и T — термальный функтор из A в B. Тогда T индуцирует функтор из A^{sp} в B^{sp}.*

В качестве следствия устанавливаются стандартные функторы между категориями диалгебр Мальцева и альтернативных диалгебр, sp-алгебр Филиппова и тройных ассоциативных sp-систем второго типа и т.д.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1.419), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты НШ-3669.2010.1), интеграционного проекта СО РАН N 97.

Институт Математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: app@math.nsc.ru

Об унитарной замкнутости первичных многообразий ассоциативных алгебр

Л. М. Самойлов

Будем рассматривать ассоциативные алгебры над бесконечным полем F положительной характеристики p. Через $F\langle X\rangle$ и $F^\sharp\langle X\rangle$ будем обозначать свободную ассоциативную алгебру счетного ранга без единицы и с единицей соответственно. T-идеал Γ алгебры $F\langle X\rangle$ или $F^\sharp\langle X\rangle$ называется вербально первичным, если для произвольных T-идеалов Γ_1, Γ_2 из включения $\Gamma_1\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ следует, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ или $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$. Многообразие называется первичным, если соответствующий ему идеал тождеств является вербально первичным. Задача классификации первичных многообразий над полями положительной характеристики является одной из центральных проблм в PI-теории.

А. Р. Кемер и А. Я. Белов разными способами доказали, что каждый вербально первичный T-идеал Γ является *унитарно замкнутым на полилинейном уровне*. Это означает, если $f(x_1, \dots, x_m) \in \Gamma$ и полином $f(x_1, \dots, x_m)$ полилинеен, то $f(x_1, \dots, x_m)|_{x_i=1} \in \Gamma$.

На полиоднородном уровне вербально первичные T-идеалы не обязаны быть унитарно замкнутыми, в качестве примера можно рассмотреть вербально первичный T-идеал $\{[x, y] = 0, x^p = 0\}^T$. Тем не менее, приведенная ниже теорема показывает, что для вербально первичных T-идеалов, не содержащих полиномов x^n, унитарная замкнутость на полиоднородном уровне выполняется.

Теорема 1. *Пусть Γ — вербально первичный T-идеал. Тогда либо Γ является унитарно замкнутым T-идеалом, либо $x^n \in \Gamma$ для некоторого n.*

Таким образом, каждое первичное многообразие ассоциативных алгебр порождается или алгеброй с единицей, или нильалгеброй ограниченного индекса.

Следующая теорема показывает, что энгелевы вербально первичные T-идеалы остаются вербально первичными при добавлении тождества $x^{p^N} = 0$ при больших N. Таким образом, описание энгелевых вербально первичных T-идеалов сводится к унитарному случаю.

Теорема 2. *Пусть Γ — вербально первичный T-идеал, содержащий тождество энгелевости. Тогда для всех достаточно больших N (зависящих от Γ) T-идеал $\{\Gamma, x^{p^N}\}^T$ будет вербально первичным.*

Ульяновский государственный университет, Ульяновск
E-mail: samoilov_l@rambler.ru

Графы корневых градуировок вещественных многочленов

А. В. Чехонадских

В задачах автоматического управления нередко возникает ситуация, когда необходимо установить условия расположения корней характеристического многочлена $f[s] = s^n + a_{n-1}(p)s^{n-1} + \ldots + a_0(p)$ в нужной области относительно вектора параметров p. Классическим примером является критерий Рауса-Гурвица устойчивости многочлена [1]. В [2] предлагается рассмотреть на комплексной плоскости семейство вложенных областей $\{B_\alpha \mid \alpha \in A \subseteq \mathbf{R}\}$, такое, что

(1) $B_\alpha \subset B_\beta$ при $\alpha < \beta$, (2) $\bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha = \mathbf{C}$, (3) $\sup\limits_{c \in B_\alpha} \mathrm{Re} c = \alpha$, (4) для всякого $z \in \mathbf{C}$ функция $\alpha(z) = \inf\{\alpha \mid z \in B_\alpha\}$ кусочно-гладкая. В этом случае на множестве комплексных чисел возникает предпорядок $z_1 \le_\alpha z_2 \Leftrightarrow \alpha(z_1) \le \alpha(z_2)$.

Определим градуировку многочлена $f[s]$ с корнями z_k как число $\alpha_f = \inf\{\alpha \mid \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq B_\alpha\}$. Поиск оптимальных значений параметров сводится к минимизации функции $\alpha(p) = \alpha_f$. Корневые наборы разбиваются на подмножества, в которых поддерживаются α-соотношения между корнями; они именуются корневыми сегментами, а их совокупность образует корневой симплекс [3].

Отношения n-мерных областей и $n-1$-мерных границ в симплексе описываются неорграфом H_n, а для всех размерностей от n до 1 — орграфом G_n, мощность которых растёт экспоненциально. Поскольку функция $\alpha(p)$ зависит только от α-старших корней, конфигурация её критических многообразий представлена редуцированными графами H_n^* и G_n^*. Рассматриваются три фактора редукции, которые для неорграфа H_n сводятся к удалению вершин и стягиванию рёбер, а для G_n требуют применения соответствующих алгоритмов.

Теорема 1. *Для любого n максимальные по размерности критические многообразия функции $\alpha(p)$ представляются подграфом графа H_4^*.*

Главное препятствие для численной минимизации функции $\alpha(p)$ — овражный рельеф с неограниченным субдифференциалом при кратных α-старших корнях. Переход к гладкой минимизации обеспечивает

Теорема 2. *Если семейство B_α состоит из выпуклых областей, и α-старший корень многочлена имеет кратность r, то градуировочные значения многочлена и его производных совпадают:* $\alpha(f) = \alpha(f') = \ldots = \alpha(f^{[r-1]})$.

Список литературы

[1] *Постников М. М.* Устойчивые многочлены // М.: Наука, 1981.

[2] *Чехонадских А. В.* Метрика, градуировка и оптимизация расположения характеристических корней системы АУ // Науч. вестн. НГТУ. — 2009, N1(34). — С.165–182.

[3] *Чехонадских А. В.* Графы корневых симплексов вещественных многочленов // Материалы 8-й Междунар. конф. “Дискретные модели в теории управляющих систем”, 6-9 апр. 2009 г. — М., 2009. — С.227–231.

Новосибирский государственный технический университет
E-mail: alcheh@ngs.ru

The snake lemma in some classes of preabelian categories

Ya. A. Kopylov, V. I. Kuz'minov

We consider the problem of the validity of the Snake Lemma (that is, the exactness of the Ker-Coker-sequence) in two important classes of additive categories with kernels and cokernels: quasi-abelian categories and P-semi-abelian-categories.

Standard theorems of homological algebra valid for abelian categories hold in such categories under extra assumptions. In quasi-abelian categories, these usually amount to the strictness of some morphisms, and for P-semi-abelian categories, in addition, the stability of some kernels (cokernels) under pushouts (pullbacks) must be required.

The authors were partially supported by the Specific Targeted Project GALA within the NEST Activities of the Commission of the European Communities (Contract No. 028766), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools and Junior Scientists of the Russian Federation (NSh 5682.2008.1), and a grant of the President of the Russian Federation (Grant MK-2137.2008.1).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
E-mail: `yakop@math.nsc.ru; kuzminov@math.nsc.ru`

Finite rings with Eulerian zero-divisor graphs

A. S. Kuzmina

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of an associative ring R is the graph whose vertices are all nonzero (one-sided and two-sided) zero-divisors of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$.

We denote the Jacobson radical of a ring R by $J(R)$. A finite ring R is called *local*, if the factor-ring $R/J(R)$ is a field. The order of a ring R is denoted by $|R|$. Further, $GF(q)$ is a finite field with q elements.

It is known that a connected graph is Eulerian iff any vertex of this graph has even degree. In [1], it was proved that the zero-divisor graph of any ring is connected.

In [1], all finite rings with identity that have Eulerian zero-divisor graphs were described. In the present thesis, we describe all finite rings with Eulerian zero-divisor graphs.

Theorem. *Let R be a finite ring. The graph $\Gamma(R)$ is Eulerian if and only if R satisfies one of following conditions:*

(1) *R is a finite field;*
(2) *$R \cong \oplus_{i=1}^{k} GF(p_i^{\alpha_i})$, where $p_i \neq 2$ for all i and $k \geq 2$;*
(3) *R is a nilpotent ring such that $|R|$ is even and $x^2 = 0$ for all $x \in R$;*
(4) *$R \cong S \oplus N$, where S is a local ring with identity such that $|S| = 2^m, m \geq 1$, and $s^2 = 0$ for all $s \in J(S)$, and N is a nilpotent ring such that $|N|$ is odd and $x^2 = 0$ for all $x \in N$;*
(5) *$R \cong S \oplus N$, where S is a local ring such that S has no one-sided identity, $|S| = 2^m, m \geq 2$, and $s^2 = 0$ for all $s \in J(S)$, and N is a nilpotent ring such that $x^2 = 0$ for all $x \in N$.*

References

[1] Kuzmina A.S. On structure of rings with planar zero-divisor graphs. Izvestiya AGU (Altai State University (2009) **1**, 17–25 (in Russian).

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul
E-mail: akuzmina1@yandex.ru

The determining identities of variety of rings which is generated by all finite associative rings of order p^2

Yu. N. Maltsev

It is proved the following result.

Theorem. *The variety of rings* $\mathfrak{M} = var\left\langle p^2x = 0, px(y - y^p) = 0, [x - x^p, y - y^p] = 0, x[y, z]u = 0, (x - x^p)[u, v] = 0, [u, v](x - x^p) = 0, (x - x^{p^2})z(y - y^p) = 0, (x - x^p)(y - y^{p^2})z = 0\right\rangle$ *is generated by all finite associative rings of order* p^2.

There is also a full description of all critical rings of $\mathfrak{M}$.

