Институт математики им. С. Л. Соболева
Новосибирский государственный университет

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

посвященная 60-летию со дня рождения
Сергея Савостьяновича Гончарова

11–14 октября 2011 г.

Тезисы докладов

РФФИ

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 11–01–06042–г)

Новосибирск • 2011

Sobolev Institute of Mathematics
Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

dedicated to the 60th anniversary
of Sergeĭ Savostyanovich Goncharov

October 11–14, 2011

Collection of Abstracts

РФФИ

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 11–01–06042–г)

Novosibirsk • 2011

Содержание

I. Пленарные доклады

Представление и обработка знаний в компьютерных системах обучения следящего типа

С. Н. Васильев

К числу важнейших методов интеллектуализации компьютерных обучающих систем и индивидуализации (адаптивной персонификации) учебного процесса принято относить методы контроля и поддержки выстраивания обучаемым правильных решений учебных задач с реагированием системы своими комментариями и подсказками на действия обучаемого с учетом его особенностей (уровня подготовки и мотивационно-волевых характеристик). Умение отслеживать правильность хода решения в литературе приписывается так называемым следящим обучающим системам (Trace Modelling Tutoring Systems). Возникающие проблемы алгоритмической неразрешимости обходятся использованием эвристик и сужением разнообразия учебных заданий. При этом логические и алгебраические задачи образуют такой вид учебных заданий, который позволяет выявить уровень обучаемого уже на раннем этапе взаимодействия с ним.

Разработчиками наиболее продвинутых интеллектуальных обучающих систем (ИОС) предпринимаются попытки развития и реализации методов автоматического поиска решений задач (например, задач на доказательство) для наделения ИОС способностью верификации последовательности действий обучаемого, автоматического синтеза правильных решений, выявления неполноты условий задачи и формирования условий разрешимости. Организация адекватной помощи обучаемому, помимо решения в ИОС проблемы учета текущего уровня знаний, умений, навыков и мотивационно-волевых характеристик обучаемого, предполагает также выявление и использование в ИОС предпочтений обучаемого в типовых задачах выбора, возникающих по ходу учебного процесса.

В докладе предлагаются машинно- и диалогово-ориентированные дедуктивно- абдуктивные методы представления и обработки знаний с развитой типизацией переменных и ограничением языка в духе теории многоосновных моделей, Σ-программирования и исчислений позитивно-образованных формул, а также методы выявления многокритериальных предпочтений и других характеристик динамической модели обучаемого. Обсуждаются архитектура ИОС и вопросы интеллектуализации интерфейса, включая автоматизацию синтеза контекстно-зависимых сценариев диалога.

ИПУ РАН, Москва
E-mail: vassilyev_sn@mail.ru

Парадоксы вычислительной математики и спектральные портреты матриц

С. К. Годунов

Речь идет о необходимости уточнения или смены классических понятий при использовании компьютерных вычислений, если желательно иметь гарантию точности результата.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: godunov@math.nsc.ru

Вычислимость на структурах и топологических пространствах

О. В. Кудинов, М. В. Коровина

В докладе последовательно проводится сравнение концепций вычислимости на структурах (не обязательно счетных) и топологических T_0-пространствах со счетной базой, акцент делается на введенном авторами понятии Σ-топологии.

Наряду с общей теорией и различными аналогиями с классической теорией вычислимости на натуральных числах детально рассмотрен и специфический для данной области вопрос о структурируемости естественных эффективно перечислимых пространств.

ИМ СО РАН, Новосибирск и Университет Манчестера, Манчестер (Великобритания); ИСИ СО РАН, Новосибирск
E-mail: kud@math.nsc.ru

Графы, в которых окрестности вершин — графы без треугольников

А. А. Махнев

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^{\perp}$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Для подграфа Δ пусть $X_i(\Delta)$ — множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Сильно регулярные графы без треугольников обычно разбивают на 4 семейства:

(I) несвязные графы (параметр μ равен 0), а именно коклики и лестничные графы (объединения изолированных ребер),

(II) полные двудольные графы (параметр μ равен k и $v = 2k$),

(III) графы Мура (параметр μ равен 1),

(IV) графы с $1 < \mu < k$.

Если регулярный граф степени k и диаметра d имеет v вершин, то выполняется неравенство $v \leq 1 + k + k(k-1) + \ldots + k(k-1)^{d-1}$. Графы, для которых достигается равенство в этой оценке, называются графами Мура. Они имеют нечетный обхват $2d+1$. Интересно, что графы Мура являются экстремальными и относительно нижней границы для числа вершин. Если регулярный граф степени k и нечетного обхвата g имеет v вершин, то выполняется неравенство $v \geq 1 + k + k(k-1) + \ldots + k(k-1)^{(g-3)/2}$. Графы, для которых достигается равенство, оказываются графами Мура.

Простейший пример графа Мура доставляет $(2d+1)$-угольник. В 1973 г. Дамерелл [1] доказал, что граф Мура степени $k > 2$ имеет диаметр 2, тем самым он является сильно регулярным с параметрами $(k^2 + 1, k, 0, 1)$, где $k = r^2 + r + 1$. По условию целочисленности $2r + 1$ делит $(r + 2)(r + 3)$ и $2r + 1$ делит 15. Отсюда $r = 1, 2$ или 7, а $k = 3, 7$ или 57. Для $k = 3$ и 7 существуют единственные графы Мура — это граф Петерсена и граф Хофмана-Синглтона. Существование графа Мура степени 57 неизвестно, однако Ашбахер [2] доказал, что этот граф не может быть графом ранга 3. Поэтому сильно регулярный граф с параметрами (3250,57,0,1) называют графом Ашбахера.

Известно существование точно четырех графов из класса (IV). Это граф Клебша с параметрами (16,5,0,2), граф Гевирца с параметрами (56,10,0,2), граф Хигмена-Симса с параметрами (100,22,0,6) и граф Матье с параметрами $(77, 16, 0, 4)$.

Таким образом, второе собственное значение любого известного сильно регулярного графа без треугольников не больше 2.

Пусть Γ – связный граф, в котором окрестности вершин – сильно регулярные графы без треугольников с фиксированными параметрами.

Случай, когда окрестности вершин – графы типа (I), очень сложен. В частности, диаметр графа может быть сколь угодно большим.

Случай, когда окрестности вершин – графы типа (II), т.е. графы, изоморфные $K_{2\times n}$, $n \geq 2$, наиболее прост. В этом случае Γ изоморфен $K_{3\times n}$.

Рассмотрим случай, когда окрестности вершин – графы типа (III). Локально пятиугольный граф изоморфен графу икосаэдра. Локально петерсеновский граф изоморфен графу $\bar{T}(7)$, графу Конвея-Смита или графу Доро.

Неизвестно существование графов, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона или графу Ашбахера.

Т е о р е м а 1 (Гаврилюк А., Махнев А. [3]). *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона. Тогда диаметр Γ равен 3 и Γ имеет массив пересечений* $\{50, 42, 1;$ $1, 2, 50\}$ *или* $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$.

К сожалению, графы из заключения теоремы 1 не являются вершинно симметричными (Гаврилюк А., Го Вэньбинь, Махнев А. [4]).

Рассмотрим случай, когда окрестности вершин – графы типа (IV). Если окрестности сильно регулярны с параметрами (16,5,0,2), то ввиду предложения 5 из (Махнев А., Падучих Д. [5]) Γ — единственный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{16, 10, 1; 1, 5, 16\}$.

Т е о р е м а 2 (Гаврилюк А., Махнев А., Падучих Д. [6]). *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(162, 56, 10, 24)$ *или* $(372, 56, 10, 8)$*;*

(2) Γ — *антиподальное 3-накрытие сильно регулярного графа с параметрами* $(162, 56, 10, 24)$*, имеющее массив пересечений* $\{56, 45, 16, 1; 1, 8, 45, 56\}$ *и спектр* $\{56^1, 14^{72}, 2^{140}, -4^{252}, -16^{21}\}$.

Неизвестно существование сильно регулярного графа с параметрами $(162, 56, 10, 24)$, зато известно существование графа из пункта (2) заключения теоремы 2 – это граф Сойчера.

Т е о р е м а 3 (Карданова М., Махнев А., Падучих Д. [7]). *Пусть Γ — вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хигмена-Симса. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *диаметр Γ равен 2 и Γ имеет параметры* $(486, 100, 22, 20)$*;*

(2) *диаметр Γ равен 3, $\mu = 25$, $k_3 = 2$, $v = 411$ и Γ не является антиподальным графом, или $\mu = 28$ и либо*

(*i*) *$k_3 = 2$ и если Γ является антиподадьным графом, то антиподальное частное графа Γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(126, 100, 78, 84)$*;*

(*ii*) *$k_3 = 5$ и $v = 381$.*

Т е о р е м а 4 (Махнев А., Падучих Д. [8]). *Пусть Γ — вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Матье. Тогда диаметр Γ равен 3 и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$\mu = 14$, $v = 1 + 77 + 330 + 6 = 414$, $\Gamma_3(u)$ является 6-кокликой;*

(2) *$\mu = 15$, $v = 1 + 77 + 308 + k_3$, $\Gamma_3(u)$ является объединением изолированных клик и $k_3 \in \{4, 10\}$;*

(3) *$\mu = 20$, $v = 1 + 77 + 231 + k_3$, $\Gamma_3(u)$ является объединением изолированных клик и $k_3 \in \{6, 12\}$;*

(4) *$\mu = 21$, $v = 1 + 77 + 220 + k_3$ и $k_3 \in \{2, 8\}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке программы отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и с НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

Список литературы

[1] Damerell R. M. On Moore graphs. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1973. V. 74. P. 227–236.
[2] Aschbacher M. The nonexistence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57. J. Algebra 1971. V. 19, No 3. P. 538–540.
[3] Гаврилюк А. Л., Махнев А. А. Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона. Доклады академии наук 2009. Т. 428, N 2. С. 157–160.
[4] Гаврилюк А. Л., Го Вэнбинь, Махнев А. А. Об автоморфизмах графов Тервиллигера с $\mu = 2$. Алгебра и логика 2008. Т. 47, N 5. С. 584–600.
[5] Махнев А. А., Падучих Д. В. О 2-локально графах Зейделя. Известия РАН, сер.матем. 1997. Т.61, N 4. С. 67–80.
[6] Гаврилюк А. Л., Махнев А. А., Падучих Д. В. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца. Труды ИММ 2010. Т. 16, N 2. С. 162–176.
[7] Карданова М. Л., Махнев А. А., Падучих Д. В. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хигмена-Симса. Доклады академии наук 2011. Т. 439, N 2. С. 163–166.
[8] Махнев А.А., Падучих Д.В. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Матье. Доклады академии наук, направлена в печать.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`

Теория моделей обогащенных булевых алгебр

Д. Е. Пальчунов

В докладе будут изложены результаты по теоретико-модельным и алгоритмическим свойствам булевых алгебр с выделенными идеалами, подалгебрами и автоморфизмами.

Исследуются вопросы элементарной эквивалентности обогащенных булевых алгебр, счетной категоричности, конечной аксиоматизируемости и разрешимости их элементарных теорий. Полностью описаны автоморфизмы булевых алгебр, которые однозначно восстанавливаются по подалгебре неподвижных элементов автоморфизма; полностью описаны подалгебры неподвижных элементов таких автоморфизмов. Исследуются полугруппы элементарных типов обогащенных булевых алгебр.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Алгоритмическая теория разрешимых групп

В. А. Романьков

В докладе дается обзор достижений алгоритмического характера в теории разрешимых групп. Затрагиваются классические результаты существования алгоритмов, вопросы их сложности и проблемы практической реализации. Приводятся новые результаты и представляются новые методы их получения. В том числе освещаются идеи, пришедшие из компьютер-сайнс. Обращается внимание на некоторые старые результаты, приобретающие новое значение в свете возможной практической реализации.

Омский госуниверситет, Омск
E-mail: romankov48@mail.ru

On the strongly bounded Turing degrees of the computably enumerable sets

K. Ambos-Spies

Recently two variants of strongly bounded Turing reductions (sbT-reductions for short) have been introduced. An identity bounded Turing reduction (ibT-reduction for short) is a Turing reduction where no oracle query is greater than the input while a computable Lipschitz reduction (cl-reduction for short) is a Turing reduction where the oracle queries on input x are bounded by $x + c$ for some constant c.

Though ibT-reductions occur quite frequently when dealing with computably enumerable (c.e.) sets (see e.g. the permitting method or splitting theorems) a systematic study of the sbT-degrees was initiated only quite recently when these reducibilities started to play a role in the analysis of algorithmic randomness. The structures of the c.e. degrees induced by the sbT-reducibilities greatly differ from the degree structures induced by the classical reducibilities like Turing, weak-truth-table, truth-table or many-one reducibility. For instance, there are no complete c.e. sets under the sbT-reducibilities.

In our talk we will discuss some recent work on the structures of the c.e. ibT- and cl-degrees. In particular we will show that the partial orderings of c.e. ibT- and cl-degrees are not elementarily equivalent (Ambos-Spies, Bodewig, Fan, Kräling) and we will address the embedding problem, i.e., the question which finite lattices can be embedded into these degree structures.

University of Heidelberg
E-mail: ambos@math.uni-heidelberg.de

Local Turing degree theory: Open questions and current trends

M. M. Arslanov

In my talk I will consider most important open questions in the local degree theory structures (special attention will be given to the degree structures belonging to the finite levels of the Ershov difference hierarchy) and survey current status of these problems.

Kazan (Volga Regison) Federal University, Kazan
E-mail: Marat.Arslanov@ksu.ru

The distance function on a computable graph

W. Calvert, J. Chubb, R. Miller

We consider the degree of undecidability of the distance function on a graph. This task leads us to adapt the definitions of several truth-table reducibilities so that they apply to functions as well as to sets, and we prove assorted theorems about the new reducibilities. We also consider the more general problem of functions which can be approximated by nonincreasing computable functions. We show that the spectrum of the distance function can consist of an arbitrary single **btt**-degree which is of this form, or of all such **btt**-degrees at once, or of the **bT**-degrees of exactly those functions approximable in this way in at most n steps.

Southern Illinois University, USA; Institute of Mathematical Sciences, Carbondale, USA; Chennai, India
E-mail: `wcalvert@siu.edu`

Strongly computable models of small theories

A. N. Gavryushkin

We address the following question. What models of a small theory can be presented effectively? We describe one classification of types of isomorphisms of structures with small theories. According to this classification, we introduce a notion of spectra of decidable (computable, automatic) models of small theories, and provide several results concerning the spectra. Particularly, this classification is important for the study of structures with Ehrenfeucht theories.

Irkutsk State Unversity
E-mail: gavryushkin@gmail.com

Element orders in covers of finite simple groups

M. A. Grechkoseeva

A cover of a finite group G is any finite group having G as a quotient and a cover is proper if it is not isomorphic to G. The talk is concerned with the following question: Given a finite simple group G, is it possible to construct a proper cover of G having the same element orders as G? The answer is negative for sporadic and alternating groups, so we focus on the groups of Lie type.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: grechkoseeva@gmail.com

Δ_2^0-isomorphisms of effective equivalence structures

V. Harizanov

We study computable, computably enumerable, and co-computably enumerable equivalence structures and their isomorphisms. Every computably categorical equivalence structure $\mathcal{A}$ is relatively computably categorical, that is, $\mathcal{A}$ has a computably enumerable Scott family of existential formulas. Relatively Δ_2^0 categorical equivalence structures are characterized as those with finitely many infinite classes or with bounded character. Kach and Turetsky showed that not all Δ_2^0 categorical equivalence structures are relatively Δ_2^0 categorical.

While every computably enumerable equivalence structure with infinitely many infinite classes is isomorphic to a computable structure, there are computably enumerable equivalence structures that are not isomorphic to computable ones. If computably enumerable equivalence structures $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are isomorphic to a computable structure that is relatively Δ_2^0 categorical, then $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are Δ_2^0 isomorphic. On the other hand, for every computable relatively Δ_2^0 categorical equivalence structure that is not computably categorical, there is an isomorphic co-computably enumerable structure that is not Δ_2^0 isomorphic to any computably enumerable structure. This is joint work with W. Calvert, D. Cenzer, A. Morozov, and J. Remmel.

George Washington University, Washington D.C. (USA)
E-mail: harizanv@gwu.edu

Betting, imprecise probabilities and Łukasiewicz logic

K. Keimel

In his foundation of probability theory, Bruno de Finetti devised a betting scheme where a bookmaker offers bets on the outcome of events occurring in the future. He introduced a criterion for coherent bookmaking, and showed that coherent betting odds are given by some probability distribution. While de Finetti dealt with yes-no events and boolean propositional logic, Mundici generalized the theory to the continuous spectrum events formalized within Łukasiewicz logic.

Both de Finetti and Mundici assume that the bookmaker/bettor roles can be interchanged. In this paper we deal with a more realistic situation, dropping the reversibility assumption. Working in the framework of Łukasiewicz logic, we introduce a coherence criterion for non-reversible bookmaking. Our main tool is given by 'imprecise probabilities', which are formulated in terms either of compact convex sets of probabilities or equivalently in terms of suitable sublinear functionals. Our main result is a Theorem which states that our coherence criterion arises from imprecise probabilities just as de Finetti's criterion arises from probabilities.

Throughout, we will work with MV-algebras. They play the same role for Łukasiewicz logic as Boolean algebras play for classical logic. Unital abelian lattice-ordered groups will provide an intermediate structure: while being categorically equivalent to MV-algebras, they are more akin to the Banach space $C(X)$. Functional analytic methods are used for the proof of our main result.

Technische Universität Darmstadt (Germany)
E-mail: keimel@mathematik.tu-darmstadt.de

Frobenius groups of automorphisms with fixed-point-free kernels

E. I. Khukhro

Suppose that a finite group G admits a Frobenius group of automorphisms FH with kernel F and complement H such that $C_G(F) = 1$. Then G is soluble by a theorem of V. V. Belyaev and B. Hartley (using CFSG). By Clifford's theorem, every FH-invariant abelian section V of G is a direct sum of $|H|$ subgroups freely permuted by H, so that $C_V(H)$ is the "diagonal", and V is "$|H|$ times $C_V(H)$". Hence it is natural to expect many parameters of G to be close to the same parameters of $C_G(H)$ (possibly, depending on $|H|$). We discuss several recent results in this direction.

In [**1**] it is shown that the order and the sectional rank of G are bounded in terms of $|H|$ and the same parameters of $C_G(H)$. In [**2**] it is proved that if $(|G|, |H|) = 1$, then the Fitting height of G is equal to the Fitting height of $C_G(H)$. Even without the coprimeness condition, if $C_G(H)$ is nilpotent, then G is nilpotent [**1**]. The proofs of these results are based on Clifford's theorem.

Lie ring methods are used in [**1**] to prove that if FH is metacyclic and $C_G(H)$ is nilpotent, then the nilpotency class of G is bounded in terms of H and the class of $C_G(H)$; earlier the special case of double Frobenius groups was settled in [**3**], which gave an affirmative solution of V. D. Mazurov's problem 17.72(a) in Kourovka Notebook. Examples show that in this result the condition of FH being metacyclic is essential. It is conjectured that the dependence on $|H|$ here is essential; but so far it is only known [**4**] that the nilpotency class of G can be greater than that of $C_G(H)$.

It is also proved in [**1**] that if FH is metacyclic, then the exponent of G is bounded in terms of $|FH|$ and the exponent of $C_G(H)$. It is conjectured that here the metacyclicity condition can be dropped, but so far only the case of $FH \cong A_4$ has been settled in [**5**]. It is also unclear whether the dependence on $|F|$ or $|H|$ is essential; probably, the dependence on $|F|$ can be dropped. There are only examples [**4**] with exponent of G being greater than that of $C_G(H)$.

References

[1] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu., Shumyatsky P. Frobenius groups of automorphisms and their fixed points. *submitted*, 2010; http://arxiv.org/abs/1010.0343

[2] Khukhro E. I. Nilpotent height of groups admitting Frobenius groups of automorphisms. Algebra i Logika **49** (2010), 819–833; English transl. in Algebra Logic, 2010, **49**, 551–560.

[3] Makarenko N. Yu., Shumyatsky P. Frobenius groups as groups of automorphisms. Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 3425–3436.

[4] Antonov V. A., Chekanov S. G. On a conjecture of V. D. Mazurov. Sib. Èlektron. Mat. Izv. **5** (2008), 8–13 (Russian).

[5] Shumyatsky P. On the exponent of a finite group with an automorphism group of order twelve. J. Algebra **331** (2011) 482–489.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

Integer parts and floor functions

J. F. Knight

I will describe joint work with Paola D'Aquino, Sergei Starchenko, Karen Lange, and Salma Kuhlmann, on integer parts for real closed fields, and on exponential integer parts for exponential real closed fields.

An "integer part" for a real closed field is a discrete ordered subring that provides values for a "floor function", as the ring of integers does for the reals. For a real closed field with an exponential function 2^x, an "exponential integer part" respects the exponential function. We look at these things from the point of view of computability. For Ressayre's construction of an exponential integer part for an exponential real closed field, we give an example of arithmetical input on which the construction is not completed within the least admissible set.

University of Notre Dame, USA
E-mail: knight.1@nd.edu

Writing out “best” unifiers in modal and temporal logics. Consequences for problem of admissibility

V. V. Rybakov

The talk will cover outputs of resent authors’ research on unification problem and problem of admissibility of inference rules in modal and temporal logics. In particular, we solved the unification problem for linear temporal logic LTL. For any given formula A we find explicit way to write out the a final set of “best” unifiers for A (if A is unifiable). Moreover, we show any unifiable in LTL formula has a most general unifier (thus, LTL enjoys unitary unification), though we also show that there are unifiable in LTL formulas which are not projective. This, in particular, solves admissibility problem for LTL. Also, we show that a light modification of earlier authors’ results about decidability of admissibility problem for modal logics S4, K4, Grz and Gödel–Lob provability logic GL, gives immediately an algorithm for writing out “best” unifiers. In fact it is sufficient to modify only the base (first) step in inductive constructions of obstacles for not admissible rules offered earlier (to use whole flat models, but not their filtered versions; it needs, in each case, at most, 10 lines long modernization, and all works). An advantage of all this approach (concerning LTL and other logics) is the fact that we even do not need algorithms – we just write out formulas (via an inductive procedure) explicitly.

Manchester Metropolitan University, Manchester (UK)
E-mail: v.rybakov@mmu.ac.uk

Positive equivalence relations and reducibility

A. Sorbi

We review some of the literature concerning positive (or, computably enumerable) equivalence relations on the set of natural numbers, with emphasys on the notion of reducibility, which one obtains by generalizing to equivalence relations the familiar notions of many-one reducibility on sets, or on disjoint pairs of sets. Particular attention is given to the set of universal positive equivalence relations, and to classifying some index sets that naturally arise in this context.

Siena University, Siena (Italy)
E-mail: sorbi@unisi.it

II. Секция «Теория групп»

О дистанционно регулярных раскрасках многомерных квадратных решеток

С. В. Августинович, А. Ю. Васильева

Разбиение вершин произвольного графа G на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_k$ называется *совершенной k-раскраской* этого графа, если для произвольных $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ существует такое число α_{ij}, что любая вершина из V_i имеет ровно α_{ij} соседей из V_j. Матрицу $A = (\alpha_{ij})$ будем называть матрицей параметров данной совершенной раскраски. Совершенная раскраска $V_0, V_1, \ldots, V_k$ называется *дистанционно регулярной*, если матрица ее параметров тридиагональна. Такая раскраска является дистанционной относительно множества вершин V_0 (в этом случае множество V_0 называется *полностью регулярным кодом*). Объектом нашего исследования является граф $G(Z^n)$ n- мерной квадратной решетки.

Назовем раскраску $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{Z}^n$ редуцируемой, если она может быть сведена к одномерной, т.е. для произвольного $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z}^n$

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1\left(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_n x_n\right),$$

где φ_1 – некоторая k-раскраска $\mathbf{Z}^1$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \{0, 1, -1\}$ – произвольные константы. Редуцируемые раскраски и их параметры нетрудно выписать, они будут образовывать три серии с растущим количеством цветов. Нередуцируемые раскраски не поддаются столь простому описанию. Доказана

Теорема. *Если φ – нередуцируемая дистанционно регулярная k-раскраска n-мерной квадратной решетки, то $k \le 2n + 1$, причем эта оценка достижима.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 10-01-00424-а), а также ФЦП ¡ Научные и научно-педагогические кадры инновационной России¿ на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0362).

Список литературы

[1] Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной прямоугольной решетки. Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, №3. С. 3–10.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: avgust@math.nsc.ru; vasilan@math.nsc.ru

Алгоритмические проблемы для 2-ступенно нильпотентных MR-групп

М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей. С помощью этого кольца можно определить три категории R-групп следующим образом. Для этого обогатим групповой язык $\mathcal{L}_{gr} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ таким образом: $\mathcal{L}_{gr} \cup \{f_\alpha(x) | \alpha \in R\}$, где $f_\alpha(x)$ – унарная операция, обозначаемая через $f_\alpha(x) = x^\alpha$ для всех x из G. Множество G будем называть *линдоновой* R-группой, если на нем определены операции $\cdot, ^{-1}, e, f_\alpha(x)$ и выполнены аксиомы:

(1) аксиомы группы;
(2) $g^1 = g, g^0 = e, e^\alpha = e, g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta, (h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h.$

В работе [**1**] А.Г. Мясников и В.Н. Ремесленников ввели новую категорию MR-групп, добавляя еще одну аксиому:

$$(MR) : \forall g, h \in G \ [g, h] = 1 \to (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha.$$

Ясно, что все R-модули над кольцом R удовлетворяют аксиоме (MR).

В работе [**2**] введено определение нильпотентного MR-многообразия.

Для нильпотентных групп и биномиальных колец в [**3**] Ф. Холл ввел категорию R-групп, которая отличается от категории MR-групп.

В работе [**4**] установлена структура свободной 2-ступенно нильпотентной MR-группы ранга 2 для случая, когда кольцо R есть кольцо полиномов от одной переменной с рациональными коэффициентами. С помощью этой теоремы получены результаты об алгоритмической разрешимости и неразрешимости ряда проблем для MR-групп ступени нильпотентности 2, которые принципиально отличаются от соответствующих результатов для холловых 2-ступенно нильпотентных R-групп.

Список литературы

[1] Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Степенные группы I. Основы теории и тензорные пополнения. Сиб. матем. журнал 35 (1994), №5, 1106-1118.
[2] Amaglobeli M., Bokelavadze T. Abelian and nilpotent varieties of power groups. Georgian Mathematical Journal, 18 (2011), N 3, 415-430.
[3] Hall P. Nilpotent groups. Canad. Math. Congress. Edmonton, 1957.
[4] Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н. Свободные 2-ступенно нильпотентные R-группы. Докл. РАН, 2011 (принята к печати).

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru; mikheil.amaglobeli@tsu.ge

О доминионах метабелевых групп

А. И. Будкин

Доминион $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H группы A в квазимногообразии $\mathcal{M}$ — это множество всех элементов $a \in A$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из A в каждую группу из $\mathcal{M}$, т.е.

$$\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : A \to M, \text{ если } f\mid_H = g\mid_H, \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : A \to M$ обозначены гомоморфизмы группы A в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы A, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). В результате возникает понятие замкнутой подгруппы. Группа H называется абсолютно замкнутой в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы A из $\mathcal{M}$ из каждого включения $H \leq A$ следует, что $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = H$.

Направление исследований, представленное в данной работе, связано с нахождением всех групп H, замкнутых в любой метабелевой группе, содержащей H в качестве подгруппы.

Обозначения: $gr(a, H)$ — группа, порожденная H и элементом a, $\mathcal{A}^2$ — класс метабелевых групп.

Теорема 1. *Существует свободная абелева группа конечного ранга, которая не является абсолютно замкнутой в классе метабелевых групп.*

Теорема 2. *Пусть $G = gr(a, H)$, где H изоморфна аддитивной группе рациональных чисел. Предположим, что нормальное замыкание $M = H^G$ подгруппы H в группе G — абелева группа без кручения. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.*

Теорема 3. *Пусть $G = gp(a, H)$, где H — квазициклическая p-группа. Предположим, что нормальное замыкание $M = H^G$ подгруппы H в группе G является прямым произведением групп вида H^{a^i} и $(a) \cap M = (1)$. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.*

Теорема 4. *Пусть $G = gr(A, H)$, где H — квазициклическая p-группа, A — абелева группа. Предположим, что нормальное замыкание $M = H^G$ подгруппы H в группе G является прямым произведением подгрупп вида H^a $(a \in A)$. Пусть еще $M \neq G'$. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (мероприятие 1).

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

О наследственно G–перестановочных подгруппах исключительных групп лиевского типа

П. В. Бычков

Все группы, рассмотренные в этой работе, являются конечными. Приведем следующие определения.

Определение 1. *Пусть G — конечная группа и $L \leq G$. Подгруппа L называется G–перестановочной, если для всякой подгруппы $H \leq G$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $LH^g = H^gL$.*

Определение 2. *Пусть G — конечная группа и $L \leq G$. Подгруппа L называется наследственно G–перестановочной, если для всякой подгруппы $T \leq G$ такой, что $L \leq T$, подгруппа L является T–перестановочной подгруппой.*

В Коуровской тетради [**1**, проблема 17.112] А.Н. Скибой и В.Н. Тютяновым были поставлены следующие два вопроса:

Какие конечные простые неабелевы группы G обладают

(а) нетривиальной G–перестановочной подгруппой?

(б) нетривиальной наследственно G–перестановочной подгруппой?

В работе [**2**] В.Н. Тютяновым и П.В. Бычковым было получено решение данной проблемы в классе спорадических групп. Следующая теорема является решением данной проблемы для исключительных групп лиевского типа. Доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G — конечная исключительная групп лиевского типа. Тогда группа G не имеет нетривиальной собственной наследственно G–перестановочной подгруппы.*

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). 17–е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 2010.

[2] Бычков П. В., Тютянов В.Н. О наследственно G–перестановочных подгруппах спорадических групп. Вестник полоцкого университета. 2008. № 3. С. 23—29.

УО Гомельский Государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь г. Гомель
E-mail: pbychkov@tut.by

О представлениях m-групп

С. В. Вараксин, А. В. Зенков

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \ _*\rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge\rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция $_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1}\rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge\rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения $(xy)_* = x_* y_*$, $(x_*)_* = x$, $(x \vee y)_* = x_* \wedge y_*$, $(x \wedge y)_* = x_* \vee y_*$. Будем записывать m-группу G с фиксированным автоморфизмом $_*$ как пару $(G,_*)$. Пусть Λ– некоторое линейно упорядоченное множество и a– реверсивный автоморфизм 2-го порядка Λ, то есть $((\lambda)a)a = \lambda$ и $\lambda < \lambda' \Leftrightarrow (\lambda)a > (\lambda')a$, $Aut(\Lambda)$ — группа всех порядковых подстановок Λ. Группа $Aut(\Lambda)$ может быть превращена в m-группу по правилу $g_* = aga$ для всякого $g \in Aut(\Lambda)$. Представлением m-группы $(G,_*)$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Λ называется ℓ-гомоморфизм $\nu : G \to Aut(\Lambda)$ такой, что $((g)_*)\nu = a(g)\nu a$ для любого $g \in G$. Будем его записывать в виде в виде $((G)\nu, \Lambda, a)$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным* и тогда пишем (G, Λ, a).

Теорема 1. *Пусть $(G,_*)$– m-группа и V– ее спрямляющая ℓ-подгруппа. Тогда существует линейно упорядоченное множество,* определяемое *V, такое, что группа допускает m-транзитивное представление подстановками этого множества. Обратно. Для всякого m-транзитивного представления $((G)\nu, \Lambda, a)$ найдется спрямляющая ℓ-подгруппа V, определяющая Λ.*

Теорема 2.*Произвольная m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую ℓ-подгруппу.*

Следствие 1.*Подпрямо неразложимая m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление.*

Следствие 2.*Всякое многообразие m-групп порождается m-группами, допускающими точное m-транзитивное представление.*

Список литературы

[1] Giraudet M., Lukas F. Groupes á motié ordonnés. Fundam. Math. 1991. 139, №2. P. 75–89.

[2] Kopytov V. M., Medvedev N. Ya. The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[3] Баянова Н. В., Никонова О. В. Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп. Сиб. матем. журнал. 1995. Т. 36, №4. С. 763–768.

АлтГУ, АГСХУ, Барнаул
E-mail: varaksin@bk.ru

О связи совершенных 2-раскрасок с кратными совершенными кодами в гиперкубе

К. В. Воробьев

Подмножество вершин графа называется совершенной раскраской, если цветовой набор соседей любой вершины зависит только от ее цвета. Подмножество вершин графа называется k-кратным совершенным кодом радиуса r, если для каждой вершины шар радиуса r с центром в этой вершине содержит в точности k кодовых вершин. В данной работе получен критерий, который по параметрам совершенной 2-раскраски двоичного n-куба определяет, является ли она кратным совершенным кодом заданного радиуса $r \geq 1$ некоторой кратности.

В работе формулируется следующая

Теорема. *Совершенная раскраска с параметрами* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *является кратным совершенным кодом радиуса r тогда и только тогда, когда полином Кравчука* $P_r(\frac{b+c}{2} - 1, n-1) = 0$*, при этом кратность кода* $k = \frac{c}{b+c}\sum_{i=0}^{i=r}\binom{n}{i}$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых (МК-1700.2011.1).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: konstantin.vorobev@gmail.com

Решетки формаций и классов Фиттинга конечных групп

Н. Н. Воробьев

Все рассматриваемые группы конечны. Мы используем терминологию, принятую в [**1, 2, 3**].

Изучаются свойства решеток частично композиционных формаций и частично локальных классов Фиттинга. В частности, найдены серии алгебраических, модулярных и дистрибутивных решеток.

Список литературы

[1] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997. 240 с.

