Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Новосибирский государственный университет

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

12–16 ноября 2012 г.

Тезисы докладов

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 12–01–06097–г)

Новосибирск • 2012

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

November 12–16, 2012

Collection of Abstracts

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 12–01–06097–г)

Novosibirsk • 2012

Содержание

I. Пленарные доклады

Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств

И. М. Исаев

И.П. Шестаков в 1993 г. поставил вопрос о существовании центральной простой конечномерной алгебры над полем нулевой характеристики, тождества которой не задаются конечным набором [**1**].

В настоящей работе доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $A = \langle 1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_F$ *– алгебра над произвольным полем* F, *где* 1 *– единица и ненулевые произведения базисных элементов, отличных от единицы, определяются следующими правилами:* $v_i e_{ij} = v_j$, $v_2 p = 1$. *Алгебра* A *является простой центральной* F*-алгеброй, не имеющей конечного базиса тождеств.*

В частности, получен положительный ответ на вопрос И.П. Шестакова.

Изучаются тождества пространств, вложенных в ассоциативные алгебры. Получены следующие результаты:

Теорема 2. *Пусть* $T_2(F)$ *– пространство верхних треугольных матриц второго порядка над полем* F. *Тогда пространство* $T_2(F)$ *не имеет конечного базиса тождеств.*

Теорема 3. *Пусть* E *– конечномерное векторное пространство, вложенное в линейную алгебру, причем* $T_2(F)$ *удовлетворяет всем тождествам пространства* E. *Тогда* E *не имеет конечного базиса тождеств.*

Теорема 4. *Векторное пространство* $E_1 = \langle e_{11}, e_{12}\rangle_F \oplus \langle e_{11}, e_{21}\rangle_F$ *не имеет конечного базиса тождеств, но существует конечномерное векторное пространство* E_2, *такое что* E_2 *имеет конечный базис тождеств, причем* E_1 *удовлетворяет всем тождествам пространства* E_2.

Кроме того, для произвольного поля F построен пример двумерного векторного пространства над F (вложенного в ассоциативную алгебру), не имеющего конечного базиса тождеств. Тождества этого пространства совпадают с тождествами пространства E_1.

Список литературы

[1] Днестровская тетрадь. Издание четвертое. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1993.

Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул
E-mail: isaev@uni-altai.ru, kislitsin@uni-altai.ru

Свойства обращений скачка в Σ-степенях алгебраических структур

И. Ш. Калимуллин

В докладе будут изучены Σ-степени различных конструкций, обеспечивающих обращение скачка относительно сводимости Мучника для массовых проблем представимости алгебраических структур. Будет показано, что имеется конструкция наименьшего обращения скачка относительно Σ-сводимости.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: Iskander.Kalimullin@ksu.ru

Ковровые подгруппы групп Шевалле и ковровые кольца Ли

Я. Н. Нужин

Предлагается обзор недавних результатов, касающихся собственно ковров, ковровых подгрупп и ковровых колец Ли. Эти результаты инспирированы старым вопросом В. М. Левчука о допустимости ковроводаддитивных подгрупп.

СФУ, Красноярск
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Уравнения в группах

В. А. Романьков

В докладе обозревается современное состояние исследований по разрешимости уравнений в группах. Обращается внимание на центральные результаты, основные направления работы и открытые проблемы. Приводятся классические результаты и достижения последних лет.

Омский госуниверситет, Омск
E-mail: romankov48@mail.ru

Генерический подход к алгоритмическим проблемам

А. Н. Рыбалов

Генерический подход — сравнительно новое направление в исследовании алгоритмических проблем, родившееся на стыке криптографии и комбинаторной алгебры. В классической теории алгоритм должен решать проблему для любого входа. При генерическом подходе алгоритм решает проблему на множестве «почти всех» входов и может ошибаться на остальных входах. Понятие «почти все» уточняется введением естественной меры на множестве входных данных. С практической точки зрения, когда требуется решать проблему на случайных данных, например, в криптографии, такой подход оправдан. В докладе будет дан обзор результатов, полученных в последние годы в рамках генерического подхода.

ОФ ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: alexander.rybalov@gmail.com

Дескриптивная теория множеств и теория вычислений

В. Л. Селиванов

В докладе напоминаются некоторые основные факты классической дескриптивной теории множеств (иерархии, сводимость Вэджа). Сделан обзор недавних результатов о распространении ряда результатов классической теории (развиваемой на Польских пространствах) на значительно более широкий класс T_0-пространств, включающий большинство пространств, интересных для вычисимого анализа. Обсуждаются также различные «эффективные» версии классической теории, представляющие интерес для ряда разделов теории вычислений.

ИСИ СО РАН, Новосибирск
E-mail: vseliv@ngs.ru

Основные признаки непростоты групп Шункова

А. И. Созутов

В докладе автор представит некоторые результаты В. П. Шункова и его учеников, а также коснется истоков и мотивов развития «положительной» теории периодических групп.

СФУ, Красноярск
E-mail: sozutov_ai@mail.ru

О В. П. Шункове, группах Шункова и школе Шункова

В. И. Сенашов

В докладе будет сделано краткое жизнеописание Владимира Петровича Шункова. Также будет предложена история появления групп Шункова и школы Шункова.

Пусть q-простое число. Напомним следующие два определения.

Группа G называется *сопряженно q-бипримитивно конечной*, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов порядка q порождает конечную подгруппу (В.П. Шунков).

В частности, любая периодическая группа сопряженно 2-бипримитивно конечна.

Если группа G является сопряженно q-бипримитивно конечной относительно любого простого числа q, то G называется *сопряженно бипримитивно конечной группой* (В.П. Шунков).

По предложению В.Д. Мазурова (2000 г.) сопряженно бипримитивно конечные группы называют также группами Шункова.

В докладе дается обзор результатов по группам Шункова. В него войдут результаты А.А. Дуж, Л. Гамуди, В.О. Гомера, М.Н. Ивко, А.Н. Измайлова, Ал.Н. Остыловского, А.Н. Остыловского, И.И. Павлюка, А.М. Попова, А.В. Рожкова, А.Г. Рубашкина, Е.И. Седовой, К.А. Филиппова, В.И. Сенашова, А.И. Созутова, Н.Г. Сучковой, А.В. Тимофеенко, А.А. Черепа, Н.С. Черникова, А.А. Шафиро, А.К. Шлепкина, В.П. Шункова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00509) и гранта Сибирского федерального университета (проект — элитное математическое образование в СФУ.

ИВМ СО РАН, Красноярск
E-mail: sen1112home@mail.ru

Некоторые классы бесконечных групп с инволюциями

Н. М. Сучков

Будут изложены результаты исследований, начало которых положил вопрос 10.76 В. П. Шункова из Коуровской тетради о периодических группах с заданной сильно вложенной подгруппой.