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul
E-mail: maltsevyn@gmail.com

Jordan formalization of DNA recombination

S. R. Sverchkov

For the algebraic formalization of DNA recombination we will use the basic idea of the formalization of an algebra of observables in quantum mechanics, which was first realized by Pascual Jordan (1933). Let $\mathbf{M}$ be a variety of the n-ary algebras over a field F and an algebra $B \in \mathbf{M}$ with n-ary operation $f(b_1, \dots, b_n)$, where $b_1, \dots, b_n \in B$. We will define a new symmetrized n-ary operation on the F-module by setting

$$j(b_1, \dots, b_n) = \sum_{\sigma \in S_n} f(b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \dots, b_{\sigma(n)}),$$

for all $b_1, \dots, b_n \in B$. The obtained algebra with the n-ary operation $j(b_1, \dots, b_n)$ will be denoted by $B^{(+)}$. The transformation of the algebra B to $B^{(+)}$ is called *Jordan symmetrization*, the transition from $B^{(+)}$ to B is called *Jordan specialization*. A n-ary algebra J is called $\mathbf{M}$-special if J is isomorphic to a subalgebra of $B^{(+)}$ for an algebra $B \in \mathbf{M}$. Let $(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_n n})$ denote the DNA $\boxed{a_{i_1 1}}\boxed{a_{i_2 2}}\dots\boxed{a_{i_n n}}$, where $a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_n n}$ are segments of DNA participating in recombination, where $n \geq 3$. The n-ary algebra J_n with basis $(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_n n})$, $i_1, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, and multiplication table

$$\{b_1, \dots, b_n\} = \sum_{\sigma \in S_n} (b_{\sigma(1)1}, b_{\sigma(2)2}, \dots, b_{\sigma(n)n}),$$

where

$$b_1 = (b_{11} b_{12}, \dots, b_{1n}) = (a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_n n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$b_n = (b_{n1} b_{n2}, \dots, b_{nn}) = (a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n}),$$

models n-ary DNA recombination. Algebras from the variety $DR = \mathrm{Var}(J_n)$, generated by J_n, are called *n-algebras of DNA recombination*. We construct the Jordan specialization for the n-ary algebra J_n. Let C_n denote the F-algebra with the basis $(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \dots, a_{i_n n})$, $i_1, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, and the *$n$-ary splicing operation*

$$\langle b_1, \dots, b_n \rangle = (b_{11} b_{22}, \dots, b_{nn}) = (a_{i_1 1}, a_{j_2 2}, \dots, a_{k_n n}).$$

Algebras from variety $S(n) = \mathrm{Var}(C_n)$ are called the *splicing n-algebras*. It is easy to check that algebra J_n is $S(n)$-special. Let $S(n)[X]$ denote the free algebra in the variety $S(n)$. The subalgebra of $S(n)^{(+)}[X]$ generated by the set X is called the *free $S(n)$-special algebra* and denoted by $SDR[X]$. The elements of $SDR[X]$ are called *J-polynomials*. The criterion of definition, whether $a \in S(n)[X]$ is J-polynomial, is called *J-criterion*. We construct J-criterion for $S(n)[X]$, which is an analog of the Specht–Weber criterion for Lie algebras. For this purpose, we define the partial involutions $\varphi_y : S(n)[X] \to S(n)[X]$, where $1 \leq i, j \leq n$, by the following rules:

$$\forall x \in X\ \varphi_{ij}(x) = x,\ \forall w_1, \dots, w_n \in S(n)[X]\ \varphi_{ij}(\langle w_1, \dots, w_n \rangle)$$
$$= \langle w_1, \dots, \varphi_{ij}(w_j)|_i, \dots, \varphi_{ij}(w_i)|_j, \dots, w_n \rangle.$$

Let $T = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varphi_\sigma - (n!) \cdot 1$ be the linear operator $T : S(n)[X] \to S(n)[X]$, where $\varphi_\sigma = \varphi_{\tau_1} \circ \varphi_{\tau_2} \circ \dots \circ \varphi_{\tau_k}$ and $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ are transpositions. The operator T gives us the following criterion for $S(n)[X]$:

Theorem 1. *A polynomial $a \in S(n)[X]$ is a J-polynomial if and only if $T(a) = 0$.*

By J-criterion, it is easy to get speciality of n-algebras of DNA recombination.

Theorem 2. *The variety $DR = \mathrm{Var}(J_n)$ is $S(n)$-special.*

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: sverchkovSR@yandex.ru

Minimal algebras of DNA recombination

S. R. Sverchkov

Let ab denote the chromosome $\boxed{a}\boxed{}\ \boxed{b}$. Then Morgan's classical formalization of DNA recombination defines a commutative algebra J_2 over F with basis a_ib_j, $i,j \in \mathbb{N}$, and the multiplication table

$$\forall i,j,k,l \in \mathbb{N} \quad a_ib_j * a_kb_i = a_ib_l + a_kb_j.$$

It has appeared that J_2 is Jordan algebra.

Let C_2 be an associative F-algebra with basis a_ib_j, $i,j \in \mathbb{N}$, and with the splicing operation

$$\forall i,j,k,l \in \mathbb{N} \quad a_ib_j \triangleright a_kb_l = a_ib_l.$$

From genetic point of view, the splicing operation models only partial fragment of DNA recombination. But, we can easily check that

$$a_ib_j \circ a_kb_l = \frac{1}{2}(a_ib_j \triangleright a_kb_l + a_kb_l \triangleright a_ib_j) \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}(a_ib_l + a_kb_j) \overset{(1)}{=} a_ib_j * a_kb_l.$$

Hence the symmetrized multiplication $\circ$ on the associative algebra C_2 transforms it into algebra J_2, that is $C_2^{(+)} = J_2$. Therefore J_2 is a special Jordan algebra and C_2 is an associative enveloping algebra for J_2. Algebras from $IR = \mathrm{Var}(J_2)$ are called *Jordan algebras of DNA recombination*. Algebras from $S = \mathrm{Var}(C_2)$ are called *splicing algebras*. Let $\mathbf{M}$ be an arbitrary variety of algebras over F.

Definition. The finite dimensional algebra $A \in \mathbf{M}$ is called *minimal* in $\mathbf{M}$, if $\mathbf{M} = \mathrm{Var}(A)$ and the algebra A has minimal dimension. The number $k = \dim_F(A)$ is called *A-dimension* of the variety $\mathbf{M}$ and be denoted by $\mathrm{Adim}_F(\mathbf{M}) = k$.

Let $J_2(n,m)$ denote the subalgebra of J_2 generated by a_ib_j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. For example, algebra $J_1(1,2)$ is called the *algebras of simple Mendelian inheritance* and it has basis $a = a_1b_1$, $a = a_1b_2$ and the multiplication table: $a^2 = 1$, $b^2 = b$, $a * b = \frac{1}{2}(a+b)$.

Theorem 1. *The algebra $J_2(1,2)$ is minimal in $IR = \mathrm{Var}(J_2)$ and $\mathrm{Adim}_F(IR) = 2$.*

Let $C_2(n,m)$ denote the subalgebra of C_2 generated by a_ib_j. For example, algebra $C_2(1,3)$ has basis $e_1 = a_1b_1$, $e_2 = a_1b_2$, $e_3 = a_1b_3$ and the multiplication table: $e_i \triangleright e_i = e_i$, $1 \le i,j \le 3$.

Theorem 2. *The algebra $C_2(2,2)$ is minimal in $S = \mathrm{Var}(C_2)$ and $\mathrm{Adim}_F(S) = 4$.*

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: `sverchkovSR@yandex.ru`

Skew-symmetric algebras of DNA recombination

S. R. Sverchkov

We will denote by $(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \ldots, a_{i_n n})$ the DNA, $\boxed{a_{i_1 1}}\boxed{a_{i_2 2}}\ldots\boxed{a_{i_n n}}$, where $a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \ldots, a_{i_n n}$ are segments of DNA participating in recombination. The n-ary F-algebra C_n with the basis $(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \ldots, a_{i_n n})$, $i_1, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, and multiplication table

$$\langle b_1, \ldots, b_n\rangle = (b_{11}b_{22}, \ldots, b_{nn}) = (a_{i_1 1}, a_{j_2 2}, \ldots, a_{k_n n}),$$

where

$$\begin{gathered} b_1 = (b_{11}b_{12}, \ldots, b_{1n}) = (a_{i_1 1}, a_{j_2 2}, \ldots, a_{k_n n}), \\ b_2 = (b_{21}b_{22}, \ldots, b_{2n}) = (a_{j_1 1}, a_{j_2 2}, \ldots, a_{j_n n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_n = (b_{n1}b_{n2}, \ldots, b_{nn}) = (a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \ldots, a_{k_n n}), \end{gathered}$$

is called the *standard splicing n-algebra* and models partial fragment of DNA recombination. We call operation $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ the n-ary splicing operation. Algebras from variety $\mathrm{Var}(C_n)$, generated by C_n, are called the splicing n-algebras. We can define a new skew-symmetric n-ary operation on C_n, $n \geq 3$, by

$$[b_1, \ldots, b_n] = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^n \langle b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(n)}\rangle,$$

for any

$$\begin{gathered} b_1 = (b_{11}b_{12}, \ldots, b_{1n}) = (a_{i_1 1}, a_{j_2 2}, \ldots, a_{k_n n}), \\ b_2 = (b_{21}b_{22}, \ldots, b_{2n}) = (a_{j_1 1}, a_{j_2 2}, \ldots, a_{j_n n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_n = (b_{n1}b_{n2}, \ldots, b_{nn}) = (a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \ldots, a_{k_n n}), \end{gathered}$$

from C_n. The algebra with this new operation will be denoted by $C_n^{(-)}$. The skew-symmetrization of n-ary splicing operation converts the splicing algebras into n-ary skew-symmetric algebras.

In case $n = 2$, they are Lie algebras. It is proved that every polynomial identity of these algebras, with no restriction on the degree, is consequence of centrally metabelian identity. Set $LD = \mathrm{Var}\big(C_2^{(-)}\big)$. Let CM denote the variety of centrally metabelian algebras, i.e. algebras satisfy the identity $((x_1 \cdot x_1) \cdot (x_3 \cdot x_4)) \cdot x_5 = 0$.

Theorem 1. *$LD = CM$.*

In case $n \geq 3$, the algebra $C_n^{(-)}$ is nilpotent of index 3.

Theorem 2. *All identities of the algebra $C_n^{(-)}$, $n \geq 3$, are consequences of the identity*

$$[[x_1, \ldots, x_n], y_2, \ldots, y_n] = 0.$$

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: `sverchkovSR@yandex.ru`

Dimonoids with a commutative periodic semigroup

A. V. Zhuchok

It is known that the universal enveloping algebra of a Lie algebra has the structure of an associative algebra. Loday introduced the notion of a Leibniz algebra [1] which is a generalization of a Lie algebra. Loday also showed that the relationship between Lie algebras and associative algebras can be translated into an analogous relationship between Leibniz algebras and the so-called dialgebras [2] which are a generalization of associative algebras. In particular, Loday established that any dialgebra $(D, \prec, \succ)$ becomes a Leibniz algebra under the Leibniz bracket $[x, y] = x \prec y - y \succ x$ and the universal enveloping algebra of a Leibniz algebra has the structure of a dialgebra. A dimonoid [2] is a set with two binary associative operations satisfying the same axioms as a dialgebra. So dialgebra is a linear analogue of the notion of a dimonoid introduced by Loday [2] for studying of properties of Leibniz algebras.