[2] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

[3] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп. Украинский матем. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель, (Беларусь)
E-mail: `vornic2001@yahoo.com`

О группе перестановочных автоморфизмов циклического кода Хэмминга

Е. В. Горкунов, Е. В. Сотникова

Пусть F_q^n — векторное пространство размерности n над полем Галуа $F_q = GF(q)$. *Кодом* длины n называется произвольное подмножество $C \subseteq F_q^n$. Код называется *линейным*, если он образует линейное подпространство в F_q^n. В качестве метрики берется *расстояние Хэмминга*. *Совершенным* называется код, достигающий границы Хэмминга, см. [**1**]. Линейный совершенный код единственен с точностью до изометрии F_q^n и называется кодом Хэмминга $\mathcal{H}_q^n$. Если линейный код вместе с каждым кодовым вектором $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ содержит вектор $(c_1, \ldots, c_{n-1}, c_0)$, то он называется *циклическим*. *Группа перестановочных автоморфизмов* кода C состоит из всех перестановок $\pi \in S_n$, которые, действуя по правилу $c\pi = \big(c_{0\pi}, c_{1\pi}, \ldots, c_{(n-1)\pi}\big)$, переводят код сам в себя, то есть $\mathrm{PAut}(C) = \{\pi \in S_n \mid C\pi = C\}$.

В [**2**] доказано, что если код Хэмминга $\mathcal{H}_q^n$ длины $n = \frac{q^m-1}{q-1}$ имеет проверочную матрицу в каноническом виде, то $\mathrm{PAut}(\mathcal{H}_q^n) \simeq \mathrm{UT}_m(q)$. Там же показано, что для циклических кодов Хэмминга это неверно. Возникает вопрос, каково строение группы перестановочных автоморфизмов циклического кода Хэмминга при $q > 2$.

Утверждение. *Для любого циклического кода Хэмминга длины* $n = \frac{q^m-1}{q-1}$, *где* $m \geqslant 2$, $q > 2$, *верно*

$$Z_m \leftthreetimes Z_n \lesssim \mathrm{PAut}(\mathcal{H}_q^n) \tag{1}$$

Полный перебор доказывает, что для кодов $\mathcal{H}_4^5, \mathcal{H}_8^9$ и $\mathcal{H}_3^{13}$ в (1) имеет место изоморфизм. Полученные результаты позволяют сформулировать гипотезу для циклического кода Хэмминга о том, что при целых $m \geqslant 2$, $q > 2$ и $n = \frac{q^m-1}{q-1}$ справедливо

$$\mathrm{PAut}(\mathcal{H}_q^n) \cong Z_m \leftthreetimes Z_n.$$

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-01-00424 и № 10-01-00616), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (номер гос. контракта 02.740.11.0429).

Список литературы

[1] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Терия кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979. 789 с.
[2] Горкунов Е. В. Группа перестановочных автоморфизмов q-ичного кода Хэмминга. Проблемы передачи информации. 2009. Т. 45, № 4. С. 18–25.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск; Новосибирский государственный университет
E-mail: evgumin@gmail.com; jennies@list.ru

О модулях над групповыми кольцами локально конечных групп

О. Ю. Дашкова

Слабое условие минимальности и слабое условие максимальности являются важными условиями конечности в теории групп. Слабое условие минимальности было введено в рассмотрение Д.И.Зайцевым [**1**], а слабое условие максимальности — Р.Бэром [**2**]. Пусть G — группа, $\mathcal{M}$ — некоторое семейство подгрупп группы G. Говорят, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для $\mathcal{M}$–подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию минимальности, т.е., если для любого убывающего ряда подгрупп $G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n \geq G_{n+1} \geq \cdots$ из множества $\mathcal{M}$ существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$. Группа G удовлетворяет слабому условию максимальности для $\mathcal{M}$–подгрупп, если $\mathcal{M}$ удовлетворяет слабому условию максимальности, т.е., если для любого возрастающего ряда подгрупп $G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \cdots$ из множества $\mathcal{M}$ существует натуральное число $m \in \mathbb{N}$, такое, что индекс $|G_n : G_{n+1}|$ конечен для каждого $n \geq m$.

Пусть A — $\mathbf{R}G$–модуль, такой, что $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $A/C_A(G)$ не является артиновым $\mathbf{R}$–модулем, $C_G(A) = 1$, G — группа. Рассматривается система $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ всех подгрупп $H \leq G$, для которых фактор-модули $A/C_A(H)$ не являются артиновыми $\mathbf{R}$–модулями. Автор изучает $\mathbf{R}G$–модуль A, такой, что $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет либо слабому условию минимальности как упорядоченное множество, либо слабому условию максимальности как упорядоченное множество. Если $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет слабому условию минимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{min-nad}$. Если же $\mathfrak{L}_{nad}(G)$ удовлетворяет слабому условию максимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $W_{max-nad}$. Через $AD(G)$ обозначим множество всех элементов $x \in G$, таких, что фактор-модуль $A/C_A(\langle x\rangle)$ является артиновым $\mathbf{R}$–модулем. Отметим, что $AD(G)$ — нормальная подгруппа группы G. Через $G_{\mathfrak{S}}$ обозначим разрешимый резидуал группы G — пересечение всех нормальных подгрупп K группы G, для которых фактор–группа G/K разрешима.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$–модуль, $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $C_G(A) = 1$, $A/C_A(G)$ не является артиновым $\mathbf{R}$–модулем. Предположим, что группа G локально конечна и удовлетворяет либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Тогда либо группа G черниковская, либо $G = AD(G)$.*

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$–модуль, G — периодическая локально разрешимая группа, $\mathbf{R}$ — дедекиндово кольцо, $A/C_A(G)$ не является артиновым $\mathbf{R}$–модулем. Предположим, что группа G удовлетворяет либо условию $W_{min-nad}$, либо условию $W_{max-nad}$. Тогда фактор–группа $G/G_{\mathfrak{S}}$ разрешима.*

Список литературы

[1] Зайцев Д. И. Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности. Укр. мат. журн. 1968. Т. 20. С. 472–482.

[2] Baer R. Polyminimaxgruppen. Math. Ann. 1968. Vol. 175. P. 1–43.

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск
E-mail: `odashkova@yandex.ru`

Булевы решетки кратно Ω_1-расслоенных τ-замкнутых формаций T-групп

Е. Н. Демина

Аддитивная группа G с нулевым элементом 0 называется мультиоператорной T-группой с системой мультиоператоров T (или, коротко, T-группой), если в G задана еще некоторая система n-арных алгебраических операций T при некоторых n, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0,\ldots,0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n-арна (см. [**1**, гл. VI, с. 356]).

Используемые обозначения и определения можно найти в работах [**2, 3, 4**]. Пусть $\mathfrak{M}$ – класс всех мультиоператорных T-групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T-подгрупп. Все рассматриваемые T-группы принадлежат классу $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{I}_1$ – класс всех простых $\mathfrak{M}$-групп, Ω_1 – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}_1$, $\Omega_1' = \mathfrak{I}_1 \backslash \Omega_1$ и $\mathfrak{K}(G)$ – класс всех простых $\mathfrak{M}$-групп, изоморфных композиционным факторам T-группы G. Если $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Omega_1$, то G называется Ω_1-группой. Обозначим $\mathfrak{M}_{\Omega_1}$ – класс всех Ω_1-групп, принадлежащих $\mathfrak{M}$ и $O_{\Omega_1}(G) = G_{\mathfrak{M}_{\Omega_1}}$. Функция f: $\Omega_1 \cup \{\Omega_1'\} \to \{$формации T-групп$\}$ называется Ω_1F-функцией; функция φ: $\mathfrak{I}_1 \to \{$непустые формации Фиттинга T-групп$\}$ называется FR-функцией. Формация $\Omega_1F(f,\varphi) = (G \in \mathfrak{M} : G/O_{\Omega_1}(G) \in f(\Omega_1')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(G))$ называется Ω_1-расслоенной формацией T-групп с Ω_1-спутником f и направлением φ (направление φ называется r-направлением, если $\mathfrak{M}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{I}_1$). Через $\tau\Omega_1F_n^\varphi$ обозначается множество всех n-кратно Ω_1-расслоенных τ-замкнутых $\mathfrak{M}$-формаций, $L_{\tau\Omega F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ есть решетка всех $\tau\Omega F_n^\varphi$-подформаций $\mathfrak{M}$-формации $\mathfrak{F} \in \tau\Omega F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N_0}$ и φ – произвольное направление.

Определение. [**4**] Булевой решеткой называется дистрибутивная решетка с дополнениями.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \in \tau\Omega_1F_n^\varphi$, где φ – r-направление, такое что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_{A'}\mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}_1$. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) решетка $L_{\tau\Omega_1F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ булева;

(2) $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $L_{\tau\Omega_1F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$;

(3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый элемент решетки $L_{\tau\Omega_1F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$.

Список литературы

[1] Скорняков Л. А. Общая алгебра. Т. 2. М.: Наука, 1991. 480 с.

[2] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997. 240 с.

[3] Демина Е. Н., Решетки кратно Ω_1-расслоенных τ-замкнутых формаций мультиоператорных T-групп. Алгебра и геометрия: тезисы межд. конф. по алг. и геом., посв. 80-летию со дня рожд. А.И. Старостина; Екатеринбург, 22-27 августа 2011 г. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2011. С. 62–64.

[4] Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

ИМИ ГОУ ВПО МГПУ, Москва
E-mail: `DeminaENmf@yandex.ru`

О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп

А. А. Дуж, А. А. Шлепкин

Пусть G — группа, $\mathfrak{R}$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$.

Пусть K — конечная подгруппа группы G. Обозначим через $\mathfrak{R}(K)$ множество всех подгрупп группы G, которые содержат K и изоморфны группам из множества $\mathfrak{R}$, в частности, $\mathfrak{R}(e)$ — множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из множества $\mathfrak{R}$.

Напомним, что группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H \subset G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое множество неизоморфных циклических групп нечетного порядка, а $\mathfrak{M}$ — некоторое множество неизоморфных групп $L_2(2^m)$. Положим, что

$$\mathfrak{R} = \{X \times Y \mid X \in \mathfrak{M}, Y \in \mathfrak{N}\}.$$

Таким образом множество $\mathfrak{R}$ состоит из набора конечных групп, каждый из которых является прямым произведением двух групп X и Y, при чем группа X берется из множества $\mathfrak{M}$, а группа Y - из множества $\mathfrak{N}$.

Ранее в работе [**1**] было доказано, что бесконечная периодическая группа Шункова, насыщенная прямыми произведениями линейных групп над локально конечными полями характеристики 2 на циклические группы, локально конечна. Мы получили следующий результат:

Теорема. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$, для некоторого локально конечного поля Q характеристики два, а V — локально циклическая группа без инволюций.*

Список литературы

[1] Дуж А. А., Шлепкин А. А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп. Математические системы. Вып. 10 / Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2011. – (в печати)

КрасГАУ, Красноярск; СФУ, Красноярск
E-mail: anyaduzh@mail.ru

О группах унитреугольных автоморфизмов относительно свободных групп

С. Ю. Ерофеев, В. А. Романьков

Для любого положительного числа n обозначим через F_n свободную группу ранга n с базисом $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$. Для любого многообразия групп $\mathcal{C}$ через $\mathcal{C}(F_n)$ обозначим вербальную подгруппу группы F_n, состоящую из всех тождеств от n переменных $x_1, ..., x_n$, выполненных на многообразии $\mathcal{C}$.

Пусть $F_n(\mathcal{C}) = F_n/\mathcal{C}(F_n)$ — *относительно свободная* группа ранга n многообразия $\mathcal{C}$. *Базисом* группы $F_n(\mathcal{C})$ мы называем такое подмножество $Y_n = \{y_1, ..., y_n\}$, что всякое отображение его в группу G многообразия $\mathcal{C}$ однозначно продолжается до гомоморфизма группы $F_n(\mathcal{C})$ в группу G. *Унитреугольным автоморфизмом* группы $G_n = F_n(\mathcal{C})$ относительно базиса Y_n, называется любой автоморфизм φ, задаваемый отображением вида $\varphi : y_1 \mapsto y_1, y_i \mapsto u_i y_i$ для $i = 2, ..., n$, где $u_i = u_i(y_1, ..., y_{i-1})$ произвольный элемент группы G_{i-1}. Все унитреугольные автоморфизмы группы G_n образуют подгруппу $U_n = UTAutG_n$, которую мы называем *группой унитреугольных автоморфизмов* группы G_n.

В работе дано описание структуры группы унитреугольных автоморфизмов U_n относительно свободной группы G_n конечного ранга n произвольного многообразия групп $\mathcal{C}$, позволяющее ввести эффективное понятие нормальной формы элемента и представить группу U_n через порождающие элементы и определяющие соотношения. Случаи $n = 1, 2$ очевидны: группа U_1 тривиальна, группа U_2 циклическая. При $n \geq 3$ доказано следующее.

Теорема 1. *Пусть G_n относительно свободная группа ранга $n \geq 3$ произвольного многообразия групп $\mathcal{C}$. Тогда если группа G_{n-1} нильпотентна, то и группа U_n нильпотентна. Почти нильпотентность группы G_{n-1} влечет существование точной матричной представимости группы U_n над кольцом целых чисел* $\mathbf{Z}$.

Теорема 2. *Пусть G_n относительно свободная группа ранга $n \geq 3$ произвольного нетривиального многообразия $\mathcal{C}$ групп отличного от многообразия всех групп.Тогда, если группа G_{n-1} не почти нильпотентна, то группа $U_n = UTAutG_n$ унитреугольных автоморфизмов группы G_n не допускает точного представления матрицами над полем.*

Эти утверждения дополняют известные результаты А.Ю. Ольшанского [1], доказавшего, что полная группа автоморфизмов $AutG_n$ относительно свободной группы G_n собственного многообразия представима матрицами тогда и только тогда, когда G_n почти нильпотента.

Список литературы

[1] Olshanskii A. Yu. Linear Automorphism Groups of Relatively Free Groups. Turk. J. Math. 2007. V. 31. P. 105–111.

Омский гос. университет им. Ф.М. Достоевского, кафедра информационных систем, Омск
E-mail: stepan.erofeev@gmail.com; romankov48@mail.ru

Теорема Бэра-Судзуки и связанная с ней теорема единственности

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа, p — простое число и x — некоторый p-элемент из G. При этих предположениях хорошо известен следующий результат Бэра-Судзуки.

Теорема 1. *Если подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ является p-группой для любого элемента g из G, то $x \in O_p(G)$.*

Имеется несколько доказательств этой теоремы, например, в [**1**], [**2**, теорема 39.6], [**3**, теорема 3.8.2], [**4**, теорема 2.12], [**5**, теорема 1.1], [**6**, теорема III.6.15].

Мы предлагаем новое доказательство теоремы Бэра-Судзуки, которое, во-первых, короче имеющихся прямых доказательств этой теоремы, а во-вторых, дает идею доказательства следующей теоремы единственности.

Теорема 2. *Пусть G —конечная группа и N — нильпотентная подгруппа из G. Если $N \leq F(M)$ для любой максимальной подгруппы M из G содержащей N, то либо $N \leq F(G)$, либо N лежит в единственной максимальной подгруппе из G.*

Список литературы

[1] Alperin J., Lyons R. On conjugacy classes of p-elements. J. Algebra. 1971. V. 19. P. 536–537.
[2] Aschbacher M. Finite group theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
[3] Gorenstein D. Finite Groups. New York: Harper and Row, 1968.
[4] Isaacs I. Finite Group Theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008.
[5] Гаген Т. Некоторые вопросы теории групп. К теории конечных групп. М.: Мир, 1979.
[6] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: zenkov@imm.uran.ru

О распознаваемости конечных простых четырепримарных групп по графу простых чисел

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\mathrm{GK}(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если она определяется своим спектром с точностью до изоморфизма. С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [**1**]) тесно связано направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Здесь под равенством графов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ понимается совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

В [**2**] показано, что любая конечная четырепримарная простая группа, кроме группы A_{10}, распознаваема по порядку и графу простых чисел.

В данной работе исследуются четырепримарные конечные группы с несвязным графом простых чисел. В частности, доказана следующая

Теорема. Конечная четырепримарная простая группа с несвязным графом простых чисел распознаваема по этому графу тогда и только, когда она изоморфна одной из следующих групп: A_8, $L_3(4)$, $S_4(7)$, $G_2(3)$ или $L_2(q)$, где $|\pi(q^2-1)| = 3$ и либо q — простое число, либо $q = 3^m$ и m — простое нечетное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-1-00342), программы Отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

Список литературы

[1] Мазуров В. Д. Группы с заданным спектром. Изв. Урал. гос. ун-та, 2005. № 36 (Математика и механика; вып. 7). С. 119–138.

[2] Zhang L. C., Shi W. J. *OD*-Characterization of simple K_4-groups. Algebra Colloquium, 2009. Vol. 16, no. 2. P. 275–282.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

К вопросу П. Камерона о примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них

А. В. Коныгин

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [**1**] и [**5**, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на орбите $G_x(y)$ (т.е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т.е. что $|G_x| = |G_x(y)|$? Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [**2, 3, 4**]).

Можно показать, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ при условии $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Ранее было доказано, что если группа G имеет (в классификации О'Нэна — Скотта) тип I, тип III(a), тип III(c) или G имеет тип II и цоколь G не изоморфен группам ${}^2E_6(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, то для группы G выполняется свойство **(Pr)**. Кроме того, доказано, что если группа G имеет тип III(b) и цоколь G не изоморфен группам ${}^2E_6(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, то для группы G выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен. Предположим, что группа G является почти простой цоколем, изоморфным ${}^2E_6(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$. В настоящей работе рассматривается случай, когда для $x \in X$ и некоторого простого r выполняется $O_r(G_x) \neq 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00349-а).

Список литературы

[1] Cameron P. J. Suborbits in transitive permutation groups. Combinatorics / M. Hall, Jr. and J. H. van Lint, eds. Amsterdam: Math. Centrum. 1975, P. 419–450.

[2] Reitz H. L. On primitive groups of odd order. Amer. J. Math. 1904. Vol. 26. P. 1–30.

[3] Weiss M. J. On simply transitive groups. Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 401–405.

[4] Wielandt H. Finite permutation groups. New York: Acad. Press, 1964. 114 p.

[5] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд. Новосибирск: Ин-т матем. СО РАН, 2006. 193 с.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: `konygin@imm.uran.ru`

О порождающих элементах произведений групп

А. Ф. Красников

Пусть $F = (\underset{i \in I}{*} A_i) * G$ — свободное произведение нетривиальных групп A_i $(i \in I)$ и свободной группы G с базой $\{g_j | j \in J\}$ (не исключается случай, когда множители A_i или множитель G отсутствуют), N— нормальная подгруппа в F такая, что $N \cap A_i = 1$ $(i \in I)$, $h_1, \dots, h_n$ — элементы из F, $H =$ гр $(h_1, \dots, h_n)$. Обозначим через $\mathbf{Z}(F)$ целочисленное групповое кольцо группы F. Через D_k $(k \in I \cup J)$ обозначим производные Фокса кольца $\mathbf{Z}(F)$ — дифференцирования, однозначно определяемые условиями:

$$D_j(g_j) = 1 \ (j \in J), \ D_k(g_j) = 0, \text{ при } k \neq j;$$
$$\text{если } a_i \in A_i \ (i \in I) \text{то } D_i(a_i) = a_i - 1, \ D_k(a_i) = 0, \text{ при } k \neq i.$$

Теорема. *Элемент v из F принадлежит $H[N, N]$ тогда и только тогда, когда в $\mathbf{Z}(H)$ найдутся $u_1, \dots, u_n$ такие, что*

$$D_k(v) \equiv \sum_{l=1}^{n} D_k(h_l) u_l \ mod \ N, \ k \in I \cup J.$$

В теореме нельзя отказаться от условия $u_1, \dots, u_n$ — элементы из $\mathbf{Z}(H)$.

Пример. *Пусть F — свободная группа с базой $g_1, \ g_2, \ N$ — нормальное замыкание в F элемента $g_1, \ H$ — подгруппа в F, порожденная элементом g_1. Полагаем $v = {g_1}^{g_2}, \ h = g_1, \ u = g_2, \ I = \{1, \ 2\}$. Будем иметь*

$$D_k(v) \equiv D_k(h) u \ mod \ N, \ k \in I,$$

но элемент v не принадлежит $H[N, N]$.

Следствие. *Пусть V — множество элементов группы F и образ V при естественном гомоморфизме $F \to F/[N, N]$ порождает $F/[N, N]$. Образы элементов $h_1, \dots, h_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/[N, N]$ порождают $F/[N, N]$ тогда и только тогда, когда для любого v из V система сравнений*

$$D_k(v) \equiv \sum_{l=1}^{n} D_k(h_l) x_l \ mod \ N, \ k \in I \cup J$$

имеет решение в $\mathbf{Z}(F)$.

Порождающие элементы группы $F/[N, N]$ были описаны в [**2**] для случая, когда F — свободная группа и в [**1**] для случая, когда $F = \underset{i \in I}{*} A_i$.

Список литературы

[1] Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И. О порождающих элементах групп вида F/R'. Алгебра и логика, 2001, т.40, № 3, 251-261.

[2] Красников А. Ф. О порождающих элементах групп $F/[N, N]$. Матем. заметки, 24, N 2 (1978), 167-173.

Омск
E-mail: phomsk@mail.ru

О порождающих элементах сумм алгебр Ли

А. Ф. Красников

Все алгебры будут рассматриваются над одним и тем же полем произвольной характеристики. Пусть $F = (\sum_{i\in I}^{*} A_i) * G$ — свободная лиева сумма алгебр Ли A_i $(i \in I)$ и свободной лгебры Ли G с базой $\{g_j | j \in J\}$ (не исключается случай, когда слагаемые A_i или слагаемое G отсутствуют), N— идеал в F такой, что $N \cap A_i = 0$ $(i \in I)$, $U(F)$ — универсальная обертывающая алгебра для F, N_U — идеал, порожденный N в $U(F)$, $h_1, \dots, h_n$ — элементы из F, $H = \langle h_1, \dots, h_n\rangle$. Через D_k $(k \in I \cup J)$ обозначим производные Фокса алгебры F — дифференцирования, однозначно определяемые условиями:

$$D_j(g_j) = 1 \ (j \in J), \ D_k(g_j) = 0, \text{ при } k \neq j;$$
$$\text{если } a_i \in A_i \ (i \in I), \text{ то } D_i(a_i) = a_i, \ D_k(a_i) = 0, \text{ при } k \neq i.$$

Теорема. *Элемент v принадлежит $H + [N, N]$ тогда и только тогда, когда в $U(H)$ найдутся $u_1, \dots, u_n$ такие, что*

$$D_k(v) \equiv \sum_{l=1}^{n} D_k(h_l) u_l \ mod \ N_U, \ k \in I \cup J.$$

В теореме нельзя отказаться от условия $u_1, \dots, u_n$ — элементы из $U(H)$.

Пример. *Пусть F — свободная алгебра Ли с базой g_1, g_2, N — идеал в F, порожденный элементом g_1, H — подалгебра в F, порожденная элементом g_1. Полагаем $v = [g_1, g_2]$, $h = g_1$, $u = g_2$, $I = \{1, \ 2\}$. Будем иметь*

$$D_k(v) \equiv D_k(h) u \ mod \ N_U, \ k \in I,$$

но элемент v не принадлежит $H + [N, N]$.

Следствие. *Пусть V — множество элементов из F и образ V при естественном гомоморфизме $F \to F/[N, N]$ порождает $F/[N, N]$. Образы элементов $h_1, \dots, h_n$ при естественном гомоморфизме $F \to F/[N, N]$ порождают $F/[N, N]$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $v \in V$ система сравнений*

$$D_k(v) \equiv \sum_{l=1}^{n} D_k(h_l) x_l \ mod \ N_U, \ k \in I \cup J,$$

имеет решение в $U(F)$.

В случае, когда F — свободная алгебра Ли конечного ранга, порождающие элементы алгебры $F/[N, N]$ были описаны в [**1**].

Список литературы

[1] Умирбаев У. У. Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли. Сиб. матем. ж., 34, № 6 (1993), 179–188.

Омск
E-mail: phomsk@mail.ru
vkamper@gmail.com

О пересечении сопряженных нильпотентных подгрупп симметрической группы

Р. К. Курмазов

В 2002 году Е.П.Вдовин внёс в «Коуровскую тетрадь» [**1**] следующий вопрос (проблема 15.40):

Проблема. *Пусть N — нильпотентная подгруппа конечной простой группы G. Верно ли, что существует подгруппа N_1, сопряжённая с N, для которой $N \cap N_1 = 1$?*

Данная проблема связана со проблемой 17.40, внесённой Е.П.Вдовиным в «Коуровскую тетрадь» в 2010 году.

Проблема. *Пусть N — нильпотентная подгруппа конечной группы G. Всегда ли существуют такие $x, y \in G$, что $N \cap N^x \cap N^y \leqslant F(G)$?*

Введём следующие обозначения. Символами Sym_n и Alt_n будем обозначить симметрическую и знакопеременную группу степени n соответственно, а символом $\mathrm{Sym}(\Omega)$ будем обозначать симметрическую группу множества Ω.

Определение. *Пусть G — подгруппа группы $\mathrm{Sym}(\Omega)$. Асимметрическим разбиением A группы G называется разбиение множества Ω такое, что только единица группы G стабилизирует A. Другими словами разбиение $\Omega = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ называется асимметрическим, если из того что $A_i \cdot g = A_i$ для любого i следует, что $g = e$.*

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть H — нильпотентная подгруппа группы Sym_n и $n \geqslant 5$. Тогда существуют такие $x, y \in \mathrm{Sym}_n$, что $H \cap H^x \cap H^y = 1$. Более того, если $(|H|, n) \neq (128, 8)$, то существует такой $x \in \mathrm{Sym}_n$, что $H \cap H^x = 1$.*

В качестве простого следствия получается теорема, дающая положительный ответ на проблему 15.40 для нильпотентных подгрупп простых знакопеременных групп.

Теорема 2. *Пусть H – нильпотентная подгруппа группы Alt_n и $n \geqslant 5$. Тогда существует $x \in \mathrm{Alt}_n$ такой, что $H \cap H^x = 1$.*

При исследовании проблемы [**1**, проблема 17.40] возникает необходимость рассматривать подстановочное сплетение $G \wr N$, где N — нильпотентная подгруппа группы Sym_n. При этом важную роль играет следующий результат.

Теорема 3. *Пусть N — нильпотентная подгруппа группы Sym_n. Тогда существует асимметрическое разбиение $A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 = \{1, \ldots, n\}$.*

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь. Нерешённые проблемы в теории групп. Редакторы В.Д. Мазуров и Е.И. Хухро. 17-е. из., Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2010.

НГУ, г. Новосибирск

О регулярности силовских P-подгрупп симплектических и ортогональных групп над кольцом $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$

Н. В. Мальцев, С. Г. Колесников

В 1982 году Верфриц поставил следующий вопрос [**1**, вопрос 8.3]: для каких m, n, p силовская p-подгруппа общей линейной группы степени n над кольцом классов вычетов целых чисел $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ по p-примарному модулю регулярна? Напомним, что конечная p-группа G называется регулярной (понятие введено Ф. Холлом в [**2**]), если для любых $a, b \in G$ и любого натурального n существует натуральное число k и элементы $c_1, \ldots, c_k \in \langle a, b, \rangle'$ такие, что $(ab)^{p^n} = a^{p^n} b^{p^n} c_1^{p^n} \ldots\ c_k^{p^n}$.

Ответ на поставленный Верфрицем вопрос для случая $m = 1$ был получен в [**3**], а в [**4**] и [**5**] для всех случаев, за исключением следующих: $m, n > 2$ и $2n - 1 < p \leqslant \min\{nm, n^2\}$. Методы, разработанные в этих статьях, были использованы в [**5**] при изучении аналогичного вопроса для силовских p-подгрупп групп Шевалле над $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. В частности, была доказана регулярность силовской p-подгруппы симплектической группы $Sp_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$, когда $2n^2 + n < p$, и ортогональной группы $O^+_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$, когда $2n^2 - n < p$.

В продолжение этих исследований доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Силовская p-подгруппа симплектической группы $Sp_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ нерегулярна при любом $m \geqslant 1$, если $p < 2n$, и при любом $m \geqslant 2$, когда $p < 4n$.*

Теорема 2. *Силовская p-подгруппа ортогональной группы $O^+_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ нерегулярна при любом $m \geqslant 1$, если $p < 2n - 2$, и при любом $m \geqslant 2$, когда $p < 4n - 4$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-00717).

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь. Нерешённые вопросы теории групп, 16-е изд. ред. Мазуров В.Д., Хухро Е.И., Новосибирск, 2006. http://www.math.nsc.ru/

[2] Hall P. A conribution to the theory of groups of prime-power order. Proc. London Math. Soc., 1934, s2-36 (1): 29–95.

[3] Ягжев А. В. О регулярности силовских p-подгрупп полных линейных групп над кольцами вычетов. Матем. заметки, Т.56, № 6 (1994), 106–116.

[4] Колесников С. Г. О регулярности силовских p-подгрупп групп $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$. Иссл. по матем. анализу и алгебре, Т.3 (2001), 117–124.

[5] Колесников С. Г. О регулярных силовских p-подгруппах групп Шевалле над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$. Сиб. матем. журнал, Т.46, № 6 (2006), 1289–1295.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: n.v.malzev@mail.ru; sklsnkv@mail.ru

Конечные группы с холловыми максимальными подгруппами и их порождаемость парой сопряженных элементов

Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Напомним, что подгруппа H конечной группы G называется *холловой*, если ее порядок $|H|$ и индекс $|G:H|$ взаимно просты.

В связи с вопросом В. С. Монахова [**1**, проблема 17.92] изучаются конечные группы, в которых все максимальные подгруппы являются холловыми. Получены результаты о строении таких групп. Неожиданным оказывается применение этих результатов к исследованию вопроса П. Шумяцкого [**1**, проблема 17.125]: верно ли что в любой конечной группе G содержится пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$? Здесь $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-00456, 10-01-00391, 10-01-90007 и 10-01-00324), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракты 02.740.11.5191 и 14.740.11.0346), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и с НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009), Регионального общественного фонда содействия отечественной науке (грант «Лучшие аспиранты РАН - 2010») и программы ОМН РАН (проект 09-Т-1-1004).

Список литературы

[1] The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory. Edited by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. 17-th. ed., Russian Academy of Sciences Siberian Division, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010.

ИММ УрО РАН; ИМ СО РАН
E-mail: butterson@mail.ru; revin@math.nsc.ru

Группы с сильно регулярными и дистанционно-регулярными графами Кэли

И. Т. Мухаметьянов

Мы рассматриваем только конечные группы G, $B = b^G \cup (b^{-1})^G$, b^G — некоторый класс сопряжённости из G, $\mathbf{\Gamma}(G, M)$ — граф Кэли группы G относительно $M \subseteq G$.

В [**1**] поставлен следующий вопрос: *Пусть $A = (G \times G)\lambda\langle\tau\rangle$, где G — неабелева простая группа, и $\tau \in A$ — инволюция, нормализующая $G \times G$ так, что $(g_1, g_2)^\tau = (g_2, g_1)$ для $g_i \in G$. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — граф с множеством вершин G, на котором A действует по правилу $g^{(g_1,g_2)} = g_1^{-1} g g_2$ и $g^\tau = g^{-1}$, и в котором x и y смежны, когда $y^{-1}x \in C \cup C^{-1}$ для некоторого фиксированного класса C сопряжённости из G. Доказать, что A не действует дистанционно-транзитивно на $\mathbf{\Gamma}$.*

Известно, что если группа действует на конечном графе дистанционно-транзитивно, то граф дистанционно-регулярен ([**1**], **Лемма 4.1.9**). Также, очевидно, введённый выше граф $\mathbf{\Gamma}$ является графом Кэли $\mathbf{\Gamma}(G, C \cup C^{-1})$. В связи с этим можно сформулировать следующую более общую проблему:

Классифицировать пары (G, b), такие, что $\mathbf{\Gamma}(G, B)$ дистанционно-регулярен.

Так как дистанционно-регулярный граф диаметра 2 сильно-регулярен, то имеет смысл рассмотреть две проблемы о классификации таких пар: 1) когда $\mathbf{\Gamma}(G, B)$ — сильно регулярный; 2) когда $\mathbf{\Gamma}(G, B)$ — дистанционно-регулярный диаметра $d \geq 3$. Нами рассматрено оба случая и доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если $\mathbf{\Gamma}(G, B)$ — сильно регулярный граф, то он имеет валентность $k = |B|$ и имеет место одно из следующих случаев:*

1) $G = P \leftthreetimes Q$ — группа Фробениуса с элементарным абелевым ядром P некоторого порядка p^α, $B = P - \{e\}$. При этом $\mathbf{\Gamma}(G, B) \simeq nK_{p^\alpha}$ — несвязный граф с n полными компонентами связности, $n = |Q| = (p^\alpha - 1)/t$, $t \in \{1, 2\}$.

2) $G = K \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с ядром K нечётного порядка k, b — инволюция. При этом $\mathbf{\Gamma}(G, B) \simeq K_{2\times k}$ — полный двудольный граф.

3) $G = K\langle b\rangle$, $K \lhd G$, $|K| = k/2$, $|\langle b\rangle| = 4$, $C_G(b) = \langle b\rangle$ и либо $\langle b\rangle$ — силовская 2-подгруппа группы G и K — холлова погруппа в G, либо силовская 2-подгруппа Q группы G — (обобщённая) кватернионая, $G = H \leftthreetimes Q$, где H — нормальная холлова подгруппа группы G. При этом $\mathbf{\Gamma}(G, B) \simeq K_{2\times k}$.

4) $G = K \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с ядром порядка $k/2$ и дополнительным множителем $\langle b\rangle$ порядка 3. При этом $\mathbf{\Gamma}(G, B) \simeq K_{3\times k_1}$, где $k_1 = k/2$.