СФУ, Красноярск
E-mail: ns7654321@mail.ru

Задачи об ограничении p-длины и нильпотентной длины конечных разрешимых групп

Е. И. Хухро

Наряду с известными результатами Холла — Хигмэна и других авторов о p-длине p-разрешимых групп, силовская p-подгруппа которых удовлетворяет определённым тождествам, в этой области имеются нерешённые задачи, имеющие большое значение для изучения некоторых финитно-аппроксимируемых и проконечных групп. Обсуждаются возможные методы решения этих задач и частичные результаты, полученные в последнее время. Имеется также ряд важных нерешённых задач об ограничении нильпотентной длины конечных разрешимых групп, допускающих группы автоморфизмов с малым числом неподвижных точек. В этом направлении достигнут большой прогресс для групп разрешимых автоморфизмов копростого порядка, начиная с работы Томпсона. Но ситуация иная для некопростого случая, а также для неразрешимых групп автоморфизмов. Обсуждаются также аналогичные задачи и недавние результаты о конечных группах с фробениусовыми группами автоморфизмов.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

Presentations for rigid solvable groups

N. S. Romanovskiĭ

A group G is said to be m-rigid it it has a normal series

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1$$

with abelian factors each of which G_i/G_{i+1}, viewed as an $\mathbb{Z}[G/G_i]$-module, has no torsion. Denote by Σ_m the class of all rigid groups of length $\leq m$ and by $\Sigma_m(R)$ the set of groups in Σ_m generated by $x_1, \ldots, x_n$ that satisfy a given set of relations R. We say that a group in $\Sigma_m(R)$ is maximal if it has no proper covering in $\Sigma_m(R)$. It is proved that, for every R, the set $\Sigma_m(R)$ contains only finitely many maximal groups. The set of relations R is said to be complete if $\Sigma_m(R)$ contains a unique maximal group. It is shown that every finitely generated group in Σ_m is completely finitely presented. We give a definition of a canonical presentation for a rigid group with the generators $x_1, \ldots, x_n$. If such a presentation is given, the group at least has decidable word problem. Given a finite set of relations $R = R(x_1, \ldots, x_n)$, we effectively construct a finite set of canonical presentations in the generators $x_1, \ldots, x_n$ for groups in $\Sigma_m(R)$ among which all the maximal groups in $\Sigma_m(R)$ are contained.

Definable sets in free and hyperbolic groups

A. Miasnikov

I will give a natural description of definable sets in free and torsion-free hyperbolic groups. This solves Mal'cev problems on definable sets in free groups.

City College of CUNY, New York
E-mail: alexeim@att.net

II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Обнаружение вероятностных неподвижных точек

Е. Е. Витяев

Рассмотрим алгебру высказываний с вероятностной мерой μ, L - множество литер, $\mu(P) > 0,\ P \in L$ и $\Re(L)$ - множество высказываний.

Семантическим вероятностным выводом (СВВ) будем называть последовательность правил $R_1 \sqsubset R_2 \sqsubset \ldots \sqsubset R_m$, предсказывающих некоторую литеру $P_0 \in L$ и удовлетворяющую условиям:

(1) $R_1 = (\Rightarrow P_0)$;

(2) $R_i = (P_1^i \& ... \& P_{k_i}^i \Rightarrow P_0),\ P_j^i \in L, P_0 \notin \{P_1^i, ..., P_{k_i}^i\},\ i = 2, \ldots, m,\ m \geq 2$;

(3) R_i – *подправило* правила $R_{i+1},\ i = 2, \ldots, m-1,\ m \geq 3,\ \{P_1^i, \ldots, P_{k_i}^i\} \subset \{P_1^{i+1}, \ldots, P_{k_{i+1}}^{i+1}\},\ k_i < k_{i+1}$;

(4) $\mu(R_i) < \mu(R_{i+1}),\ \ i = 1, 2, \ldots, m-1,\ m \geq 2,$ где, $\mu(R_i) = \mu(P_0^i / P_1^i \& \ldots \& P_{k_i}^i)$, $i \geq 2,\ \mu(P_1^i \& \ldots \& P_{k_i}^i) > 0$ – условная вероятность правила, либо вероятность правила $\mu(R_1) = \mu(P_0)$ при $i = 1$;

(5) $R_i,\ \ i = 2, \ldots, m,\ m \geq 2$ – *вероятностные законы*, удовлетворяющие условию, что для любого подправила $R' = (P_1 \& \ldots \& P_k \Rightarrow P_0)$ правила R_i, выполнено неравенство $\mu(R') < \mu(R_i)$;

(6) $R_m,\ i = 1, \ldots, m,\ m \geq 1$ – *сильнейший вероятностный закон*, для которого цепочка правил $R_1 \sqsubset R_2 \sqsubset \ldots \sqsubset R_m$ не может быть продолжена, т.е. для R_m не существует правила R_{m+1} удовлетворяющего условиям 2-5.

Максимально специфическим законом для предсказания литеры $P_0 \in L$ назовем сильнейший вероятностный закон, имеющий максимальную условную вероятность среди других сильнейших вероятностных законов, предсказывающих эту литеру. Обозначим множество всех максимально специфических законов для всех литер $P_0 \in L$ через МСЗ.

Лемма 1. *Если* $H \in \Re(L)$ *уменьшает условную вероятность правила* $\eta(G/F \& H) < \eta(G/F)$, *то* $\neg H$ *увеличивает её* $\eta(G/F \& \neg H) > h(G/F)$.

Лемма 2. *Для любого правила* $A = (A_1 \& ... \& A_k \Rightarrow G)$, $\mu(A_1 \& ... \& A_k) > 0$, $k \geq 1$ *всегда существует максимально специфический закон* $C' = (B_1 \& ... \& B_{k'} \Rightarrow G)$, *такой что* $\mu(C') \geq \mu(C)$.

Теорема 1. *Среди максимально специфических законов нет двух законов* $A = (A_1 \& ... \& A_k \Rightarrow G), B = (B_1 \& ... \& B_m \Rightarrow \neg G),\ k, m \geq 0,\ k > 0$ *или* $m > 0$, $\eta((A_1 \& ... \& A_k) \& (B_1 \& ... \& B_m)) > 0$, *приводящих к противоречию.*

Рассмотрим множество литер $L_1, ..., L_k,\ \mu(L_1, ..., L_k) > 0$ и множество МЗ всех максимально специфических законов из МСЗ с непустой посылкой.