A dimonoid $(D, \prec, \succ)$ is called a diband of subdimonoids $D_\alpha, \alpha \in I$ [3], if 1) $D = \bigcup_{\alpha\in I} D_\alpha$, 2) $D_\alpha \bigcap D_\beta = \emptyset$ for all $\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$, 3) for any $\alpha, \beta \in I$ there exist $\gamma, \gamma' \in I$ such that $D_\alpha \prec D_\beta \subseteq D_\gamma$, $D_\alpha \succ D_\beta \subseteq D_{\gamma'}$. If for every α and β in I, $D_\alpha \prec D_\beta$, $D_\beta \prec D_\alpha$, $D_\alpha \succ D_\beta$, $D_\beta \succ D_\alpha$ are contained in the same D_γ, then we will call $(D, \prec, \succ)$ a semilattice of subdimonoids $D_\alpha, \alpha \in I$.

Recall that a semigroup S is called a periodic semigroup, if every element of S has a finite order, that is, if for every element a of S the subsemigroup $\langle a\rangle = \{a, a^2, \ldots, a^n, \ldots\}$ generated by a contains a finite number of different elements. A dimonoid $(D, \prec, \succ)$ will be called unipotent, if it contains exactly one element $x \in D$ such that $x \prec x = x \succ x = x$.

Theorem. *Every dimonoid $(D, \prec, \succ)$ with a commutative periodic semigroup $(D, \prec)$ is a semilattice Y of unipotent subdimonoids D_i, $i \in Y$.*

This result generalizes Schwarz's theorem [4] about the decomposition of commutative periodic semigroups into semilattices of unipotent semigroups.

References

[1] J.-L. Loday, Algebres ayant deux operations associatives (digèbres), C. R. Acad. Sci. Paris 321 (1995), 141–146.

[2] J.-L. Loday, Dialgebras, In: Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math. 1763, Springer, Berlin, 2001, 7–66.

[3] A. V. Zhuchok, Commutative dimonoids, Algebra and Discrete Mathematics, 2 (2009), 116–127.

[4] S. Schwarz, K teorii periodicheckih polugrupp, Czechoslovak Math. Jour., 3 (78), 7–21 (1953).

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv
E-mail: zhuchok_a@mail.ru

VI. Секция “ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ И УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА”

О предельных моделях теорий графов с равномерной конечной отделимостью

К. А. Байкалова

Счетные модели теорий унаров и ациклических графов изучались в работах [1] — [4].

Теория T неориентированного графа называется *теорией с равномерной конечной отделимостью*, если существует натуральное n такое, что для любой элементарной подмодели M_0 модели M теории T и любого элемента $a \in M \setminus M_0$ существует не более, чем n элементов из M_0, связанных с a кратчайшими маршрутами, не содержащими других элементов из M_0. Для теорий ориентированных графов рассматриваются соответствующие неориентированные графы.

Известно [5], что теории ультраплоских графов и, в частности, ациклических графов являются теориями графов с равномерной конечной отделимостью.

Напомним [6], что модель M называется *предельной*, если M не является простой моделью ни над каким кортежем и $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n\in\omega}$ простых моделей над некоторыми кортежами.

С помощью методов из [1, 2, 4] доказана следующая теорема, дающая ответ на вопрос из [6] о существовании l-эренфойхтовых теорий для теорий унаров и графов с равномерной конечной отделимостью.

Теорема. *Если T — малая теория графа с равномерной конечной отделимостью, то T имеет имеет 0, 1, ω или 2^ω предельных моделей.*

Следствие. *Если T — малая теория унара (ультраплоского графа), то T имеет имеет 0, 1, ω или 2^ω предельных моделей.*

Приведенные утверждения справедливы и для малых теорий, обогащенных одноместными предикатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1).

Список литературы

[1] *Шишмарев Ю.Е.* О категоричных теориях одной функции // Мат. заметки. 1972. Т. 11, 1. С. 89–98.
[2] *Marcus L.* The number of countable models of a theory of one unary function // Fund. math. 1980. Vol. CVIII, N 3. P. 171–181.
[3] *Ряскин А.Н.* Число моделей полных теорий унаров // Теория моделей и её применения. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — С. 162–182.
[4] *Овчинникова Е.В., Шишмарев Ю.Е.* Счетно категоричные графы // 9-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Тез. докл. Л.: Наука, 1988. С. 120.
[5] *Herre H., Mekler A.H., Smith K.W.* Superstable graphs // Fund. Math. 1983. Vol. CXVIII. P. 75–79.
[6] *Судоплатов С.В.* Проблема Лахлана. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. — 336 с.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: bkristina@bk.ru

О многообразии полугрупп, порожденном всеми полугруппами порядка 3

Б. М. Верников, Д. В. Скоков

Решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ обозначается через $L(\mathcal{V})$. Для всякого натурального n обозначим через $\mathcal{S}_n$ многообразие, порожденное классом всех n-элементных полугрупп. Легко понять, что решетка $L(\mathcal{S}_2)$ является 32-элементной булевой алгеброй (это легко вытекает, например, из [1, предложение 1]), а решетка $L(\mathcal{S}_n)$ при $n \geq 3$ бесконечна. В [2] показано, что при $n \geq 4$ решетка $L(\mathcal{S}_n)$ континуальна. Совсем недавно в [3] установлено, что решетка $L(\mathcal{S}_3)$ счетна, но устроена крайне сложно. В частности, она содержит изоморфную копию любой конечной решетки и потому не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. В этой связи представляет интерес следующий результат.

Теорема. *Многообразие $\mathcal{S}_3$ является объединением некоторых своих подмногообразий $\mathcal{R}$ и $\mathcal{K}$ таких, что решетки $L(\mathcal{R})$ и $L(\mathcal{K})$ дистрибутивны, а первая из них еще и конечна. Более точно, решетка $L(\mathcal{R})$ разлагается в прямое произведение некоторой 13-элементной дистрибутивной решетки и 4-элементной булевой алгебры, а решетка $L(\mathcal{K})$ — в подпрямое произведение цепи типа $\omega + 1$, 2-элементной цепи и 3-элементной цепи.*

Отметим еще, что многообразие $\mathcal{R}$ вполне регулярно (т. е. каждая его полугруппа есть объединение групп), а многообразие $\mathcal{K}$ комбинаторно (т. е. все группы в нем одноэлементны).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 09-01-12142, 10-01-00524) и программы “Развитие научного потенциала высшей школы” Федерального агентства по образованию Российской Федерации (проект N 2.1.1/3537).

Список литературы

[1] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Дополнения в решетках многообразий и квазимногообразий* // Изв. вузов. Матем. 1982. N 11. С. 17–20.

[2] M. Jackson. *Finite semigroups whose varieties have uncountably many subvarieties* // J. Algebra. 2000. Vol. **228**, N 2. P. 512–535.

[3] W. Zhang. *Some studies on varieties generated by finite semigroups and their subvarieties lattices* // PhD Thesis. Lanzhou, Gansu 730000, P. R. China. 2009.

Уральский государственный университет, Екатеринбург
E-mail: bvernikov@gmail.com, dskokov@yandex.ru

О двукардинальных семействах типов в моделях, теоремах Мальцева — Ершова о подъеме и определимости в алгебраических системах с наличием неразличимости и стабильных типов

А. А. Викентьев

Доклад посвящен *переносу двукардинальных теорем*, доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности, и вошедших в диссертации автора “Теории с покрытием и формульные подмножества”, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, теорем статьи в сборнике, посвященному 90-летию академику А. Д. Тайманову — “A two cardinal therems for sets of types in stable theory”, Казахстан, Алма-Ата, 2007, с.67–69, которые были доложены в Казахстане и затем Новосибирске — на ежегодных Мальцевских Чтениях с 2006г., *на случай богатых (двукардинальных) семейств (стабильных) типов с параметрами для теорий с κ-компактными моделями и свойством κ-отделимости новых элементов, реализующих типы из богатого семейства, от старых (элементов меньшей модели) над малыми подмножествами и наличия реализаций в большей (с богатой парой) модели вполне определимых (стабильных) типов или наличием неразличимых элементов.* Основными инструментами доказательств являются теоремы компактности Мальцева-Ершова, развитая техника современной геометрической, топологической и семантической теории стабильности (Шелах, Лахлан, Балдвин, Пуаза, Пиллай, Хрушовский, Невельский, Зильбер, Палютин, Перетятькин, Еримбетов, Кудайбергенов, Судоплатов, Байжанов, Мустафин Т. Г., Омаров А. И. и многих других) и наличия (даже локального) нужных компактных (для подходящих мощностей κ) моделей теории со свойствами κ-отделимости над реализациями стабильных типов. Рассмотрены вопросы различных видов определимостей алгебраических систем (включая классические поля) в наследственно конечных надстройках, а так же вопросы о мощностях определимых подмножеств в стабильных случаях. Интерес к этим вопросам и моделям (помимо теоретического) имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (опровержимых) формул и/или типов, как для ранжирования таким образом представленных знаний эспертов с помощью привлечения семантики алгебраических систем, так и для введения расстояний (метрик) на классах эквивалентных формул с помощью измеримых подклассов измеримых метрических моделей теории, необходимых для алгоритмов в распознавании образов и кластеризации формул (типов).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты N 07-01-00331а, 08-07-00136а.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

M-значные модели для адаптивных расстояний и кластеризации знаний

А. А. Викентьев, Р. А. Викентьев

В настоящее время появляется большой интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов, реализациям адаптивных алгоритмов кластеризации и согласованиям высказываний [1–6]. В данной работе предлагается записывать высказывания экспертов в виде формул m-значной (с их значениями истинности, $m > 2$) логики. На значения истинности таких формул можно так же смотреть и как на вероятности (в частности, ошибочности). В произвольном m-значном случае с помощью теории моделей найдено, на наш взгляд, правильное (с точки зрения Экспертов) обобщение расстояния между такими формулами и меры опровержимости таких формул, что позволяет решать более утонченно (по сравнению с 2–значным случаем) прикладные задачи. В частности, значение истинности на модели (введенное по аналогии со случаем $m = 2$) может служить и субъективной вероятностью этой части реализации формулы в алгебраической системы языка 1-го порядка, а сам подход обобщается и на случай многосортного языка 1-го порядка. При организации поиска логических закономерностей и построении решающих функций требуются расстояния между высказываниями экспертов и формулами в моделях в произвольный (текущий) момент времени с фиксированными знаниями, которые вводятся здесь с помощью теории моделей.