Теорема 2. *Если $\mathbf{\Gamma}(G, B)$ — дистанционно-регулярный диаметра $d \geq 3$, то G — циклическая группа и $\mathbf{\Gamma}(G, B)$ — многоугольник.*

Список литературы

[1] Brouwer A. E., Cogen A. M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 494 p.

Лысьвенский филиал Пермского государственного технического университета, Лысьва, Пермский край
E-mail: muiltal@yandex.ru

О центральном ядре группы

Ин. И. Павлюк

В алгебре существует ряд систем аксиом выделяющих абстрактный объект - группу G. Среди аксиом, характеризующих основные свойства бинарной операции на множестве элементов группы G, имеется аксиома, гарантирующая разрешимость уравнений $ax = b, ya = b$ на элементах G, т.е. гарантируется истинность высказывательной формы для элементов из G

$$((\forall a, b \in G) \left(R\left(ax = b \right) \neq \oslash \wedge R\left(ya = b \right) \neq \oslash \right)).$$

Такой подход следует исторической традиции развития алгебры связанной с решениями уравнений. В приведенных математических выражениях использовано отношение "=" эквивалентности элементов группы G. По этой причине выражение типа $ax = b$ в математике именуются уравнениями. На элементах алгебраических систем задаются и другие отношения эквивалентности, которые обобщают отношение равенства. Например, отношение "$_1\equiv$" центральной эквивалентности [1] и отношение "$_c\equiv$" сопряженности [2]. Более глубокое исследование свойств алгебраических объектов возможно посредством сравнений свойств групповых отношений и во взаимодействии их в приложениях.В предлагаемой работе доминирует идея - рассмотреть решения уравнения $xa = b$ лишь на классе центрально-эквивалентных элементов. Множество решений такого уравнения названо центральным ядром элемента a в группе G.

Определение. *Центральным ядром элемента a в группе G назовем множество $Z(a)$ элементов $h \in G$ группы G, удовлетворяющих групповому равенству $ha = b$, где a и b - элементы класса $\overset{1\equiv}{a}$ центрально-эквивалентных элементов, т.е.*

$$Z\left(a\right) = \left\{ h/ha = b,\ a, b \in \overset{1\equiv}{a} \right\}.$$

Лемма. *В группе G верна формула*

$$\left(\forall a, b \in \overset{1\equiv}{a} \right) ((a_1 \equiv b) \Leftrightarrow (C(a) = C(b)) \Leftrightarrow (Z(a) = Z(b))).$$

Теорема. *Группа G тогда и только тогда абелева, когда в ней центральное ядро каждого нетривиального элемента совпадает с группой G.*

Список литературы

[1] Павлюк Ин.И. О единично сопряженных элементах группы. Вестник ПГУ им. С.Торайгырова. Серия физ.-мат. 2004. Т.4. С. 50–53.

[2] Павлюк Ин.И., Павлюк И.И. К теории сравнений в группах. Вестник ПГУ им. С.Торайгырова. Серия физ.-мат. 2004. Т.3. С. 34–49.

[3] Павлюк Ин.И. О группах с конечными классами центрально сопряженных элементов. Поиск-Iзденiс. Научный журнал МОН РК. Серия естест. и техн. наук. 2007. Т 3. С. 234–239.

Павлодарский государственный университет, Павлодар, Казахстан
E-mail: Inessa7772@mail.ru

О проблеме равенства слов в свободных бернсайдовых полугруппах с тождеством $x^2 = x^3$

А. Н. Плющенко

Напомним, что свободной бернсайдовой полугруппой называется полугруппа, свободная в многообразии $\mathbf{var}\{x^n = x^{n+m}\}$ для некоторых фиксированных $n, m \geq 1$. Свободная берснайдова полугруппа ранга k и тождеством $x^n = x^{n+m}$ обозначается через $B(n, m, k)$. Одной из важнейших проблем для полугруппы $B(n, m, k)$ является проблема равенства слов.

При $k = 1$ полугруппы $B(n, m, 1)$ суть не что иное, как конечные циклические полугруппы, проблема равенства слов для которых тривиальным образом разрешима. Далее полагаем $k > 1$. Благодаря работам Грина и Риса [**1**], Кадурека и Полака [**2**] и др., проблема равенства слов для случая $n = 1$ была сведена к соответствующей проблеме для свободных бернсайдовых групп (групп, свободных в многообразии $\mathbf{var}\{x^m = 1\}$). В серии работ [**3, 4, 5, 6, 7**] проблема равенства слов была решена для случая $n \geq 3$.

Для полугрупп $B(2, m, k)$ вопрос о разрешимости проблемы равенства слов остается открытым. Этот вопрос был специально отмечен Бжозовским в [**8**] для полугрупп $B(2, 1, k)$. Нами установлен следующий результат в данном направлении ([**9**]):

Теорема. *Проблема равенства слов для полугруппы $B(2, 1, k)$ при $k > 2$ разрешима тогда и только тогда, когда проблема равенства слов разрешима для полугруппы $B(2, 1, 2)$.*

Список литературы

[1] Green J. A., Rees D. On semigroups in which $x^r = x$. Proc. Cambridge Phil. Soc. **48** (1952) 35–40.

[2] Kad'ourek L., Polák J. On free semigroups satisfying $x^r \simeq x$. Simon Stevin **64**(1) (1990) 3–19.

[3] de Luca A., Varricchio S. On non-counting regular classes. Proc. ICALP'90. Springer, Berlin (1990) 74–87 (LNCS **443**).

[4] McCammond J. The solution to the word problem for the relatively free semigroups satisfying $t^a = t^{a+b}$ with $a \geq 6$. Internat. J. Algebra Comput. **1**(1) (1991) 1–32.

[5] Guba V. S. The word problem for the relatively free semigroups satisfying $t^m = t^{m+n}$ with $m \geq 4$ or $m \geq 3$, $n = 1$. Internat. J. Algebra Comput. **3**(2) (1993) 125–140.

[6] Guba V. S. The word problem for the relatively free semigroups satisfying $t^m = t^{m+n}$ with $m \geq 3$. Internat. J. Algebra Comput. **3**(3) (1993) 335–348.

[7] do Lago A. P. On the Burnside semigroups $x^n = x^{n+m}$. Internat. J. Algebra Comput. **6**(2) (1996) 179–227.

[8] Brzozowski J. Open problems about regular languages. Formal language theory: perspectives and open problems. Academic Press, New York (1980) 23–47.

[9] Плющенко А. Н. О проблеме равенства слов в свободных бернсайдовых полугруппах с тождеством $x^2 = x^3$. Известия вузов. **11** (2011) 89–93.

Уральский государственный университет, Екатеринбург
E-mail: `mathplush@yandex.ru`

Центроиды алгебраических групп.

К. Н. Пономарёв

Фактор - морфизмом группы G называют произвольное отображение $\varphi : G \to G$, для которого при любых элементах $g, h \in G$ выполнены следующие два свойства.

1. $g^{\varphi h} = g^{h\varphi}$.

2. Если $[g, h] \in \zeta_n(G)$, то по модулю $\zeta_n(G)$ выполняется равенство: $(gh)^\varphi = g^\varphi h^\varphi$.

На множестве фактор-морфизмов $\Phi(G)$ группы G определим операции сложения и умножения, для любых $\varphi, \psi \in \Phi$ и произвольного $g \in G$ полагаем $g^{\varphi+\psi} = g^\varphi \cdot g^\psi$, также $g^{\varphi\cdot\psi} = (g^\varphi)^\psi$.

В работе [**1**] было установлено, что множество $\Phi(G)$ с указанными операциями образует ассоциативное кольцо с единицей. Были выявлены многие структурные свойства этого кольца. В статье [**2**] центроидом группы G было названо более широкое кольцо отображений, для которых выполняется первое свойство из определения фактор - морфизма, а второе свойство из этого определения предполагается выполненным только для коммутирующих элементов g, h. Было доказано, что эти отображения относительно введённых выше операций образуют ассоциативное кольцо с единицей $\Gamma(G)$.

Теорема. *Пусть G – группа точек расщепимой алгебраической группы над полем нулевой характеристики. Тогда центроид такой группы образован её фактор - морфизмами, выполняется равенство $\Phi(G) = \Gamma(G)$.*

Список литературы

[1] Пономарёв К. Н. Фактор-морфизмы нильпотентных групп. Сиб. мат. ж., 32 N.3 (1991), 119–125.
[2] Lioutikov S., Myasnikov A. Centroids of groups. J. Group Theory, 3 N.2 (2000), 177–197.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ponom@online.sinor.ru

Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп

И. В. Сабодах, А. А. Шлепкин

Понятие насыщенности группы заданным множеством групп появилось в 1993 году в работах А.К. Шлепкина [1].

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$.

В настоящее время сложилась следующая терминология и обозначения связанные с условием насыщенности. Насыщающие множество – это множество $\mathfrak{M}$ из определения насыщенности. Группа G насыщенна группой M – это случай когда насыщающие множество $\mathfrak{M} = \{M\}$ – состоит из одной группы.

В работе [2] доказано, что периодическая группа, насыщенная одной группой, являющейся прямым произведением конечных простых неабелевых групп, конечна, при условии, что централизатор силовской 2 – подгруппы каждого множителя прямого произведения не содержит элементов нечетного порядка.

В работе [3] доказано, что периодическая группа, насыщенная прямыми произведениями линейных групп размерности 2, при условии, что число прямых множителей элементов насыщающего множества равно 2, локально конечна.

Нами продолжено изучение групп, насыщенных прямым произведением различных групп. Пусть множество $\mathfrak{M} = \{M\}$ состоит из одной группы $M = M_1 \times ... \times M_j \times ... \times M_n$ (n – фиксированно), являющейся прямым произведением групп $M_j \in \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R} = \{L_3^{\delta_i}(p_i^{n_i}) | i = 1, 2, ..., m\}$. Через $L_3^{\delta}(p^n)$ обозначается группа $L_3(p^n)$, если $\delta = +$ и группа $U_3(p^n)$, если $\delta = -$.

Доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть периодическая группа G насыщена группой M. Тогда $G \simeq M$.*

Список литературы

[1] Шлепкин А. К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. Сб. тез. III международная конференция по алгебре. Красноярск. 1993. С. 363.

[2] Сабодах И. В., Шлепкин А. А. Группы насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп. Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции "¡Студент и научно-технический прогресс"¿: Математика. Новосибирск. 2011. С. 21.

[3] Сабодах И. В., Шлепкин А. А. Группы, насыщенные прямыми произведениями линейных групп размерности 2. Современные проблемы математики: тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург. 2011. С. 240.

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск; Сибирский федеральный университет, Красноярск

E-mail: sabodax@mail.ru; shlyopkin@mail.ru

Строение силовских подгрупп в некоторых группах Шункова

В. И. Сенашов

Изучается строение силовских 2-подгрупп в группах Шункова с условием: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью.

Ранее автором установлено [1], что в группах Шункова с таким условием бесконечная силовская 2-подгруппа является расширением квазициклической 2-группы при помощи обращающего автоморфизма.

Теорема. *Пусть G – группа Шункова с конечной силовской 2-подгруппой S. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то либо группа G обладает почти слойно конечной периодической частью, либо пересечение S со слойно конечным радикалом централизатора центральной инволюции из S является циклическим или обобщенной группой кватернионов, либо группа S может быть одного из следующих типов:*

1) группа диэдра;

2) полудиэдральная группа;

3) 2-группа Судзуки порядка 64;

4) абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, $\quad m > 1$;

5) $S = (b) \wr (t)$, где $b^{2^m} = t^2 = 1, m \geq 2$.

Напомним определения используемых терминов

Определение. Группа называется *группой Шункова*, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Определение. Если множество элементов конечного порядка в группе составляет подгруппу, то ее называют *периодической частью* этой группы.

Определение. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно.

Определение. Максимальная нормальная слойно конечная подгруппа произвольной группы называется ее *слойно конечным радикалом*.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 09-01-00395, 10-01-00509 и гранта Сибирского федерального университета (проект — элитное математическое образование в СФУ).

Список литературы

[1] Сенашов В. И. О строении силовских подгрупп в некоторых группах Шункова и о почти слойно конечных группах. Алгебра и ее приложения: Труды Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.И.Кострикина. Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2010. С. 149-153.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
E-mail: sen@icm.krasn.ru

О проблеме описания больших абелевых подгрупп унипотентных подгрупп конечных групп лиева типа

Г. С. Сулейманова

В конечной группе для любого теоретико-группового свойства P всякую P-подгруппу наивысшего порядка называют большой P-подгруппой. Пусть G – группа лиева типа над конечным полем K. Ее максимальная унипотентная подгруппа U [**8**] является силовской. Вопрос описания больших абелевых подгрупп в U изучен в 70-80-е гг. для классических типов, а для исключительных типов это проблема, записанная в обзоре А.С. Кондратьева [**2**, Проблема (1.6)]. Порядки больших абелевых подгрупп в U указал Е.П. Вдовин [**1**], развивая метод А.И. Мальцева [**5**]. Оценки порядков в [**5**], [**1**] позволяют показать, что перечисленные в [**3**], [**4**], [**6**], наряду с максимальными, все большие нормальные абелевы подгруппы в U есть, в точности, все нормальные большие абелевы подгруппы в U.

Автор и В.М. Левчук [**4**], исследуя вопрос описания больших абелевых подгрупп в U с точностью до G-сопряженности, установили, что в группе U классического типа любая большая абелева подгруппа G-сопряжена с нормальной подгруппой в U. В настоящей работе перечисляются классы G-сопряженных больших абелевых подгрупп группы U исключительного типа. Для групп U типа F_4 результаты опубликованы в [**6**] и [**7**].

Список литературы

[1] Вдовин Е. П. Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле. Алгебра и логика, т. 40(2001), № 5, с. 523–544.

[2] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле. Успехи математических наук, т. 41(1986), №1(247), с. 57–96.

[3] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы. Докл. РАН, 419(2008), №5, с. 595–598.

[4] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле. Труды ИММ, т. 15(2009), № 2, с. 133–142.

[5] Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли. Изв. АН СССР., Сер. мат., т. 9(1945), № 4, с. 291–300.

[6] Сулейманова Г. С. О сопряженности в группе Шевалле больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы. Фундаментальная и прикладная математика, 2009, т. 15, № 7, с. 205–216.

[7] Сулейманова Г. С. Классы сопряженных в группе Шевалле типа F_4 больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы. Владикавказский математический журнал, 2011, т. 13, Вып. 2, с. 45–55.

[8] Carter R. Simple groups of Lie type New York: Wiley and Sons, 1972.

Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета, Абакан
E-mail: suleymanova@list.ru

О группе с нетривиальным классом централизаторно-сопряженных элементов

Л. И. Теняева

В статье [1] внесено на рассмотрение ряд теоретико-групповых проблем. В предлагаемой заметке анонсировано решение одной из них.

Определение 1. (Павлюк И.И.) *Элемент x группы G централизаторно-сравним с элементом y группы G, относительно элемента $a \in G$ $(x\ {}^{a} \equiv\ y)$, если выполняется равенство $a^x = a^y$, т.е. элементы x, y централизаторно-сравнимы относительно элемента a, если верна формула*

$$(\forall a, x, y \in G) \left((x\ {}^{a} \equiv\ y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a^x = a^y) \right),$$

где символ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ означает "тождественно по определению".

Бинарное отношение "${}_c \equiv$ " сопряженности элементов a и b группы G вводится формулой

$$(\forall a, b \in G) \left((a\ {}_c \equiv b) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((\exists x \in G)\,(a^x = b)) \right),$$

где символ "$\exists$" - квантор существования.

На базе этих понятий введем новое понятие централизаторной сопряженности элементов группы.

Определение 2. (Павлюк И.И.) *Элементы x и y группы G централизаторно сравнимы в группе G относительно элемента $a \in G$ $\left(x\ {}^{a}_{c} \equiv\ y\right)$, если существует элемент $h \in G$ такой, что верно сравнение $x^{h\ a} \equiv y$, т.е. для централизаторной сопряженности x и y требуется выполнение на элементах группы следующей формулы*

$$(\forall a, x, y \in G) \left((x\ {}^{a}_{c} \equiv\ y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left((\exists x \in G) \left(x^{h\ a} \equiv y\right)\right) \right).$$

Теорема. *Если группа G обладает классом централизаторно сопряженных элементов, относительно неединичного элемента, содержащим нейтральный элемент, то она обладает нетривиальным абелевым нормальным делителем.*

Список литературы

[1] Pavlyuk In. I., Pirozkova Y. N., Pavlyuk I. I. About the classes of centralizedly conjugate elements of group. Model theory and algebra. France–Kazakhstan conference–Astana. 2005. P. 55–58.

Павлодарский государственный университет, Павлодар, Казахстан
E-mail: Tenyaeva80@mail.ru

О периодической части в группе Шункова

К. А. Филиппов

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$[**2**].

В [**1**] изучались периодические группы, насыщенные центральными расширениями группы порядка два — Z_2 при помощи линейных групп размерности два над конечными полями. Особенно интересным оказался случай, когда все конечные поля имели характеристику 2. В настоящей работе продолжены исследования в случае когда все конечные поля имеют характеристику 3. Напомним определение группы Шункова. *Группа называется группой Шункова, если в каждом ее сечении по конечной подгруппе, включая единичную, любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.*

Пусть I_n – прямое произведение n экземпляров группы Z_2 . $q = 3^k$ – фиксированное число.

Теорема. *Бесконечная группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_3(q) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, обладает периодической частью, которая локально конечна и изоморфна $L_3(q) \times I$, где I - бесконечная группа периода 2..*

Работа поддержана РФФИ (проект 10-01-00509-a), РФФИ (проект 09-01-00717-a), АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/3023).

Список литературы

[1] Лыткина Д. В., Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных $L_2(q)$ и ее центральными расширениями. Матем. системы. Красноярск: КрасГАУ. 2006, №5. –С. 35–45.

[2] Шлёпкин А. К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. С. 369.

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск
E-mail: filippov_kostya@mail.ru

Особенности в графах Кэли абелевых и почти циклических групп

Д. Г. Храмцов

Граф Кэли произвольной группы относительно любой системы её порождающих естественным образом можно рассматривать как метрическое пространство с отмеченной точкой — единичным элементом, в котором каждое ребро имеет единичную длину. При этом в них обычным образом определяются понятия конечных и бесконечных геодезических линий. Особенностью в графе Кэли (по-другому, тупиком, или, в англоязычной литературе, dead end) называется такой элемент группы, через который не проходит никакой бесконечный геодезический луч с началом в единице группы. Данное понятие очевидным образом зависит от выбора системы порождающих группы и не является её кваэиизометрическим инвариантом, таким, как функция Дэна, скорость роста и другие, тем не менее, оно тесно связано с её структурой.

Интерес к этой тематике возник в середине 90-ых годов прошлого столетия при изучении гиперболических групп. Тогда были установлены некоторые характеристики этих особенностей для конечнопорождённых гиперболических групп, такие, как конечная глубина и ширина (Богопольский, 1997), существование групп с бесконечным количеством особенностей в классах гиперболических и свободных нилшьпотентных групп (Богопольский, Храмцов, 1997) и поставлены ряд интересных вопросов. В дальнейшем, отвечая на один из них, В.С. Губа в 2005 году доказал существование особенностей произвольной ширины в свободных разрешимых группах. Исследования на эту тему достаточно регулярно появляются в зарубежной печати, например, исследование характеристик особенностей графов Кэли широких классов групп в работах Ш. Клири, Т. Райли, 2004, 2007, Т. Райли, А. Уоршолла, 2005, «группы фонарщика» и группы Томпсона (Д. Табак, 2005, Ш. Клири, Т. Райли, 2005, К. Влэдис, 2009).

Как уже было сказано, особенности в графах Кэли не являются кваэиизометрическим инвариантами групп, поэтому многое зависит от выбора системы порождающих. В связи с этим возникает вопрос о естественных классах групп, в которых основные характеристики этих особенностей всё-таки являются инвариантами групп, не зависящими от выбора системы порождающих.

Теорема 1. *Граф Кэли произвольной почти циклической группы в любой конечной системе порождающих содержит конечное число особенностей.* **Теорема 2.** *Граф Кэли произвольной конечнопорожденной абелевой группы в любой конечной системе порождающих содержит конечное число особенностей, причём глубина их не превосходит единицы.*

Последний результат является, в некотором смысле, предельным: построен естественный пример графа Кэли конечного расширения свободной абелевой группы ранга два относительно некоторой системы из трёх порождающих, обладающий бесконечным множеством особенностей.

Настоящая работа поддержана грантом проекта НШ-3669.2010.1 и грантом АВЦП «Развитие научного потенциала школы» (проект 2.1.1.1072).

Список литературы

[1] Богопольский О. В. Бесконечные соизмеримые гиперболические группы билипшицево эквивалентны. Алгебра и логика, 36(3), 1997, 259–272.

[2] Guba V. Strict dead end elements in free solvable groups. Comm. Alg. 36(5), 2008, 1988–1997.

[3] Cleary S., Taback J. Dead end words in lamplighter groups and other wreath products. Q. J. Math., 56(2), 2005, 165–178.

ИМ СОРАН, Новосибирск
E-mail: `khramtso@math.nsc.ru`

Обобщенные функции Бесселя (ОБФ) с точки зрения алгебры Ли

М. Д. Хриптун

Изучение различных специальных функций основывается на теории аналитических функций, но многие полезные формулы и различные свойства специальных функций можно вывести, не обращаясь к аналитическим методам, а использовать алгебру Ли некоторых групп Ли, примыкающих к этим специальным функциям (например, разложения в ряды, всякие теоремы сложения, умножения для них и т.д.). Из этих выведенных формул можно находить и другие формулы, которые аналитическими методами было бы получить трудно и не очевидно.

В данном докладе рассмотрим ОФБ вида:

$$U_\nu(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu+mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+\nu+1]}, \quad z \in C \setminus (-\infty, 0]; \quad \nu \in C, \tag{1}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, C — пространство комплексных чисел[1] (см. [1], стр. 278, формула (3)). Функции (1) удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению m-го порядка специального вида. На основании рекуррентных соотношений для них строим алгебру Ли. Общий элемент соответствующей группы Ли действует на функцию двумя способами; с одной стороны, он меняет аргумент функции; с другой стороны, он образует бесконечную сумму функций (с неизменным аргументом) с измененными индексами. Сравнивая эти результаты, получаем «теоремы сложения» для этих функций, не прибегая в доказательствах к аналитическим методам. Из этих теорем также получаем другие свойства ОФБ.

Список литературы

[1] Хриптун М. Д. Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка. Дифф. уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–293.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: khriptun@math.nsc.ru

[1]Функция $U_\nu(z,m)$ при $m=2$ есть модифицированная функция Бесселя $I_\nu(z) = U_{\nu_2}(z,2)$. где $\nu_2 = \nu$.

Полярное разложение линейных операторов в пространстве Минковского

В. А. Чуркин

Теорема 1. *Полярное разложение $A = QS$, $Q^* = Q^{-1}$, $S^* = S$, для линейного оператора A в пространстве Минковского существует тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение $X^2 = A^*A$, $X^* = X$, и для его решения S выполнено равенство* $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker} A$.

Теорема 2. *Пусть A — произвольный линейный оператор в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$. Тогда пространство разлагается в ортогональную прямую сумму подпространств M и E, инвариантных относительно A^*A, где*

- *E — евклидово пространство относительно сужения лоренцева скалярного произведения, E имеет ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A^*A с вещественными собственными значениями, из которых отрицательным может быть только одно;*
- *M — пространство Минковского размерности 1, 2 или 3 относительно сужения лоренцева скалярного произведения, возможный канонический вид матрицы оператора A^*A и соответствующее условие разрешимости уравнения $X^2 = A^*A$, $X^* = X$, для сужения A^*A на M дано в следующей таблице*

	$\dim M$	*Спектр*	*Возм. канон. вид A^*A в онб M*	*Усл. сущ. $\sqrt{A^*A}$ в M*
а)	*1*	$\subset \mathbb{R}$	(λ), $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda \geqslant 0$
б)	*2*	$\not\subset \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$	*при всех* α, β
в)	*2*	$\subset \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} \lambda \pm 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & \lambda \mp 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda > 0$
г)	*3*	$\subset \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \geqslant 0$	$\lambda > 0$

Уравнение $X^2 = A^*A$, $X^* = X$, разрешимо для линейного оператора A пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ в том и только том случае, когда либо уравнение разрешимо для сужения A^*A на подпространствах M и E, либо при условии, что $\lambda < 0$ — 2-кратный корень характеристического полинома оператора A^*A в случае а), либо при одновременном выполнении следующих условий: $\lambda = 0$ — корень кратности $\geqslant 3$, нижнее распределение знаков при 1 в случае в).

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ.3669.2010.1), а также при поддержке АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: churkin@math.nsc.ru

Об абсолютно замкнутых группах в квазимногообразиях нильпотентных ступени не выше двух групп

С. А. Шахова

Определим, следуя [1], доминион $dom_G^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H группы G в квазимногообразии групп $\mathcal{M}$ как множество элементов $g \in G$ таких, что для любых двух гомоморфизмов $\varphi, \psi : G \to M \in \mathcal{M}$, совпадающих на H, верно $\varphi(g) = \psi(g)$. Из определения доминиона вытекает, что $H \subseteq dom_G^{\mathcal{M}}(H)$. Если $dom_G^{\mathcal{M}}(H) = H$ для любой группы G из $\mathcal{M}$, содержащей H в качестве подгруппы, то группа H называется абсолютно замкнутой в квазимногообразии $\mathcal{M}$. Группы, абсолютно замкнутые в многообразиях 2-ступенно нильпотентных групп, изучались в [**2, 3, 4**], а в квазимногообразиях метабелевых групп в [**5**]. В настоящей работе начато исследование групп, абсолютно замкнутых в квазимногообразиях 2-ступенно нильпотентных групп.

Пусть p — простое, r, s — натуральные числа, $H_{prs}, H_{pr}H_p$ — группы, имеющие в многообразии нильпотентных ступени нильпотентности не выше двух групп следующие представления:

$$H_{prs} = (x, y \mid\mid x^{p^r} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1),$$
$$H_{pr} = (x, y \mid\mid x^{p^r} = [x, y]^p = 1),$$
$$H_p = (x, y \mid\mid [x, y]^p = 1).$$

Заметим, что группы H_{prs} ранее рассматривались в [**6**]. Пусть H обозначает одну из групп H_{pr}, H_p. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Группа H_{prs} абсолютно замкнута в qH_{prs} — квазимногообразии, порожденном группой H_{prs}. Любая полная группа из квазимногообразия qH, т.е. группа, в которой из каждого элемента извлекается корень произвольной степени, абсолютно замкнута в qH. Группа H не является абсолютно замкнутой в qH.*

Список литературы

[1] Isbell J. R. Epimorphisms and dominions. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla. 1965. Springer-Verlag, New York. 1966. P. 232–246.

[2] Saracino D. Amalgamation bases for nil-2 groups. Algebra Universalis. 1983. T. 16. P. 47–62.

[3] Magidin A. Amalgams of nilpotent groups of class two. arXiv:math. GR/0105233.

[4] Magidin A. Amalgamation bases for nil-2 groups of odd exponent. arXiv:math. GR/0006065.

[5] Будкин А. И. Доминионы в квазимногообразиях метабелевых групп. Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. № 3. С. 498–505.

[6] Федоров А. Н. Квазитождества конечных 2-нильпотентных групп. М., 1987. Деп. в ВИНИТИ, № 5489 - В87.

АлтГУ, г. Барнаул
E-mail: sashakhova@gmail.com

Производная π-длина и центральные пересечения π-холловых подгрупп

О. А. Шпырко

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют, принятым в [**1**].

Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом,

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n = E,$$

фактор-группы G_i/G_{i+1} которого являются либо $\pi^{'}$-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G назовем производной π-длиной группы G и обозначим через $l_\pi^a(G)$.

В настоящей заметке получены оценки производной π-длины π-разрешимой группы в зависимости от строения центральных пересечений π-холловых подгрупп. Напомним, под центральным пересечением π-холловых подгрупп понимается пересечение двух различных π-холловых подгрупп, содержащее центр одной из них.

Теорема. *Если в π-разрешимой группе G центральные π-холловые пересечения абелевы либо являются группами Шмидта, то $l_\pi^a(G) \leq d(G_\pi) + 1$.*

Следствие 1. *Если в π-разрешимой группе G центральные π-холловые пересечения имеют единичное пересечение с коммутантом каждой π-холловой подгруппы, то $l_\pi^n(G) = d(G_\pi)$.*

Следствие 2. *Пусть G — π-разрешимая группа с метабелевыми центральными π-холловыми пересечениями. Тогда $l_\pi^a(G) \leq 3$.*

Следствие 3. *Пусть G — π-разрешимая группа с биабелевыми центральными π-холловыми пересечениями. Тогда $l_\pi^a(G) \leq 3$.*

Список литературы

[1] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа. 2006.

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г.Севастополе
E-mail: shpyrko@mail.ru

Splitting automorphisms of free periodic groups

V. S. Atabekyan

Automorphism φ of G is called *splitting automorphism of period* n, if $\varphi^n = 1$ and $g\,g^{\varphi}g^{\varphi^2}\cdots g^{\varphi^{n-1}} = 1$ for any element $g \in G$. If φ is splitting automorphism of period n of the group G, then it means exactly that for any $g \in G$ in the holomorph $Hol(G)$ of G the relation $(\varphi\, g)^n = 1$ is hold. It is easy to verify that each inner automorphism of the periodic group of period n is its splitting automorphism of period n. However, the converse is not true. Known theorem of O. Kegel [**1**] state that any finite group having a nontrivial splitting automorphism of prime period is nilpotent. E. Khukhro [**2**] proved that any solvable group having a nontrivial splitting automorphism of prime period is nilpotent also.

In Kourovka Notebook S.V. Ivanov posed the question: *Let n is sufficiently large odd number and $m > 1$. Is it true that any splitting automorphism of period n of the free Burnside group $B(m,n)$ is inner* (see [**4**], question 11.36. b))?

By definition, a free Burnside group $B(m,n)$ of period n and rank m has the following presentation

$$B(m,n) = \langle a_1, a_2, ..., a_m \mid X^n = 1\rangle,$$

where X ranges over all words in $\{A_1^{\pm1}, a_2^{\pm1}, \ldots, a_m^{\pm1}\}$. A detailed review of studies of free Burnside groups can be found in [**3**]. We have proved

Theorem. *Let φ be splitting automorphism of period n of the free Burnside group $B(m,n)$, where $n \geq 1003$ is an arbitrary odd number. Then, if the order of the automorphism φ is prime, then φ is inner automorphism.*

From this, in particular, follows the positive answer to the question Ivanov for all prime $n > 997$.

Corollary. *For any prime $n >$ 997 and $m >$ 1 each splitting automorphism of period n of $B(m,n)$ is inner automorphism.*

References

[1] Kegel O. H. Die Nilpotenz der H_p-Gruppen. Math. Z.. 1961. Vol. 75 P. 373–376.

[2] Khukhro E. I. Nilpotency of solvable groups admitting a splitting automorphism of prime order. Algebra and Logic. 1980. V. 19., N. 1 P. 77–84.

[3] Adyan S. I. The Burnside problem and related topics. Uspekhi Mat. Nauk. 2010. V. 65. N. 5(395). P. 5–60.

[4] *Kourovka Notebook; 11 ed.,* Novosibirsk, 1990.

Yerevan State University, Yerevan (Armenia)
E-mail: `varujan@atabekyan.com`

Semiproportional irreducible characters of groups $Sp_4(q)$ for even q

V. A. Belonogov

The characters φ and ψ of a group G are called *semiproportional* if they are not proportional and there exists a subset M of G such that the restrictions of φ and ψ on M, as well as their restrictions on $G\backslash M$, are proportional. This notion arose in investigation of D-blocks (see [**1, 2**]): different irreducible characters φ and ψ of a finite group G are semiproportional if and only if $\{\varphi, \psi\}$ is a D-block of G for some normal subset D of G.

In a number of papers (see, for example, [**3, 4**]), the author investigated the presence of pairs of semiproportional irreducible characters in finite groups of certain classes. For groups of Lie type, considered by the author, an interesting connection between the presence or absence of a such pair in a group and the parity of characteristic of the defining field of the group is revealed. For instance, in the quasi-simple groups $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$, and $\mathrm{SU}_3(q)$ there are no such pairs for even q, but they exist for odd q, except for the groups $\mathrm{L}_2(5)$, $\mathrm{L}_2(7)$, and $\mathrm{L}_2(9)$ (which are isomorphic to the groups $\mathrm{L}_2(4)$, $\mathrm{L}_3(2)$, and $\mathrm{PSp}_4(2)'$, respectively). We state

Conjecture. *Finite simple groups of Lie type, defined over a field of characteristic p, generally,*

have no pairs of semiproportional irreducible characters for $p = 2$ and
have pairs of semiproportional irreducible characters for $p > 2$.

Now the following further conformation of this conjecture is obtained.

Theorem. *The finite simple groups $Sp_4(q)$ for even q ($q \geq 4$) have no pairs of semiproportional irreducible characters.*

Note that the non-simple group $Sp_4(2) \simeq S_6$ has exactly five (unordered) pairs of semiproportional irreducible characters. (By [**4**, Theorem 1] irreducible characters φ and ψ of group S_n ($n \geq 1$) are semiproportional if and only if they are conjugate, i.e. $\psi = \varphi\xi \neq \varphi$, where ξ is the linear character of S_n with the kernel A_n.)

References

[1] Belonogov V. A. D-blocks of characters of finite group. Amer. Math. Soc. Transl. (2), **143** (1989), 103-128. (The original paper in Russian see in Coll. Issledovaniya po teorii grupp, Sverdlovsk: Ural Branch of AS USSR, 1984, pp. 3-31).)

[2] Belonogov V. A. Representations and characters in the theory of finite groups. Sverdlovsk, Ural Branch of AS USSR, 1990, 380 pp. (in Russian).

[3] Belonogov V. A. Small interactions in groups $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, Ekaterinburg,1998, vol. 5, pp. 3–27 (in Russian).