Теорема 2. *Если каждая из литер множества* $L_1, ..., L_k$ *предсказывается некоторым МЗ законом по другим литерам из* $L_1, ..., L_k$, *то для этого множества литер существует неподвижная точка МЗ законов, включающая это множество литер и не содержащая противоречий - литеру и её отрицание.*

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: evgenii.vityaev@math.nsc.ru

Операционная нотация и алгоритмы построения корректных термов

А. А. Гаврюшкина, А. С. Москвина

В докладе рассматривается обобщенная операторная нотация как инструмент для настройки синтаксиса универсального языка программирования Libretto [**1**] и построения предметно-ориентированных языков. Было сформулировано определение обобщенной операторной нотации и исследованы алгоритмы, проверяющие выражения на корректность и расставляющие в них скобки.

Рассмотрим конечное множество $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, элементы которого будем называть *операциями*, и конечное множество *констант* C (считаем, что $F \cap C = \emptyset$). Слова алфавита $F \cup C$ будем называть *выражениями*. Рассмотрим набор функции $\nu = (l, r, p, d)$, где функция $l : F \to \mathbb{N}$ (считаем $0 \in \mathbb{N}$) задает количество аргументов операции слева, $r : F \to \mathbb{N}$ задает количество аргументов операции справа, $p : F \to \mathbb{N}$ задает количественное значение приоритета операции над другими операциями и функция $d : F \to \{L, R\}$ определяет, является ли операция право-ассоциативной (случай, когда $d(f) = R$) или лево-ассоциативной ($d(f) = L$). Тройку (F, ν, C) назовем *порождающим набором.*

Если левый и правый приоритеты в операциях заданы явно, такая операторная нотация является обобщенной. Назовем *обобщенным порождающим набором* набор (F, μ, C), где $\mu = (l, r, pl, pr)$, множества F, C и функции l, r определяются так же, как для порождающего набора, а функции $p_l : F \to \mathbb{N}$ и $p_r : F \to \mathbb{N}$ определяют приоритет операции слева и справа, соответственно.

В работе доказано, что для порождающих наборов в случае с одним аргументом существует линейный алгоритм, притом единственный, который находит соответствующий ему корректный терм. В случае с несколькими аргументами доказано, что такой алгоритм является полиномиальным, если он существует.

В общем случае (обобщенная операторная нотация) доказано, что, для любого выражения существуют единственный почти корректный терм и полиномиальный алгоритм, его строящий. Также сформулировано необходимое и достаточное условие существования (единственного) корректного терма для обобщенного порождающего набора.

Теорема *Пусть (F, μ, C) — обобщенный порождающий набор, такой, что $l(f) = r(f) = 1$ для любой $f \in F$. Тогда если для выражения вида $a_1 f_1 a_2 \ldots a_k f_k a_{k+1}$ существует соответствующий ему корректный терм, то он единственный. Существует полиномиальный алгоритм, который находит этот корректный терм, если он существует, и выдает отрицательный ответ в противном случае.*

Список литературы

[1] Малых А. А., Манцивода А. В.. Объектно-ориентированная дескриптивная логика // Известия ИГУ. Серия математика. – No. 1. – 2011. С. 57–72.

Иркутский Государственный Университет, Иркутск
E-mail: gavryushkina@gmail.com, anastasia.moskvina@gmail.com

Существование расширенных совершенных транзитивных в узком смысле кодов

Г. К. Гуськов, Ф. И. Соловьева

Через $\mathbb{F}^n$ обозначим векторное пространство длины n над $GF(2)$ по отношению к метрике Хэмминга. *Совершенным двоичным кодом C, исправляющим одиночные ошибки* (далее *совершенным кодом*), называется такое подмножество из $\mathbb{F}^n$, что любой вектор пространства $\mathbb{F}^n$ находится на расстоянии не больше 1 от некоторого единственного вектора из C. Код C называется *транзитивным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на совокупности кодовых слов.

В работе [**1**] П. Р. Дж. Остергард и О. Поттонен доказали, что для $n = 15$ существует 201 совершенный транзитивный код, а для $n = 16$ существует 101 расширенный совершенный транзитивный код. Легко видно, что всякий расширенный совершенный код, то есть код, полученный из совершенного транзитивного кода добавлением общей проверки на четность, является транзитивным. Обратное, вообще говоря, неверно. В 2004 г. С. А. Малюгин [**2**] обнаружил один расширенный совершенный транзитивный двоичный код длины 16, такой, что все коды, полученные из него выкалыванием любой координаты, являются нетранзитивными. Всякий такой расширенный совершенный код произвольной допустимой длины назовем *транзитивным в узком смысле*. Эти коды обладают, в некотором смысле, пограничным свойством, характеризующим существенное отличие класса расширенных совершенных транзитивных кодов от класса транзитивных совершенных кодов.

Теорема. *Для любого допустимого $N > 16$ существует 8 расширенных совершенных транзитивных в узком смысле кодов длины N, для $N = 16$ существует всего 10 неэквивалентных таких кодов.*

Классификация всех расширенных совершенных транзитивных в узком смысле кодов длины 16 была получена с помощью системы компьютерной алгебры *Magma*. Было доказано, что восемь из десяти таких кодов обладают специальными свойствами, позволившими для каждого из этих восьми кодов с помощью известной конструкции Плоткина получить бесконечную серию расширенных совершенных транзитивных в узком смысле кодов.

Список литературы

[1] Östergård P. R. J., Pottonen O. The Perfect Binary One-Error-Correcting Codes of Length 15: Part I – Classification // IEEE Trans. Inform. Theory. – 2009. – Vol. 55. – P. 4657–4660. Codes at arXiv:0806.2513v3.

[2] Малюгин С. А. Частное сообщение – 2004.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: m1lesnsk@gmail.com
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: sol@math.nsc.ru

Представление и анализ объектных данных посредством перезаписывающих систем

А. Е. Гутман

Детерминированная префиксная перезаписывающая система — это перезаписывающая система с функциональным множеством правил, применение которых ограничивается перезаписью самых длинных префиксов. Точнее, рассматривается произвольное конечное бинарное отношение $\to$ на множестве $\mathbb{A}^+$ всех непустых слов алфавита $\mathbb{A}$ такое, что из $L \to R$ и $L \to R'$ следует $R = R'$, после чего на $\mathbb{A}^+$ определяется отношение перезаписи $\Rightarrow$ следующим способом: $X \Rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда существуют такие слова L, R и S, что $L \to R$, $X = LS$ и $Y = RS$, причем L является самым длинным среди префиксов слова X, удовлетворяющих приведенным выше условиям.