Определение. Расстоянием между формулами ϕ и ψ, такими, что $S(\phi)\cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$, на множестве $P(S(\Sigma))$ назовем (нормированную симметрическую разность в многозначном случае, как обобщение расстояния в двузначном случае) величину

$$\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = \frac{\left|\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\left(\phi_{\frac{k}{n-1}} \wedge \psi_0\right)\right| + \left|\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\left(\phi_0 \wedge \psi_{\frac{k}{n-1}}\right)\right|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Возможны другие модификации этого определения, с учетом значений, больших 0.5 и не учетом меньших значений, но больших 0.

Теорема [О свойствах расстояния $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)$] Для любых формул ϕ, ψ, таких, что $S(\phi)\cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$ верны следующие утверждения:

(1) $0 \le \rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) \le 1$;
(2) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\psi,\phi)$;
(3) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = 0 \Leftrightarrow \phi \equiv \psi$;
(4) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = 1 \Leftrightarrow \bigcup\limits_{l=1}^{n-1}\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{Mod}(\phi)_{\frac{k}{n-1}} \sqcup \mathrm{Mod}(\psi)_{\frac{l}{n-1}}\right) = P(S(\Sigma))$.
(5) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) \le \rho_{S(\Sigma)}(\phi,\chi) + \rho_{S(\Sigma)}(\chi,\psi)$;
(6) Если $\phi^1 \equiv \phi^2$, то $\rho_{S(\Sigma)}(\phi^1,\psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\phi^2,\psi)$;

Работоспособность таких расстояний, в зависимости от m, проверена на различных модельных примерах. Аналогично можно изучить меру опровержимости в рассматриваемом здесь случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты N 07–01–00331–а, 08-07-00136а.

Список литературы

[1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г., Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Изд–во Ин–та математики СО РАН, 1999.
[2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[3] Викентьев А. А, Лбов Г. С. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказываний экспертов // Доклады РАН 1998. Т.361, N 2, С. 174–176.

[4] Викентьев А. А, Лбов Г. С., Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis, 1997, V.7, N 2, P. 175–183.

[5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, Санкт–Петербург, 2004.

[6] Викентьев А. А., Коренева Л. Н., К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты // Математические методы распознавания образов (ММРО–99), РАН ВЦ, Москва, 1999, 151–154.

Институт математики СО РАН и Новосибирский госуниверситет, Новосибирск
E-mail: `vikent@math.nsc.ru`

Различные вопросы об абелевых подгруппах экзистенциально-замкнутых групп в классе CSA(f)–групп без инволюций

А. А. Викентьев, Р. А. Викентьев

В работе E. Jaligot, A. O. Housine, Existentially closed CSA-groups, J. of Algebra (2004) авторы поставили вопрос 5.2 о возможных значениях мощностей множеств $I, I(p)$ в утверждении теоремы 1.2 про экзистенциально замкнутые группы в классе $CSA(f)$-групп с условием $f(2) = 0$ (без инволюций), а более точно — ее максимальной абелевой подгруппе. В доказательствах результатов упомянутой работы используется теория моделей [1,3], комбинаторная теория групп и теорема Куроша о подгруппах группы, являющейся свободным произведением групп (см. книгу Линдона и Шуппа). Получено в докладе описание возможных значений мощностей множеств $I, I(p)$, а так же ответ на вопрос, поставленный в статье и связанные с такими абелевыми подгруппами вопросы. На основе известных результатов Ю. Л. Ершова, Н. Г. Хисамиева, С. С. Гончарова и их учеников, получено описание (сильно)конструктивизируемых и автоустойчивых максимальных абелевых подгрупп в экзистенциально-замкнутых группах из класса $CSA(f)$-групп с условием $f(2) = 0$ и их подгрупп.

Список литературы

[1] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей. — М.: Мир, 1977.
[2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп — Москва, 1982.
[3] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика — Санкт-Петербург, 2004.

Институт математики СО РАН и Новосибирский госуниверситет, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

О категоричности центральных типов $\Delta - PM$ теорий

А. Р. Ешкеев

В данном тезисе мы представим некоторые свойства $(\Delta - PM)$-теорий относительно категоричности.

Пусть A,B — экзистенциально замкнутые модели йонсоновской теории T и выполняется включение $A \subsetneqq B$. Пусть $\sigma_P = \sigma \cup \{P\}$. Интерпретация одноместного предикатного символа P в B есть A.

Пусть λ, κ - мощности B,A соответственно. Будем говорить, что теория T (λ, κ)-категорична, если для любых ее двух экзистенциально-замкнутых моделей мощности λ их реализации предиката P мощности κ изоморфны между собой и этот изоморфизм продолжается до изоморфизма самих моделей.

Дадим необходимые обозначения, связанные с обогащением сигнатуры рассматриваемой позитивной йонсоновской теории.

Пусть T-произвольная $\Delta - PM$-теория сигнатуры σ. Пусть C — семантическая модель теории T, $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Рассмотрим теорию $T_\Gamma^{PM}(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a | a \in A)\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq "\}$, где $\{"P \subseteq "\}$ — бесконечное множество предложений, которое выражает, что интерпретация символа P является позитивно экзистенциально замкнутой подмоделью в сигнатуре σ. Эта теория не обязательно полная.

Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. Так как T^* является $(\Delta - PM)$-теорией, то существует её центр и мы обозначим его через T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ, теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T.

Один из полученных результатов в рамках выше указанных определений выглядит следующим образом.

Пусть $m \leq \omega$, $\lambda \geq \kappa$.

Теорема. *Пусть T — Σ_{m+1}-полная, совершенная йонсоновская $\Delta - PM$-теория. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) T^* — (λ, κ)-категорична;

2) T^c — (λ, κ)-категорична.

Все необходимые неопределенные в данном тезисе определения можно найти в [1].

Список литературы

[1] А. Р. Ешкеев *Йонсоновские теории.* Учебное пособие, КарГУ, Караганда. - 2009

Карагандинский государственный университет им.академика Е.А.Букетова, Караганда
E-mail: modth1705@mail.ru

Плотные расширения унарных алгебр

В. К. Карташов

Понятие плотного расширения было введено в работе [1] и использовано там для исследования свойств подпрямо неразложимых унарных алгебр.

В данном сообщении предпринята попытка выяснить строение плотных расширений унарных алгебр.

Далее для произвольной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ используются следующие обозначения и определения:

$\triangle_A$ – диагональное отношение на A, т. е. $\triangle_A = \{(a,a) | a \in A\}$;

Ω^* – свободный моноид слов в алфавите Ω;

ua – результат применения слова $u \in \Omega^*$ к элементу $a \in A$.

Элемент $a \in A$ называется *петлёй*, если подалгебра (a), порожденная им, одноэлементна, т. е. $ua = a$ для любого слова $u \in \Omega^*$.

Унарная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *связной*, если пересечение любых двух ее однопорожденных подалгебр непусто.

Ядром алгебры $\mathfrak{A}$ называется пересечение всех ее однопорожденных подалгебр (если оно непусто).

Далее, если $\mathfrak{B}$ – подалгебра унарной алгебры $\mathfrak{A}$, и $\theta \in Con\mathfrak{A}$, то θ_B означает конгруэнцию на $\mathfrak{B}$, определенную равенством $\theta_B = \theta \cap (B \times B)$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *плотным расширением* подалгебры $\mathfrak{B}$, если выполнено условие

$$(\forall \theta \in Con\mathfrak{A})(\theta_B = \triangle_B \Rightarrow \theta = \triangle_A).$$

Очевидно, что любая унарная алгебра является плотным расширением самой себя.

Предложение 1. *Если $\mathfrak{A}$ – связная унарная алгебра, и $\mathfrak{A}$ не имеет ядра, то она является плотным расширением любой своей подалгебры.*

Предложение 2. *Если $\mathfrak{B}$ – неодноэлементная унарная алгебра, и на $\mathfrak{B}$ истинно некоторое тождество вида $wx = x$, где w – непустое слово из Ω^*, то $\mathfrak{B}$ не имеет плотных связных расширений.*

Далее равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ означает, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \emptyset$.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$. Тогда*

1) *если $|\mathfrak{C}| > 1$, то алгебра $\mathfrak{A}$ не является плотным расширением своей подалгебры $\mathfrak{B}$;*

2) *если $|\mathfrak{C}| = 1$, то $\mathfrak{A}$ является плотным расширением $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ не содержит петель.*

Список литературы

[1] S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petrović, B. Imreh, M. Steinby “Traps, Cores, Extensions and Subdirect Decompositions of Unary Algebras”, Fundamenta Informaticae, **38** (1999), 31–40.

Волгоградский государственный педагогический университет, Волгоград
E-mail: kartashovvk@yandex.ru

Об умножении антимногообразий алгебраических систем

А. В. Карташова

Антитомногообразием (см. [1]) называется всякий класс алгебраических систем фиксированной сигнатуры Ω, определяемый некоторым (возможно, пустым) множеством антитождеств, т.е. предложений вида

$$(\forall \bar{x})(\neg\alpha_1(\bar{x}) \vee \neg\alpha_2(\bar{x}) \vee \ldots \vee \neg\alpha_m(\bar{x})),$$

где $\alpha_i(\bar{x})$ — атомная формула сигнатуры Ω для любого числа $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — произвольный класс алгебраических систем. Произведение $\mathfrak{M} \underset{\mathfrak{K}}{\circ} \mathfrak{N}$ его подклассов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{K}$ определено А. И. Мальцевым ([2]) по правилу

$$\mathcal{A} \in \mathfrak{M} \underset{\mathfrak{K}}{\circ} \mathfrak{N} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathfrak{K} \;\&\; (\exists\theta)(\mathcal{A}/\theta \in \mathfrak{N} \;\&\; (\forall a \in \mathcal{A})(a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{M})),$$

где $a\theta$ — смежный класс конгруэнции θ, содержащий элемент a.

В [2] показано, что подквазимногообразия произвольного квазимногообразия алгебраических систем конечной сигнатуры относительно умножения образуют группоид, найдены достаточные условия, при которых он является полугруппой.

Теорема 1. *Пусть множество функциональных символов сигнатуры Ω конечно. Тогда подантимногообразия каждого антимногообразия $\mathfrak{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω образуют полугруппу относительно умножения в классе $\mathfrak{K}$.*

Для любой сигнатуры Ω через $\mathfrak{U}_\Omega$ обозначим класс всех алгебраических систем данной сигнатуры, а через $\mathfrak{U}'_\Omega$ — класс всех алгебраических систем этой сигнатуры, не содержащих идемпотентов.