[4] Belonogov V. A. On the irreducible characters of groups S_n and A_n. Siberian Math. J., 2004, **4**5 (5), 806–820.

Inst. Math. Mech., Ural Branch of RAS, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

On perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(n,3)$

A. L. Gavrilyuk, S. V. Goryainov

The *Johnson graph* $J(n,m)$ is a graph whose vertices are all binary vectors of length n and weight m and in which any two vectors are adjacent if and only if they differ by exactly two coordinates. The adjacency matrix of the Johnson graph $J(n,m)$ has exactly $m+1$ distinct eigenvalues $\theta_k = (m-k)(n-m-k)-k$, where $k = 0,\dots,m$.

A *perfect coloring* (an *equitable partition*) of a graph Γ into t colors (in what follows, a t-coloring) is a partition of the vertex set of Γ into t classes (colors) $C_1,\dots,C_t$ such that, for all $i,j \in \{1,\dots,t\}$, any vertex from the class C_i is adjacent to the same number of vertices, namely, c_{ij} vertices, from the class C_j. The matrix $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,t}$ is called the *quotient matrix* of the t-coloring. Note that in case of $t=2$ the numbers $c_{11}+c_{12}$ and $c_{11}-c_{21}$ are the eigenvalues of the adjacency matrix of Γ. We do not distinguish between colorings obtained by renaming the colors (i.e., by equal permutations of rows and columns of the matrix C).

The perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(n,m)$ with small n and $J(n,2)$ were described in [**1, 2, 3, 4**]. In particular, in [**4**] the existence of a perfect 2-coloring of $J(9,3)$ with quotient matrix $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ was left as an open case. We are able to give more general answer.

Theorem 1. *If n is odd, then the Johnson graph $J(n,3)$ has no 2-colorings with quotient matrix C such that $c_{11}-c_{21}=\theta_2$.*

In case of even n the analog of Theorem 1 does not hold in general: several constructions of the perfect 2-colorings of $J(2m,3)$ with quotient matrix C such that $c_{11}-c_{21}=\theta_2$ were proposed in [**4**]. Moreover, for $n=6$ and 10, there exist the perfect 2-colorings of $J(n,3)$ with symmetric quotient matrices $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, respectively, see [**2, 4**].

Theorem 2. *For $n \in \{14,18,22\}$, the Johnson graph $J(n,3)$ has no 2-colorings with a symmetric quotient matrix C such that $c_{11}-c_{21}=\theta_2$.*

References

[1] Mogil'nykh I. Yu. On the regularity of perfect 2-colorings of the Johnson graph. Probl. Inf. Transm. **43** (2007), no. 4, 303–309.

[2] Mogil'nykh I. Yu., Avgustinovich S. V. Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6,3)$ and $J(7,3)$. Lect. Notes Comp. Sci. **5228** (2008), 11–19.

[3] Mogil'nykh I. Yu. On the nonexistence of some perfect 2-colorings of Johnson graphs. Diskretn. Anal. Issled. Oper. **16** (2009), no. 5, 52–68.

[4] Avgustinovich S. V., Mogil'nykh I. Yu. Perfect 2-colorings of the Johnson graphs $J(8,3)$ and $J(8,4)$. Diskretn. Anal. Issled. Oper. **17** (2010), no. 2, 3–19.

Institute of mathematics and mechanics, UB RAS, Yekaterinburg (Russian Federation); Chelyabinsk State University, Chelyabinsk (Russian Federation)
E-mail: alexander.gavrilIouk@gmail.com

On the outer automorphisms of periodic products of groups

A. L. Gevorgyan

Automorphism φ of the group G is called *normal* automorphism if the equality $\varphi(H) = H$ holds for any normal subgroup H of G. Obviously, every inner automorphism of any group is a normal automorphism, but the converse is false.

A. Lubotzky in [**1**] proved that every normal automorphism of noncyclic absolutely free group is inner. A similar statement was proved at different times for different interesting classes of groups. According the main result of [**3**], for any odd number $n \geq 1003$ every normal automorphism of the free Burnside group $B(m,n)$ of rank $m > 1$ and period n is an inner automorphism.

M. Neshchadim in [**2**] proved that every normal automorphism of the free product of nontrivial groups is inner.

We have shown that the result of [**2**] can not be extended to n-periodic product of groups introduced by Adyan in [**4**] (see also [**5**]).

Theorem. *Let G be a group without involutions and has an automorphism of order 2. Then if for some odd number $n \geq 665$ the group G coincides with its subgroup G^n, then n-periodic product $G \overset{n}{*} G$ has an outer normal automorphism.*

In terms of n-periodic products the mentioned above result of work [**3**] can be reformulated in the following way: for any odd number $n \geq 1003$ every normal automorphism of n-periodic product $B(m_1,n) \overset{n}{*} B(m_2,n)$ of free periodic groups of $B(m_1,n)$ and $B(m_2,n)$ of ranks of m_1, $m_2 \geq 1$ is inner automorphism.

The Theorem implies

Corollary. *For any odd number $n \geq 665$ and for any coprime to n an odd number k the n-periodic product $B(m_1,k) \overset{n}{*} B(m_2,k)$ has an outer normal automorphism.*

References

[1] Lubotzky A. Normal automorphisms of free groups. J. Algebra. 1980. V. 11, № 2. P. 494–498.

[2] Нещадим М. В. Свободное произведение групп не имеет внешних нормальних автоморфизмов. Алгебра и логика. 1996. V. 35, № 5 P. 562–566.

[3] Атабекян В. С. Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп. Изв. РАН. Сер. матем. 2011. V. 75, № 2. C. 3–18.

[4] Адян С. И. Периодическое произведение групп. Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 3–21.

[5] Адян С. И. Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева. Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 6. С. 803–810.

Russian-Armenian (Slavonic) University, Yerevan (Armenia)
E-mail: amirjan.gevorgian@gmail.com

Automorphisms of finite p-groups with a partition

E. I. Khukhro

A finite p-group P has a (proper) partition if and only if it has a proper subgroup outside of which all elements have order p, that is, $P \neq H_p(P) := \langle g \in P \mid g^p \neq 1\rangle$.

Theorem 1. *Suppose that a finite p-group P with a partition admits a soluble group of automorphisms A of coprime order such that the fixed-point subgroup $C_P(A)$ is soluble of derived length d. Then P has a maximal subgroup that is nilpotent of class bounded in terms of p, d, and $|A|$.*

The proof is based on a similar result of the author and Shumyatsky [**1**] for the case where P has exponent p and on the trick of "elimination of automorphisms by nilpotency", which was used earlier by the author [**2**], in particular, for studying finite p-groups with a partition.

Theorem 2. *If a finite p-group P with a partition admits a group of automorphisms A that acts faithfully on $P/H_p(P)$, then the exponent of P is bounded in terms of the exponent of $C_P(A)$.*

The proof of this result is based on the author's positive solution of the analogue of Restricted Burnside Problem for finite p-groups with a partition [**3**].

Corollary. *Suppose that a finite group G admits a Frobenius group of automorphisms FH with kernel $F = \langle\varphi\rangle$ of prime order p such that φ is a splitting automorphism, that is, $xx^{\varphi}x^{\varphi^2}\cdots x^{\varphi^{p-1}} = 1$ for all $x \in G$.*

(a) *If $C_G(H)$ is soluble of derived length d, then G is nilpotent of (p,d)-bounded class.*

(b) *The exponent of G is bounded in terms of p and the exponent of $C_G(H)$.*

In the Corollary, the group G is nilpotent by the Kegel–Thompson–Hughes theorem, and the p'-part of G, where φ is fixed-point-free, is nilpotent of p-bounded class by Higman's theorem. Theorems 1 and 2 are applied with $P = P_1\langle\varphi\rangle$ and $A = H$, where P_1 is the Sylow p-subgroup of G.

References

[1] Khukhro E. I., Shumyatskii P. V. On fixed points of automorphisms of Lie rings and of locally finite groups. *Algebra i Logika* **34** (1995), 706–723; English transl. in *Algebra and Logic* **34** (1995), 395–405.

[2] Khukhro E. I. Nilpotency in varieties of groups with operators. *Mat. Zametki* **50** (1991), 142–145; English transl. in *Math. Notes* **50** (1991), 869–871.

[3] Khukhro E. I. Locally nilpotent groups admitting a splitting automorphism of prime order. *Mat. Sbornik*, **130** (1986), 120–127; English transl. in *Math. USSR Sbornik* **58** (1987), 119–126.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

The two-square lemma and the connecting morphism in preabelian categories

Ya. A. Kopylov

In 1989 Fay, Hardie, and Hilton [**1**] proposed a new proof of the Snake Lemma, one of the most important assertions of homological algebra, in an abelian category. Their proof is based on the so-called Two-Square Lemma, which makes it possible to construct a conecting morphism in the Snake Lemma. Later Generalov [**2**] extended an important special case of this lemma to preabelian categories.

We prove a generalization of the Two-Square Lemma for preabelian categories and also establish the equivalence up to sign of two definitions of a connecting morphism of the Snake Lemma.

Partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 09-01-00142-a), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools and Junior Scientists of the Russian Federation (Grant NSh-6613.2010.1), and the Integration Project “Quasiconformal Analysis and Geometric Aspects of Operator Theory” of the Siberian Branch and the Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

References

[1] Fay T. H., Hardie K. A., Hilton P. J. The two-square lemma. Publ. Mat. **33** (1989), no. 1, 133–137.
[2] Generalov A. I. The Ker-Coker sequence for pre-abelian categories (Russian). Abelian Groups and Modules, no. 11, 12. Tomsk. Gos. Univ., Tomsk, 1994, 78–89.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: `yakop@math.nsc.ru`

Criteria of P-nilpotency of finite groups

V. A. Kovalyova, A. N. Skiba

Throughout this paper, all groups considered are finite.

Let A be a subgroup of a group G, $K \leq H \leq G$. Then we say that A *covers the pair* (K, H) if $AH = AK$; A *avoids* (K, H) if $A \cap H = A \cap K$.

Definition. Let A be a subgroup of a group G. We say that:

(1) A is *quasipermutable in* G if A either covers or avoids every maximal pair (K, H) of G.

(2) A is *weakly quasipermutable in* G if G has a subgroup T and a quasipermutable subgroup C such that $G = AT$ and $T \cap A \leq C \leq A$.

Theorem. *Let G be a group and p a prime dividing $|G|$ such that $(|G|, p-1) = 1$. Then G is p-nilpotent if and only if for Sylow p-subgroup P of G either all maximal subgroups of P or all cyclic subgroup of P with prime order and order 4 (if P is a non-abelian 2-group) are weakly quasipermutable in G.*

A subgroup H of a group G is said to be c-normal in G [**1**] if there is a normal subgroup N of G such that $G = HN$ and $H \cap N \leq H_G$.

Corollary 1 (See Guo [**2**], Wang [**3**]). *Let G be a group, p the smallest prime dividing $|G|$ and P a Sylow subgroup of G. If the maximal subgroups of P are c-normal in G, then G is p-nilpotent.*

Corollary 2 (See Radaman, Azzat Mohamed and Heliel [**4**]). *Let G be a group, p the smallest prime dividing $|G|$ and P a Sylow subgroup of G. If the cyclic subgroups of P of prime order or order 4 are c-normal in G, then G is p-nilpotent.*

References

[1] Wang Y. c-normality of groups and its properties. J. Algebra, 1996. 180. P. 954–965.

[2] Guo X. Y. On p-Nilpotency of Finite Groups with Some Subgroups c-Supplemented. Algebra Colloquium, 2003. 10(3). P. 259–256.

[3] Wang Y. Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups c-Supplemented. J. Algebra, 2000. 224. P. 464–78.

[4] Radaman M., Mohamed A., Heliel A.A. On c-normaliti of certain subgroups of prime power order of finite groups. Arch. Math., 2005. 85. P. 203–210.

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel(Belarus)
E-mail: vika.kovalyova@rambler.ru; alexander.skiba49@gmail.com

Groups from normalized propelinear perfect codes

I. Mogilnykh, F. I. Solov'eva, J. Borges, J. Rifa

A *binary code* of length n is a collection of binary vectors of length n. A *linear* binary code of length n is a set of binary vectors of length n that forms an additive group (isomorphic to F_2^l for some $l \leq n$) with traditional addition via module 2. In some cases, symmetric structure of a code naturally defines a group operation, which is different from the addition of vectors via module 2. For example, a Z_4-*linear* code of length n is a code such that its Gray map image forms a subgroup of $< Z_4^{n/2}, + >$ with the addition of vectors via module 4. In general this code is not linear.

In this work we find new groups on perfect transitive codes of length 15 using propelinearity property. A code C is called *propelinear* if for each $x \in C$ there exists a coordinate permutation π_x such that:

$$\text{(i) } x + \pi_x(C) = C; \text{ (ii) if } x + \pi_x(y) = z, \text{ then } \pi_z = \pi_x \circ \pi_y, \text{ for any } y \in C.$$

Note that the property (i) is equivalent to transitivity of C. We can define a binary operation on codewords of C: $x * y = x + \pi_x(y)$. The code C with the fixed permutation set $\Pi = \{\pi_x : x \in C\}$ is a group under the operation $*$, called *propelinear structure*. A propelinear structure is called *normalized* if $\pi_x = \pi_y$ implies that $x + y$ belongs to the kernel of C. Recall that the *kernel* of a code is the set $\{x \in C : x + C = C\}$.

The classification of propelinear structures remains to be open even if we consider codes with special properties, e.g. perfect. Until this result was obtained all propelinear structures on perfect codes had been known to be abelian [**1**].

Theorem 1. *Any transitive perfect code from Malyugin's classification* [**3**] *admits a normalized propelinear structure, which is not abelian.*

The result was obtained by studying Malyugin's transitive perfect codes from the switching class of Hamming code [**3**] with the help of MAGMA package. It is known that Vasil'ev construction preserves propelinearity of a code [**2**], so we get a new class of propelinear structures on perfect codes for any admissible length $n \geq 15$.

Theorem 2. *For any $n = 2^m, m \geq 4$ there exists a perfect code of length n that admits a normalized propelinear structure, which is not abelian.*

The work is supported by the Grant of the President of the Russian Federation for Young Russian Researchers (project no. MK-1700.2011.1) and by the Grants RFBR 09-01-00244, 10-01-00616-a.

References

[1] Borges J., Rifa J. A characterization of 1-perfect additive codes. IEEE Trans. Inform. Theory, 1999. V. 45. P. 1688–1697.

[2] Borges J., Rifà J., Solov'eva F. I. On properties of propelinear and transitive binary codes. 3rd International Castle Meeting on Coding Theory and Applications 2011 3ICMCTA, CARDONA CASTLE, Spain, September 10-15, 2011, to appear.

[3] Malyugin S. A. On equivalent classes of perfect binary codes of length 15. Preprint 138. Novosibirsk: Inst. of Mathematics of SB RAS. 2004. P. 34 (in Russian).

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; Universitat Autònoma de Barcelona, 08193-Bellaterra, Spain

E-mail: ivmog84@gmail.com; sol@math.nsc.ru; jborges@deic.uab.cat; jrifa@deic.uab.cat

Semigroup domains

A. N. Shevlyakov

Let A be an algebraic structure over the language L. An equation over A is an atomic formula of L. A set $Y \subseteq A^n$ is called algebraic if there exists a system of equations S with the solution Y. The union of two algebraic sets is not necessary algebraic. An algebraic structure A is called an equational domain if the union of any algebraic sets $Y_1, Y_2 \subseteq A^n$ is algebraic. In [**1**] it was proven that an algebraic structure A is an equational domain iff the set $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_2 \text{ or } x_3 = x_4\}$ is algebraic over A.

We study the semigroups in the standard language $L = \{\cdot\}$ and prove

Theorem. *Any semigroup in the language $L = \{\cdot\}$ is not an equational domain.*

The obtained result corresponds to

Theorem [**1**]**.** *Any group in the standard language $L = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$ is not an equational domain.*

References

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures IV: Equational domains and co-domains. Algebra Logic, v. 49, 6, pp.715–756.

Omsk Branch of Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Omsk (Russia)
E-mail: a_shevl@mail.ru

III. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

О линейно минимальных кольцах и алгебрах

Е. Р. Байсалов

Пусть дано бесконечное кольцо $\langle R;+,\cdot,0\rangle$. Через $End(R)$ обозначим кольцо эндоморфизмов аддитивной группы этого кольца. Кольцо R назовем *линейно минимальным* (сокращенно *l-минимальным*), если любой ненулевой элемент подкольца $End(R)$, порожденного отображениями вида $x\mapsto ax$, $x\mapsto xa$, $a\in R$, и тождественным отображением $x\mapsto x$, имеет конечное ядро и является сюръекцией, т.е. отображением «на».

Кольцо $\langle R;+,\cdot,0\rangle$ называется *тривиальным*, если умножение на нем тривиально: $a\cdot b=0$ для любых элементов $a,b\in R$. Изучение тривиальных l-минимальных колец сводится к изучению сильно минимальных абелевых групп [**1**], поэтому в дальнейшем под кольцом понимаем нетривиальное кольцо.

Элемент $\lambda\in End(R)$ назовем *скаляром*, если для любых $x,y\in R$ выполняется равенство

$$\lambda(x\cdot y)=\lambda x\cdot y=x\cdot\lambda y.$$

Предложение 1. *Скаляры l-минимального кольца является образуют поле.*

Предложение 2. *Если l-минимальное кольцо имеет бесконечное поле скаляров, то оно само является полем, расширяющим поле скаляров.*

Предложение 3. *Скаляры l-минимального кольца определимы над кольцом.*

Таким образом, мы приходим к следующему естественному обобщению понятия линейной минимальности для алгебр.

Пусть $\mathfrak{A}=\langle A;+,\cdot,F\rangle$ — бесконечная алгебра над полем F. Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *линейно минимальным*, если любое ненулевое линейное преобразование из алгебры умножений $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ имеет конечное ядро и является отображением «на».

Центроид нетривиальной линейно минимальной алгебры является полем, расширяющим поле F. Такой же результат верен для простых алгебр [**2**].

Теорема. *Элементы центроида Φ нетривиальной, линейно минимальной алгебры $\mathfrak{A}=\langle A;+,\cdot,F\rangle$ определимы над этой алгеброй, и выполняется ровно одна из следующих возможностей:*

(1) *центроид Φ бесконечен и $\mathfrak{A}$ — бесконечное поле, расширяющее поле F, и $\mathfrak{A}=\Phi$;*

(2) *центроид Φ конечен и $\mathfrak{A}$ — бесконечномерная, линейно минимальная алгебра над Φ.*

Список литературы

[1] Poizat B. Groupes stables. Launey, Paris, 1987, 215 p.
[2] Джекобсон Н. Алгебры Ли. «Мир», М., 1964, 355 с.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана
E-mail: baisalov_er@enu.kz

О богатых семействах формул и типов, теоремах расширения и подъема, интерпретируемости и определимости в алгебраических системах

А. А. Викентьев

Доклад посвящен *переносу теорем о богатых семействах,* доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[2] *на случай богатого семейства типов (или формул) с параметрами для теорий с $\varkappa$–компактными (насыщенными, однородными) моделями и свойством $\varkappa$–отделимости новых элементов, реализующих типы (над малыми подмножествами) из богатого семейства, от элементов меньшей модели и наличия реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых (стабильных) типов или наличием упорядоченно неразличимых элементов.*

Основными инструментами доказательств являются теоремы типа компактности Мальцева–Ершова, развитая техника современной геометрической, топологической, конструктивной и семантической теории стабильности (Шелах, Лахлан, Балдвин, Пуаза, Пиллай, Хрушовский, Невельский, Зильбер, Палютин, Перетятькин, Еримбетов, Кудайбергенов, Судоплатов, Байжанов, Вербовский, Кулпешов, Мустафин Т.Г., Омаров А.И. и многих других) и наличия (даже локального) нужных компактных (для подходящих мощностей $\varkappa$) моделей теории со свойствами $\varkappa$–отделимости над реализациями семейства стабильных(определимых) типов. Рассмотрены вопросы различных видов интерпретируемости (определимости) алгебраических систем (включая классические поля) в наследственно конечных надстройках, а также о мощностях определимых подмножеств. Интерес к этим вопросам и таким моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (сильно опровержимых) формул и/или типов, закономерностей для кластеризации, и для ранжирования таким образом представленных знаний эспертов с помощью привлечения упорядоченных и измеримых алгебраических систем, как и для введения расстояний (метрик) на классах эквивалентных формул (типов) с помощью измеримых подклассов конечно измеримых (метрических) моделей теории, необходимых для алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей,обнаружения редких событий и кластеризации с помощью таких формул (типов). Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 10–01–00113а, 11–07–00346а, и кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: `vikent@math.nsc.ru`

[2] вошедших в диссертацию автора «Теории с покрытием и формульные подмножества», ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, а также теорем в сборнике, посвященному 90–летию академика А.Д. Тайманова — «Two cardinal theorems for sets of types in stable theory», Казахстан, Алма–Ата, 2007, с. 67–69, которые были доложены Алма-Ате и Новосибирске — на ежегодных Мальцевских Чтениях с 2006г., в том числе к 100–летию академика А.И. Мальцева и 70–летию академика Ю.Л. Ершова

К расстояниям в многозначных высказываниях и достоверностям

А. А. Викентьев, Р. А. Викентьев

В настоящее время появляется большой интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний от экспертов, согласованию высказываний [1–6]. Здесь будем записывать высказывания экспертов в виде формул n–значной ($n > 2$) логики. На значения истинности таких формул можно смотреть как на степени их ошибочности. С помощью n–значной теории моделей найдено параметрическое определение для расстояний между такими формулами и мер информативностей (недостоверностей). Доказаны свойства этих понятий, важные для анализа высказываний и решения задач распознавания. Значение истинности на модели может служить и степенью достоверности этой части реализации формулы в модели языка 1-го порядка. Расстоянием между формулами ϕ и ψ, $S(\phi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$, в множестве моделей $P(S(\Sigma))$ назовем

$$\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\left(\phi_{\frac{k}{n-1}} \wedge \psi_1\right)\right| + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\left(\phi_1 \wedge \psi_{\frac{k}{n-1}}\right)\right|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Теорема. *Для любых n и формул ϕ, ψ выполняется следующее:*

(1) $0 \le \rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) \le 1$; $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\psi,\phi)$;

(2) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = 0 \Leftrightarrow \phi \equiv \psi$;

(3) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) = 1 \Leftrightarrow \bigcup\limits_{l=1}^{n-1}\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{Mod}(\phi)_{\frac{k}{n-1}} \sqcup \mathrm{Mod}(\psi)_{\frac{l}{n-1}}\right) = P(S(\Sigma))$.

(4) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi) \le \rho_{S(\Sigma)}(\phi,\chi) + \rho_{S(\Sigma)}(\chi,\psi)$;

(5) *Если* $\phi^1 \equiv \phi^2$, *то* $\rho_{S(\Sigma)}(\phi^1,\psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\phi^2,\psi)$.

Результаты используются в анализе знаний и кластеризации. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проекты 10–01–00113а, 11–07–00346а.

Список литературы

[1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Изд–во ИМ СО РАН, 1999.

[2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[3] Викентьев А. А, Лбов Г. С. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказ. экспертов. Доклады РАН 1998. Т.361, №2 С. 174–176.

[4] Викентьев А. А, Лбов Г. С. Setting the metric and informativeness on statements of experts. Pattern Recognition and Image Analysis, 1997, V.7, №2, P. 175–183.

[5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. С.–Петербург, 2004.

[6] Викентьев А. А., Коренева Л. Н. К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты. Математические методы распознавания образов (ММРО-99), РАН ВЦ, Москва, 1999. С.151–154.

ИМ СО РАН и НГУ, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

Свободные медиальные коммутативные алгебры с одной операцией

С. С. Давидов

Изучаются коммутативные медиальные алгебры [**1**] с одной операцией. Вводится понятие n-арного полутерма, с помощью которого представляются элементы абсолютно свободного n-арного группоида. С использованием данной конструкции доказывается разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных n-арных группоидов, а именно, приводится алгоритм, с помощью которого решается вопрос о выполнимости тождества $u = v$ в многообразии коммутативных медиальных n-арных группоидов. Далее, используя приведенный алгоритм, описывается строение свободного коммутативного медиального n-арного группоида. Доказывается, что коммутативный медиальный n-арный группоид $Q(A)$ имеет выпуклое линейное представление, т.е. существует коммутативный моноид $S(+)$ такой, что $Q \subseteq S$ и

$$A(x_1, ..., x_n) = f(x_1) + ... + f(x_n)$$

для всех $x_1, ..., x_n \in Q$ где f автоморфизм моноида $S(+)$.

Список литературы

[1] Мовсисян Ю. М. Сверхтождества в алгебрах и многообразиях. Успехи Математических Наук, (1998), 53(1), стр.61–114.

Ереванский государственный университет, Ереван
E-mail: `davidov@ysu.am`

Косемантичность позитивных йонсоновских теорий

А. Р. Ешкеев

В данном тезисе мы представим некоторые свойства $\Delta - PM$ теорий относительно косемантичности. Модели A и B называются Δ -PM эквивалентными,если для любой Δ -PM теории T верно, что $A \models T \Leftrightarrow B \models T$, и этот факт обозначается через $A \equiv_{PM}^{\Delta} B$. Две Δ -PM теории T_1 и T_2 называются Δ -PM косемантичными $T_1 \bowtie_{PM}^{\Delta} T_2$, если они имеют общую семантическую модель в случае,когда T_1 и T_2 йонсоновские теории, а в случае, когда они не йонсоновские, если они имеют общую универсальную область. Модели A и B одной сигнатуры называются Δ -PM косемантичными $A \bowtie_{PM}^{\Delta} B$, если для любой Δ -PM теории T_1 такой,что $A \models T_1$,найдется Δ -PM теория T_2, Δ -PM косемантичная с T_1 такая, что $B \models T_2$. И наоборот. Для любых моделей A и B верны следующие импликации: $A \equiv B \Rightarrow A \equiv_{PM}^{\Delta} B \Rightarrow A \bowtie_{PM}^{\Delta} B$.

Рассмотрим связь этих понятий с центральными типами Δ -PM теорий.

Дадим необходимые обозначения связанные с обогащением сигнатуры рассматриваемой позитивной йонсоновской теории.

Пусть T-произвольная $\Delta - PM$-теория в языке сигнатуры σ. Пусть C-семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Рассмотрим следующую теорию $T_\Gamma^{PM}(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a | a \in A)\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq "\}$, где $\{"P \subseteq "\}$ есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. Эта теория не обязательно полная.

Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - PM$-ности теории T^*, существует её центр и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ, теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T.

Пусть $m \leq \omega$

Теорема 1. *Пусть T_1 и T_2 Δ -PM теории, которые Σ_{m+1}-полные, совершенные йонсоновские. Тогда если они Δ -PM синтаксически подобны, то они Δ -PM косемантичны между собой.*

Теорема 2. *Пусть T_1^c и T_2^c йонсоновские Δ -PM теории. Если T_1^* модельна совместна с T_2^*, то $T_1 \bowtie_{PM}^{\Delta} T_2$.*

Все необходимые неопределенные в данном тезисе определения можно найти в [**1**].

Список литературы

[1] Ешкеев А. Р. Йонсоновские теории. Учебное пособие, КарГУ, Караганда. - 2009.

КарГУ имени Е.А.Букетова,г.Караганда
E-mail: `modth1705@mail.ru`

Строение коммутативных унарных алгебр, решетка конгруэнций которых является цепью

А. В. Карташова

Напомним, что унарная алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной*, если $f(g(a)) = g(f(a))$ для всех $f, g \in \Omega$ и $a \in A$.

Будем говорить, что алгебра $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega' \rangle$ получена из алгебры $\mathfrak{A}$ присоединением петли e, если $A = A' \setminus \{e\}$ и $\Omega \subseteq \Omega'$, причем выполнены следующие условия:
1) алгебра $\mathfrak{A}$ является подалгеброй редукта $\langle A', \Omega \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}'$;
2) $(\forall f \in \Omega')(f(e) = e)$;
3) $(\forall f \in \Omega' \setminus \Omega)(f(A) = \{e\})$.

Пусть $\mathcal{K}_1$ – класс коциклических унарных алгебр ([**1**]), а $\mathcal{K}_2$ – класс алгебр, каждая из которых получается из некоторой алгебры класса $\mathcal{K}_1$ присоединением петли. Через $\mathcal{K}_3$ обозначим класс коммутативных унарных алгебр $\langle A, \Omega \rangle$, каждая из которых имеет петлю e, и бинарное отношение $\leq$, заданное по правилу

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \Leftrightarrow (y) \subseteq (x)),$$

является отношением линейного порядка на A, причем для любой нетождественной операции $f \in \Omega'$ редукт $\langle A, f \rangle$ связен и $|f^{-1}(\{a\})| \leq 1$ при всех $a \in A \setminus \{e\}$ ((x) обозначает подалгебру, порожденную элементом x).

Теорема 1. *Решетка конгруэнций коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ является цепью тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Однопорожденную унарную алгебру $\langle A, f \rangle$ с порождающим элементом a и определяющим соотношением $f^n(a) = f^{n+m}(a)$, где $n \geq 0$, $m > 0$ обозначим через C_m^n. Алгебра C_m^0 называется *циклом длины m*. Объединение последовательности унарных алгебр $C_m^0 \subset C_m^1 \subset \ldots$ обозначим через C_m^∞.

Пусть $\mathcal{L}_1$ – класс коммутативных унарных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$, для каждой из которых существуют операция $f \in \Omega$ и простое число p такие, что редукт $\langle A, f \rangle$ является циклом длины p^k, где $k \in \mathbf{N_0}$. Через $\mathcal{L}_2$ обозначим класс коммутативных унарных алгебр, каждая из которых получается присоединением петли к некоторой алгебре класса $\mathcal{L}_1$. Через $\mathcal{L}_3$ будем обозначать класс таких коммутативных унарных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ с петлей e, что для некоторой операции $f \in \Omega$ редукт $\langle A, f \rangle$ является либо унаром C_1^∞, либо унаром вида C_1^n, где $n \in \mathbf{N}$, и для любой операции $g \in \Omega$ либо $g(A) = \{e\}$, либо $g = f^s$, где $s \in \mathbf{N_0}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ – коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций. Тогда решетка $Con\mathfrak{A}$ является цепью в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Список литературы

[1] Esik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata. Acta Cybernetica. 1981. V. 5. P. 251–260.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет, г. Волгоград
E-mail: kartashovaan@yandex.ru

Несколько замечаний о топологии Зарисского на топологических алгебраических системах

М. В. Котов

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, L\rangle$ — произвольная алгебраическая система некоторого языка L, $\mathbf{x}$ — конечный набор переменных. Любая атомарная формула языка L от переменных $\mathbf{x}$ называется *уравнением.* Любое множество уравнений от переменных $\mathbf{x}$ языка L называется *системой уравнений.* Точка $\mathbf{a} \in A^n$ называется *решением* уравнения $s(\mathbf{x})$ языка L над $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \models s(\mathbf{a})$. Точка $\mathbf{a} \in A^n$ называется *решением* системы уравнений $S(\mathbf{x})$ над $\mathcal{A}$, если точка $\mathbf{a}$ является решением каждого уравнения системы S. Множество всех решений системы уравнений $S(\mathbf{x})$ называется *алгебраическим* над $\mathcal{A}$ множеством и обозначается $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(S)$. Совокупность всех алгебраических над $\mathcal{A}$ множеств $Y \subseteq A^n$ обозначим $\mathfrak{A}_{\mathcal{A},n}$.

Топологией Зарисского $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},n}$ называется топология, предбазой замкнутых множеств которой является совокупность $\mathfrak{A}_{\mathcal{A},n}$ [**1**].

Представляют интерес следующие вопросы.

Вопрос 1. Для каких топологических алгебраических систем $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L\rangle$ топология Зарисского $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},n}$ совпадает с топологией $\mathfrak{T}^n$?

Вопрос 2. Для каких алгебраических систем $\mathcal{A}$ и каких целых положительных n топология Зарисского $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},n}$ является хаусдорфовой?

Вопрос 3. Для каких алгебраических систем $\mathcal{A}$ топология Зарисского $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},1}$ совпадает с топологией Маркова $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$?

Были доказаны две следующие теоремы, которые позволяют в некоторых случаях отвечать на эти и другие близкие вопросы.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L\rangle$ — топологическая алгебраическая система, $\mathfrak{T}$ — хаусдорфова топология, n — положительное целое число. $\mathfrak{A}_{\mathcal{A},n} = \mathrm{Cl}(\mathfrak{T}^n)$ тогда и только тогда, когда найдётся такая база $\mathfrak{B}$ топологии $\mathfrak{T}^n$, что для любой точки $\mathbf{a} \in A^n$ и любого содержащего точку $\mathbf{a}$ множества X из $\mathfrak{B}$ найдётся алгебраическое множество Y, не содержащее точку $\mathbf{a}$ и содержащее множество $A^n \setminus X$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathfrak{T}, L\rangle$ — топологическая алгебраическая система, $\mathfrak{T}$ — хаусдорфова топология, n — положительное целое число. $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},n} = \mathfrak{T}^n$ тогда и только тогда, когда найдётся такая база $\mathfrak{B}$ топологии $\mathfrak{T}^n$, что для любой точки $\mathbf{a} \in A^n$ и любого содержащего точку $\mathbf{a}$ множества X из $\mathfrak{B}$ найдётся замкнутое в топологии Зарисского $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},n}$ множество Y, не содержащее точку $\mathbf{a}$ и содержащее множество $A^n \setminus X$.*

Список литературы

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry. Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008), 80–112.