В рамках таких систем вводятся и исследуются понятия, характерные для объектно-ориентированного подхода к организации данных: наследование классов и объектов, экземпляры классов, атрибуты классов и экземпляров, концептуальная зависимость и непротиворечивость, концептуальная схема, типы, подтипы и пр. Например, X наследуется от Y (или X является экземпляром Y), если существует такой набор слов $X_0, X_1, \ldots, X_n$, что $X = X_0 \Rightarrow X_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_n = Y$. Буква α является атрибутом X в объектной системе, порожденной словом ω, если этой системе принадлежит слово $X\alpha$ (т. е. $X\alpha$ наследуется от ω).

Особое внимание уделяется эффективной проверке разнообразных свойств рассматриваемых систем. Речь, в частности, идет об алгоритмах, позволяющих выяснить, являются ли все слова конечно перезаписываемыми, существуют ли рекуррентные слова, нет ли в системе концептуальных противоречий, концептуально зависит ли данное слово X от слова Y, совпадают ли типы слов X и Y, является ли тип слова X подтипом типа слова Y.

В качестве иллюстрации сформулируем критерий, обеспечивающий эффективную проверку конечной перезаписываемости слова.

Теорема. *Пусть X_n — n-й член последовательности перезаписей слова X, т. е. $X = X_0 \Rightarrow X_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_n \Rightarrow X_{n+1} \Rightarrow \cdots$, и пусть μ — наибольшая из длин $|L|$ слов L, встречающихся в правилах $L \to R$. Слово X является бесконечно перезаписываемым тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух взаимоисключающих условий:*

(a) *существуют такие $n \geqslant 0$ и $m > 0$, что $X_n = X_{n+m}$;*

(b) *существуют такие $n \geqslant 0$ и $m > 0$, что $\mu \leqslant |X_n| \leqslant |X_{n+1}|, \ldots, |X_{n+m}|$, причем слова X_n и X_{n+m} различны и имеют общий префикс длины μ.*

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Содержание логического образования и методология обучения элементам математической логики в общеобразовательных учебных заведениях

Б. Н. Дроботун

Возможное содержание школьного математического образования определено в учебной программе «Логика», опубликованной в работе [1]. Воплощение второй части — «Элементы математической логики» этой программы в форме реального учебника для 10 - 11 классов общеобразовательных школ оказалось сопряженным с рядом трудностей принципиального характера. Следует отметить, что даже обоснованное включение тех или иных разделов в учебную программу является не более чем попыткой ответа на вопрос: «Чему учить? ». В то же время общепризнанным является положение о том, что проблема отбора материала уступает по своей значимости проблеме: «Как учить? ».

Попытки введения логической и теоретико-множественной составляющих в школьную математику можно отнести, в основном, или к попыткам критического пересмотра понятийно-терминологической базы и системы символических обозначений языка школьной математики с целью приведения его в наиболее полное соответствие с языком современной математики, или к попыткам описания этого языка по схеме построения языка прикладного исчисления предикатов.

По мнению автора, «логическая реконструкция» школьной математики должна осуществляться «с точностью до наоборот», т.е. предполагать, в первую очерedь, непосредственное изучение содержательных аналогов базовых составляющих формального языка исчисления предикатов и функций, используя традиционный материал и язык школьной математики для разработки упражнений и примеров демонстрационного сопровождения.

Уместно подчеркнуть, что изучение грамматики естественных языков производится, в сущности, с формальных позиций, как изучение правил написания, законов построения и формоизменения тех синтаксических конфигураций, посредством которых реализуются их описательные функции. При этом, в качестве метаязыка используются обычно те же самые языки, а в качестве примеров берутся конкретные языковые образования, имеющие определенный содержательный смысл. Таким образом, предлагаемый в работе путь генетически обусловлен.

Список литературы

[1] Гончаров С. С., Дроботун Б. Н., Никитин А. А. К проблеме формирования и развития фундаментальных основ логического образования в средней общеобразовательной школе. (II) // Педагогические заметки. ИПИО РАО, Новосибирск, 2011. Т. 4, вып 2, с. 21–37.

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, Павлодар
E-mail: drobotun.nina@mail.ru

Логические уравнения на булевых решетках

И. Ю. Иванов, С. Д. Махортов

Алгебраическая логика предоставляет эффективный аппарат для моделирования логических систем. Однако в силу своей универсальности она недостаточно эффективна при решении ряда частных задач, связанных с широко распространенными в информатике системами продукционного типа. В докладе рассматривается класс алгебраических структур, моделирующих свойства продукционно-логических систем на основе булевых решеток. Основная идея состоит в представлении продукционных связей (совокупности правил) дополнительным бинарным отношением с соответствующими свойствами.

В общем случае бинарное отношение может содержать пары с громоздкими выражениями над дважды неразложимыми элементами булевой решетки. Для практических приложений целесообразно иметь возможность приведения такого отношения к некоторому простейшему виду. С указанной целью вводится понятие канонического отношения. Доказывается теорема о приведении произвольного отношения к каноническому виду.

Вводится новое понятие продукционно-логического уравнения на булевой решетке. Рассматриваются методы его решения, что в применении к продукционным системам соответствует полному обратному выводу с минимизацией медленных запросов. Для этого предварительно определяется начальное при заданном отношении подмножество решетки. Дается определение приближенного и точного решений уравнения. Доказывается теорема о единственности точного решения.

Исследуются возможности упрощения логического уравнения на булевой решетке. Они основаны на приведении правой части к конъюнктивной нормальной форме. Далее исходное уравнение заменяется совокупностью уравнений с правыми частями — элементарными дизъюнкциями полученной конъюнктивной нормальной формы. Доказывается, что такого рода упрощение представляет собой эквивалентное преобразование, то есть не приводит к потере решений и не добавляет новых. Таким образом, задача нахождения решения произвольного логического уравнения сводится к решению множества уравнений простейшего вида, правые части которых являются элементарными дизъюнкциями. Доказывается, что исходное уравнение имеет решение в том и только том случае, когда разрешимо каждое из вновь образованных простейших уравнений.

Воронежский госуниверситет, Воронеж
E-mail: hour1scorp@gmail.com, sd@expert.vrn.ru

О системах четверок Штейнера малых рангов и расширенных совершенных двоичных кодах

Д. И. Ковалевская, Ф. И. Соловьева

Работа посвящена проблеме вложимости произвольной системы четверок Штейнера порядка N (кратко $SQS(N)$) в некоторый расширенный совершенный двоичный код длины N. Известно, что кодовые слова веса 4 любого расширенного совершенного двоичного кода, содержащего нулевой вектор, образуют SQS, но не всякая SQS является вложимой в некоторый расширенный совершенный двоичный код. В. А. Зиновьев и Д. В. Зиновьев, см. [**2**], доказали, что $SQS(N)$ ранга $N-\log N$ вложима в некоторый расширенный совершенный код Васильева длины N такого же ранга. Известно, что число таких различных $SQS(N)$ равно $(2^{|SQS(\frac{N}{2})|-\frac{N}{2}} - \frac{1}{N}) \cdot N!/|Sym(\bar{H}, \frac{N}{2})|$. В работе [**3**] предложен класс систем четверок Штейнера порядка $N = 2^r$, полученных специальными свитчингами из Хэмминговой $SQS(N)$. Данная работа является продолжением [**3**].