Теорема 2. *Если множество функциональных символов сигнатуры Ω бесконечно, то подантимногообразия антимногообразия $\mathfrak{U}_\Omega$ не образуют группоида относительно мальцевского умножения в классе $\mathfrak{U}_\Omega$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{K}$ – антимногообразие алгебр сигнатуры Ω, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – подантимногообразия антимногообразия $\mathfrak{K}$. Тогда*

$$\mathfrak{M} \underset{\mathfrak{K}}{\circ} \mathfrak{N} = \begin{cases} \mathfrak{U}'_\Omega, & \text{если} \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{U}_\Omega, \quad \mathfrak{M} \neq \mathfrak{U}_\Omega, \\ \mathfrak{N}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие. *Антимногообразия алгебр конечной сигнатуры Ω образуют относительно умножения в классе $\mathfrak{U}_\Omega$ полугруппу с пустым центром без правых единиц, единственной левой единицей которой является элемент $\mathfrak{U}_\Omega$.*

Список литературы

[1] В. А. Горбунов, А. В. Кравченко, Универсальные хорновы классы и антимногообразия алгебраических систем, Алгебра и логика, **39**, 1 (2000), 3–22.

[2] А. И. Мальцев, Об умножении классов алгебраических систем, Сиб. мат. ж., **8**, 2 (1967), 346–365.

Волгоградский государственный педагогический университет, Волгоград
E-mail: kartashovaan@yandex.ru

Минимально полные коммутативные эпигруппы

О. В. Князев

В [1] определяется понятие полноты для произвольных универсальных алгебр и ставится задача (проблема 10): *охарактеризовать минимальные полные алгебры данного многообразия*. Здесь сообщается решение этой задачи для коммутативных эпигрупп. Напомним, что полугруппа A называется эпигруппой, если некоторая степень любого элемента A содержится в некоторой ее подгруппе. На эпигруппу можно смотреть как на полугруппу с дополнительной унарной операцией (см. [2]). Класс $\mathbf{V}$ всех эпигрупп, рассматриваемых как унарные полугруппы, является многообразием, а в качестве его подмногообразий выступают, в частности, класс всех периодических полугрупп, класс всех вполне регулярных полугрупп.

Напомним некоторые определения. Мы рассматриваем эпигруппы как унарные полугруппы. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех эпигрупп, $L(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. Произвольное дизъюнктное семейство подэпигрупп эпигруппы A называют *россыпью* эпигруппы A, а эпигруппы, которые ее составляют, — *компонентами* россыпи. Пусть $\mathbf{X}(A)$ есть $\mathbf{X}$-вербал эпигруппы A т.е. россыпь, компоненты которой в точности все классы $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции эпигруппы A, (т.е. наименьшей из конгруэнций в множестве всех конгруэнций на эпигруппе A, фактор-эпигруппы по которым принадлежат многообразию $\mathbf{X}$), являющиеся подэпигруппами эпигруппы A. Эпигруппу A называют *полной*, если равенство $\mathbf{X}(A) = A$ имеет место для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $L(\mathbf{V})$.

Если полная эпигруппа не имеет собственных нетривиальных полных подэпигрупп, то ее называют *минимально полной* эпигруппой.

Имеет место следующая

Теорема. *Среди нетривиальных коммутативных эпигрупп минимально полными являются только квазициклические группы и аддитивная группа рациональных чисел.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М., О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. Волгоград: Перемена (2000) 179–190.

[2] Шеврин Л. Н., К теории эпигрупп. I, II. Матем. сб., 185 (1994), N 8, 129-160; N 9, 153–176.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev@omsk.edu

Минимально полные конечные полугруппы с нулем

О. В. Князев, Т. Ю. Финк

В [1] намечены возможные перспективы дальнейших исследований произвольных универсальных алгебр. В частности, формулируется проблема (см. [1], проблема 10): *охарактеризовать минимальные полные алгебры данного многообразия.* Нас будет интересовать решение этой задачи в классе полугрупп с нулем, что является продолжением исследований начатых в [2].

Напомним некоторые определения. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с выделенным нулем; $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом "полугруппа" понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}-$вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий нуль. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$*вербалом* полугруппы A.

Полугруппу A называют *полной*, если равенство $\mathbf{X}(A) = A$ имеет место для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$. Если полная полугруппа не имеет собственных, отличных от нуля, полных подполугрупп, то ее называют *минимально полной* полугруппой.

Элемент a полугруппы A называют нильэлементом, если найдется натуральное число n такое, что $a^n = 0$. Полугруппу, у которой все элементы суть нильэлементы, называют *нильполугруппой*.

Имеет место следующая

Теорема. *Конечная полугруппа A с нулем является минимальной полной тогда и только тогда, когда она является либо гомоморфным образом конечной полугруппы $A_k =< a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = a, b^k = 0 >$, где $k \geq 2$, либо есть 2-порожденная полугруппа, являющаяся идеальным расширением конечной нильполугруппы с помощью полугруппы B_2 .*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М., О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. Волгоград: Перемена. 2000. - С. 179–190.

[2] Финк Т. Ю., Вложимость и минимальная полнота конечных полугрупп // Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сб. научных трудов: Ежегодник. Омск. Изд-во ОмГПУ, 2001. - Вып. 1. - С. 20–25.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev@omsk.edu, tatyanafink@yandex.ru

Полные унары

Т. А. Мартынова

Изучается понятие полноты в смысле Л. М. Мартынова [1] для унаров. Нами описаны полные и минимально полные унары. Формулировке результатов предпошлем необходимые определения и обозначения применительно к унарам.

Пусть $\mathbf{U}$ — многообразие всех унаров т.е. алгебр с одной унарной операцией, $L(\mathbf{U})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{U}$. Унар A называется полным, если он не имеет гомоморфизмов на нетривиальные унары из атомов решетки $L(\mathbf{U})$, и минимально полным, если A — полный унар, не содержащий нетривиальных собственных полных подунаров.

Операцию на унаре будем обозначать штрихом и для элемента a унара считать, что $a^0 = a$, $a^1 = a'$ и $a^{n+1} = (a^n)'$ для любого натурального n. Заметим, что атомы решетки $L(\mathbf{U})$ исчерпываются многообразиями $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, определяемыми тождествами $x = x'$ и $x' = y'$ соответственно. Моногенный унар, заданный одним определяющим соотношением вида $x = x^n$ для некоторого $n > 0$, назовем циклическим унаром; соотношением вида $x^k = x^l$ — моногенным нильунаром, если $l - k = 1$; и моногенным унаром с нетривиальным циклом, если $l - k > 1$. В соответствии с определением квазимоногенной алгебры $C(\mathbf{P}^\infty)$ [1], где $\mathbf{P}$ — минимальное многообразие алгебр, квазимоногенный нильунар $C(\mathbf{P}_2^\infty)$ может быть задан так: $C(\mathbf{P}_2^\infty) = \langle c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots \mid c_0 = c_0',\ c_n = c_{n+1}', n = 0, 1, 2, \ldots\rangle$.

Кроме того, нам понадобятся два унара, обозначаемые $C(\mathbf{U}^\infty)$ и $C(\mathbf{O}^\infty)$, которые мы называем свободным квазимоногенным унаром и квазимоногенным унаром с нетривиальным циклом соответственно. Эти унары могут быть заданы следующим образом:
$C(\mathbf{U}^\infty) = \langle c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots \mid c_n = c_{n+1}', n = 0, 1, 2, \ldots\rangle$,
$C(\mathbf{O}^\infty) = \langle c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots \mid c_0 = c_0^s,\ c_n = c_{n+1}', s > 1, n = 0, 1, 2, \ldots\rangle$.

Унар C, являющийся объединением некоторого семейства попарно пересекающихся унаров, будем называть связным объединением унаров.

Теорема 1. *Унар C является минимально полным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*
1) C — циклический унар;
2) C — квазимоногенный нильунар;
3) C — свободный квазимоногенный унар.

Теорема 2. *Унар C является полным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*
1) C — циклический унар;
2) C — связное объединение квазимоногенных нильунаров;
3) C — связное объединение свободных квазимоногенных унаров;
4) C — связное объединение квазимоногенных унаров с нетривиальным циклом.

Список литературы

[1] Мартынов Л. М., О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универс. алгебра и ее приложения: Труды межд. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: martynova.tamara2009@yandex.ru

О классах свойств, сохраняющихся при морфизмах некоторых обобщений многоосновных алгебраических систем

Н. В. Нагул

Рассматривается обобщение известной конструкции многоосновной алгебраической системы — общая многоосновная алгебраическая система конечного типа (ОМАСК), функции и отношения которой заданы на расширенных ступенях Н. Бурбаки. Разработан метод логико-алгебраических уравнений для нахождения условий сохранения истинности формульных предикатов, выражающих свойства исходной ОМАСК, при отображении основных множеств ОМАСК во вторую, причем критерии сохранения формулируются в терминах обобщенного понятия канонических распространений этих отображений на ступени.

В процессе получения эффективных критериев на основе процедуры сужения разнообразия скулемовских функций, отвечающих кванторам существования получаемых методом формул, выделены классы свойств, за сохранение которых отвечают сходные типы отображений. Это позволяет, подобно известным результатам о сохранении истинностных значений формул первопорядковой логики (характеристическим теоремам Р. Линдона, Е. Лося, А. Тарского, а также С. Фефермана, Ж. Стерна и М. Отто для многоосновного случая) по виду свойства делать выводы о возможности его сохранения. Предложенный метод ориентирован, прежде всего, на применение к исследованию динамических систем, поскольку их алгебраизация, в виду большой сложности, по характеру своих определений, тех математических объектов, которые изучаются в динамике систем, как правило, приводит именно к ОМАСК.

Показано, что метод представимости (С. Н. Васильев), суть которого заключается в записи рассматриваемого свойства динамической системы в виде позитивной формулы специального языка многоосновных алгебраических систем, является частным случаем метода логико-алгебраических уравнений. Получены обобщения теорем о сохранении некоторых свойств общей динамической системы (ОДС) типа В. В. Немыцкого, в том числе свойств типа инвариантности, ограниченности движений и других. При этом в качестве условий, накладываемых на основные отображения, выступают требования типа гомоморфизмов ОМАСК, к той или иной форме которых с учетом вида изучаемого свойства сводима ОДС.