ОФ ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: matvej.kotov@gmail.com

Экзистенционально замкнутые и максимальные модели в позитивной логике

А. М. Кунгожин

Мы используем понятия позитивной логики, введенные в работе Б. Пуаза и И. Бен Якова [**1**]. Рассмотрим сигнатуру Σ с отношением равенства, при этом образуем обычные формулы первого порядка, используя операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, кванторы всеобщности и существования. *Позитивные экзистенциональные формулы* образуются без операции отрицания и квантора всеобщности. Если существует гомоморфизм из модели A в модель B, то мы говорим, что B является *продолжением* A, а A есть *начало* B. Заметим, что при любом гомоморфизме $h : A \to B$, произвольная экзистенциальная позитивная формула $\exists\overline{y}\varphi(\overline{x},\overline{y})$, выполняющаяся на кортеже $\overline{a} \in A$ в модели A, будет также выполняться на его образе $h(\overline{a})$ в модели B. Мы говорим, что гомоморфизм $h : A \to B$ является *погружением*, если выполняется обратное: $\overline{a}$ и $h(\overline{a})$ удовлетворяют одним и тем же позитивным экзистенциональным формулам. При этом модель A *позитивно экзистенционально-замкнута* в модели B. Пусть задан класс C Σ-структур. Мы говорим, что модель A класса C *позитивно экзистенционально-замкнута* в классе C (для краткости будем говорить, что модель A является pec-моделью), если любой гомоморфизм из A в любую модель класса C является погружением. Изучая понятие позитивной экзистенциональной замкнутости, автор ввел следующее понятие, которое тесно связано с понятием pec-модели, а также доказал ряд теорем.

Определение. *Модель A класса C назовем* **h-максимальной**, *если любой гомоморфизм из модели A в произвольный элемент класса C является изоморфным вложением.*

Теорема 1. *Если класс C является конечно h-универсально аксиоматизируемым в предикатной сигнатуре, то подкласс всех его h-максимальных моделей является аксиоматизируемым. Причем, если его сигнатура Σ конечна, то возможно построить конечный набор аксиом, определяющий подкласс h-максимальных моделей.*

Теорема 2. *Если в предикатной сигнатуре класс C является конечно h-универсально аксиоматизируемым, то подкласс всех его pec-моделей является аксиоматизируемым.*

Теорема 3. *Пусть класс C является h-универсально аксиоматизируемым классом. Тогда множество pec-моделей его подкласса h-максимальных моделей совпадает с множеством pec-моделей самого класса C.*

Список литературы

[1] Ben Yaacov I., Poizat B. Fondaments de la Logique Positive. The Journal of Symbolic Logic, vol. 82 (2007), pp. 1141–1162.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: kungozhin@gmail.com

Элементарно замкнутые модели индуктивных аксиоматизируемых классов.

А. Т. Нуртазин

Напомним, что данная модель называется экзистенциально замкнутой в некотором аксиоматизируемом классе C, если она изоморфно содержится в некоторых моделях из этого класса и все эти включения сохраняют истинность универсальных формул. Также хорошо известно, что, если рассматриваемый класс индуктивен, то любую модель из этого класса можно расширить до некоторой экзистенциально замкнутой, которая сама также принадлежит к нему. По аналогии с приведённым понятием назовём *данную модель называем элементарно замкнутой в аксиоматизируемом классе C, если её изоморфное включение в произвольную модель из этого класса на самом деле элементарно.* Характеризация таких моделей и их существование в любой совместной индуктивной теории описываются следующим утверждением.

Теорема. *1. Любая совместная индуктивная теория является теорией подкласса всех элементарно замкнутых в ней моделей.*

2. Модель A элементарно замкнута в индуктивной теории T, если и только если в ней любая формула $\varphi(\bar{x})$, истинная на произвольном кортеже $\bar{a}$ является следствием некоторой выполнимой на этом же кортеже экзистенциальной формулы от того же набора свободных переменных.

3. Любая модель элементарно замкнута в совместной индуктивной теории, если и только если она является её форсинг-моделью.

Для индуктивных теорий основополагающей является теорема Лося — Сушко, которая говорит, что индуктивными аксиоматизируемыми классами являются в точности $\forall\exists-$аксиоматизируемые классы [**2**]. Также являясь критерием, следующее утверждение показывает, что в полных индуктивных теориях для любого положительного натурального числа n экзистенциальные окрестности образуют базис стоуновского пространства $n-$типов — $S_n(T)$.

Теорема. *Данная полная теория T индуктивна, если и только если в ней любая выполнимая формула $\varphi(\bar{x})$ является следствием некоторой выполнимой экзистенциальной формулы от того же набора переменных.*

Список литературы

[1] Rodinson A. Infinite forcing in model theory. Proceedings of Second Scandinavian Logic Simposium, North-Holland, Amsterdam, 1971, 317–340.

[2] Los J., Suszko R. On the extending of models, IV infinite sums of models. Fundam. math., 1957, 44, p. 52–60.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: abyznurtazin@mail.ru

Обобщенно стабильные абелевы группы

Е. А. Палютин

Используемые далее понятия можно найти в статьях [**1**] и [**2**]. Понятие (P, s)-стабильности получается из (P, a)-стабильности заменой алгебраической замкнутости на сервантность.

Теорема 1. *Любая полная теория T абелевых групп является (P,s)-стабильной.*

Так как любая алгебраически замкнутая подгруппа абелевой группы без кручения является сервантной, то из теоремы 1 вытекает теорема М.А.Русалеева [**2**] о (P, a)-стабильности абелевых групп без кручения. Из этой теоремы получается также результат Т.А.Нурмагабетова [**3**] о (P, e)-стабильности любой полной теории абелевых групп.

Следующая теорема описывает все (P, a)-стабильные абелевы группы.

Теорема 2. *Для абелевой группы A ее теория $T = Th(A)$ тогда и только тогда не является (P,a)-стабильной, когда группа A удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) для некоторого простого p подгруппа $A[p] \cap pA$ группы A бесконечна;

(2) для некоторого простого p подгруппа $A[p]$ группы A бесконечна и ее шмелевский инвариант $\gamma_p(A)$ равен ω.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 09-01-00336-а.

Список литературы

[1] Палютин Е. А. E^*-стабильные теории. Алгебра и логика, т.42, N 2(2003), с. 194–210.

[2] Русалеев М. А. Обобщенная стабильность абелевых групп без кручения. Алгебра и логика, т. 50, N 2 (2011), с. 231–245.

[3] Нурмагамбетов Т. А. P-стабильность полных теорий абелевых групп. XI Межреспубл. конф. по мат. логике. Тез. сообщений, Казань, изд-во КГУ, 1992, с. 106.

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: palytin@math.nsc.ru

Ультраклоны на 2-х элементном множестве

В. И. Пантелеев

Пусть A — конечное множество, n-местной ультрафункцией на множестве A называется отображение $f : A^n \to 2^A \setminus \{\varnothing\}$, а n-местной частичной ультрафункцией на множестве A называется отображение $f : A^n \to 2^A$. Функция $e_n^i(x_1, ..., x_n) = \{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$ называется проекцией.

Суперпозиция $f(f_1, ..., f_m)$ с внешней ультрафункцией f и внутренними f_1, ..., f_m, зависящими от n переменных определяет ультрафункцию $h(x_1, ..., x_n)$ следующим образом:

$$h(a_1, ..., a_n) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если существует } i \in \{1, ..., m\} \text{ такое, что} \\ \quad f_i(a_1, ..., a_n) = \varnothing; \\ \bigcap\limits_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_n)} f(b_1, ..., b_m), \text{ если } \bigcap f(b_1, ..., b_m) \neq \varnothing; \\ \bigcup\limits_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_n)} f(b_1, ..., b_m), \text{ иначе .} \end{cases}$$

(Частичным) ультраклоном называется множество (частичных) ультрафункций, содержащее все проекции и замкнутое относительно суперпозиции. Максимальным называется собственный (частичный) ультраклон такой, что единственным, содержащим его собственным (частичным) ультраклоном, является он сам.

На 2-х элементном множестве число максимальных ультраклонов равно 11.

Среди частичных ультраклонов максимальными будут, например, следующие:

$K_1 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f(0, ..., 0) \in \{\{0\}, \varnothing\}\}$,

$K_2 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f(1, ..., 1) \in \{\{1\}, \varnothing\}\}$.

В докладе приводятся примеры максимальных частичных ультраклонов, описываются фрагменты из решетки всех ультраклонов и решетки всех частичных ультраклонов на 2-х элементном множестве, а также приводятся примеры полных множеств ультрафункций.

ВСГАО, Иркутск
E-mail: v_panteleyev@mail.ru

Мультиоперации и суперклоны

Н. А. Перязев

Алгебраический подход к изучению функциональных систем впервые был предложен А.И. Мальцевым [**1**].

Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A, где $B(A)$ — множество всех подмножеств A. Через P_A и M_A обозначаем, соответственно, множества всех операций и всех мультиопераций на A.

Если для любых элементов $a_1^1, \dots, a_m^1, \dots, a_1^n, \dots, a_m^n$ из A выполняется

$$f * (g(a_1^1, \dots, a_m^1), \dots, g(a_1^n, \dots, a_m^n)) \subseteq g * (f(a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, f(a_m^1, \dots, a_m^n)),$$

то говорим, что для f и g верно *полутождество перестановочности*, а так же, что f *стабильна относительно* g, а g *нормальна относительно* f.

Если $g \in M_A$, то $S(g) = \{f \,|\, f \in P_A$ и f стабильна относительно $g\}$ называется *стабилизатором* g.

Если $f \in P_A$, то $N(f) = \{g \,|\, g \in M_A$ и g нормнальна относительно $f\}$ называется *нормализатором* f.

Если $R \subseteq M_A$, то $S(R) = \bigcap\limits_{g \in R} S(g)$ — *стабилизатор* множества R.

Если $K \subseteq P_A$, то $N(P) = \bigcap\limits_{f \in K} N(f)$ — *нормализатор* множества K.

Замыканием Галуа множества операций K и множества мультиопераций R называется, соответственно, $S(N(K))$ и $N(S(R))$. Стандартным образом определяется алгебраическое замыкание множества операций K в клонах и множества мультиопераций R в суперклонах [**2**].

Теорема. *Алгебраические замыкания совпадают с замыканиями Галуа:*
а) $[\,K\,] = S(N(K))$; *б)* $\langle\, R\,\rangle = N(S(R))$.

Таким образом, отображения $S(x)$ и $N(x)$ определяют совершенную связь Галуа между клонами и суперклонами [**3**]. Стабилизатор множества операций называют *централизатором.* При этом вместо полутождества перестановочности получаем тождество перестановочнчоти. Отметим, что централизатор определяет на множестве клонов двойственное себе соответствие Галуа, которое не является совершенным [**1**].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00476.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск, 1976. — 100 с.

[2] Перязев Н. А. Суперклоны и клоны. Международная конференция "‘Мальцевские чтения"’. Тезисы докл. — Новосибирск, 2009. — С. 164.

[3] Перязев Н. А. Теория Галуа для клонов и суперклонов. Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции. — Нижний Новгород, 2011. — С. 359–363.

Восточно-Сибирская государственная академия образования, г. Иркутск.
E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Неявно эквивалентные универсальные алгебры

А. Г. Пинус

Исходя из определения неявных операций на псевдомногообразиях полугрупп в работе [**1**], естественно определение неявной операции на произвольной универсальной алгебре $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ как функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ определенной на множестве A, относительно которой замкнуты подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ и которая коммутирует с любыми внутренними гомоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$ (гомоморфизмами подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ на ее же подалгебры).

Для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ через $\overline{a}$ обозначим кортеж $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, а через $D^+_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим позитивную часть диаграммы алгебры $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ такую, что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}} \models D^+_{\overline{a}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Здесь $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ порожденная множеством $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Пусть $T^n_{\mathfrak{A}}$ — совокупность типов изоморфизма алгебр $\langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_n \rangle$ (алгебр $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ сигнатуры σ, обогащенных константами $a_1, \ldots, a_n$) для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$.

Под ∞-*позитивно-условным термом* $t_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для алгебры $\mathfrak{A}$ будем далее понимать схему:

$$t_\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \&_{\langle \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}}, \overline{a} \rangle \in T^n_{\mathfrak{A}}} \Big(\& D^+_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(\langle \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}}, \overline{a} \rangle)(x_1, \ldots, x_n) \Big),$$

где φ — произвольное отображение множества $T^n_{\mathfrak{A}}$ в совокупность Tr^n_σ термов сигнатуры σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, если при этом для любых $\langle \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}}, \overline{a} \rangle, \langle \langle \overline{b} \rangle_{\mathfrak{A}}, \overline{b} \rangle \in T^n_{\mathfrak{A}}$ имеет место:

$$(*)\ \mathfrak{A} \models \& \, D^+_{\overline{a}}(b_1, \ldots, b_n) \to \varphi(\langle \langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}}, \overline{a} \rangle)(b_1, \ldots, b_n) = \varphi(\langle \langle \overline{b} \rangle_{\mathfrak{A}}, \overline{b} \rangle)(b_1, \ldots, b_n).$$

Напомним, что ∞-*квазитождеством* называется любая формула вида

$$\forall x_1, \ldots, x_n \Big(\&_{i \in I} \, t^1_i(x_1, \ldots, x_n) = t^2_i(x_1, \ldots, x_n) \to p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Big),$$

где t^i_1, t^i_2, p, q — термы сигнатуры σ.

Любой ∞-позитивно-условный терм $t_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ естественным образом определяет на множестве A n-местную ∞-*позитивно-условно термальную функцию* $t^{\mathfrak{A}}_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$:

для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$, если $\mathfrak{A} \models \& \, D^+_{\overline{b}}(a_1, \ldots, a_n)$, то

$$t_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi\big(\langle \langle \overline{b} \rangle_{\mathfrak{A}}, \overline{b} \rangle\big)(a_1, \ldots, a_n).$$

Очевидным образом любая ∞-позитивно-условно термальная функция для алгебры $\mathfrak{A}$ является неявной операцией на алгебре $\mathfrak{A}$. Столь же очевидно и обратное: любая неявная операция на алгебре $\mathfrak{A}$ является ∞-позитивно-условно термальной функцией для алгебры $\mathfrak{A}$.

Две σ-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma \rangle$ назовем *синтаксически неявно эквивалентными*, если любой ∞-позитивно-условный терм для алгебры $\mathfrak{A}$ является таковым и для алгебры $\mathfrak{B}$ и обратное и, кроме того, два ∞-позитивно-условных для алгебры $\mathfrak{A}$ терма определяют на $\mathfrak{A}$ одну и ту же неявную операцию тогда и только тогда, когда они определяют одну и ту же неявную операцию и на алгебре $\mathfrak{B}$.

Теорема 1. *Следующие условия для алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma \rangle$ равносильны:*
(а) *алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ синтаксически неявно эквивалентны,*
(б) *∞-квазиэквациональные теории алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают,*

(в) *алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ геометрически эквивалентны*,

(г) любая конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в некоторую прямую степень алгебры $\mathfrak{B}$ и наоборот.

Список литературы

[1] Eilenberg S., Schutzenberger M. P. On pseudovarieties. Adv. Math., v. 19, № 3, 1976, p. 413–418.

[2] Пинус А. Г. Неявные операции над категориями универсальных алгебр. Сибирск. матем. журнал, т. 50, № 1, 2009, с. 146–153.

[3] Пинус А. Г. О неявных условных операциях на псевдоуниверсальных классах. Фундаментальная и прикладная математика, т. 10, № 4, 2004, с. 174–182.

[4] Пинус А. Г. Позитивно-условные псевдомногообразия и неявные операции на них. Сибирский матем. журнал, т. 47, № 2, 2006, с. 372–382.

[5] Пинус А. Г. О $\exists^+$-условных многообразиях, $\exists^+$-условных псевдомногообразиях и неявных операциях на них. Алгебра и теория моделей. 5, Новосибирск, Из-во НГТУ, 2005, с. 138–161.

[6] Пинус А. Г. Геометрические шкалы многообразий алгебр и квазитождества. Математические труды, т. 12, № 2, 2009, с. 160–169.

[7] Пинус А. Г. О ∞-квазимногообразиях. Известия вузов. Математика, 2011, № 8, с. 40–45.

[8] Plotkin B. Varieties of algebras and algebraic vaeieties. Israel Math. Journal, v. 96, № 2, 1996, p. 511–522.

[9] Плоткин Б. И. Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре. Алгебра и анализ, т. 9, № 4, 1997, с. 224–248.

[10] Plotkin B. Algebras with the same (algebraic) geometry. Proc. Steklov. Inst. Math., v. 242, № 3, 2003, p. 165–196.

[11] Мальцев А. И. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. ДАН СССР, т. 120, № 1, 1958, с. 29–32.

[12] Пинус А. Г. Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность. Алгебра и логика, т. 37, № 4, 1998, с. 432–459.

[13] Пинус А. Г. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск, Из-во НГТУ, 2002.

[14] Пинус А. Г. О функциях коммутирующих с полугруппами преобразований алгебр. Сибирский матем. журнал, т. 41, № 6, 2000, с. 1409–1418.

[15] Пинус А. Г. Производные структуры универсальных алгебр. Новосибирск, Из-во НГТУ, 2007.

[16] Пинус А. Г. О Галуа-соответствии между неявными операциями и категориями универсальных алгебр. В печати.

[17] Пинус А. Г. Об алгебрах условно рационально эквивалентных полурешеткам и булевым алгебрам. Сибирский матем. журнал, т. 39, № 1, 1998, с. 121–128.

[18] Пинус А. Г. Новые алгебраические инварианты для формульных подмножеств универсальных алгебр. Алгебра и логика, т. 50, № 2, 2011, с. 209–230.

[19] Пинус А. Г. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений. Успехи матем. наук, 2001, т. 56, № 4, с. 35–72.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Счётные модели полных теорий одноместных предикатов с подстановкой ограниченного порядка

Р. А. Попков

В докладе рассматриваются теории T сигнатуры $\Sigma = \langle P_0, P_1, \dots, P_k, \dots\rangle$, где $P_0, \dots, P_k, \dots$ — одноместные предикатные символы, с разным числом неглавных типов.

Взаимосвязь счётных моделей будем прослеживать с помощью следующего обобщения предпорядка Рудин – Кейслера на типах изоморфизма счётных моделей: Рассмотрим множество $\{\mathbb{M} \mid \mathfrak{M} \models T, |\mathfrak{M}| = \omega\}$ типов изоморфизма счётных моделей теории T с заданным на нём рефлексивным, транзитивным отношением $\leq$: $\mathbb{M}_i \leq \mathbb{M}_j \Leftrightarrow \mathrm{FD}(\mathbb{M}_i) \subseteq \mathrm{FD}(\mathbb{M}_j)$, и обозначим полученную систему через $\mathrm{CM}(T)$.

Функция $f : S^1(\varnothing) \to \omega + 1$ называется *функцией распределения числа реализаций типов*. Если тип $p(x) \in S^1(\varnothing)$ главный, то его число реализаций одинаково в любой счётной модели, если неглавный, то $f\,(p\,(x))$ может произвольно варьироваться в пределах от 0 до ω. Через $\mathfrak{M}(f)$ обозначим модель, реализующую неглавные типы в соответствии с функцией f.

Теорема 1. *Пусть f и g — функции распределения числа реализаций типов моделей $\mathfrak{M}(f)$ и $\mathfrak{N}(g)$ рассматриваемой теории T. Тогда $\mathfrak{M}(f) \simeq \mathfrak{N}(g)$ если и только если $f = g$.*

Будем называть типы $p(x)$ и $q(x)$ *связанными подстановкой F*, если существует такое число m, что множество $p(x) \cup q(y) \cup \{F^m(x) = y\}$ совместно. Реализация некоторого типа влечёт реализацию типа, связанного с ним. Введение подстановки F сохраняет малость и ω-категоричность.

Теорема 2. *Пусть T_1 и T_2 — счётные теории одноместных предикатов с подстановкой ограниченного порядка, тогда соотношение $\mathrm{CM}\,(T_1) \simeq \mathrm{CM}\,(T_2)$ равносильно одному из следующих условий:*

1.*Теории T_1 и T_2 имеют одинаковое, не более чем счётное, максимальное число попарно несвязанных неглавных типов;*

2.*Теории T_1 и T_2 имеют континуальное число типов и простую модель;*

3.*Теории T_1 и T_2 имеют континуальное число типов и не имеют простой модели.*

Установлено, что спектральная функция $I(T, \omega)$ теорий T одноместных предикатов с подстановкой ограниченного порядка принимает следующие значения:

1. $I(T, \omega) = 1 \Leftrightarrow$ неглавных 1-типов нет;
2. $I(T, \omega) = \omega \Leftrightarrow$ конечное число неглавных 1-типов;
3. $I(T, \omega) = 2^\omega \Leftrightarrow$ счётное либо континуальное число неглавных 1-типов.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: r-popkov@yandex.ru

Решетки конгруэнций полигонов

Д. О. Птахов

В [**2**] изучено строение унаров с модулярными и дистрибутивными решетками конгруэнций. В [**3**] описаны унарные алгебры, решетки слабых конгруэнций которых модулярны и дистрибутивны. В данной работе рассматриваются полигоны, являющиеся по определению унарными алгебрами, с модулярными и дистрибутивными решетками конгруэнций.

Напомним некоторые определения, которые можно найти в [**1**].

Пусть S – моноид. Левым *S-полигоном* (или, просто, *полигоном*) ${}_SA$ называется множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_SA$, если существуют $n \in \omega, c_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ такие, что $a = c_0, b = c_n, s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. Наибольший по включению связный подполигон полигона ${}_SA$ называется *компонентой связности* полигона ${}_SA$. *Конгруэнцией* полигона ${}_SA$ называется отношение эквивалентности на множестве A устойчивое относительно действия элементов моноида. Заметим, что совокупность всех конгруэнций полигона ${}_SA$ образует решетку относительно операций пересечения и взятия наименьшей конгруэнции, содержащей данные конгруэнции. Эту решетку будем обозначать $\mathrm{Con}({}_SA)$.

Конгруэнцию θ полигона ${}_SA$ назовем *сквозной конгруэнцией*, если существуют полигоны ${}_SB$ и ${}_SC$, элементы $b_1, b_2 \in B$ и $c_1, c_2 \in C$, такие что

$$ {}_SA = {}_SB \sqcup {}_SC,\ \langle b_1, b_2\rangle \notin \theta,\ \langle c_1, c_2\rangle \notin \theta,\ \langle b_1, c_1\rangle \in \theta,\ \langle b_2, c_2\rangle \in \theta. $$

Теорема 1. *Решетка конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ полигона ${}_SA$ модулярна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) в полигоне ${}_SA$ нет четырех попарно непересекающихся подполигонов;

2) решетки конгруэнций компонент связности полигона ${}_SA$ модулярны;

3) в решетке конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ полигона ${}_SA$ нет сквозных конгруэнций.

Теорема 2. *Решетка конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ полигона ${}_SA$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) в полигоне ${}_SA$ нет трех попарно непересекающихся подполигонов;

2) решетки конгруэнций компонент связности полигона ${}_SA$ дистрибутивны;

3) в решетке конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ полигона ${}_SA$ нет сквозных конгруэнций.

Список литературы

[1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Acts and Categories. Berlin: Walter de Gruyet. 2000.

[2] Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры. Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. 1978. Вып. 5. С. 11–44.

[3] Птахов Д. О. Решетки слабых конгруэнций унарных алгебр. Синтаксис и семантика логических систем. 2010. Вып. 3. С. 83–85.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: ptaxov@mail.ru

О примитивно связных классах регулярных полигонов

А. А. Степанова

В данной работе дается некоторое необходимое условие примитивной связанности аксиоматизируемого класса регулярных S-полигонов.

Напомним некоторые определения. Левым S-полигоном ${}_SA$ (или, просто, S-полигоном) называется множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Если для любого $a \in A$ существует гомоморфизм $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ такой, что $\varphi(a)a = a$, то S-полигон ${}_SA$ называется регулярным. Заметим, что объединение всех регулярных подполигонов S-полигона ${}_SS$ также является регулярным подполигоном, который обозначим через ${}_SR$. Аксиоматизируемый класс алгебр называется примитивно связанным, если теория этого класса примитивно связана.

В [1] приведено описание моноидов S, для которых класс регулярных S-полигонов аксиоматизируем. В [2] введено понятие примитивно связной теории. Примитивно связные теории S-полигонов рассмотрены в [3]. В этой работе доказано, что класс всех S-полигонов примитивно нормален тогда и только тогда, когда S является группой. Известно также, что для коммутативного моноида S, класс регулярных S-полигонов над которым аксиоматизируем, этот класс является примитивно связным в том и только том случае, когда R – группа.

Теорема. Пусть класс регулярных S-полигонов аксиоматизируем и примитивно связан. Тогда полугруппа R является прямоугольной связкой групп fSf, где f – идемпотент полугруппы R.

Список литературы

[1] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов. Сиб. мат. журн. 1994. Т.35. №1. С.181–193.

[2] Палютин Е. А. Примитивно связные теории. Алгебра и логика. 2000. Т.39. No.2. С.145–169.

[3] Степанова А. А. Примитивно связные и аддитивные теории полигонов. Алгебра и логика. 2006. Т.45. №3. С.300–313.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: `stepltd@mail.ru`

Об одном многообразии квазигрупп с полной системой тождеств

Л. В. Шабунин

Среди многообразий квазигрупп V, в которых положительно решается проблема равенства слов для всех конечно определенных квазигрупп из V, можно выделить многообразия, обладающие полными системами тождеств. К числу подобных многообразий относится многообразие V_0 всех квазигрупп, а также все R-многообразия квазигрупп.

Полные системы тождеств задают отношение редукции термов, удовлетворяющее условию (локального) слияния и конечной завершаемости, и могут быть получены из исходных систем при помощи алгоритма Кнута-Бендикса критической пары. В многообразиях алгебр, определяемых конечными полными системами тождеств, разрешима проблема тождественных соотношений.

В [1] рассматривается многообразие квазигрупп V_1, определяемое системой тождеств Σ:

$$(xy)/y = x, \qquad (x/y)y = x, \qquad y\backslash(yx) = x,$$
$$y(y\backslash x) = x, \qquad (x(yx))y = x.$$

Это многообразие обладает, как показано в [1], следующими двумя свойствами:

1) система Σ эквивалентна конечной полной системой из 15 тождеств Σ_1;

2) для каждой конечно определенной квазигруппы Q из V_1 положительно решается проблема равенства слов.

Теорема 1. *Для любой конечно определенной квазигруппы Q из V_1 ее элементарная теория $Th(Q)$ разрешима.*

Пусть K_0 — класс всех конечных графов, K_1 — класс всех конечно определенных квазигрупп из V_1.

Теорема 2. *Класс K_0 относительно элементарно определим в классе K_1.*

Следствие 1. *Элементарная теория $Th(K_1)$ класса K_1 наследственно неразрешима.*

Следствие 2. *Элементарная теория $Th(V_1)$ многообразия V_1 наследственно неразрешима.*

Список литературы

[1] Pedersen J. The word problem in absorbing varieties. Houston J. of Math., 1985, V. 11, N 4, P. 575–590.
[2] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
[3] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

Чувашский государственный университет, Чебоксары
E-mail: `lvsh@mail.ru`

К проблеме В. Д. Белоусова

А. Х. Табаров

В.Д.Белоусовым в [1] поставлена задача: *каковы квазигруппы или лупы, в которых все конгруэнции являются нормальными? (Проблема 20, с.221).* В конечной квазигруппе каждая конгруэнция нормальна. Существуют классы квазигрупп и луп, в которых каждая конгруэнция нормальна, например JP-квазигруппы, TS-квазигруппы (в частности, квазигруппы Штейнера и CH-квазигруппы). В.А. Щербаковым в [2] найдены необходимые и достаточные условия нормальности конгруэнции квазигруппы в терминах подгрупп мультипликативной группы квазируппы. В работе [3] доказано, что в линейной квазигруппе $(Q,\cdot)$: $xy = \varphi x + c + \psi y$, где автоморфизмы φ и ψ имеют конечные порядки, всякая конгруэнция является нормальной. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *линейной слева (справа)* над группой $(Q,+)$, если она имеет вид $xy = \varphi x + c + \beta y$ $(xy = \alpha x + c + \psi y)$, где β (соответственно α) - подстановка множества Q, $\varphi \in Aut(Q,+)$ $(\psi \in Aut(Q,+))$. Линейная слева и справа квазигруппа называется *линейной квазигруппой* [4]. В настоящем докладе для класса квазигрупп Бола, изотопных группам решена проблема В.Д.Белоусова.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *левой (правой) квазигруппой Бола*, если в ней выполняется тождество: $x(y\cdot xt) = R_{e_x}^{-1}(x\cdot yx)\cdot t$ $((tx\cdot y)x = t\cdot L_{f_x}^{-1}(xy\cdot x))$ для любых $x,y,t \in Q$, где $xe_x = x, f_x x = x$, $L_a x = ax$, $R_a x = xa$, для всех $a,x \in Q$. Левая и правая квазигруппа Бола называется *квазигруппой Бола* [1].

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1)$(Q,\cdot)$ - левая (правая) квазигруппа Бола, изотопная группе;

2)$(Q,\cdot)$ - правая (левая) линейная квазигруппа с условием $\varphi^2 = \varepsilon$ $(\psi^2 = \varepsilon)$.

Класс квазигрупп Бола, изотопных группам назовем классом *BG-квазигрупп.*

Следствие 1. *Любая BG-квазигруппа является линейной квазигруппой с условием $\varphi^2 = \psi^2 = \varepsilon$.*

Следствие 2. *Всякая конгруэнция BG-квазигруппы является нормальной конгруэнцией.*

Список литературы

[1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.

[2] Shcherbacov V. A. On Bruck-Belousov problem. Bull. Acad. Stiinte. Repub. Mold., Math. 2005, no.3, p.123–140.

[3] Табаров А. Х. Простые линейные и алинейные квазигруппы. Вестник ТГНУ, серия естественных наук, 2007, №3 (35), с.259–262.

[4] Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп. Дискретная математика, РАН, 2009, том 21, вып.1, с.39–54.

Таджикский национальный университет, каф. высшей математики, Душанбе
E-mail: tabarov2010@gmail.com

Группоиды с примитивно нормальными теориями

Н. В. Трикашная

В [**1**] дается характеризация абелевых полугрупп, конечных квазигрупп и групоидов с единицей. Известно, что примитивно нормальные алгебры, т.е. алгебры, полные теории которых примитивно нормальны, абелевы. В данной работе описывается строение примитивно нормальных квазигрупп и группоидов с единицей.

Следующие определения можно найти в [**2**]. Пусть A – алгебра языка L. Формула вида

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\Phi_0 \wedge \ldots \wedge \Phi_k),$$

где Φ_i $(i \leq k)$ – атомарные формулы языка L, называется примитивной. Для формулы $\Phi(\overline{x}, \overline{y})$ языка L и кортежа $\overline{a} \in A$, длина которого совпадает с длиной кортежа $\overline{y}$, через $\Phi(A, \overline{a})$ обозначим множество $\{\overline{b} \in A \mid A \models \Phi(\overline{b}, \overline{a})\}$. Алгебра A называется примитивно нормальной, если для любой примитивной формулы $\Phi(\overline{x}, \overline{y})$ языка L и любых кортежей $\overline{a}, \overline{b} \in A$, длины которых совпадает с длиной кортежа $\overline{y}$, множества $\Phi(A, \overline{a})$ и $\Phi(A, \overline{b})$ либо совпадают, либо не пересекаются.

Пусть $\langle A; \cdot \rangle$ – квазигруппа, $a \in A$. Введем обозначения (см. [**3**]):

$$R_a(x) = x \cdot a, \;\; L_a(x) = a \cdot x, \;\; x + y = R_a^{-1}(x) \cdot L_a^{-1}(y).$$

Ясно, что $R_a(x)$ и $L_a(x)$ – перестановки множества A, $\langle A; + \rangle$ – квазигруппа с нейтральным элементом $a \cdot a$ и равенства $r_a(x) + a = R_a^{-1}(x)$, $l_a(x) + a = L_a^{-1}(x)$ определяют перестановки $r_a(x)$ и $l_a(x)$ множества A.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – квазигруппа, $a \in A$. Квазигруппа $\langle A, \cdot \rangle$ примитивно нормальна тогда и только тогда, когда $\langle A, + \rangle$ – абелева группа и перестановки $r_a(x)$ и $l_a(x)$ являются автоморфизмами $\langle A, + \rangle$.*

Теорема 2. *Группоид с единицей $\langle A; \cdot \rangle$ примитивно нормален тогда и только тогда, когда $\langle A, \cdot \rangle$ – абелева алгебра и для любых $a, b \in A$ уравнение $a \cdot x = b$ имеет решение в $\langle A; \cdot \rangle$.*

Список литературы

[1] Степанова А. А., Трикашная Н. В. Абелевы и гамильтоновы группоиды. Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т.15.

[2] Палютин Е. А. Примитивно связные теории. Алгебра и логика. 2000. Т.39. No.2. С.145-169.

[3] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука. 1967.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: trik74@mail.ru

Ideals in distributive posets

Ts. Batueva

Let $\langle P, \leq \rangle$ be a poset and let φ be an algebraic closure operator on P such that the map $p \mapsto \varphi(p)$, $p \in P$, is an order embedding of $\langle P, \leq \rangle$ into the lattice $C(P, \varphi)$ of φ-closed subsets of P. A subset $I \subseteq P$ is an *φ-ideal*, if $I = I' \cap P$ for some $I' \in Id\big(C(P, \varphi)\big)$. Let $Id(P, \varphi)$ denote the (complete algebraic) lattice of φ-ideals of $\langle P, \leq \rangle$ ordered with respect to inclusion. It is straightforward to see that $I \in Id(P, \varphi)$ iff $\varphi(I) = I$. An ideal $I \in Id(P, \varphi)$ is *prime*, if $\downarrow x \cap \downarrow y \subseteq I$ implies that either $x \in I$ or $y \in I$ for all $x, y \in P$. The next statement generalizes a classic result on distributive lattices and fixes a wrong statement from [**5**].