Теорема 1. *Класс $SQS(N)$ ранга $N-logN + 1$, полученный свитчингами, примененными к Хэмминговой $SQS(N)$ по правилам, указанным в Теореме 4 работы [**3**], совпадает с классом $SQS(N)$, вложимых в расширенные совершенные коды такого же ранга, построенные методом $ijkl$-компонент из расширенного кода Хэмминга длины N. Число $R(N)$ таких различных $SQS(N)$ удовлетворяет неравенствам $P(N) \cdot R(\bar{H}, N/4) - S(N) \le R(N) \le P(N) \cdot R(\bar{H}, N) - S(N)$, где $R(\bar{H}, N) = N!/((N-1)(N-2)(N-2^2) \cdot \ldots \cdot N/2)$ – число различных Хэмминговых $SQS(N)$, $P(N) = (3^2 \cdot 2^8 - 8)^{N(N-4)(N-8)/3 \cdot 2^9} \cdot 2^{N(N+4)/2^5} \cdot N(N-1)(N-2)/8$, $S(N) = 2^{|SQS(\frac{N}{2})|-\frac{N}{2}} \cdot N!/|Sym(\bar{H}, \frac{N}{2})|$.*

Теорема 2. *Число $R'(N)$ различных $SQS(N)$ ранга не менее $N-log\ N + 1$, не вложимых в расширенные совершенные двоичные коды, построенные методом $ijkl$-компонент из расширенного двоичного кода Хэмминга, удовлетворяет неравенству $R'(N) \ge \frac{N(N-4)(N-8)}{3 \cdot 2^9} \cdot (26 \cdot 3^6)^{\frac{(N-4)(N-8)(N-64)}{3 \cdot 2^9} - 3N/4 + 18} \cdot (R'(N/4) + R(\bar{H}, N/4))$. Ранги $r(SQS(N))$ таких $SQS(N)$ удовлетворяют неравенству $r(SQS(N)) \ge r(SQS(N/4)) + 3N/4 - 1$.*

Список литературы

[1] Августинович С. В., Соловьева Ф. И. Построение совершенных двоичных кодов последовательными сдвигами $\tilde{\alpha}$-компонент // Пробл. передачи информ. — 1997. — Т. 33, Вып. 3. — С. 15–21.

[2] Зиновьев В. А., Зиновьев Д. В. О кодах Васильева длины $n = 2^m$ и удвоение систем Штейнера $S(n, 4, 3)$ заданного ранга. // Пробл. передачи информ. — 2006. — Т. 42, Вып. 1. — С. 13–33.

[3] Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И. О системах четверок Штейнера малого ранга, вложимых в расширенные совершенные двоичные коды // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т.19, № 5. — С. 47–62.

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: daryik@rambler.ru, sol@math.nsc.ru

К проблеме остановки машины Тьюринга на пустой ленте

М. В. Котов, А. А. Мищенко

В генерическом подходе изучается поведение поведение алгоритмических проблем на множестве «почти всех» входов, игнорируя поведение алгоритмов на остальных входах, где алгоритм может работать очень долго или вообще не завершать свою работу. Этот подход был в первые предложен в работе [**3**].

Пусть A — множество входов некоторой алгоритмической проблемы и $S \subseteq A$. Рассмотрим последовательность $\rho_n(S) = |S \cap A_n|/|A_n|$, где A_n — множество входов размера n. Если предел $\mu(S) = \overline{\lim}_{n\to\infty}\rho_n(S)$ равен 1, то множество S называется *генерическим*. Алгоритмическая проблема $S \subseteq A$ называется *генерически разрешимой*, если найдётся такое множество $G \subseteq A$, что G — генерическое, и G и $S \cap G$ — разрешимые.

Проблема остановки на пустой ленте — это множество машин Тьюринга, которые останавливаются или ломаются на ленте, заполненной нулями. Известно, что проблема остановки на полубесконечной пустой ленте генерически разрешима за полиномиальное время [**4**]. Про проблему остановки на бесконечной в обе стороны пустой ленте ничего не известно [**1**], [**2**].

Чтобы сформулировать гипотезу о поведении машин Тьюринга с ростом числа состояний, была реализована соответствующая программа с использованием технологии CUDA. Вычисления проводились на вычислительном кластере ОФ ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, имеющим в настоящий момент четыре узла и суммарно шесть вычислителей Tesla C1060 и четыре вычислителями Tesla C2050.

Например, машины Тьюринга над алфавитом с двумя символами на бесконечной в обе стороны ленте ведут себя как представлено на таблице ниже.

$n \cdot 10^{-3}$	1	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10
$h(n,k)$	0,17	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20	0,20

Здесь n — число состояний, $h(n,k)$ — доля остановившихся не более чем за k шагов машин Тьюринга, $k \approx 1,3 \cdot 10^5$. В докладе будут представлены результаты этих вычислительных экспериментов.

Список литературы

[1] Myasnikov A. G., Rybalov A. N., Generic complexity of undecidable problems, J. Symb. Logic, 73:2 (2008), 656–673.

[2] Gilman R., Miasnikov A. G., Myasnikov A. D., Ushakov A., Report on Generic Case Complexity, Vest. Omsk. Univ., Spec. Issue (2007), 103–111.

[3] Kapovich I., Myasnikov A., Schupp P., Shpilrain V., Generic-case complexity, decision problems in group theory and random walks, J. Algebra, 264:2 (2003), 665–694.

[4] Hamkins J. D., Miasnikov A. D., The halting problem is decidable on a set of asymptotic propability one, Notre Dame J. Formal Logic, 47:4 (2006), 515–524.

ОФ ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: matvej.kotov@gmail.com, alexei.mishenko@gmail.com

Дедуктивные свойства реляционной модели данных

В. И. Курганский

Задано реляционное ИВ (РИВ). Это модификация классического ИВ[1](КИВ), учитывающая особенности реляционной модели данных (РМД). В отличие от КИВ атомарные формулы РИВ строятся из т.н. полевых термов с помощью фиксированного набора предикатных символов. Более сложные формулы строятся индуктивно как в КИВ. Полевые термы – суть поля реляционных таблиц и выражения, которые задают правила вычислительной обработки полей. Полевые термы строятся индуктивно, как в классическом ИП. В РИВ имеют место т.н. реляционные термы. По сути это вычисляемые выражения реляционной алгебры Э.Кодда. Реляционный терм задает правила построения реляционной таблицы из заданного набора входных таблиц. Понятия секвенции, теоремы, аксиомы и вывода совпадают с соответствующими понятиями КИВ.