Работа выполнена при финансовой поддержке совместного интеграционного проекта N 45 СО РАН и гранта РФФИ N 10-08-90030-Бел-а.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
E-mail: sapling@icc.ru

О категоричных нормальных теориях ранга 3

Е. А. Палютин

В докладе рассматриваются категоричные базисно неприводимые и нормальные теории ранга 3. Для краткости базисно неприводимые и нормальные теории будем называть $\star$ *-теориями* .

$\star$-теории делятся на 3 класса: (1) тривиальные, (2) глобально аддитивные, (3) локально аддитивные.

Теорема 1. *Тривиальные $\star$-теории почти сильно минимальны.*

Теорема. 2 *Существует категоричная базисно нормальная теория, которую нельзя обогатить до почти сильно минимальной базисно нормальной теории.*

Пусть V — векторное пространство над телом K, H — подгруппа мультипликативной группы тела K. Пусть G — некоторая группа, для которой абелева группа V^+ является ее подгруппой. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $F \to H$, ядром которого является группа V^+. Определим действие группы G на подгруппе V^+ следующим образом: $h^g = f(g) \cdot h$, где $f(g) \cdot h$ умножение в векторном пространстве V на элемент тела $f(g)$. По сути дела, мы определили короткую точную последовательность

$$V^+ \subseteq G \to^f H \to 0.$$

Обозначим эту последовательность через $S(V, G, f)$.

Будем говорить, что эта последовательность *вырождена,* если существует такая подгруппа L группы G, изоморфная группе H, что G является полупрямым произведением своих подгрупп V^+ и L с соответствующим действием группы L на V^+.

Теорема 3. *Для каждой последовательности $S(V, G, f)$ существует $\star$-теория T_0, которая допускает обогащение до почти сильно минимальной базисно нормальной теории ранга 3 тогда и только тогда, когда последовательность $S(V, G, f)$ вырождена.*

Работа поддержана грантом РФФИ N 09-01-00336-а и Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1).

Список литературы

[1] *Е.А.Палютин,* Интерпретация графов в некоммутативных теориях степеней Фреше, Фундаментальная и прикладная математика, т. 15, выпуск 2, 2009, стр. 145–167.

[2] *Е.А.Палютин,* Примитивно связные теории, Алгебра и логика, т.39, N 2 (2000), с. 145–169.

[3] *E.A.Palyutin,* Additive theories, in: Proceedings of Logic Colloquium'98 (Lectures Notes in Logic, v. 13), ASL, Massachusetts, 2000, p. 352–356.

[4] *Е.А.Палютин,* Категоричные хорновы классы 1., Алгебра и логика, т.19, N 5 (1980), с. 582–614.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
E-mail: palyutin@math.nsc.ru

Максимальные клоны мульти- и ультраопераций

В. И. Пантелеев

Пусть A — конечное множество, n-местной мультиоперацией на множестве A называется отображение $f : A^n \to 2^A$, а n-местной мультипроекцией — отображение $e_n^i : (x_1, \ldots, x_n) \to \{x_i\}$, $1 \le i \le n$.

Суперпозиция $f(f_1, \ldots, f_m)$ с внешней мультиоперацией f и внутренними мультиоперациями $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $f_m(x_1, \ldots, x_n)$ определяет следующим образом мультиоперацию $h_1(x_1, \ldots, x_n)$:

$$h_1(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если существует } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ такое, что } f_i(a_1, \ldots, a_n) = \varnothing; \\ \bigcup\limits_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_n)} f(b_1, \ldots, b_m), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Определение суперпозиции позволяет находить значение мультиоперации на наборах, составленных из элементов множества 2^A.

Клоном называется множество мультиопераций, содержащее все мультипроекции и замкнутое относительно суперпозиции.

Пусть G_m — m-местное отношение на множестве 2^A и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in G_m \Leftrightarrow$ существует i такое, что $\alpha_i = \varnothing$ либо $|\alpha_i| = 1$ для всех i и $\alpha_i \ne \alpha_j$ при $i \ne j$ ($i, j \in \{1, \ldots, m\}$).

Мультиоперация $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет отношение G_m, если для любых n наборов $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1})$, ..., $(\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn})$ из G_m, набор

$$(f(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, f(\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}))$$

принадлежит G_m.

Через $F_{s,m}$ обозначим множество мультиопераций, сохраняющих отношение G_m.

Теорема. *Если A — конечное множество, содержащее k элементов, то множества $F_{s,1}$ и $F_{s,k}$ являются максимальными клонами.*

В докладе приводится описание и некоторых других максимальных клонов, а также вводится понятие ультраоперации, клона ультраопераций и приводится описание некоторых максимальных клонов ультраопераций.

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск
E-mail: v_panteleyev@mail.ru

Минимальные полные порождающие множества для клонов и суперклонов ранга 2

Н. А. Перязев

Пусть $\mathfrak{A} =< A; \Omega >$ алгебра и I интервал в решетке подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$. Множество $B \subseteq A$ назовем *полным порождающим множеством* для алгебр интервала I, если для любой алгебры $\mathfrak{C} \in I$ существует $C \subseteq B$, которое порождает $\mathfrak{C}$. Полное порождающее множество для алгебр интервала I, любое собственное подмножество которого не является таковым, назовем *минимальным полным порождающим множеством*.

В докладе представлены результаты по исследованию порождающих множеств для клонов и суперклонов ранга 2 (определение можно найти, например, в [1]).

Введем обозначения для следующих булевых операций, заданных векторно:

$0 = (0), 1 = (1), - = (10), l = (01101001), p = (00101111), t = (00011111)$,

$$d_n = \bigvee_{i \neq j}^{n+1} x_i x_j.$$

f^* обозначает двойственную к f.

Теорема 1. *Множество* $\{0, 1, -, l, p, p^*, t, t^*, d_n, d_n^* (n = 1, 2, \ldots)\}$ *является минимальным полным порождающим множеством для всех клонов ранга 2.*

Введем обозначения для следующих мультиопераций определенных на множестве $\{1, 2\}$ векторным заданием:

$- = (21), \cup = (1332), l = (12212112)$.

n-местные мультиоперации $d^n_{i,\alpha}$ на множестве $\{1, 2\}$ определим следующим образом:

$$d^n_{i,\alpha} = (3, \ldots, 3, \overset{i}{\alpha}, 3, \ldots, 3), \quad (1 \leq i \leq 2^n),$$

где $\alpha \in \{1, 2\}$. В частности $d^0_{1,\alpha} = (\alpha)$.

Теорема 2. *Множество* $\{-, \cup, l, d^1_{1,1}, d^2_{1,1}, d^2_{4,2}, d^n_{1,2}, d^n_{2^n,1} (n = 0, 1, \ldots)\}$ *является минимальным полным порождающим множеством для всех суперклонов ранга 2.*

Список литературы

[1] Перязев Н. А., Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны / Н. А. Перязев // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки; Казань, 2009. — Т. 151. Книга 2. — С. 120–125.

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск
E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

О полугруппах внутренних гомоморфизмов обогащений универсальных алгебр

А. Г. Пинус

Напомним, что внутренним гомоморфизмом (изоморфизмом) универсальной алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ называется любой гомоморфизм (изоморфизм) некоторой подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ в (на) ее же подалгебру. Совокупность всех внутренних гомоморфизмов (изоморфизмов) алгебры $\mathcal{A}$ с добавленным к ним пустым отображением обозначим как $\operatorname{Ihm}\mathcal{A}$ ($\operatorname{Iso}\mathcal{A}$). Совокупность $\operatorname{Ihm}\mathcal{A}$ ($\operatorname{Iso}\mathcal{A}$) образует полугруппу относительно естественным образом определенной операции композиции на частичных отображениях множества A в себя. Для любой совокупности F операций на множестве A, через $\mathcal{A}^{\mathrm{F}}$ обозначим обогащение алгебры $\mathcal{A}$ до сигнатуры $\sigma \cup \mathrm{F}$.

Подполугруппу S полугруппы $\operatorname{Ihm}\mathcal{A}$ назовем локально замкнутой если, для любого гомоморфизма g подалгебры $\mathcal{B} = \langle B; \sigma \rangle$ алгебры $\mathcal{A}$ в подалгебру алгебры $\mathcal{A}$ условие “для любого конечного $C \subseteq A$ существует $g_C \in S$ такой, что ограничения g и g_C на C совпадают” влечет включение $g \in S$ и если для любого гомоморфизма g подалгебры $\mathcal{B} = \langle B; \sigma \rangle$ алгебры $\mathcal{A}$ в подалгебру алгебры $\mathcal{A}$, для любой подалгебры G алгебры $\mathcal{B}$ ограничение $g|C$ до G так же входит в S.

Для любой подполугруппы S полугруппы $\operatorname{Ihm}\mathcal{A}$ через S^{ep}_{fg} обозначим совокупность эпиморфизмов из S конечно порожденных подалгебр алгебры $\mathcal{A}$ на ее конечно порожденные подалгебры.

Через (*) обозначим следующее свойство подполугрупп S полугруппы $\operatorname{Ihm}\mathcal{A}$ таких, что $\operatorname{Iso}\mathcal{A} \subseteq S \subseteq \operatorname{Ihm}\mathcal{A}$: “для любого $\mu \in \operatorname{Ihm}\mathcal{A}^{ep}_{fg} \backslash S^{ep}_{fg}$ существуют элементы $b_1 \neq b_2$ в области значений μ-подалгебре $\mathcal{B}$ такие, что для любого S^{ep}_{fg}-эпиморфизма η подалгебры $\mathcal{B}$ на подалгебру $\mathcal{C}$ такого, что $\eta(b_1) \neq \eta(b_2)$ и любого $\eta' \in S^{ep}_{fg}$ такого, что области значение η и η' совпадают, не существует $\eta'' \in S^{ep}_{fg}$ такого, что $\eta'\eta'' = \eta\mu$.”

Теорема *Для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$, любой полугруппы S такой, что $\operatorname{Iso}\mathcal{A} \subseteq S \subseteq \operatorname{Ihm}\mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует обогащение $\mathcal{A}^F$ алгебры $\mathcal{A}$ алгебры такое, что $S = \operatorname{Ihm}\mathcal{A}^F$;*

(2) *S локально замкнуто и обладает свойством (*).*

Новосибирский государственный технический университет
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Критерий планарности графов Кэли 0-прямых объединений нильпотентных полугрупп

Д. В. Соломатин

В ряде работ нами исследовалось свойство планарности графов Кэли полугрупп [1]. Как оказалось, свойство планарности графа Кэли полугруппы не сохраняется при переходе к теоретико-полугрупповым конструкциям коммутативно-свободного произведения [2], ординальной суммы [3], прямого произведения [4] циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем. В связи с этим возникает естественная задача характеризации полугрупп с планарными графами Кэли тех или иных классов $\mathcal{K}$ полугрупп, применение к которым наиболее используемых в теории полугрупп конструкций наследуют свойство планарности. В настоящем исследованиии в качестве $\mathcal{K}$ выбран класс нильпотентных полугрупп, а в качестве конструкции взято 0–прямое объединение. Напомним, что 0–прямым объединением дизъюнктного семейства полугрупп S_i $(i \in I)$ с нулем называется полугруппа S с нулем, определенная на объединении полугрупп S_i с последующим отождествлением нулей всех S_i и операцией умножения, совпадающей с исходными операциями на каждой полугруппе S_i, и $xy = 0$, если $x \in S_i$, $y \in S_j$ и $i \neq j$.