Theorem 1. [**1**] *Let $\langle P, \leq \rangle$ be a poset and let φ be an algebraic closure operator on P such that the lattice $Id(P, \varphi)$ is distributive. For any $I \in Id(P, \varphi)$ and any down-directed subset $D \subseteq P$ with $I \cap D = \varnothing$, there is a prime ideal $Q \in Id(P, \varphi)$ such that $I \subseteq Q$ and $Q \cap D = \varnothing$. In particular, any φ-ideal of $\langle P, \leq \rangle$ is an intersection of prime ideals.*

Let $n > 0$, let $\langle P, \leq \rangle$ be a poset, and let φ be an algebraic closure operator on P. The poset $\langle P, \leq \rangle$ is *n-normal with respect to* φ, if any prime ideal in $Id(P, \varphi)$ contains at most n minimal prime ideals. For $n > 0$, an ideal $I \in Id(P, \varphi)$ is called *n-prime*, if for all $x_0, \ldots, x_n \in P$, $x_k \in I$ for some $k \leqslant n$ whenever $\downarrow x_i \cap \downarrow x_j \subseteq I$ for all $i < j \leqslant n$. Therefore, prime ideals are just 1-prime ideals.

We put $O(Q) = \bigcup\{x^{\perp} \mid x \in P \backslash Q\}$. The following theorem has been proved for lattices in [**3**, Theorem 3.4]. A similar statement has been also proved for finite posets in [**4**, Theorem 2.5].

Theorem 2. [**1**] *Let $\langle P, \leq \rangle$ be a meet semilattice with zero and let φ be an algebraic closure operator on P such that the lattice $Id(P, \varphi)$ is distributive. The following conditions are equivalent for a fixed $n > 0$:*

(1) *$\langle P, \leq \rangle$ is n-normal with respect to φ;*
(2) *$Q_0 \vee \ldots \vee Q_n = P$ for any distinct minimal prime ideals $Q_0, \ldots, Q_n$ of P;*
(3) *$O(Q)$ is an n-prime ideal for any prime ideal $Q \in Id(P, \varphi)$;*
(4) *$x_0^{\perp} \vee \ldots \vee x_n^{\perp} = P$ for any $x_0, \ldots, x_n \in P$ such that $x_i \wedge x_j = 0$ for all $i < j \leqslant n$.*

References

[1] Batueva C., Semenova M. Ideals in distributive posets. submitted for publication in 2011.
[2] Cornish W. H., Normal lattices. J. Auslral. Math. Soc., vol. 14 (1972), 200–215.
[3] Cornish W. H. n-Normal lattices. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 45 (1974), 48–54.
[4] Halaš R., Joshi V., Kharat V. S. On n-normal posets. Central European Journal of Mathematics, vol. 8 (2010), 985–991.
[5] Kharat V. S., Mokbel K. A. Semiprime ideals and separation theorems for posets. Order, vol. 25 (2008), 195–210.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: cendema@ngs.ru

Some corollaries of the extended criterion for bunarity

B. Sh. Kulpeshov

Let L be a countable first-order language. Everywhere in this paper we consider L-structures and assume that L contains a binary relation symbol $<$ that is interpreted as a linear ordering in these structures. A complete theory T is *binary* if any formula is equivalent to a boolean combination of formulas in at most two free variables. A subset A of M is *convex* if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$.

This paper concerns the notion of *weak o-minimality* originally studied by D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn in [**1**]. *A weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a finite union of convex sets in M. Real closed fields with a proper convex valuation ring provide an important example of weakly o-minimal structures.

Let T be a weakly o-minimal theory, M be a sufficiently saturated model of T, and let $\phi(x)$ be an arbitrary M-definable formula with one free variable.
The convexity rank of the formula $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ is defined as follows:
1) $RC(\phi(x)) \geq 1$ if $\phi(M)$ is infinite.
2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$ if there is a parametrically definable equivalence relation $E(x, y)$ such that there are $b_i, i \in \omega$ which satisfy the following:

- For every $i, j \in \omega$, whenever $i \neq j$ then $M \models \neg E(b_i, b_j)$
- For every $i \in \omega$ $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ and $E(M, b_i)$ is a convex subset of $\phi(M)$

Let $p \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say p is *binary over A* if for every $n < \omega$ and for every $b_1 < b_2 < \ldots < b_n, b'_1 < b'_2 < \ldots < b'_n \in p(M)$ such that $\mathrm{tp}(\langle b_i, b_j \rangle / A) = \mathrm{tp}(\langle b'_i, b'_j \rangle / A)$ for all $1 \leq i < j \leq n$ we have $\mathrm{tp}(\bar{b}/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}'/A)$. If $p \in S_1(\emptyset)$ is non-algebraic and p is binary over $\emptyset$, we say p is *binary*.

The following theorem is an extended criterion for binarity of $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories.

Theorem [**2**] *Let T be an $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theory. Then the following conditions are equivalent:*
(1) T is binary
(2) T has finite convexity rank
(3) Every non-algebraic type $p \in S_1(\emptyset)$ is binary.

Here we discuss some corollaries of the criterion for binarity.

References

[1] Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), 5435–5483.
[2] Kulpeshov B.Sh. Binary types in $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories. Mathematical Logic Quarterly, vol.57, No. 3, 2011, 246–255.

International Information Technology University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: kulpesh@mail.ru

Hyperalternative Semigroups

Yu. M. Movsisyan, T. A. Hakobyan

Let us recall that *hyperidentities* are the second order formulae of the following type:

$$\forall X_1,\ldots,X_m \forall x_1,\ldots,x_n \;\; (\omega_1=\omega_2)\,, \qquad (*)$$

where ω_1 and ω_2 are the words (terms) in the alphabet of the functional variables $X_1,\ldots,X_m$ and the objective variables $x_1,\ldots,x_n$. However, the hyperidentities are usually presented without universal quantifiers, i.e. $\omega_1=\omega_2$. A hyperidentity $\omega_1=\omega_2$ is said to be satisfied in an algebra $(Q;\Sigma)$ if the equality remains true when any functional variable X_i is replaced by any operation of the same arity from Σ and any objective variable x_j is replaced by any element of Q [**1**].

Let $Q(\cdot)$ be a semigroup. The following function is called a binary polynomial (term function) of the given semigroup $Q(\cdot)$:

$$f(x,y)=z_1^{\varepsilon_1}z_2^{\varepsilon_2}\ldots z_n^{\varepsilon_n}\,,$$

where $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\in\mathbb{N}$, $z_1,z_2,\ldots,z_n\in\{x,y\}$ and $z_i\neq z_{i+1}$.

The set of all binary polynomials of the given semigroup $Q(\cdot)$ is denoted by Q^2_{pol}.

We say that in the semigroup $Q(\cdot)$ the hyperidentity $(*)$ is polynomially satisfied, if in the binary algebra $\left(Q,Q^2_{pol}\right)$ this hyperidentity is satisfied. In paper [**2**] it is proved that the class of semigroups polynomially satisfying the hyperidentity of associativity

$$X(x,X(y,z))=X(X(x,y),z)$$

forms a finite–base variety (and a base containing about 1000 identities is presented there). In paper [**3**] the base of this variety containing four identities is presented (also see [**4, 5, 6**]). In this talk we present a more general result, namely we characterize semigroups polynomially satisfying one of the following hyperidentities of alternativity:

$$X(x,X(x,z))=X(X(x,x),z),$$
$$X(x,X(y,y))=X(X(x,y),y).$$

Such semigroups are called hyperalternative (or superalternative).

References

[1] Movsisyan Yu. M. Introduction to theory of algebras with hyperidentities. Yerevan State University Press, Yerevan, 1986 (Russian).

[2] Deneck K., Koppitz J. Hyperassociative varieties of semigroups. Semigroup Forum, 49, 41–49 (1994).

[3] Polák L. On hyperassociativity. Algebra Universalis, 36, 363–378 (1996).

[4] Polák L. All Solid Varieties of Semigroups. Journal of Algebra 219, 421–436 (1999).

[5] G.Paseman, *A small basis for Hyperassociativity, preprint*, Berkeley 1993.

[6] Movsisyan Yu. M., Hakobyan T. A. Associative Nontrivial Hyperidentities in Semigroups. Journal of Contemporary Mathematical Analysis,Vol.46,No.3,121-130 (2011).

Yerevan State University, Yerevan, Armenia
E-mail: yurimovsisyan@yahoo.com

Faithful representation and equational theory of regular algebras and their projection lattices

M. V. Semenova

This work is joint with Christian Herrmann, Micheale Susan Roddy, and Martin Ziegler.

The talk is intended to present some structural results on existence varieties of (von Neumann) regular algebras and their projection lattices. Among these results are a Birkhoff-type theorem as well as some decidability results.

M. V. Semenova was supported by the Presidential Grant Council of Russian Federation, Doctors of Sciences Support grant no. MD-2587.2010.1 and Scientific Schools Support grant no. NSh-3669.2010.1, by the Józef Mianowski Fund and the Fund for Polish Science.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: `semenova@math.nsc.ru`, `udav17@gmail.com`

A reduction theorem for prevarieties

M. Semenova, A. Zamojska-Dzienio

An abstract class of algebraic systems of a given signature is a *(finitary) prevariety*, if it is closed under taking substructures and (finite) Cartesian products. A finitary prevariety consisting of finite members of some class is called a *pseudo-quasivariety*.

V. A. Gorbunov proved a so-called reduction theorem for pseudo-quasivarieties. More specifically, he has proved that the prevariety lattice of any pseudo-quasivariety of a signature with finitely many relation symbols is an inverse limit of finite lower bounded lattices. In this talk, we provide a more general setting for that reduction theorem proving it for prevarieties and finitary prevarieties without putting any restriction on signature. Gorbunov's reduction theorem follows then as a corollary.

We prove that the lattice of subprevarieties of a prevariety is isomorphic to an inverse limit of complete subsemilattice lattices of semilattices endowed with a distributive binary relation, while the lattice of finitary subprevarieties of a finitary prevariety is isomorphic to an inverse limit of subsemilattice lattices of semilattices endowed with a distributive binary relation.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; Warsaw University of Technology, Warsaw (Poland)
E-mail: semenova@math.nsc.ru, udav17@gmail.com; A.Zamojska@elka.pw.edu.pl

On Morley ranks of theories with limit models over types

S. V. Sudoplatov

Recall [**1**] (originally [**2, 3**]) that a countable model $\mathfrak{M}$ of a (complete) theory T is *limit* (over a type $p \in S(T)$) if it is not prime over tuples and $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{M}(\bar{a}_n)$, where $(\mathfrak{M}(\bar{a}_n))_{n\in\omega}$ is an elementary chain of prime models over tuples $\bar{a}_n$ (and $\mathfrak{M} \models p(\bar{a}_n)$), $n \in \omega$.

Theorem. *If a theory T has a limit model over a type then, for the theory T, its Morley rank is infinite,* $\mathrm{MR}(x \approx x) \geq \omega$.

The estimation in Theorem is exact: theories of free directed pseudoplanes with ordered colorings [**1**] (originally [**4, 5**]) as well as their ω-stable modifications [**6**] with limit models over types have the Morley rank ω.

For the proof of Theorem we use

Proposition. *Let $p(\bar{x})$ be a complete type of small theory T. The following conditions are equivalent:*

(1) *there exists a limit model over p;*

(2) *the isolating relation I_p on a set of realizations of p in a (any) model $\mathfrak{M} \models T$, realizing p, is non-symmetric;*

(3) *the semi-isolating relation* SI_p *on a set of realizations of p in a (any) model $\mathfrak{M} \models T$, realizing p, is non-symmetric and, in this case, there exist realizations $\bar{a}$ and $\bar{b}$ of p in $\mathfrak{M}$ such that the type* $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ *is principal and $\bar{b}$ doesn't semi-isolate $\bar{a}$.*

The work is supported by RFBR grant No. 09-01-00336-a, and by the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools via project NSh-3669.2010.1.

References

[1] Sudoplatov S. V. The Lachlan problem. Novosibirsk : NSTU, 2009. 336 p. [in Russian]

[2] Sudoplatov S. V. Complete theories with finitely many countable models. I. Algebra and Logic. 2004. Vol. 43, No. 1. P. 62–69.

[3] Sudoplatov S. V. Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories. J. Math. Sciences. 2010. Vol. 169, No. 5. P. 680–695.

[4] Pillay A. A note on one-based theories. Notre Dame : University of Notre Dame, 1989. 5 p. (Preprint).

[5] Sudoplatov S. V. On powerful types in small theories. Siberian Math. J. 1990. Vol. 31, No. 4. P. 629–638.

[6] Sudoplatov S. V. On limit models over types in the class of ω-stable theories. News of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2010. Vol. 3, No 4. P. 114–120. [in Russian]

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

IV. Секция «Теория вычислимости»

Нетривиальность для экспоненциального времени и слабая сводимость

К. Амбос-Шпис, Т. И. Бакибаев

Обычно, чтобы показать, что множество не вычислимо за полиномиальное время, показывают, что оно полное или сложное для класса, содержащего невычислимые за полиномиальное время задачи. В 1995 году Лютц предложил некоторое обобщение данного подхода, представив новую, слабую полноту, которая все еще показывает невычислимость за полиномиальное время. В то время как множество A называется сложным для класса C, если все множества из класса C сводятся ко множеству A, Лютц предложил называть множество A слабо сложным, если значительная часть класса C сводится ко множеству A. Если, к тому же, $A \in \mathrm{C}$, то множество называется слабо полным. Для экспоненциального класса сложности $\mathrm{E} = \mathrm{DTIME}(2^{lin})$ Лютц формализовал эту идею, представив некоторую меру для этого класса, и назвал подкласс E незначительным, если мера этого подкласса в E равна нулю.

Мы представляем и исследуем новое понятие слабой полноты, которое называется нетривиальностью. Это понятие является обобщением слабой полноты по Лютцу, и в то же время намного проще для понимания. Кроме того, нетривиальность может быть рассмотрена как самое обобщенное понятие слабой полноты для E.

В данном докладе мы представляем нетривиальность относительно слабой сводимости (tt,k-tt,b-tt,T).

Гейдельбергский университет, Гейдельберг, Германия; КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: `timurbakibayev@gmail.com`

О конструктивизируемости булевой алгебры $\mathfrak{B}(\omega)$ с выделенным автоморфизмом

Н. А. Баженов, Р. Р. Тухбатуллина

Данная работа является продолжением работы [**1**], в которой было начато исследование автоустойчивости булевой алгебры $\mathfrak{B}(\omega)$, обогащенной автоморфизмом.

Пусть $\mathfrak{A}^* = \langle \mathfrak{A}, \varphi \rangle$ — счетная булева алгебра с выделенным автоморфизмом. Подмножество B носителя $\mathfrak{A}$ будем называть *атомной орбитой*, если существует b, являющееся атомом $\mathfrak{A}$, такое, что $B = \{\varphi^n(b), \varphi^{-n}(b) \mid n \in \omega\}$. *Характером* $\mathfrak{A}^*$ будем называть следующее множество:

$$\chi(\mathfrak{A}^*) = \{\langle n, k \rangle \mid n, k > 0 \; \& \; \exists^{\geqslant k} \text{ попарно различных атомных орбит мощности } n \text{ в } \mathfrak{A}^*\}.$$

Предложение. *Пусть $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ и $\mathfrak{C}^* = \langle \mathfrak{C}, \psi \rangle$ — булевы алгебры с выделенными автоморфизмами, такие, что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}(\omega)$, $\mathfrak{B}^*$ содержит β бесконечных атомных орбит, $\mathfrak{C}^*$ содержит γ бесконечных атомных орбит. Тогда $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}^*$ тогда и только тогда, когда $\chi(\mathfrak{B}^*) = \chi(\mathfrak{C}^*)$ и $\beta = \gamma$.*

Теорема. *Пусть $\mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle$ — булева алгебра с выделенным автоморфизмом, такая, что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega)$. Тогда $\mathfrak{B}^*$ имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\chi(\mathfrak{B}^*)$ — *конечное множество,*
(2) *существует вычислимая функция* $f\colon \omega \times \omega \to \omega \setminus \{0\}$, *такая, что:*
  (a) $(\forall x)(f(x, 0) = 1)$,
  (b) $(\forall x)(\forall s)(f(x, s)$ *делит* $f(x, s+1))$,
  (c) *для любого* x *существует* $\lim_s f(x, s)$,
  (d) $(\forall n)(|\chi(\mathfrak{B}^*) \cap (\{n\} \times \omega)| = |\{x \mid \lim_s f(x, s) = n\}|)$.

Множество $K \subseteq (\omega \setminus \{0\})^2$ будем называть *характером*, если для любых n и $k > 0$, из того, что $\langle n, k+1 \rangle \in K$, следует то, что $\langle n, k \rangle \in K$. Определим следующие классы множеств:

$$\mathrm{X} = \{K \subseteq \omega^2 \mid K \text{ — характер}\},$$

$$\mathrm{X}_c = \{K \in \mathrm{X} \mid \text{существует вычислимая булева алгебра с выделенным автоморфизмом } \mathfrak{B}^* = \langle \mathfrak{B}, \varphi \rangle, \text{ такая, что } \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega) \text{ и } \chi(\mathfrak{B}^*) = K\}.$$

Следствие.

(1) $\mathrm{X}_c \subset \mathrm{X} \cap \Sigma^0_2$,
(2) $\mathrm{X}_c \cap \Sigma^0_1 = \mathrm{X} \cap \Sigma^0_1$,
(3) *для любой не в.п. m–степени* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cap (\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}_c) \neq \varnothing$,
(4) *для любой Σ^0_2 m–степени* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cap \mathrm{X}_c \neq \varnothing$.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-3606.2010.1) и РФФИ (грант 11-01-00236).

Список литературы

[1] Тухбатуллина Р. Р. Автоустойчивость булевой алгебры $\mathfrak{B}_\omega$, обогащенной автоморфизмом. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. Т. 10 (2010), N 3. С. 110-118.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: nickbazh@yandex.ru

Спектры предельной монотонности Σ_2^0-множеств

И. Ш. Калимуллин, М. Х. Файзрахманов

Доклад посвящен изучению классов тьюринговых степеней, относительно которых предельно монотонно заданное Σ_2^0-множество. Такие классы называются спектрами предельной монотонности. Установлено, что нетривиальные спектры не могут содержать непустых Π_1^0-классов. Также показано, что каждый такой спектр содержит все GH_1-степени, а именно, такие тьюринговые степени $\mathbf{h}$, что $(\mathbf{0}' \cup \mathbf{h})' = \mathbf{h}'$, и содержит некоторую низкую степень. Кроме того, получено полное описание множеств, спектры которых имеют наименьший скачок.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `marat.faizrahmanov@ksu.ru`

О степенях автоматных преобразований k–полных последовательностей

Н. Н. Корнеева

Будем рассматривать бесконечные последовательности над конечным алфавитом Σ. Последовательность x называется полной [**1**], если для любого $k \in \mathbb{N}$ каждый блок длины k из символов алфавита Σ встречается в последовательности x. Вычислимая последовательность x называется эффективно полной, если каждый блок длины k из символов алфавита Σ встречается в последовательности x на начальном отрезке длины $f(k)$ для некоторой вычислимой функции f $(f: \mathbb{N} \to \mathbb{N})$.

Пусть $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ – некоторый морфизм. Последовательность, полученную из полной последовательности с помощью k–равномерного морфизма [**3**], будем называть k–полной. Очевидно, что каждая k–полная последовательность является km–полной для любого $m \in \mathbb{N}$.

Степень автоматных преобразований, содержащую полную последовательность, называется полной [**2**]. Степень, содержащую k–полную последовательность, назовем k–полной. При определении степеней автоматных преобразований используется сводимость, определяемая при помощи конечных автоматов Мили (см. [**1**]).

Справедливы следующие свойства для любого $k \geq 1$:

1) над каждой k–полной степенью существует полная степень;

2) под каждой полной степенью существует k–полная степень, которая не является n–полной (при $n \not\equiv 0$ $(mod\ k)$).

Теорема. *Монадическая теория $MT\langle \mathbb{N}, <, x\rangle$ k–полной последовательности x разрешима тогда и только тогда, когда x получается из эффективно полной последовательности при помощи k–равномерного морфизма.*

Определения монадической теории бесконечной последовательности можно найти, например, в [**3**].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00399-а).

Список литературы

[1] Рейна Г. Степени автоматных преобразований. Кибернетический сборник. 1977. № 14. С.95-106.

[2] Gordon H. G. Complete Degrees of Finite-State Transformability. Information and Control. 1976. Т. 32. С. 169–187.

[3] Мучник Ан. А., Притыкин Ю. Л., Семенов А. Л. Последовательности, близкие к периодическим. Успехи мат. наук. 2009. Т. 64. № 5(389). С. 21–96.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: `Natalia.Korneeva@ksu.ru`

Сложность распознавания теории конечной системы

И. В. Латкин

На Мальцевских чтениях 2010 года автором были анонсированы две теоремы (см. тезисы на сайте http://math.nsc.ru/conference/malmeet/10/abstracts.pdf). Автор вынужден признать, что первая из них скорее всего не верна в такой сильной формулировке (для всякого $k > 0$), а верна лишь при $k = 1$, то же самое можно сказать и о той части теоремы 2, где формулируется результат об относительной сложности распознавания теории $Th(\mathfrak{B})$ булевых алгебр.

Тем не менее, та часть теоремы 2, в которой приводится нижняя оценка абсолютной сложности распознавания теории $Th(\mathfrak{B})$ не только остаётся в силе, но и может быть обобщена до следующей

Теорема. *Пусть в сигнатуре алгебраической системы $\mathfrak{A}$ имеется символ отношения эквивалентности (в частности, это может быть символ равенства), а сама система $\mathfrak{A}$ состоит из конечного числа элементов, из которых по крайней мере два не эквивалентны. Тогда, для всякого наперёд заданного $\varepsilon > 0$ и подходящей константы E, зависящей от кодировки имеем: (абсолютная) сложность $ACS(Th\mathfrak{A})$ распознавания теории $Th(\mathfrak{A})$ — не меньше $\exp(2, E \cdot |X|^\delta)$ при $\delta = (3 + \varepsilon)^{-1}$.*

Другими словами, для всякой детерминированной машины Тьюринга P, решающей задачу о принадлежности формул к теории $Th(\mathfrak{A})$, существует бесконечно много формул φ, на которых P работает не менее, чем $\exp(2, E \cdot |c\varphi|^\delta)$ шагов, где E — константа, зависящая от кодировки формул и программ машин Тьюринга символами рабочего алфавита машины P, cD — код объекта D, а $|D|$ — его длина.

ВКГТУ
E-mail: lativan@yandex.ru

Теоретико-порядковая характеризация (θ)-непрерывных функций и их свойства

А. А. Лялецкий

В [**1**] было предложено понятие (θ)-непрерывности для функций, действующих на биполных частично упорядоченных множествах. Используя метод Маклейна пополнения частично упорядоченных множеств до полных решеток, показывается, что это понятие (θ)-непрерывности можно следующим образом распространить на класс функций, действующих на произвольных частично упорядоченных множествах. Для каждой функции $f\colon A_0 \to A_1$, где A_0 и A_1 - частично упорядоченные множества, естественным образом определяется бинарное отношение $\overline{f} \subseteq \overline{A_0}\times\overline{A_1}$, такое, что $f \subseteq \overline{f}$, где $\overline{A_0}$ и $\overline{A_1}$ являются пополнениями Макнейла A_0 и A_1 соответственно; тогда функция f в том и только том случае считается (θ)-непрерывной, если, во-первых, бинарное отношение $\overline{f}$ является функциональным и, во-вторых, $\overline{f}$ (θ)-непрерывна как функция, действующая из полной решетки $\overline{A_0}$ в полную решетку $\overline{A_1}$.

Несмотря на то, что для функций вида $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ понятие (θ)-непрерывности эквивалентно обычному понятию неперывности функции в евклидовой топологии, в общем случае непосредственное применение понятия (θ)-непрерывности функции оказывается затруднительным даже для установления базовых свойств (θ)-непрерывных функций. Для того, чтобы преодолеть это препятствие, строится теоретико-порядковая характеризация класса всех (θ)-непрерывных функций с помощью оригинального понятия конуса, предлагаемого автором. Используя эту характеризацию, удается просто и коротко установить следующие свойства (θ)-непрерывных функций:

- *класс всех (θ)-непрерывных функций замкнут относительно операции композиции функций*;

- *если бинарная функция $f\colon A_0\times A_1 \to A$, где A_0, A_1 и A - частично упорядоченные множества, (θ)-непрерывна по каждому их своих аргументов, то она является (θ)-непрерывной как функция, действующая из $A_0\times A_1$ в A*;

- *для каждой полной решетки L “операция” аппликации α_L: $[L \to L]_{(\theta)}\times L \to L$, где $[L \to L]_{(\theta)}$ - частично упорядоченное множество всех (θ)-непрерывных унарных операций на L, является (θ)-непрерывной.*

В заключение отметим, что указанные свойства (θ)-непрерывных функций играют важную роль с точки зрения обеспечения возможности применения метода Койманса для построения нетривиальных моделей нетипизированной теории λ на базе понятия (θ)-непрерывности функции.

Список литературы

[1] Лялецкий А. А. О некоторых свойствах теоретико-множественных моделей теории Лямбда. Математические машины и системы, 4: 10-22, 2008.

Киевский Национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев (Украина)
E-mail: foraal@mail.ru

Главные нумерации в иерархии Ершова

С. С. Оспичев, С. Ю. Подзоров

В работе рассматриваются вычислимые нумерации семейств Σ_a^{-1}-множеств, a – клиниевское обозначение конструктивного ординала. Построены различные примеры конечных семейств вычислимо перечислимых множеств, обладающих главной Σ_a^{-1}-вычислимой нумерацией. Также в работе анонсируется

Теорема. *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство Δ_2^0-множеств и для некоторого направленного вычислимого подсемейства $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ вычислимо перечислимых множеств объединение $\bigcup \mathcal{G}$ не принадлежит $\mathcal{F}$. Тогда для любой Δ_2^0-вычислимой нумерации ν семейства $\mathcal{F}$ существует вычислимая нумерация β семейства $\mathcal{G}$ такая, что $\beta \nleqslant \nu$.*

Новосибирский Государственный Университет; Институт Математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: `ospichev@gmail.com`; `podz@math.nsc.ru`

Генерическая сложность Десятой проблемы Гильберта

А. Н. Рыбалов

Десятая проблема Гильберта в современной формулировке звучит следующим образом: найти алгоритм, который по любому диофантовому уравнению определяет, разрешимо ли оно в целых числах. В 1970 году Ю.В.Матиясевич, основываясь на работах М.Дэвиса, Дж.Робинсон и Х.Патнема, доказал, что такого алгоритма не существует.

А. Мясников, И. Капович, В. Шупп и В. Шпильрайном в 2003 году предложили генерический подход к алгоритмическим проблемам. В рамках этого подхода алгоритмическая проблема рассматривается не для всего множества входов (в худшем случае), а для множества почти всех входов.

Пусть I – множество всех входов, а I_n – множество входов размера n. Для любого подмножества $S \subseteq I$ определим следующую последовательность

$$\rho_n(S) = \frac{|S \cap I_n|}{|I_n|},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Асимптотической плотностью S назовем следующий предел (если он существует)

$$\rho(S) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(S).$$

Множество S называется *генерическим*, если $\rho(S) = 1$ и *строго генерическим*, если последовательность $\rho_n(S)$ экспоненциально быстро сходится к 1, т.е. существуют константы $0 < \sigma < 1$ и $C > 0$ такие, что $1 - \rho_n(S) < C\sigma^n$ для всех n.

Любое диофантово уравнение можно представить в виде $P(x_1, \ldots, x_m) = 0$, где P – многочлен с целыми коэффициентами. Будем представлять многочлены с помощью так называемых арифметических схем. *Арифметическая схема* от переменных $x_1, \ldots, x_m$ состоит из конечного числа промежуточных переменных $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ и присваиваний (одно присваивание для каждой промежуточной переменной) вида $x_i = x_j * x_k$, где $j, k < i$ и $* \in \{+, -, \times\}$, либо вида $x_i = x_j + 1$ или $x_i = x_j - 1$, где $j < i$. Переменные $x_1, \ldots, x_m$ называются входными переменными схемы, а последняя промежуточная переменная – выходной переменной схемы. Размер схемы – это число присваиваний. Любая такая схема естественным образом представляет многочлен от входных переменных, и, наоборот, любой многочлен с целыми коэффициентами можно задать подходящей арифметической схемой. Будем отождествлять диофантово уравнение $P(x_1, \ldots, x_m) = 0$ с представлением многочлена P с помощью некоторой арифметической схемы.

Теорема. *Не существует разрешимого строго генерического множества диофантовых уравнений, на котором Десятая проблема Гильберта разрешима.*

Омский филиал Института Математики СО РАН, Омск
E-mail: alexander.rybalov@gmail.com

ω-в.п. случайные действительные числа

Р. Р. Фаттахов

Одним из наиболее изученных понятий случайной последовательности, в частности, случайного действительного числа (д. ч.), является случайность по Мартин-Лёфу. Также подробно изучались свойства д. ч., удовлетворяющих более сильным определениям случайности – слабо 2-случайности и случайности по Демуту. В [1] дано определение и изучены свойства разностной случайности, которое позволяет определить собственный подкласс случайных по Мартин-Лёфу д. ч., являющееся также непосредственным расширением классов слабо 2-случайых и случайных по Демуту чисел. Соответствующие определения и обозначения можно найти в [1].

В определении тестов для разностной случайности вместо в. п. множеств конечных бинарных строк используются 2-в. п. множества. При обобщении на случай n-в. п. тестов ($n \geq 2$) оказывается, что д. ч., удовлетворяющие всем 2-в. п. тестам, также проходят все n-в. п. тесты.

В нашей работе по аналогии с [1] определяются ω-в.п. тесты и выясняется соотношение возникающего класса ω-в.п. случайных чисел с классом случайных по Демуту чисел. Тестом Демута называется последовательность $\{W_{f(i)}\}_{i\in\omega}$, где f – ω-в.п. функция и $\lambda([W_{f(i)}]^{\prec}) \leq 2^{-i}$ для любого i.

Определение. Пусть $\{R_j\}_{j\in\omega}$ – нумерация всех ω-в.п. множеств из [2]. *ω-в. п. тестом назовем последовательность $\{V_i\}_{i\in\omega}$, где $V_i = [R_{f(i)}]^{\prec}$ (здесь $R_{f(i)}$ – ω-в. п. беспрефиксное множество конечных бинарных строк, f – вычислимая функция), $\lambda V_i \leq 2^{-i}$ для всех i.*

Действительное число $A \in 2^{\omega}$ – ω-в.п. случайно, если для любого ω-в. п. теста $\{V_i\}_{i\in\omega}$ $A \notin \cap_i V_i$.

Обозначим через $\omega\, R$ множество всех ω-в.п. случайных д.ч., а также примем обозначение из [1], где через $Diff R$ и $Demuth$ обозначены множества всех разностно-случайных и случайных по Демуту чисел, соответственно.

Теорема. *Любому тесту Демута $\{W_{f(i)}\}_{i\in\omega}$ соответствует ω-в.п. тест $\{V_i\}_{i\in\omega}$ такой, что $[W_{f(i)}]^{\prec} = V_i$ для любого i.*

Следствие 1. *Любое ω-в.п. случайное число является случайным по Демуту, т. е. верно следующее включение $\omega\, R \subseteq Demuth$.* Верно ли обратное включение остается открытым вопросом.

Следствие 2. *$\omega\, R \neq Diff R$.*

Следствие 3. *Тьюринговая степень любого ω-в.п. случайного действительного числа является обобщенно низкой.*

Список литературы

[1] Johanna N. Y., Franklin Keng Meng Ng. Difference Randomness. Proceedings of the AMS, vol. 139 (2011), p.345–360. 1989. V. 139. P. 345–360.

[2] Арсланов М. М. Иерархия Ершова. Казань: Казанский Государственный Университет, 2007.

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Казань
E-mail: radik.fattakhov@gmail.com

The theory of lists and Σ-definability

A. A. Gavryushkina

In the classical first order logic, domains of structures are not necessarily ordered. But the order property is quite usual for objects in Computer Science. In 1985 S. S. Goncharov, Yu. L. Ershov, and D. I. Sviridenko suggested a theory of lists. They considered two-sorted structures (lists algebras) consisting of a basic set S and a set of lists I_S (lists are ordered collections of elements from $S \cup I_S$) with natural relations and operations such as membership relation, head and tail operations etc., and provided a minimal set of axioms which are needed to construct a computability theory over such structures.

In the recent work of A. A. Malyh and A. V. Mantsivoda, the lists theory was successfully used for logical formalization of iterators which are classical objects of Computer Science. However, the lists theory has not been widely developed and it needs to be more investigated for further work in this direction.

Here we present some research in this area. In particular, we have proved that recursively definable functions are Σ-definable in the lists algebras.

Irkutsk State University, Irkutsk (Russia)
E-mail: gavryushkina@gmail.com

On Boolean algebras of ω-regular languages

A. S. Konovalov, V. L. Selivanov

Boolean algebras (BA's) are of principal importance for several branches of logic and computation theory. Accordingly, characterization of naturally arising BA's attracts attention of many researchers (several examples may be found in [**2, 3, 4, 1**]).

In automata theory, people consider many classes of languages which form BA's. In this work we characterize some of these BA's up to isomorphism. If $\mathbb{B}$ is a BA and α an ordinal, let $F_\alpha(\mathbb{B})$ be the α-th iterated Frechet ideal of $\mathbb{B}$ [**1**], $\mathbb{B}^{(\alpha)} = \mathbb{B}/F_\alpha(\mathbb{B})$ and $\mathbb{B}' = \mathbb{B}^{(1)}$. For a finite alphabet Σ, let $\mathcal{R}_\Sigma$ (resp. $\mathcal{A}_\Sigma$) denote the BA of all ω-regular (resp. all ω-regular aperiodic) languages over Σ. A typical result of this paper looks as follows:

Theorem. *1. For any Σ with at least two symbols, $\mathcal{R}_\Sigma$ is an atomic BA such that $\mathcal{R}'_\Sigma$ is a countably infinite atomless BA.*

2. For any alphabet Σ with at least two symbols, $F_0(\mathcal{A}_\Sigma) \subset F_1(\mathcal{A}_\Sigma) \subset \cdots$, $\mathcal{A}_\Sigma^{(n)}$ is an atomic BA for each $n < \alpha$, and $\mathbb{A}_\Sigma^{(\omega)}$ is a countable atomless BA.