Непустая реляционная таблица T с полями $f_1, ..., f_k$ может быть представлена формулой РИВ вида $\vee_{i=1}^{n} \left(\wedge_{j=1}^{k} f_j = \alpha_i^k\right)$, где $\alpha_i^1, ..., \alpha_i^k$ – значения полей в i строке таблицы. Формулы такого вида назовем канонической табличной формой (КТФ).

Построим интерпретацию формулы РИВ $F\left(f_1, ..., f_k\right)$. Для этого зададим комплект доменов $D_1, ..., D_k$ – множеств возможных значений полей $f_1, ..., f_k$. Потребуем, чтобы все предикатные символы РИВ были определены всюду на каждом из доменов.

Предложение 1. *Для всякой непротиворечивой формулы РИВ и любой ее невырожденной интерпретации существует эквивалентная ей КТФ.*

Решение прикладной логической задачи (ПЛЗ) в РИВ заключается в построении реляционных термов и последующем их выполнении. В докладе представлен индуктивный алгоритм преобразования реляционного терма Q, порождающего таблицу T_0, в формулу РИВ $H(Q)$. Обозначим $H(T_0)$ КТФ, построенную по таблице T_0.

Следствие. Секвенции $H\left(Q\right) \mapsto H\left(T_0\right)$ и $H\left(T_0\right) \mapsto H\left(Q\right)$ доказуемы.

Секвенции вида $H\left(Q\right) \mapsto H\left(T_0\right)$ названы теоремами Кодда.

Определение. Секвенция РИВ $H\left(Q\right) \mapsto H\left(T_0\right)$ мажорирует секвенцию РИВ $\Psi_1, ..., \Psi_n \mapsto \Psi_0$, если секвенция $\Psi_1, ..., \Psi_n \mapsto H\left(Q\right)$ – теорема, а формулы РИВ Ψ_0 и $H\left(T_0\right)$ эквивалентны.

Предложение 2. Для всякой теоремы РИВ существует теорема Кодда, которая ее мажорирует.

В докладе приводятся решения ряда известных ПЛЗ средствами РМД – задачи о девицах П. С. Порецкого, задачи расстановки 8 ферзей и др.

Иркутский государственный университет, Иркутск
E-mail: krg@irk.ru

[1]Ершов Ю.Л., Палютин Л.А. Математическая логика. - 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1987.

Безранговая формальная математическая теория

Х. М. Рухая, Л. М. Тибуа, Г. О. Чанкветадзе, Г. М. Миканадзе

Языки, где функциональные и предикатные символы не имеют фиксированного ранга, в последние годы стали объектом интенсивного изучения из за довольно широкой сферы их применения [1]. В безранговых языках, обычно, встречаются переменные двух видов: предметные переменные, подставновка которых возможна одним термом и последовательные переменные (в дальнейшем мы будем упоминать их, как «предметные последовательные переменные»), вместо которых возможно подставить конечную последовательность термов. В отличии от выше описанных языков, в изученной нами языке безранговой формальной математической теории встречаются два типа последовательных переменных: а) предметные последовательные переменные, вместо которых возможно подставить конечную последовательность термов и б) пропозиционные последовательные переменные, вместо которых возможно подставить конечную последовательность формул. Кроме того, в этой теории ранги операторов $\bigwedge$, $\bigvee$, τ, $\forall$, $\exists$ и другие не зафиксированы — они безранговые операторы. Определение этих операторов осуществляется в рамках рациональных правил введения производных операторов Ш. Пхакадзе [2], на основе которых в безранговой формальной математической теории были доказаны аналоги некоторых полученных результатов в формальной математической теории Н. Бурбаки [3].

Работа выполнена в ИПМ им. И.Н. Векуа, ТГУ и в Сухумском университете по поддержке научного фонда Грузии им. Шота Руставели (Грант № D/16/4 – 120/11)

Список литературы

[1] Kutsia T., Theorem Proving with Sequence Variables and Flexible Arity Symbols. In: M. Baaz and A. Voronkov, editors, Logic in Programming, Artificial intelligence and Reasoning. Prroceedings of the 9th International Conference LPAR 2002. Volume 2514 of Lecture Notesin Artificial Inteligence. Springer, 2002, 278–291.

[2] Пхакадзе Ш. С. Некоторые вопросы теории обозначений. ТГУ, 1977.

[3] Бурбаки Н. Теория множеств; М.: Наука, 1965.

ИПМ им. И.Н. Векуа, ТГУ, Сухумский университет; Тбилиси, Грузия
E-mail: khimuri.rukhaia@viam.sci.tsu.ge

Принципы построения объектной модели озера Байкал

А. А. Середович

В рамках направления по развитию единых принципов построения онтологий нами была разработана естественнонаучная база знаний об озере Байкал. Информационной основой базы знаний послужили такие ресурсы, как лоция озера, база знаний флоры Байкальской Сибири, онтология минеральных источников Байкальского региона и другие результаты научных исследований озера Байкал. База знаний разрабатывается в рамках системы Мета-2 и языка Libretto [**1**].

База знаний организована в виде набора онтологий, отражающих определенные предметные области. Географическая онтология является базовой, так как практически всем объектам и явлениям реального мира можно сопоставить географические объекты или координаты. Единообразие в описании структур онтологий достигнуто за счет введения классификации в основе каждой онтологии, реализованной путем создания дерева классов.

Основной агрегирующей единицей базы знаний является Топик. Топик или другими словами «тема обсуждения», «статья» представляет собой комплексное описание некоторого объекта и служит своего рода надстройкой над знаниями, представленными об объекте в предметной онтологии.

В некоторых случаях необходимо в рамках базовой иерархии ввести подгруппу Топиков, обладающих специфическими свойствами характерными для класса, не определенного в основной классификации. С помощью введения специальных Has-классов можно осуществить примешивание дополнительных свойств к объектам, не нарушая при этом логической структуры онтологии. Также Has-классы используются для решения проблемы уникальности имен концептов в глобальном контексте. Has-классы позволяют, единожды определив свойство, повторно использовать его при примешивании к объектам, что является полезным при описании свойств, применимых к объектам различных предметных областей.