Основным результатом работы является

Теорема. *Свойство планарности графа Кэли полугруппы наследуется 0-прямым объединением нильпотентных полугрупп, если и только если основа графа Кэли каждой из объединяемых полугрупп в результате удаления нулевого элемента допускает такую плоскую укладку, что все её вершины принадлежат одной грани.*

Следствие. *0-прямое объединение любого семейства свободных нильпотентных полугрупп (любой ступени нильпотентности и с любым множеством образующих) допускает планарный граф Кэли.*

Список литературы

[1] Zelinka B. Graphs of Semigroups // Casopis. Pest. Mat, 1981. Vol. 106. — P. 407–408.

[2] Соломатин Д. В. Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли // Вестник Омского университета, Омск: Изд-во ОмГУ, — 2005. — Вып. 4. — С. 36–38.

[3] Соломатин Д. В. Рассыпчатые полугруппы с планарными графами Кэли // Известия ВГПУ: Серия “Естественные и математические науки”, Волгоград: Изд-во “Перемена”. — 2005. — Вып. 4 (13). — С. 27–31.

[4] Соломатин Д. В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли // Сибирские Электронные Математические Известия, http://semr.math.nsc.ru — 2006. — Т. 3. — С. 238–252.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: denis_2001j@bk.ru

Абелевы и гамильтоновы многообразия некоторых группоидов

Н. В. Трикашная

В работе характеризуются группоиды с единицей, квазигруппы и полугруппы, порождающие абелевы и гамильтоновы многообразия. Описания данных группоидов, обладающих свойствами абелевости и гамильтоновости получено в [1, 2]. Напомним, что алгебра называется абелевой [3], если для любого терма $t(x, y_1, \ldots, y_n)$ и любых элементов $u, v, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ алгебры из равенства $t(u, c_1, \ldots, c_n) = t(u, d_1, \ldots, d_n)$ следует $t(v, c_1, \ldots, c_n) = t(v, d_1, \ldots, d_n)$. Алгебра называется гамильтоновой [3], если любая ее подалгебра является классом некоторой конгруэнции данной алгебры. Многообразие называется абелевым (гамильтоновым), если все алгебры этого класса абелевы (гамильтоновы).

Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется прямоугольной связкой полугрупп, если существует семейство $\{A_{i\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$, являющееся разбиением множества A, причем $\langle A_{i\lambda}, \cdot \rangle$ — подполугруппы полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ и $A_{i\lambda} \cdot A_{j\mu} \subseteq A_{i\mu}$ для любых $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ называется раздуванием полугруппы $\langle B, \cdot \rangle$, если существует разбиение $\{X_a \mid a \in B\}$ множества A такое, что $a \in X_a$ и $x \cdot y = a \cdot b$ для любых $a, b \in B, x \in X_a, y \in X_b$. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — группоид. Обозначим через $V(A)$ многообразие, порожденное группоидом $\langle A, \cdot \rangle$.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — полугруппа. Следующие условия эквивалентны:*

1) многообразие $V(A)$ абелево;

2) многообразие $V(A)$ гамильтоново;

3) полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ — раздувание прямоугольной связки периодических абелевых групп и произведение идемпотентов A является идемпотентом A.

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — группоид с единицей. Следующие условия эквивалентны:*

1) многообразие $V(A)$ абелево;

2) многообразие $V(A)$ гамильтоново;

3) группоид $\langle A, \cdot \rangle$ является периодической абелевой группой.

Теорема 3. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – конечная квазигруппа. Следующие условия эквивалентны:*

1) многообразие $V(A)$ абелево;

2) многообразие $V(A)$ гамильтоново;

3) квазигруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является абелевой квазигруппой.

Список литературы

[1] Warne R.J. *Semigroups obeying the term condition*//Algebra Universalis. 1994. No. 31. P.113–123.

[2] Степанова А.А., Трикашная Н.В. *Абелевы и гамильтоновы группоиды*//Фундаментальная и прикладная миатематика. 2009. Т.15.

[3] Kiss E. W., Valeriote M. A. *Abelian algebras and the Hamiltonian property*//J. Pure Appl. Algebra. 1993. V.87. No.1. P.37–49.

Дальневосточный государственный университет, Владивосток

E-mail: trik74@mail.ru

О вербальных категориях

С. Н. Тронин

Вербальные категории были введены в работе [1]. Эти подкатегории категории конечных ординалов образуют полную не менее чем счетную решетку. Понятие вербальной категории позволяет расширить как границы теории операд, так и границы традиционной теории многообразий универсальных алгебр. С каждой вербальной категорией связан особый класс "сигнатур" — функторов из данной вербальной категории в категорию множеств, — с помощью которого можно построить некий аналог всей "обычной" универсальной алгебры, в котором есть свои тождества, свои многоообразия, и свои операды (операды над данной вербальной категорией [1]). При этом "обычная" универсальная алгебра — это случай тривиальной вербальной категории.

Пусть W — произвольная вербальная категория. Для каждого $m \geq 0$ положим $OW(m) = \coprod\limits_{k \geq 0} W(k,m)$.

Теорема 1. *Семейство $OW = \{OW(n)|n \geq 0\}$ обладает естественной структурой W-операды.*

Опишем, как устроена операдная композиция в OW. Пусть $f \in OW(m)$, $g_i \in OW(n_i)$, $1 \leq i \leq m$. Это означает, что заданы морфизмы категории W, имеющие вид: $f : [k] \to [m]$, $g_i; [l_i] \to [n_i]$. Положим $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in P(n_1 + \dots + n_m, m)$ (см. [1]). Тогда, по определению, $fg_1 \dots g_m = (f^*\alpha)(g_{f(1)} \sqcup \dots \sqcup g_{f(k)})$. Если $W = \Sigma$, то получается хорошо известная операда симметрических групп.

Теорема 2. *Классификатор подобъектов в топосе всех функторов из W в категорию множеств обладает естественной структурой W-операды.*

Теоремы 1 и 2 справедливы и для для многосортных аналогов вербальных категорий. Можно также перенести понятие вербальной категории на категории иной природы, нежели подкатегории категории конечных ординалов. Вербальными категориями тогда оказываются некоторые подкатегории категорий танглов, лент и кобордизмов, и, в частности, категория, классом морфизмов которой является объединение всех групп артиновых кос. Во всех этих случаях также можно построить аналоги традиционной универсальной алгебры, в которых имеются операды соответствующего типа. При этом вместо категории множеств можно брать симметрические моноидальные категории с некоторой дополнительной структурой, которая определяется с помощью данной вербальной категории.

Список литературы

[1] Тронин С. Н., *Абстрактные клоны и операды* // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43. — N 4. — С. 924–936.

Казанский государственный университет, Казань
E-mail: Serge.Tronin@ksu.ru

Регулярные и эпиморфные функторы универсальных мальцевских алгебр

А. Д. Ходалевич

Рассматриваются универсальные алгебры из фиксированного мальцевского многообразия и удовлетворяющие условию максимальности и минимальности для подалгебр. Используются определения и обозначения из [1].

Пусть Θ — отображение, которое ставит в соответствие каждой алгебре A из непустого класса алгебр $\mathfrak{X}$ некоторое множество $\Theta(A)$ её максимальных подалгебр и саму алгебру A. Тогда Θ назовем m-функтором. Если при этом для любой алгебры A и любой конгруэнции α на A выполняются условия:

1) из $M \in \Theta(A)$ всегда следует $\alpha M/\alpha \in \Theta(A/\alpha)$;

2) из $M/\alpha \in \Theta(A/\alpha)$ следует $M \in \Theta(A)$,

то Θ назовем регулярным m-функтором.

m-функтор Θ называется эпиморфным, если для любого эпиморфизма φ алгебры $A \in \mathfrak{X}$ на алгебру $B \in \mathfrak{X}$ справедливо равенство

$$(\Theta(A))^{\varphi} = \Theta(B).$$

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс алгебр. Если Θ — эпиморфный m-функтор на $\mathfrak{X}$, то Θ регулярен.*

Полученный результат аналогичен соответствующему результату работы [2].

Список литературы

[1] Скиба А. Н. Решетки и универсальные алгебры / А. Н. Скиба, — Гомель, Гомельский ниверситет им. Ф. Скорины, 2002. — 256 с.

[2] Каморников С. Ф., Подгрупповые функторы и классы конечных групп, С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. — Мн.: Бел.навука, 2003. — 254 с.

УО “ГГУ им. Ф. Скорины”, Гомель
E-mail: kolenchukova@gsu.by

О вложении графов в квазигруппы Штейнера

Л. В. Шабунин

Группоид $(Q, \cdot)$ называется квазигруппой Штейнера, если в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества

$$xy = yx, \qquad (xy)y = x, \qquad xx = x.$$

Пусть K_0 — класс всех конечных графов, K_1 — класс всех конечно определенных квазигрупп Штейнера, V — многообразие всех квазигрупп Штейнера.

Теорема. *Класс K_0 относительно элементарно определим в классе K_1.*

Следствие 1. *Элементарная теория $Th(K_1)$ класса K_1 наследственно неразрешима.*

Следствие 2. *Элементарная теория $Th(V)$ многообразия V наследственно неразрешима.*

Ранее аналогичные результаты были получены автором для коммутативных и тотально-симметрических квазигрупп.

Список литературы

[1] Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.
[2] Ершов Ю. Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.

Чувашский государственный университет, Чебоксары
E-mail: lvsh@mail.ru

Каждое равенство на частичных алгебрах характеризуется алгебраическим оператором

М. С. Шеремет

Известно, что в случае алгебр с частичными операциями существует несколько способов определить, как понимается формально равенство. В литературе утвердились четыре таких равенства (слабое, эвансовское, клиниевское и сильное); все они интерпретируются по одной схеме, рассматривая которую в общем виде, мы получаем целое “пространство” возможных семантик равенства.