From well-known facts [**1**] it follows that assertions 1 — 2 characterize the corresponding BA's up to isomorphism.

The analogous results for regular languages were obtained earlier in collaboration with V. L. Selivanov [**5**].

References

[1] Goncharov S. S. Countable Boolean Algebras and Decidability. Novosibirsk, Scientific Book, 1996 (in Russian, there is an English Translation).

[2] Hanf W. The boolean algebra of logic. Bull. Amer.Math. Soc., 20, No 4 (1975), 456–502.

[3] Lempp S., Peretyat'kin M., Solomon M. The Lindenbaum algebra of the theory of the class of all finite models. Journal of Mathematical Logic 2, No 2 (2002), 145–225.

[4] Selivanov V. L. Positive structures. In: *Computability and Models, Perspectives East and West*, S. Barry Cooper and Sergei S. Goncharov, eds., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003, 321–350.

[5] Selivanov V., Konovalov A. Boolean Algebras of Regular Languages. *DLT 2011, LNCS 6795*, G. Mauri and A. Leporati, eds., Springer, Heidelberg, 2011, 386–396.

Institute of Informatics Systems, Novosibirsk (Russia)
E-mail: `jack@sibmail.ru; vseliv@iis.nsk.su`

Positive numberings in the Ershov hierarchy

M. Mustafa

There are families of c. e. sets which have computable positive numberings but not Friedberg numberings [1],[2] as well as families which have minimal numberings but no positive numberings [3]. There are also many structural conditions for a family of c. e. sets to have computable positive numbering.

Question 17 of [4] asks whether, for any $n \geq 1$, families of Σ_n^{-1} sets with positive numberings have also decidable numberings. We show in fact that this is not so for every level (finite or infinite) of the Ershov hierarchy, so at each level of the Ershov hierarchy there are infinite families without Friedberg numberings, but with positive numberings.

References

[1] Ershov Yu. L. Computable enumerations. Algebra and Logic, 1968, v. 7, no. 5, p.330–346.

[2] Marchenkov S. S. The minimal numerations of systems of recursively enumerable sets. Sov. Math. Dokl., 1971, v. 12, p.843–845.

[3] Badaev S. A. On minimal enumerations. Siberian Adv. Math. 1992, v. 2, no. 1, p.1–30.

[4] Badaev S., Goncharov S. The theory of numberings: open problems. Computability Theory and its Applications. (P. A. Cholak, S. Lempp, M. Lerman, and R. A. Shore, editors), American Mathematical Society, Providence, vol. 257,2000, p. 23–38.

Al-Farabi Kazakh Nationality University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: manat.mustafa@kaznu.kz

Degree spectra and conservative extensions of abstract structures

A. A. Soskova, I. N. Soskov, S. V. Vatev

The degree spectrum of an abstract structure is a measure of its complexity. We consider a relation between abstract structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, possibly with different signatures and $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$, called conservative extension. We give a characterization of this relation in terms of definability by computable Σ_n formulae on these structures. We show that this relation provides a finer complexity measure than the one given by degree spectra. As an application, we receive that the n-th jump of a structure and its Marker's extension are conservative extensions of the original structure. We present a jump inversion theorem for abstract structures. We prove that for every natural numbers n and k and each complex enough structure $\mathfrak{A}$, there is a structure $\mathfrak{B}$, such that the definable by computable Σ_n formulae sets on $\mathfrak{A}$ are exactly the definable by computable Σ_k formulae on $\mathfrak{B}$.

Supported by BNSF Grant No. D002-258/18.12.08.

Sofia University, Sofia (Bulgaria)
E-mail: asoskova@fmi.uni-sofia.bg

Complexity for probability logic with quantifiers over propositions

S. O. Speranski

We generalize the standard language for reasoning about probabilities proposed in [**1**] by allowing meta-variables in propositions under the probability sign together with quantifiers bounding these variables. Since, for a fixed *probability structure* (cf. [**1**] for the definition), each propositional formula can be viewed as a Bernulli random variable, our treatment may be interpreted as quantification over such entities.

Let $Prop$ and $\mathcal{X}$ be infinite computable collections of *propositional symbols* and *parameters* (or *variables*), respectively. Assume the logical connectives are $\wedge$ and $\neg$. Propositional formulas are introduced in the usual way. Analogously *parametric propositional formulas* are built up from $Prop \cup \mathcal{X}$ using logical connectives.

Let us denote by $\mathcal{QPL}$ the generalized language that we'll be interested in. The notion of *$\mathcal{QPL}$-term* is defined by induction: (1) for a parametric propositional formula φ, the expression $\mu(\varphi)$ is a $\mathcal{QPL}$-term; (2) if $f(x_1, \ldots, x_n)$ is a polynomial with rational coefficients and $t_1, \ldots, t_n$ are $\mathcal{QPL}$-terms, then the expression $f(t_1, \ldots, t_n)$ is a $\mathcal{QPL}$-term. For any two $\mathcal{QPL}$-terms t_1 and t_2, $t_1 \leqslant t_2$ is a *$\mathcal{QPL}$-atom*. Next the set of *$\mathcal{QPL}$-formulas* is the smallest set $For_{\mathcal{QPL}}$ containing all $\mathcal{QPL}$-atoms, subject to the constraint: if Φ and Ψ are in $For_{\mathcal{QPL}}$ and α is in $\mathcal{X}$, then $\neg\Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\forall\alpha\, \Phi$ and $\exists\alpha\, \Phi$ are in $For_{\mathcal{QPL}}$. The related notions (e. g., $\forall$- and $\exists$-formulas) are introduced by analogy with the well-known definitions for the first-order logic.

The semantics of quantifier-free $\mathcal{QPL}$-sentences is provided in [**1**]. It can be easily extended to all $\mathcal{QPL}$-sentences if we treat quantifiers $\forall$ and $\exists$ (semantically) as infinite conjunctions and disjunctions ranging over all propositional formulas.

Notice, the validity problem for quantifier-free $\mathcal{QPL}$-sentences is known to be decidable [**1**]. However, our first theorem establishes, in particular, the undecidability of the validity problem for the $\exists\forall$-fragment of $\mathcal{QPL}$.

Theorem 1. *The validity problem for $\exists\forall$-sentences in $\mathcal{QPL}$ is undecidable, though it is decidable for $\forall\exists$-sentences in $\mathcal{QPL}$.*

Moreover, the complexity for the general validity problem is not arithmetical.

Theorem 2. *The validity problem for $\mathcal{QPL}$-sentences is Π^1_1-complete.*

References

[1] Fagin R., Halpern J. Y, Megiddo N. A Logic for Reasoning about Probabilities. Information and Control, No. 87 (1990), p. 78–128.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: `katze.tail@gmail.com`

Functions limitwise monotonic relative the Kleene's system of ordinal notations

M. V. Zubkov, A. N. Frolov

Let $\mathcal{O}$ be a set of constructive ordinals and let O be a Kleene's system of ordinal notations.

Definition. *A function $F : \omega \longrightarrow \mathcal{O}$ is called X-limitwise monotonic relative the Kleene's system of ordinal notations O if there is X-computable function $f : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ such that*

– for all $x \in \omega$ there is finite limit $\lim\limits_{s\to\infty} f(x, s)$;

– $\lim\limits_{s\to\infty} |f(x, s)|_{\mathcal{O}} = F(x)$;

– $(\forall s \in \omega)[f(x, s) \leq_O f(x, s+1)]$.

Previous definition expanded the class of limitwise monotonic functions.

Let $S_{\mathcal{L}}$ and $F_{\mathcal{L}} = F^0_{\mathcal{L}}$ are successors and block relations on a linear order $\mathcal{L}$. Let $\alpha > 0$ be an ordinal. If $\alpha = \beta + 1$, then $F^{\alpha}(x, y) \Leftrightarrow F_{\mathcal{L}/F^{\beta}}([x]_{\mathcal{L}/F^{\beta}}, [y]_{\mathcal{L}/F^{\beta}})$, there $[x]_{\mathcal{L}/F^{\beta}}$, $[y]_{\mathcal{L}/F^{\beta}}$ are factorclasses of x and y by $F^{\beta}_{\mathcal{L}}$. If α is limit ordinal then $F^{\alpha}(x, y) \Leftrightarrow (\exists \beta < \alpha)[F^{\beta}(x, y)]$.

The following theorem generalized theorem proved in [**1**].

Theorem. *Let $\mathcal{L}$ be a linear order such that $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathcal{Q}} (E(q)^* + 1 + G(q))$ there $E, G : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{O}$ and let be U an unary predicate marked elements of liner orders which corresponds identity element in the following formula $\sum\limits_{q\in\mathcal{Q}} (E(q)^* + 1 + G(q))$. Also, we suppose that functions E and G bounded by a constructive ordinal α. The following conditions are equivalents:*

1) $\mathcal{L}$ has Δ^0_2 copy with Δ^0_2 relations $S_{\mathcal{L}}$ and $F^{\beta}_{\mathcal{L}}$ $(\beta \leq \alpha)$ and predicate U is Δ^0_2.

2) $\mathcal{L}$ has Δ^0_2 copy with Δ^0_2 relations $F^{\beta}_{\mathcal{L}}$ $(\beta \leq \alpha)$, and predicate U is Δ^0_2.

3) Functions E and G are $\emptyset'$-limitwise monotonic relative the Kleene's system of ordinal notations;

4) $E(q) = \liminf\limits_{s\to\infty} |e(q, s)|_{\mathcal{O}}$, $G(q) = \liminf\limits_{s\to\infty} |g(q, s)|_{\mathcal{O}}$ for all $q \in \mathcal{Q}$ and computable functions $e, g : \mathcal{Q} \times \omega \longrightarrow \omega$.

5) $\mathcal{L}$ has a computable copy with $F^{\beta}_{\mathcal{L}} \in \Pi^0_1$ $(\beta \leq \alpha)$ and computable predicate U.

References

[1] Frolov A. N., Zubkov M. V. Increasing η-representable degrees. Mathematiëal Logic Quarterly. 2009. V. 55. N. 6. P. 561–564.

Kazan Federal University, Kazan (Russia)
E-mail: Maxim.Zubkov@ksu.ru; Andrey.Frolov@ksu.ru

V. Секция «Теория колец»

Ниль-радикалы колец эндоморфизмов вполне разложимых абелевых групп

А. В. Буданов

В теории колец эндоморфизмов абелевых групп изучаются соотношения между свойствами данной абелевой группы и свойствами ее кольца эндоморфизмов. При изучении строения кольца эндоморфизмов группы, обладающей данным набором свойств, возникает задача описания его радикалов, прежде всего его ниль-радикала и радикала Джекобсона. Проблему описания элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов примарной абелевой группы поставил Пирс [**4**]. Радикал Джекобсона и ниль-радикал колец эндоморфизмов групп без кручения изучал Крылов [**1**]. Обзор результатов, полученных в данном направлении, содержится в монографии [**2**].

Результатом проведенного исследования является описание первичного радикала, радикала Левицкого и ниль-радикала кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения. Решенные задачи входят в проблемы, сформулированные в [**3**].

Введем ряд обозначений. Через $t(A)$ будем обозначать тип однородной группы без кручения A. Пусть G — вполне разложимая абелева группа без кручения. Зафиксируем ее разложение в прямую сумму групп ранга 1: $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$. Известно, что в этой ситуации кольцо эндоморфизмов $E(G)$ группы G изоморфно кольцу R всех сходящихся по столбцам $I \times I$ матриц $[\alpha_{ij}]$ с элементами $\alpha_{ij} \in Hom(A_j, A_i)$. Обозначим $\nu(R)$ множество таких матриц $\alpha = [\alpha_{ij}] \in R$, что если $t(A_i) = t(A_j)$, то $\alpha_{ij} = 0$ и существует натуральное число $n = n(\alpha)$ такое, что если элементы $\alpha_{i_1 j_1}, \alpha_{i_2 j_2}, \ldots, \alpha_{i_k j_k}$ отличны от нуля и $t(A_{i_1}) \leq t(A_{j_2}), t(A_{i_2}) \leq t(A_{j_3}), \ldots, t(A_{i_{k-1}}) \leq t(A_{j_k})$, то $k < n$. Сумму всех нильпотентных идеалов кольца K обозначим $N_0(K)$, $P(K)$ — его первичный радикал, $L(K)$ — его радикал Левицкого и $N(K)$ — его ниль-радикал. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Во введенных выше обозначениях* $\nu(R) = N_0(R) = P(R) = L(R) = N(R)$.

Список литературы

[1] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения. Матем. сб., 95(137):2(10) (1974), С. 214–228.

[2] Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.

[3] Мисяков В. М. Некоторые вопросы теории абелевых групп. Всероссийская конференция по математике и механике. Тезисы докладов. Томск: Томский государственный университет, 2008. С. 55.

[4] Pierce R. S. Homomorphisms of primary Abelian groups. Topics in Abelian groups (Proc. Sympos.,New Mexico State Univ., 1962), Scott, Foresman and Co., Chicago, Ill., 1963. P. 215–310.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: alexandrbud@mail.ru

Обратимые элементы в кольцах вычетов квадратичных полей

А. С. Кривова

В [**1**] была показана важность изучения обратимых элементов колец вычетов колец целых подполей круговых полей (эти подполя называются также абелевыми полями). Важнейшим классом таких полей являются квадратичные поля, для которых в [**2**] найдены экспоненты мультипликативных групп колец вычетов колец целых.

В данной работе продолжено изучение обратимости элементов колец вычетов по простому натуральному модулю колец целых квадратичных полей. Отметим, что в силу результатов из [**1**] это позволяет получает информацию об обратимости элементов колец вычетов по любому натуральному модулю.

Теорема 1. *Пусть p, q — простые числа. Обозначим $A = I/q^\alpha I$ — кольцо вычетов кольца I по модулю q^α, где I — кольцо целых квадратичного поля $Q(\sqrt{p})$.*

Тогда

(1) *Если $p = q$, то количество обратимых элементов $= q^{2\alpha} - q^{2\alpha-1}$.*

(2) *Если $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, то количество обратимых элементов $= q^{2\alpha} - 2q^{2\alpha-1} + q^{2\alpha-2}$.*

(3) *Если $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, то количество обратимых элементов $= q^{2\alpha} - q^{2\alpha-2}$.*

Список литературы

[1] Алеев Р. Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. Матем. труды, 3, № 1(2000), С. 3–37.

[2] Алеев Р. Ж. Числа Хигмана конечных групп, Матем. труды, 3, № 2(2000), С. 3–28.

ЮУрГУ, ММ-521, Челябинск
E-mail: leska.nastya@mail.ru

Наследственно чистые ассоциативные коммутативные алгебры над дедекиндовыми кольцами

Л. М. Мартынов

Изучается введенное в [1] понятие чистоты для ассоциативных алгебр. Приведем необходимые определения. Пусть R — произвольное дедекиндово кольцо. Под модулем будем понимать левый унитарный R–модуль, а под алгеброй — ассоциативную R–алгебру, под идеалом алгебры или кольца — двусторонний идеал. Будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{L}$ — решетка всех многообразий алгебр; $\mathcal{P}$ — атом решетки $\mathbf{L}$; P — максимальный идеал кольца R; Z_P — алгебра с нулевым умножением, полученная из модуля R/P заданием нулевого умножения; $\mathcal{Z}_P = varZ_P$; $F_P = R/P$; $\mathcal{F}_P = varF_P$. Напомним, что атомы решетки $\mathbf{L}$ исчерпываются многообразиями вида $\mathcal{Z}_P$ для любого P и $\mathcal{F}_P$ для всех P конечного индекса в R . Посредством $\mathcal{P}(A)$ обозначается $\mathcal{P}$–вербал алгебры A. Подалгебра S алгебры A называется *чистой*, если $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(A) \cap S$ для любого $\mathcal{P}$. Алгебра называется *наследственно чистой* (HP–алгеброй), если любая ее подалгебра является чистой.

Алгебру с нулевым умножением назовем *элементарной абелевой*, если она либо нулевая, либо является прямой суммой алгебр вида Z_P. Алгебру A условимся называть *специальной*, если она либо нулевая, либо любая ее однопорожденная подалгебра является прямой суммой конечного числа полей F_i $(i = 1, 2, ..., s)$, являющихся конечными расширениями соответственно простых полей типа F_{P_i}, при этом $P_1, P_2, ..., P_s$ — попарно различные максимальные идеалы и всякий раз, когда идеал P_i имеет конечный индекс, справедлив изоморфизм $F_i \cong F_{P_i}$.

Основным результатом работы является

Теорема. *1) Алгебра, совпадающая со своим квадратом, является HP–алгеброй тогда и только тогда, когда она специальна.*

2) Нильалгебра является HP–алгеброй тогда и только тогда, когда она есть элементарная абелева алгебра.

3) Коммутативная алгебра является HP–алгеброй тогда и только тогда, когда она есть прямая сумма элементарной абелевой алгебры и специальной алгебры.

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр. Универс. алгебра и ее приложения: Труды межд. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.

Омский государственный педагогический университет, г. Омск
E-mail: `mart@omsk.edu; l.m.martynov@yandex.ru`

О янгиане странной супералгебры Ли

В. А. Стукопин

Хорошо известно как важна для приложений в физике конструкция янгиана и его квантового дубля, как в случае простых алгебр Ли (см. [**1**]), так и в случае супералгебр Ли (см. [**2**]). Здесь мы рассматриваем, так называемый, "скрученный" янгиан, который вводим как квантование скрученной алгебры полиномиальных токов на простом примере. Именно, рассматривается янгиан странной супералебры Ли типа Q_2 (см. [**3**]).

Пусть $\mathfrak{sl}(n,n)$, как обычно, супералгебра Ли матриц размера $2n \times 2n$ с нулевым суперследом. Мы будем использовать множество целых чисел $I = \{-n, -n+1, \cdots, -1, 1, \cdots, n\}$ вместо $\{1, 2, \cdots 2n\}$ для нумерации строк и столбцов матриц из $\mathfrak{sl}(n,n)$. Пусть также $\mathfrak{g} = A(n-1, n-1)$ – супералгебра Ли, получаемая факторизацией супералгебры $\mathfrak{sl}(n,n)$ по центру. Рассмотрим автоморфизм 2-го порядка $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, определённый на матричных единицах $E_{ij} = (\delta_{i,j})_{i,j \in I}$ ($\delta_{i,j}$ — символ Кронекера) формулой: $\sigma(E_{ij}) = E_{-i,-j}$ (см. [**3**]). Пусть $\mathfrak{g}^j = Ker(\sigma - (-1)^j E), \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$. Продолжим автоморфизм σ до автоморфизма $\tilde{\sigma} : \mathfrak{g}((u^{-1})) \to \mathfrak{g}((u^{-1}))$ лорановских рядов со значениями в $\mathfrak{g}$ по формуле: $\tilde{\sigma}(x \cdot u^j) = \sigma(x)(-u)^j$. Рассмотрим следующую тройку Манина (см. [**1**], [**3**]) $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$: $(\mathfrak{P} = \mathfrak{g}((u^{-1}))^{\tilde{\sigma}}, \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{g}[u]^{\tilde{\sigma}}, \mathfrak{P}_2 = (u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]])^{\tilde{\sigma}})$. Определим билинейную форму $< \cdot, \cdot >$ на $\mathfrak{P}$ по формуле: $< f, g >= res(f(u), g(u))du$, где $res(\sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot u^k) := a_{-1}$, $(\cdot, \cdot)$ – инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$. Опишем квантование (деформацию в классе супералгебр Хопфа) (см. [**1**], [**3**]) этой тройки Манина в случае n=2. Отметим, что специализацию получающегося объекта в точке общего положения мы называем скрученным янгианом, а а его фактор по центру естественно назвать янгианом странной супералгебры Ли Q_2. Следующая теорема является основным результатом заметки.

Теорема 1. Янгиан $Y(Q_2)$ изоморфен ассоциативной супералгебре Хопфа с единицей над С, порожденной образующими $\tilde{h}_m, k_m, x_m^{\pm}, \hat{x}_m^{\pm}, m \in Z_+$, удовлетворяющими следующей системе определяющих соотношений:

$$[\tilde{h}_m, \tilde{h}_n] = 0; \quad [k_m, \tilde{h}_n] = 0; \quad \tilde{h}_{m+n} = [x_m^+, x_n^-];$$
$$[\hat{x}_m^+, x_{2k}^-] = [x_{2k}^+, \hat{x}_m^-] = k_{m+2k}; \quad [\hat{x}_m^+, x_{j,2k+1}^-] = [x_{i,2k+1}^+, \hat{x}_{j,m}^-] = 0;$$
$$[\tilde{h}_{k+1}, x_l^{\pm}] = [\tilde{h}_k, x_{l+1}^{\pm}] + (\tilde{h}_k x_l^{\pm} + x_l^{\pm} \tilde{h}_k); \quad [\tilde{h}_{k+2}, \hat{x}_l^{\pm}] = [\tilde{h}_{i,k}, \hat{x}_{l+2}^{\pm}] + (h_k \hat{x}_l^{\pm} + \hat{x}_l^{\pm} h_k),$$
$$[x_{k+1}^{\pm}, x_l^{\pm}] = [x_k^{\pm}, x_{l+1}^{\pm}] + (x_k^{\pm} x_l^{\pm} + x_l^{\pm} x_k^{\pm}), \quad [k_{m+2}, x_l^{\pm}] = [k_m, x_{l+2}^{\pm}] + (k_m x_l^{\pm} + x_l^{\pm} k_m),$$
$$[x_{k+1}^{\pm}, \hat{x}_l^{\pm}] = [x_k^{\pm}, \hat{x}_{l+1}^{\pm}] + (x_k^{\pm} \hat{x}_l^{\pm} + \hat{x}_l^{\pm} x_k^{\pm}), \quad [\hat{x}_{2k+1}^{\pm}, x_l^{\pm}] - [\hat{x}_{2k-1}^{\pm}, x_{l+2}^{\pm}] = 0$$

Эта работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00671-а, а также федеральной целевой программы «Научные и научно- педагогические кадры инновационной России» в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт номер П1116).

Список литературы

[1] Drinfeld V. Quantum groups. Proc. Int. Cong. Math., Vol. 1.(1988), 789–820.

[2] Стукопин В. А. О дубле янгиана супералгебры Ли типа A(m,n). Функцион. анализ и его прилож., **40**, No. 2 (2006), c.86–90.

[3] Stukopin V. Quantum Double of Yangian of strange Lie superalgebra, Drinfeld approach. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, Vol.3 (2007), p.1–12.

ДГТУ (Ростов-на-Дону); ЮМИ и ВНЦ РАН (Владикавказ)
E-mail: stukopin@mail.ru

Проективный центр и коммутант абелевых групп

А. Р. Чехлов

Все группы предполагаются абелевыми. Напомним, что если R — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b; $\mathrm{Id}\, R = \{\pi \in R \,|\, \pi^2 = \pi\}$. Далее $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A, а $Pr(A) = \mathrm{Id}\,(E(A))$. Если A — p-группа, $a \in A$ и $o(a) = p^k$, то $e(a) = k$.

Проективным центром (кратко, *P-центром*) группы A назовем следующую ее подгруппу $PZ(A) = \{a \in A \,|\, [\xi, \eta]a = 0$ для всех $\xi, \eta \in Pr(A)\}$. Подгруппу $P(A) = \langle [\varphi, \psi]A |\, \varphi, \psi \in Pr(A)\rangle$ назовем *проективным коммутантом* (кратко, *P-коммутантом*) группы A.

Теорема. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы A и $B \neq 0$. Тогда $P(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *если B — непериодическая группа или $r(D_0) > 1$, то $P(A) = P(B) \oplus D$;*

2) *если B — периодическая группа и $D_0 = 0$, то $P(A) = P(B) \oplus (\bigoplus\limits_{p \in \Pi} D_p) \oplus (\bigoplus\limits_{p \in K} D_p[p^{m_p}])$, где $\Pi = \{p \in P |\, r(D_p) > 1\}$, $K = \{p \in P |\, r(D_p) = 1$ и $B_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(b) \,|\, b \in B_p\}$;*

3) *если B — периодическая группа и $r(D_0) = 1$, то $P(A) = P(B) \oplus t(D)$.*

1. Если A — неограниченная сепарабельная p-группа, то $PZ(A) = 0$ и $P(A) = A$.

2. Пусть A — сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ — множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Тогда $PZ(A) = \sum\limits_{t \in C(A)} A(t)$, где $C(A)$ — множество всех таких типов $t \in \Omega(A)$, что $r(A(t)) = 1$, т.е. $PZ(A)$ совпадает с суммой всех вполне инвариантных прямых слагаемых ранга 1 группы A. А $P(A)$ совпадает с суммой тех прямых слагаемых A_i ранга 1, для которых в дополнительном прямом слагаемом есть прямое слагаемое ранга 1 типа $\leqslant t(A_i)$.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: cheklov@math.tsu.ru

On embedding of dendriform algebras into Rota—Baxter algebras

V. Yu. Gubarev, P. S. Kolesnikov

Rota—Baxter identity defining Rota—Baxter operator was introduced by Glen Baxter in 1960 in fluctuation theory. By definition, a Rota—Baxter operator R of weight λ on an algebra A is a linear map on A such that

$$R(x)R(y) = R(xR(y) + R(x)y + \lambda R(xy)), \quad x, y \in A,$$

where λ is a scalar from the base field.

For the present time, numerous connections of Rota—Baxter operators with other areas of mathematics are found. The latter include quantum field theory, Young—Baxter equations, operads, Hopf algebras, number theory etc.

Dendriform dialgebras were defined by J.-L. Loday in 1999 in his study of algebraic K-theory. Moreover they occur to be Koszul-dual to dialgebras. In 2001, J.-L. Loday and M. Ronco introduced a generalization of dialgebras—trialgebras and dual to them dendriform trialgebras.

M. Aguiar in 2000 [**1**] found that an associative algebra with a Rota—Baxter operator R of weight zero relative to operations $a \prec b = aR(b)$, $a \succ b = R(a)b$ is a dendriform dialgebra. In 2002, K. Ebrahimi-Fard generalized this fact to the case of Rota—Baxter algebras of arbitrary weight, obtaining both dendriform dialgebra and dendriform trialgebra.

The natural question: Whether an arbitrary dendriform di- or trialgebra can be embedded into its universal enveloping Rota—Baxter algebra was solved positively in 2007 by K. Ebrahimi-Fard and L. Guo [**2**] for free dendriform algebras only.

To solve the problem for any dendriform dialgebra (or trialgebra), C. Bai, L. Guo and K. Ni introduced in 2010 a notion of $\mathcal{O}$-operators, a generalization of Rota—Baxter operators, and proved that every dendriform di- or trialgebra can be explicitely obtained from an algebra with an $\mathcal{O}$-operator.

In 2010, Y. Chen and Q. Mo proved that any dendriform dialgebra over a field of characteristic 0 can be embedded into an appropriate Rota—Baxter algebra of weight zero [**3**] using the Gröbner—Shirshov bases technique for Rota—Baxter algebras.

In a recent work [**4**] the results of Aguiar and Ebrahimi-Fard were extended to the case of arbitrary operad of Rota—Baxter algebras and dendriform dialgebras and trialgebras.

In the present work, we solve the following problem. Given a binary operad $\mathcal{P}_{\mathrm{Var}}$ governing a variety Var of Ω-algebras (Ω is a set of binary operations), we define what is a di- or tri-Var-dendriform algebra and construct a Rota—Baxter Ω-algebra from the variety Var such that the initial dendriform di- or trialgebra embeds into this Rota—Baxter algebra in the sense of Aguiar and Ebrahimi-Fard (for trialgebras, we demand $\lambda \neq 0$).

The idea of this construction is the following. Suppose $(A, \prec, \succ, \cdot)$ is an (associative) dendriform trialgebra. Then the direct sum of two isomorphic copies of A, the space $\hat{A} = A \oplus A'$, endowed with a binary operation

$$a * b = a \prec b + a \succ b + a \cdot b, \quad a * b' = (a \succ b)', \quad a' * b = (a \prec b)', \quad a' * b' = (a \cdot b)'$$

for $a, b \in A$, is an associative algebra. Moreover, the map $R(a') = a$, $R(a) = -a$ is a Rota—Baxter operator of weight 1 on $\hat{A}$. The embedding of A into $\hat{A}$ is given by $a \mapsto a'$, $a \in A$.

Theorem. *A is a tri-*Var*-dendriform algebra if and only if $\hat{A}$ belongs to* Var.

Corollary 1.[c.f.[**3**]] *Every di-*Var*-dendriform algebra embeds into its universal enveloping Rota—Baxter* Var*-algebra of weight $\lambda = 0$.*

Corollary 2. *Every tri-*Var*-dendriform algebra embeds into its universal enveloping Rota—Baxter* Var*-algebra of weight* $\lambda \neq 0$*.*

The work is supported by the Federal Target Grant “Scientific and educational staff of innovation Russia” for 2009–2013 (contracts 02.740.11.5191, 02.740.11.0429, 14.740.11.0346).

References

[1] Aguiar M. Pre-Poisson algebras. Lett. Math. Phys. 54 (2000), 263–277.

[2] Ebrahimi-Fard K., Guo L. Rota-Baxter algebras and dendriform algebras. Jour. of Pure and Appl. Algebra. Vol. 212, N 2 (2008), 320–339.

[3] Chen Y., Mo Q. Embedding dendriform algebra into its universal enveloping Rota-Baxter algebra. Proc. Amer. Math. Soc. 2011.

[4] Bai C., Bellier O., Guo L., Ni X., Splitting of operations, Manin products, and Rota—Baxter operators. arXiv:1106.6080v1 [math.QA] (June 2011).

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia); Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vsevolodgu@mail.ru; pavelsk@math.nsc.ru

On connection of zero-divisor graphs of algebras

I. M. Isaev, A. S. Kuzmina

Let R be a Φ-algebra for some associative commutative ring Φ with identity element.

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of an algebra R is the graph whose vertices are all nonzero zero-divisors of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$.

In [**1**], it was proved that the zero-divisor graph of any associative commutative ring with identity is connected. In [**2, 3**], connection of the zero-divisor graph of an arbitrary associative ring was shown.

In the present thesis, some results related to connection of zero-divisor graphs of algebras have been proved.

Theorem 1. *Let R be a Φ-algebra such that $(ab)c = 0$ iff $a(bc) = 0$ for any $a, b, c \in R$. Then $\Gamma(R)$ is connected.*

Corollary. *The zero-divisor graph of an associative ring is connected.*

Theorem 2. *Let R be an alternative Φ-algebra. Then $\Gamma(R)$ is connected.*

References

[1] Anderson D. F., Livingston P. S. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring. Journal of Algebra (1999) **217(2)**, 434–447.

[2] Kuzmina A. S. On structure of rings with planar zero-divisor graphs. Izvestiya AGU (Altai State University) (2009) **1**, 17–25 (in Russian).

[3] Redmond S. P. The zero-divisor graph of a noncommutative ring. Int. J. Commut. Rings (2002) **1(4)**, 203–211.

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul
E-mail: `isaev@uni-altai.ru; akuzmina1@yandex.ru`

On finite basis property of T–ideals in a certain variety of right alternative metabelian algebras.

A. Kuz'min

Let $\mathcal{F}$ be a field of characteristic $\mathrm{char}(\mathcal{F}) \neq 2$. An algebra $\mathcal{A}$ over $\mathcal{F}$ is called *right alternative metabelian* if $\mathcal{A}$ satisfies the identities $(x, y, z) = -(x, z, y)$, $(xy)(zt) = 0$, where $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ is the *associator* of the elements x, y, z.

Recall that the variety $\mathfrak{M}$ of algebras is said to have *the Specht property* (or to be *Spechtian*) if each T–ideal of free $\mathfrak{M}$–algebra is finitely based.

The basic results concerning the Specht property problem for varieties of right alternative metabelian algebras can be found in references [1–5].

We consider the variety $\mathfrak{M}$ of right alternative metabelian algebras over $\mathcal{F}$ satisfying the identities $(x \circ y) \circ z = 0$, $\big[(x, yz, x), t\big] = 0$, where $x \circ y = xy + yx$ and $[x, y] = xy - yx$ are *the Jordan product* and *the commutator*, respectively.

Let $\mathcal{A}$ be the free $\mathfrak{M}$–algebra; $f \in \mathcal{A}$ be a homogeneous polynomial of degree d; $(f)^{\mathrm{T}}$ be T–ideal generated by f. We denote by $\lambda(f)$ the minimal non-negative integer such that $(f)^{\mathrm{T}} \cap \big(\mathcal{A}\big)^{d+\lambda(f)} = 0$ and put $\lambda(f) = \infty$ if such an integer does not exist.

The main result of the paper is the following

Theorem. T–*ideal* $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)^{\mathrm{T}}$ *of free* $\mathfrak{M}$–*algebra is finitely based if and only if there exists a number* n *such that* $\lambda(f_n) \geqslant 2$.

The Theorem has a number of corollaries.

Let $\mathcal{V}$ be a subvariety of all algebras $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ such that for any natural n each n–generated subalgebra of $\mathcal{A}$ is nilpotent of step not more than $n + 2$.

Corollary 1. *The variety* $\mathcal{V}$ *is an almost Spechtian variety of topological rank* 4.

Corollary 2. *The variety* $\mathcal{V}$ *is the unique almost Spechtian subvariety of* $\mathfrak{M}$.

Corollary 3. *The Grassmann* $\mathfrak{M}$–*algebra of rank* 2 *generates the infinitely based subvariety of* $\mathfrak{M}$ *defined by the following system of identities:*

$$(x, (y_1, \ldots, (y_{n-1}, (y_n, x, y_n), y_{n+1}), \ldots, y_{2n-1}), x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

References

[1] Belkin V. P. Varieties of right alternative algebras. Algebra and Logic **15**:5 (1976), 309–320.