Реализована возможность представления данных на нескольких языках путем введения вспомогательного класса для хранения строки и соответствующего ей языка. Также при обработке естественнонаучной информации зачастую возникает проблема формализации знаний, представленных в непрерывной форме. Реализован специальный класс, предусматривающий хранение неточных числовых значений, а также числовых диапазонов.

На данный момент база знаний содержит 258 классов, 284 свойства и 8364 объекта, из которых около 6500 билогических и 1500 географических объектов.

Список литературы

[1] Малых А. А., Манцивода А. В. Объектно-ориентированная дескриптивная логика // Известия ИГУ. Серия математика. No. 1. 2011. С. 57–72.

Иркутский государственный университет, г. Иркутск
E-mail: anna.seredovich@gmail.com

Теоретико-графовый алгоритм декомпозиции схем химических реакций

С. И. Спивак, А. С. Исмагилова

Предметом исследования настоящей работы являются математические модели механизмов сложных химических реакций на основании кинетических и термодинамических измерений. Математическим объектом исследования являются системы дифференциальных уравнений химической кинетики и соответствующие им графы, введенные А.И.Вольпертом [**1**]. Рассматривается обратная задача — определение параметров математических моделей (констант скоростей химических реакций) на основе экспериментальных данных о концентрациях участвующих в реакции веществ — переменных исходной системы.

Задачей настоящей работы является автоматизация анализа информативности измерений по кинетике и термодинамике сложных химических реакций. Основная трудность — большая размерность исследуемых систем. Предлагается алгоритм декомпозиции исходных сложных схем на ряд существенно более простых, исследование которых существенно упрощается.

Базовым химическим понятием является понятие маршрута реакции [**2**]. Маршрут — это путь исключения неизмеряемых промежуточных веществ. Алгебраическое определение маршрута — вектор, умножение элементов которого на соответствующие стадии механизма сложной реакции вместе с последующим сложением стадий приводит к исключению промежуточных веществ. Доказана следующая теорема [**2**]:

Теорема. *Число независимых маршрутов равно числу независимых циклов графа химической реакции.*

Таким образом, вместо анализа информативности для всей сложной системы рассматриваются те, которые отвечают за протекание по каждому из независимых маршрутов. Вместо одной сложной системы исследуются несколько существенно более простых схем реакций. Число таких простых систем равно числу независимых маршрутов. Основной результат настоящей работы следующая

Теорема. *Объединение базисов нелинейных параметрических функций кинетических параметров, допускающих однозначное оценивание совпадает с базисом нелинейных параметрических функций исходной сложной системы реакций.*

Результаты иллюстрируются на примерах конкретных практически значимых каталитических реакций.

Список литературы

[1] Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М: Наука, 1975. 394 с.

[2] Спивак С.И., Исмагилова А.С., Хамитова И.А. // ДАН. 2010. Т. 434. № 4. С. 499–501.

Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: S.Spivak@bashnet.ru, IsmagilovaAS@rambler.ru

Построение и минимизация функций, ассоциированных с задачей ВЫПОЛНИМОСТЬ

Р. Т. Файзуллин

В работе предложены различные способы построения вещественных функций многих переменных, глобальные минимумы которых соответствуют решениям задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ для КНФ ассоциированных с задачами криптоанализа асимметричных шифров. Первый способ заключается в переходе к нелинейной функции согласно правилам: $x \to y^2$, $\bar{x} \to (1-y)^2$, $x_1 \wedge x_2 \to y_1^2 y_2^2$, $\vee \to +$, где в левой части стоят литералы и логические операции, а в правой вещественные переменные и арифметические операции. Построен итерационный метод поиска стационарных точек для I [1], [2]. Доказана теорема, позволяющая оценить область сходимости метода.

Теорема. *Пусть задана 3-КНФ содержащая N литералов и имеющая единственный решающий набор. Предположим, что выполнено следующее условие: Пусть задано приближение к решению в виде целочисленной точки с компонентами (0,1) такое, что для среди не выполняющихся при подстановке приближения скобках имеется не менее скобок, невыполнение которых зависит только от одного литерала, а остальные два верные. В этом случае сужение функционала, ассоциированного с 3-КНФ, на луч соединяющий решение и данную целочисленную точку, с координатами в вершинах гиперкуба, отличающуюся от решения является строго монотонной убывающей и более того выпуклой функцией.*

Второй способ заключается в переходе к симметричной системе линейных алгебраических уравнений с неопределенной правой частью: $x \to y$, $\bar{x} \to 1-y$, $L(X) = TRUE \iff AY = F, f_i = 1 \vee 2 \vee 3$. Установлена аналогия между задачей выполнимость и основными задачами линейной алгебры для II [3]. Построена функция относительно коэффициентов разложения предполагаемого решения по базису собственных векторов, минимум которой достигается на решении задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ. Предложены вероятностные тесты определения битов выполняющих наборов для I и II. Для задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, ассоциированной с задачей факторизации построена система линейных алгебраических уравнений, нормальное решение которой аппроксимирует точное решение задачи. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-07-00294а.

Список литературы

[1] Файзуллин Р. Т., Дулькейт В. И., Хныкин И. Г. Алгоритм минимизации функционала, ассоциированного с задачай 3-SAT и его практические применения // Компьютерная оптика. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 176–184.

[2] Файзуллин Р. Т. О решении нелинейных алгебраических систем гидравлики // Сиб. журн. индустр. матем. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 176–184.

[3] Файзуллин Р. Т. Задачи линейной алгебры, соотнесенные с задачей ВЫПОЛНИМОСТЬ // ПДМ, 2009, приложение № 1, 90–91

ОмГТУ, г. Омск
E-mail: frt@omgtu.ru

III. Секция «Теория вычислимости»

Степени категоричности суператомных булевых алгебр

Н. А. Баженов

В работе [**1**] К. Эш установил, для каких ординалов α данная суператомная булева алгебра является Δ^0_α–категоричной. В связи с этим результатом возникает следующий естественный вопрос: имеет ли данная вычислимая суператомная булева алгебра степень категоричности и, если имеет, то какова эта степень?

Приведем необходимые нам определения из статьи [**2**]. Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая модель. *Спектром категоричности* $\mathfrak{A}$ называется следующее множество тьюринговых степеней:

$$\mathrm{CatSpec}(\mathfrak{A}) = \{\mathbf{d} \mid \mathfrak{A}\ \mathbf{d}\text{–вычислимо категорична}\}.$$

Говорят, что тьюрингова степень $\mathbf{d}$ является *степенью категоричности* $\mathfrak{A}$, если $\mathbf{d}$ является наименьшей степенью в $\mathrm{CatSpec}(\mathfrak{A})$.