С другой стороны, основные алгебраические операторы — взятия гомоморфных образов и подалгебр — также имеют различные обобщения на частичный случай. Например, $\mathcal{B}$ является *начальным сегментом* $\mathcal{A}$, если для любых набора $\overline{a}$ из $\mathcal{A}$ и элемента b из $\mathcal{B}$ имеем

$$f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = b \quad \Leftrightarrow \quad f^{\mathcal{B}}(\overline{a}) = b$$

(т. е. элемент b “затягивает” в B элементы набора $\overline{a}$).

Мы доказываем, что равенство Клини является наиболее сильным равенством устойчивым относительно взятия начальных сегментов.

Рассмотрим четыре оператора: взятия слабых подалгебр, частичных подалгебр, начальных сегментов и произвольных гомоморфных образов — т. е. те операторы для подалгебр и гомоморфных образов, которые не сохраняют равенство в произвольном случае. Тогда с учетом результатов [1] получаем, что эти операторы являются “характеристическими” для слабого, эвансовского, клиниевского и сильного равенств, соответственно.

Список литературы

[1] В. А. Горбунов и М. С. Шеремет, *Хорновы классы предикатных систем и многообразия частичных алгебр*, Алгебра и логика, **39** (2000) N 1, 23–36.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: `sheremet@math.nsc.ru`

Характеризация конечно порожденных многообразий частичных алгебр

М. С. Шеремет

В докладе автора на “Мальцевских чтениях 2009” сообщалось о способе характеризации частичных алгебр с использованием одного нового оператора, назовем его **R**, который дает на выходе специальный фактор декартова произведения своих аргументов. В то же время отмечалось, что мы не знаем имеет ли **R** “конечный характер” в том смысле, можем ли мы всегда брать только конечное число исходных алгебр для получения конечной алгебры из семейства других конечных алгебр.

В настоящем докладе мы показываем, что *в случае конечного числа конечных аргументов действие* **R** *является итерацией достаточно простого двуместного преобразования.* Таким образом, в характеризации конечно порожденных многообразий частичных алгебр оператор **R** можно заменить более простым. В то же время приводятся аргументы, что в произвольном случае упрощения подобного рода ожидать не стоит.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: sheremet@math.nsc.ru

О числе предельных моделей теорий, получаемых отождествлением сигнатурных символов

И. В. Шулепов

В [1, § 3.5] и [2] определена операция, позволяющая по системе словарных тождеств I строить граф G_I на некотором фактор-множестве множества последовательностей из ω^ω и по числу компонент связности графа G_I определять число $I_l(T,p)$ предельных моделей *специальной* теории T над некоторым типом p этой теории. Тождествам вида $m \approx n$, $m, n \in \omega$, соответствуют отождествления сигнатурных символов Q_m и Q_n теории T. В результате таких отождествлений образуется некоторая специальная теория T' и тип p', соответствующий типу p.

Теорема 1. *Для любых кардиналов λ и λ', $\lambda' < \lambda$, $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$, $0 < \lambda' < \omega$, существуют специальные теории T и T', где T' получается из T отождествлениями сигнатурных символов, такие, что $I_l(T,p) = \lambda$, $I_l(T',p') = \lambda'$.*

Теорема 2. *Для любых $m, n_i, d_1^i, d_2^i, \ldots, d_{n_i}^i \in \omega \setminus \{0\}$, $i = 0, \ldots, m$, $n_0 = 1$, и любых d'_i, где $d'_0 = d_1^0$, $\max\{d_1^i, \ldots, d_n^i\} \leq d'_i \leq \sum\limits_{j=1}^{n_i} d_j^i$, $i = 1, \ldots, m$, существуют специальные теории T и T' с заданными системами тождеств I и I' соответственно, где T' получается из T отождествлениями сигнатурных символов, такие, что граф G_I теории T имеет $n_0 + \ldots + n_m$ компонент связности с диаметрами d_j^i, $j = 1, \ldots, n_i$, $i = 0, \ldots, m$, а граф $G_{I'}$ теории T' имеет $m+1$ компонент связности с диаметрами d'_i, $i = 0, \ldots, m$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-3669.2010.1.

Список литературы

[1] *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. — 336 с.

[2] *Шулепов И. В.* Факторизации последовательностей по множествам словарных тождеств и предельные модели // Алгебра и теория моделей, 7. Сборник трудов / Под ред. А. Г. Пинуса, К. Н. Пономарева, С. В. Судоплатова — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. — С. 120–130.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: salvodore@mail.ru

On Ehrenfeucht theories with countable not almost homogeneous models

S. V. Sudoplatov

Recall that a countable complete theory T is *Ehrenfeucht* if T is not ω-categorical and has finitely many pairwise non-isomorphic models. A countable model M is *almost homogeneous* if some model $(M, \bar{a})$ is homogeneous, being obtained by constant labellings for elements in a tuple $\bar{a}$. A model M is *limit* [1] if M is not prime over tuples and $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n$ for some elementary chain $(M_n)_{n\in\omega}$ of prime models over tuples.

The *Goncharov — Millar problem* (see [2]–[5]) on existence of countable not almost homogeneous models of Ehrenfeucht theories has a positive solution:

Theorem. *There exists an Ehrenfeucht theory having six countable models* (*two prime models over tuples, and four limit models*), *one of which is not almost homogeneous.*

The proof is based on the approach for constructions of Ehrenfeucht theories, presented in [1, §3.5]. It uses quotients of symbolic sequences by sets of word identities, and the technique of these quotients that developed in [6].

The following system of identities is required:

$$nn \approx n,\ n \in \omega;\quad 0 \approx n,\ n \geq 3;\quad w\hat{\ }0 \approx 0,\ w \in \omega^{<\omega}.$$

The work is supported by RFBR grant No. 09-01-00336-a, and by the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools via project NSh-3669.2010.1.

References

[1] *Sudoplatov S. V.* The Lachlan problem. — Novosibirsk: Edition of NSTU, 2009. — 336 p.

[2] *Millar T.* Decidable Ehrenfeucht theories // Proc. Sympos. Pure Math. 1985. V. 42. P. 311–321.

[3] *Millar T.* Pure Recursive Model Theory // Handbook of Computability Theory / Edited by E. R. Griffor. — Elsevier Science B. V., 1999. — P. 507–532.

[4] *Goncharov S. S.* Computability and Computable Models // Mathematical problems from applied logic II: logics for the XXIst century / Edited by D. M. Gabbay, S. S. Goncharov, M. Zakharyaschev. — Springer, 2007. — P. 99–216.

[5] *Goncharov S. S.* Autostability of prime models under strong constructivizations // Algebra and Logic. 2009. V. 48, N 6. P. 410–417.

[6] *Shulepov I. V.* Quotients of sequences by sets of word identities and limit models // Algebra and Model Theory 7. Collection of papers / Edited by A. G. Pinus, K. N. Ponomarev, S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk: Edition of NSTU, 2009. — P. 120–130.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

On Green's cross-sections of symmetric inverse 0-category

Y. V. Zhuchok

Let BS_X^0 be the semigroup of all morphisms of the category whose objects are non-empty subsets of set X and morphisms are bijections. This semigroup is called a symmetric inverse 0-category on a set X.

Let ρ be an equivalence relation on a semigroup S. A subsemigroup T of S is called a ρ-cross-section if T contains exactly one element from every equivalence class. By $\mathfrak{R}, \mathfrak{L}, \mathfrak{J}, \mathfrak{D}$ and $\mathfrak{H}$ we denote Green's relations [1].

Cross-sections of Green's relations on different semigroups have been studied by many authors (see e.g.[2,3]). For symmetric inverse 0-category Green's cross-sections were described in [4,5].

We denote by $E(S)$ the set of all idempotents of semigroup S and by $Nil(S^0)$ the set of all nilpotents of second degree of semigroup S^0 with zero 0. If $e \in E(S^0)$, then by $c(e)$ (resp. $c'(e)$) we denote the set of all elements $x \in S^0 \setminus E(S^0)$ such that $xe \neq 0$ (resp. $ex \neq 0$).

Theorem 1. *Two $\mathfrak{R}-$cross-sections T_1 and T_2 of semigroup BS_X^0 are isomorphic if and only if there is a bijection $\varphi : E(T_1) \to E(T_2)$ such that $|c(e)| = |c(\varphi(e))|$ for every $e \in E(T_1)$.*

Theorem 2. *Two $\mathfrak{L}-$cross-sections T_1 and T_2 of semigroup BS_X^0 are isomorphic if and only if there is a bijection $\phi : E(T_1) \to E(T_2)$ such that $|c'(e)| = |c'(\phi(e))|$ for every $e \in E(T_1)$.*

Theorem 3. *Let T_1, T_2 be a two $\mathfrak{J}-$cross-sections ($\mathfrak{D}-$cross-sections) of semigroup BS_X^0. Then the next assertions are equivalent*:

(i) $\mathfrak{J}-$*cross-sections ($\mathfrak{D}-$cross-sections) T_1 and T_2 are isomorphic*;
(ii) $|E(T_1)| = |E(T_2)|$;
(iii) $|Nil(T_1)| = |Nil(T_2)|$.

Besides $\mathfrak{H}$-cross-sections of BS_X^0 and other properties are studied.

References

[1] Clifford A. H., Preston G. B. The algebraic Theory of Semigroups, Vol. 1. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1961.
[2] Cowan D. F., Reilly R. Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups, International J. Algebra and Comput. 5 (1995), no. 3, 259–287.
[3] Ganyushkin O., Mazorchuk V. $\mathfrak{L}$- and $\mathfrak{R}$-cross-sections in IS_n, Comm. in Algebra, 31 (2003), no. 9, 4507–4523.
[4] Zhuchok Y. V. $\mathfrak{L}$- and $\mathfrak{R}$-cross-sections of symmetric inverse 0-category, International Conference on Semigroups and related topics, Porto (2009), 89–90.
[5] Zhuchok Y. V. $\mathfrak{J}$-, $\mathfrak{H}$- and $\mathfrak{D}$-cross-sections of symmetric inverse 0-category, 7th International Algebraic Conference in Ukraine, Harkov (2009), 161–162.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk
E-mail: zhuchok_y@mail.ru

XI. АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Институт математики им. С. Л. Соболева
Новосибирский государственный университет

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

посвящённая 70-летию Академика
Юрия Леонидовича Ершова

2–6 мая 2010 г.

Тезисы докладов
(в авторском варианте)

Компьютерная верстка:
П. С. Колесников, А. П. Пожидаев