[2] Isaev I. M. Finite–dimensional right alternative algebras that do not generate finitely based varieties. Algebra and Logic **25**:2 (1986), 86–96.

[3] Medvedev Yu. A. Finite basis theorem for varieties with a two–term identity. Algebra and Logic **17**:6 (1978), 458–472.

[4] Pchelintsev S. V. On identities of right alternative metabelian Grassmann algebras. Journal of Mathematical Sciences **154**:2 (2008), 230–248.

[5] Kuz'min A. M. On Spechtian varieties of right alternative algebras. Journal of Mathematical Sciences **149**:2 (2008), 1098–1106.

Institute of Mathematics and Statistics, University of Sao Paulo (Brazil)
E-mail: `amkuzmin@ya.ru; kuzmin@ime.usp.br`

On varieties of rings in which isomorphic zero-divisor graphs of finite rings give isomorhic rings

A. S. Kuzmina, Yu. N. Maltsev

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of an associative ring R is the graph whose vertices are all nonzero zero-divisors of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$ [**1**].

It is interesting the following problem: to describe all varieties of associative rings such that for any finite rings R, S from them an isomorphism of $\Gamma(R)$ and $\Gamma(S)$ implies an isomorphism of the rings R and S. In this thesis, we study such varieties.

Let $T(\mathfrak{M})$ be an ideal of identities of a vatiety $\mathfrak{M}$. For a prime number p let $N_{0,p}$ be a ring with p elements and with trivial multiplication.

Main results of this thesis are two following theorems.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{M}$ be a variety of associative rings such that $\mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$ for some prime number p. If $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ implies $R \cong S$ for any finite rings $R, S \in \mathfrak{M}$ then any subdirectly irreducible finite ring $A \in \mathfrak{M}$ satisfies one of following conditions:*

(1) $A \cong \mathbb{Z}_p$;

(2) A is a nilpotent ring and $q^2A = (0)$ for some prime number q.

Theorem 2. *Let $\mathfrak{M}$ be a variety of associative rings such that $\mathbb{Z}_2 \in \mathfrak{M}$. If $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ implies $R \cong S$ for any finite rings $R, S \in \mathfrak{M}$ then any subdirectly irreducible finite ring $A \in \mathfrak{M}$ of order 2^t $(t > 0)$ satisfies one of following conditions:*

(1) $A \cong \mathbb{Z}_2$;

(2) A is a nilpotent commutative ring and $2x = 0$, $x^2 = 0$ for all $x \in A$.

Theorem 3. *Let $\mathfrak{M}$ be a variety of associative rings such that $xy + f(x, y) \in T(\mathfrak{M})$ where $f(x, y)$ is a sum of monomials of degree ≥ 3. Then $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ implies $R \cong S$ for any finite rings $R, S \in \mathfrak{M}$ if and only if $\mathfrak{M} \subseteq var\ N_{0,p_1} \vee \ldots \vee var\ N_{0,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$ where $p, p_1, \ldots, p_s$ are prime numbers and $(p_i, p) \neq (3, 2)$ for $i \leq s$.*

References

[1] Redmond S. P. The zero-divisor graph of a noncommutative ring. Int. J. Commut. Rings (2002) **1(4)**, 203–211.

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul
E-mail: akuzmina1@yandex.ru; maltsevyn@gmail.com

VI. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

О проверке свободности конечно порожденных полугрупп регулрных языков

С. А. Афонин

Рассмотрим конечно порожденную полугруппу регулрных языков относительно конкатенации. Задача проверки свободности состоит в отыскании алгоритма, который по заданному конечному множеству $\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ регулярных языков определяет, существуют ли между элементами $\mathbf{E}$ нетривиальные соотношения.

Язык L называется *простым*, если уравнение $L = XY$ имеет только тривиальные решения, *кодом*, если он свободно порождает полугруппу L^*, и *префиксным кодом*, если он не содержит собственных префиксов своих слов. Известно, что префиксные коды порождают свободную полугруппу языков относительно конкатенации. Простые языки могут удовлетворять нетривиальным соотношениям, например, $\{\varepsilon + a^2\}\{\varepsilon + a\} = \{\varepsilon + a\}^3$. Два кода удовлетворяют нетривиальному соотношению тогда и только тогда, когда они коммутируют [**2**]. В случае, когда $n = 1$ задача изветна как *свойство конечной степени* регулярного языка [**1**]. В общем случае неизвестно, существует ли алгоритм проверки того, что заданное множество языков порождает свободную полугруппу. В докладе рассматривается частный случай задачи, когда элементами множества $\mathbf{E}$ являются конечные языки.

Список литературы

[1] Hashiguchi K. Limitedness theorem on finite automata with distance functions. Journal of computer and system sciences, 24:233–244, 1982.

[2] Ratoandromanana B. Codes et motifs. ITA, 23(4):425–444, 1989.

НИИ механики МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва
E-mail: `serg@msu.ru`

Σ-спецификации реального времени, реализуемые смешанным вычислителем

В. Н. Глушкова

Используем для спецификации систем реального времени теорию из иерархизированных Δ_0- формул [1] с ограниченными кванторами над списками, заданными произвольной КС-грамматикой $G = (S, V, P)$. Правила из P иерархизируют пространство действий, их состояний и имеют вид:

$$S \to \{Act\}^+; Act \to R_1 \mid \cdots \mid R_k; R_i \to St_{i_1} \cdots St_{i_n}; St_{i_j} \in V, 1 \le i \le k, 1 \le j \le n.$$

Здесь $V-$ множество нетерминальных символов; R_i- имена действий (предикатов сигнатуры теории). Правила для состояний St определяются спецификой R_i, в них всегда входит "время" t, которое может принимать дискретные значения из множества натуральных чисел или "интервальные"($<>$) с включением концов сегмента. По правилам G можно построить граф зависимости действий аналогично графам, конструируемым при верификации систем методом "model checking". Основу теории составляют $\Delta_0 T-$ формулы вида:

$$(\forall x_1 \dot{\in} t_1) \ldots (\forall x_m \dot{\in} t_m)(y_1 \prec z_1) \ldots (y_p \prec z_p)\varphi(\bar{x}, \bar{t}) \to \psi(\bar{x}, \bar{t}),$$

где φ (ψ) конъюнкция атомных формул вида p, $\tau_1 = \tau_2$ (r, $f = \tau$) или их отрицаний; $p, r, f-$ предикатные и функциональный символы, τ, τ_1, τ_2- термы. Здесь $y_j, z_j \in (\bar{x}, \bar{t})$, $1 \le j \le p$; $\prec$, $\dot{\in}-$ отношения "левее" и принадлежности элемента списку или его транзитивное замыкание.

В предикаты, зависящие от времени, входит два вида времени: дискретное $n-$ шаг вычисления по графу и "реальное" время - длительность действия на данном шаге вычисления. При ограничении на n по ацикличной, нётеровой, конфлюентной теории можно построить модель, в которой допускаются термы сорта "время". При моделировании параллельных процессов в системах реального времени абстрагируются от относительных скоростей выполнения процессов, поэтому с переменной t не всегда можно связать конкретное значение, в таких случаях время представляется типизированной переменной. Поскольку в теории разрешается использовать встроенные арифметические операции, то логический интерпретатор должен допускать вычисления при неполностью заданных входных значениях, как в концепции смешанных вычислений. На построенной модели за полиномиальное время можно проверить любую $\Delta_0 T-$ формулу в отличие от формул TCTL-логик, проверка которых основывается на построении временных регионов и зон, число которых растет экспоненциально от количества часов.

Список литературы

[1] Goncharov S. S., Ershov Yu. L., Sviridenko D. I. Semantic programming. Information processing. 1986. V. 11, № 10. P. 1093–1100.

ДГТУ, Ростов-на-Дону
E-mail: `lar@sfedu.ru`

Векторный алгоритм обучения нейронной сети

В. П. Добрица, А. В. Еремин

Несмотря на множество исследований посвященных разработке алгоритмов обучения многослойных нейронных сетей, проблема эффективного обучения остается актуальной.

Рассмотрим многослойную нейронную сеть прямого распространения, у которой на выходе имеется более одного нейрона. Выходной сигнал такой сети можно рассмотреть как некоторый вектор. Ошибку выходного вектора в этом случае можно разбить на две составляющие: отклонение полученного вектора от желаемого результата на некоторый угол,а так же ошибку отличия длины ожидаемого и полученного выходных векторов.

Представляемый нами подход предполагает корректировку весовых коэффициентов сети направленную на комплексную минимизацию ошибки всего выходного вектора в два этапа: (1) отклонение по длине и (2) отклонение по углу. Формулы корректировки весовых коэффициентов по каждому из этапов получаются по методу градиентного спуска.

Как показали предварительные испытания, описанный алгоритм в ряде случаев дает более высокие результаты скорости сходимости процесса обучения по сравнению с алгоритмом обратного распространения ошибки. Для испытаний использовалась полносвязная сеть прямого распространения сигнала фиксированной структуры (3-6-6-3). Обучение проводилось до момента достижения каждым из выходов сети заранее заданной точности. Первоначальные значения весовых коэффициентов устанавливались в малые значения. Описанная сеть обучалась алгоритмом обратного распространения ошибки и алгоритмом, отмеченным выше, на одинаковых наборах данных. Результаты проверок показали, что во многих тестовых ситуациях рассмотренный алгоритм обучает сеть за меньшее количество итераций.

Анализируя экспериментальные результаты по количеству итераций выполняемых для достижения момента настройки весовых коэффициентов с заданной точностью, была замечена большая скорость сходимости векторного алгоритма в сравнении с алгоритмом обратного распространения ошибки. В зависимости от выбранной скорости обучения разница в скорости сходимости может различаться от нескольких процентов до нескольких десятков и даже сотен процентов.

Таким образом, можно сделать вывод, что полученные результаты свидетельствуют о целесообразности использования данного алгоритма обучения нейронныйх сетей с несколькими выходными нейронами.

Юго-Западный государтвенный университет, Курск
E-mail: dobritsa@mail.ru

Libretto: язык программирования как средство логического объектного моделирования

А. А. Малых, А. В. Манцивода

Нами разрабатывается Libretto - язык, который ориентирован на логическое объектное моделирование, система типов которого имеет логическую интерпретацию в рамках дескриптивной логики OODL [**1, 2**]. Сам Libretto строится на элементах списочных надстроек в смысле теории GES [**3**], за счет чего представление скалярных и векторных значений является однородным. Процедурно базовой конструкцией Libretto является итератор, работающий на списках. Libretto ориентирован на интеграцию формального представления и обработки знаний со средой массовой разработки ПО. Libretto – язык ООП, но с богатыми функциональными возможностями. Libretto выстроен как гибкая формальная система, которая может быть легко адаптирована под конкретные предметные области и выступать как средство разработки предметно-ориентированных языков.

В Libretto используется концепция единого объектного пространства и система глобального именования, внутри которой могут существовать конкретные реализации, отображающие объекты в различные системы (в логические элементы, в базы данных, компилироваться в исходные коды на различных языках программирования и т.п.). В Libretto заложены механизмы формирования распределенных сред обмена библиотеками и объектными моделями. Также реализована поддержка транзакций, и акторной модели параллельных вычислений.

Нами была разработана экспериментальная версия Libretto 0.9. На ее базе строились модели по озеру Байкал, формализованные спецификации, системы метаописаний мультимедийных ресурсов, приложения в веб-программировании, погружение реляционных БД и др. Разрабатывается спецификация и логическая семантика Libretto 1.0 (на основе [3]) и соответствующий компилятор. Планируется использование Libretto в качестве платформы для облачных вычислений уровня PaaS. За счет DSL–возможностей Libretto может быть использован как средство разработки масштабируемых систем: один и тот же исходный программный код может транслироваться как для исполнения на стороне сервера (например, в JVM или LLVM), так и для исполнения на стороне клиента (в JavaScript).

Список литературы

[1] Малых А. А., Манцивода А. В. Объектно-ориентированная дескриптивная логика. Известия ИГУ. Серия математика. No.1. 2011. С.57–72.

[2] Малых А. А., Манцивода А. В., Ульянов В. С. Логические архитектуры и объектно-ориентированный подход. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т9., №3. С. 64–85.

[3] Гончаров С. С., Свириденко Д. И. Σ-программирование. В кн.: Логико-математические проблемы МОЗ. Вычислительные системы, Вып. 107. Новосибирск, 1985. С.3–29.

Иркутский госуниверситет, Иркутск
E-mail: `malykh@baikal.ru; andrei@baikal.ru`

Об общей языке программирования основанной на теории обозначений

Х. М. Рухая, Л. М. Тибуа

Как известно теория сокращающих символов изложенная в [1] дает возможность существенно повысить логическую строгость математических текстов. А это является необходимым условием для создания автоматических устройств, ориентированных на обработку математических текстов. Создание таких автоматических устройств является частью проблемы искусственного интеллекта [2]. Само собой напрашивается создание общей теории производных операторов (теорию сокращающих символов) для языков программирования с помощью тех же методов, которые применяются для создания теории обозначений [3]. Создание такой теории будет означать создание такой общей теории языков программирования, в которой будут доказуемы общие законы, устанавливающие связь между машинными языками и языками программирования. Для достижения указанных целей требуется следующее: Изучить наиболее важные языки программирования. Изучить сокращающие символы (операторы) этих языков и на основе ограничения правил их введения ввести рациональное понятие сокращающего символа(оператора) для языков программирования и развить теорию сокращающих символов для искусственных языков (для языков программирования). От понятия сокращающего символа требуется, чтобы, с одной стороны, оно было настолько общим, что его объем содержал бы все операторы известных искусственных языков, а с другой стороны, условия ограничивающие правила введения сокращающих символов (операторов языков программирования) были настолько сильными, чтобы было возможным установить те нужные общие свойства, которые применяют программисты при составлении программ. Создание такой теории фактически означает создание общей теории программирования. Это даст программистам возможность составлять надежные программы, не нуждающиеся в проверке с помощью отладки. Кроме того, создание такой общей теории программирования даст возможность выработать рекомендации о том, в каком направлении должна развиваться вычислительная техника, какие автоматические устройства следует создавать с целью обработки математических текстов, каким следует быть машинным языкам и т.д.

Литература

[1] Пхакадзе Ш. С.. Некоторые вопросы теории обозначений. Тбилиси: Изд. ТГУ, 1977. С. 195.

[2] Глушков В. М.. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интелекта. Кибернетика. 1970. № 2. С. 3–13.

[3] Rukhaia Kh. M., Tibua L. M. One Method of constructing a formal system. Applied Mathematics,Informatics and Mechanics(AMIM). 2006. T. 11. № 2. C. 3–15.

ИПМ имени И.Н. Векуа ТГУ; Сухумский ГУ, Грузия
E-mail: khimuri.rukhaia@viam.sci.tsu.ge

Об элементарных свойствах гиперграфических автоматов

Е. В. Хворостухина

В настоящей работе под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [1] $A = (X, S, \delta)$, множество состояний которого X наделено такой структурой гиперграфа [2] $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом гиперграфа H. Например, для любого гиперграфа H алгебраическая система $A = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$ (где $(\varphi, x) \in \mathrm{End}H \times X$) является гиперграфическим автоматом, который обозначается $\mathrm{Atm}(H)$ и называется универсальным гиперграфическим автоматом.

Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому его ребру. Для натурального числа p гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа принадлежат не более, чем одному его ребру. Например, проективные плоскости и аффинные плоскости с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами.

Напомним [3], что алгебраические системы A, B фиксированной сигнатуры Ω называются элементарно эквивалентными, если каждая формула Φ сигнатуры Ω, истинная на одной из заданных алгебраических Ω-систем, истинна и на другой.

С помощью [4] исследуется взаимосвязь элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов с элементарными свойствами полугрупп их входных сигналов.

Теорема. *Пусть H, H_1 – эффективные гиперграфы с $p-$определимыми ребрами и $\mathrm{Atm}(H) = A$, $\mathrm{Atm}(H_1) = A_1$ – универсальные гиперграфические автоматы над гиперграфами H, H_1 соответственно. Тогда полугруппы $\mathrm{Inp}(A)$, $\mathrm{Inp}(A_1)$ входных сигналов этих автоматов элементарно эквивалентны в том и только том случае, если элементарно эквивалентны автоматы A и A_1.*

Список литературы

[1] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

[2] Зыков А. А. Гиперграфы. УМН, 1974. т. 29. №6. С. 89–154.

[3] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

[4] Хворостухина Е. В. Об относительно элементарной определимости класса гиперграфических автоматов в классе всех полугрупп. Межд. науч. конф. "Компьютерные науки и информационные технологии". Тезисы докладов. Саратов: изд-во сарат. ун-та, 2009. С. 210–212.

Саратовский государственный социально-экономический университет, Саратов
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

Алгебраические модели некоторых синхронных переключательных схем

А. Д. Яшин

2-*Мерная переключательная схема* — n^2 *круговых* m*-позиционных* переключателей в узлах плоской решётки $n \times n$. При повороте одного переключателя так же поворачиваются все, расположенные с ним в одной горизонтали и одной вертикали. *Состояние* схемы — матрица состояний всех её переключателей. Задача *управления схемой*: из данного состояния получить нужное воздействиями на переключатели. Схема *управляема*, если из любого исходного состояния можно получить любое требуемое.

Аналогично определяется 3-*мерная схема*: m-позиционные круговые переключатели располагаются в узлах кубической решётки $n \times n \times n$. Синхронизация по вертикали, горизонтали и фронтали.

При каких соотношениях между m и n указанные выше схемы управляемы? Как найти нужную последовательность воздействий на схему для получения требуемого состояния из исходного?

Теорема 1. *2-Мерная схема управляема т. и т.т., когда m взаимно просто с числами $n-1$ и $2n-1$. 3-мерная схема управляема т. и т.т., когда $n > 2$ и m взаимно просто с числами $n-2$, $n-1$ и $3n-2$.*

Явное отыскание управляющих воздействий основано на обращении линейных операторов специального вида.

Для 2-мерной схемы $F(X) = -X + UX + XU$ на модуле $Mat_n[\mathbb{Z}_m]$ квадратных матриц порядка n над кольцом вычетов $\mathbb{Z}_m$, где U — матрица из единиц. Для 3-мерной схемы $F(X) = V \circ X + X \circ V - X \times V - 2X$. Здесь $\circ$ и $\times$ — *фронтально-послойное* и *вертикально-послойное* произведения кубических матриц соответственно, V — кубическая матрица из единиц. Оператор действует на модуле кубических матриц над кольцом $\mathbb{Z}_m$.

Теорема 2 [2-мерная схема]. *В условии управляемости при $m = 2$ $F^{-1}(X) = F(x)$; при $m > 2$ $F^{-1}(X) = (-1 + n' + n'')X + (n' + n'' - n'n'')F(X) - n'n''F^2(X)$, где n' и n'' — обратные к $n-1$ и $2n-1$ соответственно в кольце $\mathbb{Z}m$.*

Теорема 3 [3-мерная схема]. *В условии управляемости $F^{-1}(X) = a_0X + a_1F(X) + a_2F^2(X) + a_3F^3(X)$, где коэффициенты a_i явно вычисляются через обратные к $n-2$, $n-1$, $3n-2$, 2 в кольце $\mathbb{Z}_m$.*

Список литературы

[1] Яшин А. Д. Алгебраическая модель трёхмерной синхронной переключательной схемы. Вестник Удмуртского университета: математика, механика, компьютерные науки. 2010, вып. 1, с.112–122.

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва
E-mail: yashin.alexandr@ya.ru

A formalization of the Codd's relational algebra in logic $\mathcal{SHOIN}(D)$

A. A. Gavryushkina, I.A. Kazakov

A relational database format is one of the most popular data formats. There is a large amount of information from various knowledge domains, which has been stored in databases. The important issue is incorporating information from databases into knowledge management systems. This problem is not trivial due to differences in basic formalisms. The most popular method of solving this problem is a hybrid approach. However, this method is overcomplicated and involves complex calculations, and this makes it practically insignificant. There is the same problem in the theory of programming since the object-oriented datatype systems of programming languages also do not work perfectly with relational database models. The modern methods in the programming theory rely on embedding the relational structures in more refined and developed object structures. I.A Kazakov and A.V. Mantsivoda proposed the usage of object description logics as the formal structures, in which the conception of a database could be logically formalized and embedded.

In this work we develop this idea and define the basic operations of the Codd's relational algebra on the object theories of databases.

Irkutsk State University, Irkutsk (Russia)
E-mail: gavryushkina@gmail.com; kazakov@baikal.ru

VII. Секция «Теория моделей и неклассические логики»

Аксиоматизация DL-логик, обладающих IPD.

А. В. Карпенко

Интерполяционное свойство Крейга в классической логике имеет ряд эквивалентных формулировок. Для модальных логик данные формулировки становятся не эквивалентными, в этой связи сформулировано несколько вариантов интерполяционного свойства. Сформулируем интересующее нас.

Логика L обладает *дедуктивным интерполяционным свойством IPD*, если выполнено условие: для любых формул $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ из условия $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ следует существование формулы $C(\mathbf{p})$, такой, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

В работе [1] доказана разрешимость IPD над логикой неравенства DL.

Через V_n^m обозначим конечную модальную алгебру с $(n+m)$ атомами $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_m$, такими, что для любого атома x:

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & x = a_i \quad \text{для некоторого } 1 \le i \le n; \\ \neg x, & x = b_j \quad \text{для некоторого } 1 \le j \le m. \end{cases}$$

Сопоставим каждому элементу x из $AtV_n^m = \{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m\}$ переменную p_x. Свойствами, аналогичными свойствам характеристических формул, обладают формулы $\theta(V_n^m)$, определенные следующим образом:

$$\theta(V_n^m) = \Bigg(\bigg(\Big(\Big(\mathop{\&}_{\substack{x,y\in AtV_n^m\\ x\neq y}} \boxdot\neg(p_x \& p_y)\Big) \& \boxdot\big(\bigvee_{x\in AtV_n^m} p_x\big) \& \\ \& \mathop{\&}_{x\in\{a_1,\ldots,a_n\}} \boxdot\Diamond p_x \& \mathop{\&}_{x\in\{b_1,\ldots,b_m\}} \boxdot(\Diamond p_x \leftrightarrow \neg p_x)\Big)\bigg) \to 0\Bigg)$$

Теорема. *Следующие расширения DL и только они обладают дедуктивным интерполяционным свойством:*

(1) $(For)' = DL + \theta(V_1^0)$; $For = (For)' + \theta(V_0^1)$;
(2) $(LV_1^0)' = DL + \theta(V_0^2) + \theta(V_1^1) + \theta(V_2^0)$; $LV_1^0 = (LV_1^0)' + \theta(V_0^1)$;
(3) $(LV_0^2)' = DL + \theta(V_1^1) + \theta(V_2^0)$; $LV_0^2 = (LV_0^2)' + \theta(V_0^1)$;
(4) $(LV_1^1)' = DL + \theta(V_2^0) + \theta(V_0^2) + \theta(V_0^3)$; $LV_1^1 = (LV_1^1)' + \theta(V_0^1)$;
(5) $(LV_2^0)' = DL + \theta(V_3^0) + \theta(V_1^1) + \theta(V_0^2)$, $LV_2^0 = (LV_2^0)' + \theta(V_0^1)$;
(6) $(LV_0^3)' = DL + \theta(V_0^2) + \theta(V_2^0)$; $LV_0^3 = (LV_0^3)' + \theta(V_0^1)$;
(7) $(LV_0^4)' = DL + \theta(V_0^2) + \theta(V_0^3) + \theta(V_3^0) + \theta(V_2^1)$; $LV_0^4 = (LV_0^4)' + \theta(V_0^1)$;
(8) $(S5)' = DL + \theta(V_0^2) + \theta(V_1^1)$; $S5 = (S5)' + \theta(V_0^1)$.

Список литературы

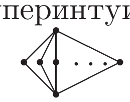
[1] Карпенко А. В. Интерполяционные теоремы в расширениях логики неравенства. Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 3, С. 553—568.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: anastasia.v.karpenko@gmail.com

Новая константа в суперинтуиционистской логике L3

А. К. Кощеева

Пусть Fm — множество формул стандартного пропозиционального языка.

Согласно Л. Л. Максимовой, *логикой* $L3$ [**2**] называется суперинтуиционистская логика, характеризуемая классом $\mathbf{F} = \{\mathbf{F_m} \mid \mathbf{m} \in \omega\}$ шкал вида  . Пусть r — корень, $\{m_1, \ldots, m_n\}$ — "средний слой" и t — вершина этой шкалы.

Следуя Д. П. Скворцову [**1**], назовем *φ-логикой* множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* логики L, если $L \subset \mathcal{L}$ и для для класса чистых формул выполнено $Fm \cap \mathcal{L} = L$.

φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *полным по П.С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L.

Под *проблемой Новикова для* $L3$ понимается описание класса всех полных по Новикову расширений (*пополнений*) $L3$.

Моделями φ-логик являются т.н. *φ-шкалы*, т.е. шкалы с выделенным конусом, в котором определенным образом интерпретируется константа.

На каждой шкале $F_n \in \mathbb{F}$ задаем константу φ шестью способами:
$\mathcal{F}_n^1 = (F_n, \varnothing)$ — "φ нигде";
$\mathcal{F}_n^2 = (F_n, F_n)$ — "φ везде";
$\mathcal{F}_n^3 = (F_n, \{t\})$ — "φ в вершине";
$\mathcal{F}_n^4 = (F_n, F_n \setminus \{r\})$ — "φ везде, кроме корня";
$\mathcal{F}_n^5 = (F_n, \{m_1, t\})$ — "φ ровно в одной точке среднего слоя";
$\mathcal{F}_n^6 = (F_n, \{m_1, \ldots, m_{n-1}, t\})$ — "φ везде в среднем слое, кроме одной точки".
Пусть $\mathbf{F}^k = \{\mathcal{F}_n^k \mid n = 1, 2, \ldots\}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Теорема. *Существует ровно 6 полных по Новикову расширений логики $L3$. Они определяются классами φ-шкал $\mathbf{F}^k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.*

Отметим, что аналогичная проблема для суперинтуиционистской логики $L2$ рассматривается в работе А. Д. Яшина [**3**].

Список литературы

[1] Скворцов Д. П. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнтельной логической связкой. Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С.154–174.
[2] Максимова Л. Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики. Алгебра и логика, Т. 11, № 5, 1972. С.558–570.
[3] Яшин А. Д. О новых константах в двух предтабличных суперинтуиционистских логиках. Алгебра и логика, Т. 50, № 2, 2011. с. 246–267.

Удмуртский государственный университет, Ижевск
E-mail: kannakst@mail.ru

Внешние модальности в определяющих формулах

С. И. Мардаев

В работе исследовались формулы с внешними модальностями "необходимо". Доказано, что для формул с внешними модальностями "необходимо" и позитивным вхождением выделенной переменной их наименьшие неподвижные точки также определимы с сохранением позитивности параметров с помощью формул с внешними модальностями "необходимо" в рефлексивнх и иррефлексивных моделях со слабым условием конфинальности возрастающих цепей. Для этого использована оригинальная алгебраическая конструкция опровергающих конфигураций, разработанная С.И.Мардаевым. Это подтверждает важность внешних модальностей. Таким образом, можно сказать, что внешние модальности сохраняются при переходе к определяющим формулам. Это означает, что в модальных логиках для определимости наименьших неподвижных точек внешние модальнсти играют решающую роль Это ставит задачу исследования свойств формул, сохраняющихся при переходе к определяющим формулам,

ИМ СОРАН, Новосибирск
E-mail: mardaev@math.nsc.ru

Независимый базис допустимых правил вывода предтабличных логик $PT2, PT3$ и их расширений

В. В. Римацкий

Говорим, что логика L является табличной, если существует конечный фрейм (или алгебра) F такой, что $L = L(F)$. И логика L предтабличная, если она не таблична, но все ее расширения табличные.

Известно, что над логикой $S4$ существует точно 5 модальных предтабличных логик $PT1 - PT5$. Известно также, что логики $PT1,\ PT4,\ PT5$ имеют конечный базис для ДПВ (теорема 4.3.33 [**1**]), и следовательно имеют независимый базис, но логики $PT2, PT3$ не имеют конечного базиса для ДПВ.

Напомним, что логики $PT2, PT3$ определяются следующим образом:

$$PT2 := L(\{F \mid F - \text{конечный корневой ч.у.м. глубины не более } 2\})$$

$$PT3 := L(\{F \mid F - \text{конечный корневой ч.у.м. глубины } \leq 3\ \&\exists m \in F \forall x \in F (x \leq m)\}).$$

Для всех чисел $n > 1,\ 1 \leq i, j \leq n;\ n \in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond \pi_i;$$

$$A_{n,1} := \Box\Big[\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (p_i \to \neg \Diamond q)\Big]; \quad B := q \vee \neg \Diamond q.$$

Определим также для натуральных $n > 1$ последовательность правил вывода:

$$R_n := \frac{\Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)}{\Box \neg A_n};\ n = 2, 3, \ldots.$$

Теорема 1. *Правила $\{R_n,\ n \in N\}$, образуют независимый базис допустимых правил вывода логики $PT3$ ($PT2$).*

Рассмотрим также табличные расширения логик $PT3$ и $PT2$. В этом случае логики порождаются конечными фреймами некоторой конечной ширины t.

Теорема 2. *Правила $\{R_n,\ 1 \leq n \leq t\}$, образуют конечный, а значит и независимый, базис допустимых правил вывода произвольной табличной логики ширины t, расширяющей $PT3$ или $PT2$.*

Литература

[1] Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Sci. Publ., New-York – Amsterdam, **136** (1997).

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск
E-mail: `Gemmeny@rambler.ru`

A note on the cut rule

A. V. Lyaletski

Classical and intuitionistic modal logics in the form of sequent calculi from [**1**] are considered. An attention is drawn to the following *tautology rule* being an admissible rule in the sequent logics containing the cut rule:

$$\frac{\Sigma,T,\Gamma\to\Delta,\Theta}{\Sigma,\Gamma\to\Delta,\Theta},$$

where T is a tautology (i.e. a deducible formula) in a logic under consideration.

The following connection of the cut rule with the using of a simplest tautologies of the form $A \supset A$ is observed.

When inferring "from top to bottom", the application of the cut rule:

$$\frac{\Gamma\to A,\Theta \quad \Sigma,A,\Pi\to\Delta}{\Sigma,\Gamma,\Pi\to\Delta,\Theta}$$

is *equivalent* to the application of, firstly, the implication rule:

$$\frac{\Gamma\to A,\Theta \quad \Sigma,A,\Pi\to\Delta}{\Sigma,A\supset A,\Gamma,\Pi\to\Delta,\Theta}$$

and, after this, the tautology rule for $A \supset A$.

This observation leads to the following result.

Theorem. *If SC is one of the usual sequent calculi and SC^* denotes the calculus obtained by means of replacement of the cut rule with the tautology rule for $A \supset A$, then the calculi SC and SC^* are coextensive. Moreover, the cut rule can be eliminated in SC if and only if the tautology rule for $A \supset A$ can be eliminated in SC^*.*

Therefore, on the base of the cut-elimination theorem for Gentzen's calculi LK and LJ, we obtain that the tautology rule can be eliminated in LK^* and LJ^*. On the same reasons, all the modal calculi from [**1**] admitting the cut elimination have the same property.

If we consider the calculus $GS5$ from [**1**] being the sequent form of the known logic $S5$, then $GS5^*$ can serve as an example of a calculus containing the non-eliminable tautology rule. Taking into account the lemma 5 from [**1**], we obtain that for inferring all the true formulas in $S5$, the tautology rule for $\Box\neg p \supset \Box\neg p$ must be used in the cut-free calculus $GS5$. That is, application of the tautology rule for $A \supset A$ in the cut-free calculus $GS5$ essentially improves its deductive capabilities.

In this connection, it seems to be interesting to investigate the influence of various T from the tautology rule differed from $A \supset A$ on the deductive power of logics not admitting the cut elimination.

References

[1] Ono H. Proof-theoretic methods for nonclassical logic – an introduction. MSJ Memoirs, 2:207-254, 1998.

Kiev National Taras Shevchenko University, Kiev (Ukraine)
E-mail: `lav@unicyb.kiev.ua`

Weak interpolation and negative equivalence in extensions of minimal logic.

L. L. Maksimova

We consider the family of J-logics, i.e. of extensions of the Johansson minimal logic J. Two J-logics L and L' are *negatively equivalent* [**2**] if for any formula A

$$L \vdash \neg A \iff L' \vdash \neg A.$$

There is a duality between the families of J-logics and of varieties of Johansson algebras (*J-algebras*) [**2**]. We say that a J-algebra is *central* if $\bot \neq \top$ and $x \leq \bot$ for any $x \neq \top$. For a J-logic L define the *center* $\Lambda(L)$ as the class of all central algebras validating L.

Theorem 1. *Two* J*-logics are negatively equivalent iff they have the same center.*

In [**1**] we have proved that WIP is decidable over the minimal logic. In that paper a list SL of the eight J-logics was presented which plays a key role in the proof of decidability of WIP. We call them *etalon logics*. In particular, the logics $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (A \vee \neg A)$, $\mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + (\bot \to A)$, and the set For of all formulas are etalon logics.

All etalon logics are generated by their centers, finitely axiomatizable, and finitely approximable [**1**].

Proposition 2. *For each etalon logic L_0 there is an algorithm which, given a finite set Ax of axiom schemes, decides if the logic* $\mathrm{J} + Ax$ *is negatively equivalent to L_0.*

Theorem 3. *A J-logic has WIP iff it is negatively equivalent to one of the etalon logics.*

References

[1] Maksimova L. L. Decidability of weak interpolation property over the minimal logic. Algebra and Logic, 50, 2 (2011), 152-188.

[2] Odintsov S. P. Constructive negation and paraconsistency. Dordrecht, Springer-Verlag. 2008.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: `lmaksi@math.nsc.ru`

VIII. Авторский указатель