Если L — линейный порядок, то через $\mathfrak{B}(L)$ будем обозначать соответствующую этому порядку интервальную булеву алгебру. Доказана следующая

Теорема *Пусть δ — вычислимый предельный ординал, $n \in \omega$, $m \in \omega \setminus \{0\}$. Тогда:*

(1) $\mathbf{0}^{(2n+1)}$ *является степенью категоричности булевой алгебры* $\mathfrak{B}(\omega^{n+1} \times m)$,

(2) $\mathbf{0}^{(\delta+2n+2)}$ *является степенью категоричности булевой алгебры* $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n+1} \times m)$,

(3) $\mathbf{0}^{(\delta)}$ *является степенью категоричности булевой алгебры* $\mathfrak{B}(\omega^{\delta} \times m)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00236), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-276.2012.1), ФЦП «Научные и научно–педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (Соглашение № 8227).

Список литературы

[1] Ash C. J. Categoricity in Hyperarithmetical Degrees. Annals of Pure and Applied Logic. Vol. 34 (1987), no. 1. P. 1–14.

[2] Fokina E. B., Kalimullin I., Miller R. Degrees of Categoricity of Computable Structures. Archive for Mathematical Logic. Vol. 49 (2010), no. 1. P. 51–67.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: nickbazh@yandex.ru

Об автоматных представлениях проективных плоскостей

А. С. Денисенко, Н. Т. Когабаев

Автоматные представления проективных плоскостей в данной работе изучаются в соответствии с общим определением автоматной модели предикатной сигнатуры, предложенным А. Нероудом и Б.М. Хусаиновым в [**1**]. Особенность предложенного определения состоит в том, что для распознавания n-местного предиката читающие головки n-ленточного автомата должны двигаться вдоль лент *синхронно*. В рамках этого подхода за последние 20 лет были получены полные или частичные решения проблемы автоматной представимости во многих классах систем: линейные порядки, булевы алгебры, деревья, группы, кольца и др.

Проективные плоскости рассматриваются на основе алгебраического подхода, предложенного А.И. Ширшовым в [**2**]. *Проективной плоскостью* мы называем частичную алгебраическую систему $\mathcal{A} = \langle A, (A^0, {}^0\!A), \cdot\rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0\!A = A$, $A^0 \cap {}^0\!A = \varnothing$ и частичной бинарной коммутативной операцией "$\cdot$", удовлетворяющей естественным аксиомам.

В настоящей работе получено полное решение задачи об автоматной представимости счетных моделей из следующих классов проективных плоскостей: свободно порожденные плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости. Доказаны следующие утверждения:

(1) *Никакая свободно порожденная проективная плоскость не обладает автоматными представлениями ни над каким алфавитом.*

(2) *Произвольная дезаргова (паппова) проективная плоскость автоматно представима тогда и только тогда, когда она конечна.*

Список литературы

[1] Khoussainov B., Nerode A. Automatic presentations of structures, Logic and computational complexity, Proc. of LCC-1994, Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 960, Berlin: Springer, 1995, 367–392.

[2] Ширшов А.И., Никитин А.А. К теории проективных плоскостей, Алгебра и логика, 20, №3, 1981, 330–356.

Новосибирский государственный университет, Институт математики СО РАН
E-mail: nastya0887@yandex.ru, kogabaev@math.nsc.ru

Достаточное условие бесконечности полурешетки Роджерса-Ершова

Б. С. Калмурзаев

Пусть A, B–произвольные множества, $S = \{A, B\}$, и пусть R — произвольное непустое вычислимо перечислимое множество. Определим нумерацию ν_R семейства S, полагая

$$\nu_R(x) = \begin{cases} A, & x \in R; \\ B, & x \notin R; \end{cases}$$

для каждого $x \in \omega$.

Для любых множеств R, Q мы имеем $\nu_R \leq \nu_Q$ тогда и только тогда, когда $R \leq_m Q$. Кроме того, $\nu_R \oplus \nu_Q \equiv \nu_{R \oplus Q}$. Таким образом, отображение ν индицирует изоморфизм верхней полурешетки вычислимо перечислимых m-степеней в верхнюю полурешетку всех нумераций семейства S по модулю эквивалентности нумераций.

Теорема. *Пусть A, B — произвольные Σ^{-1}_n–множества, $S = \{A, B\}$, и пусть R — произвольное непустое вычислимо перечислимое множество. Если существуют вычислимо перечислимые множества B_0, C и Σ^{-1}_{n-1} множество B_1 такие, что:*

1. $B = B_0 \setminus B_1$;
2. $B_1 \cap A$–*вычислимое множество;*
3. $C \cap A$ *и* $C \cap A \cap B$ *вычислимые множества;*
4. $C \supseteq B \setminus A$;
5. *Если n– нечетное, то $B_{n-1} \subseteq A$;*

то ν_R является Σ^{-1}_n-вычислимой нумерацией семейства S.

Неопределяемые понятия можно найти в [1]. Приведенные выше условия являются некоторым обобщением достаточных условий Σ^{-1}_n-вычислимости нумерации ν_R из работы [2].

Список литературы

[1] Ershov Yu. L. On a hierarchy of sets, I // Algebra i Logika, 1968, v.7, n.1, pp, 47-74 (Russian).

[2] Badaev S. A., Talasbaeva T. Computable numberings in the hierarchy of Ershov // In Proceedings of 9th Asian Logic Conference, Novosibirsk, August 2005, S. Goncharov, H. Ono, and R. Downey (eds.). World Scientific Publishers. 2006, pp. 17-30.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы,Казахстан
E-mail: birzhan_mm@mail.ru

p-Универсальность теории булевых алгебр и её фрагментов для некоторых классов

И. В. Латкин

Пусть $\mathfrak{B}$ — класс булевых алгебр. Рассматривается частный случай m-сводимости — p-сводимость (по-другому, полиномиальная трансформируемость), а именно, такая сводимость, когда время вычисления (число шагов машины Тьюринга до остановки) сводящей функции ограничено сверху значением некоторого многочлена от длины входа.

В [**1**] доказано, что по всякому входу X на ленте машины Тьюринга и любой программе P детерминированной машины, можно эффективно построить формулу $\Omega(X,P)$, обладающую свойствами (cE обозначает код объекта E):

а) код формулы $\Omega(X,P)$ строится за время $g(|X|+|cP|)$ для некоторого многочлена g, фиксированного для всех X и P;

б) $Th(\mathfrak{B}) \vdash \Omega(X,P)$ равносильно тому, что машина Тьюринга с программой P допускает вход X за время меньшее $\exp(2,(|X|)$;

в) имеется константа $D>0$, независящая от P (но зависящая от выбранной кодировки формул и программ), что для всякого наперёд заданного $\varepsilon>0$ при всех достаточно длинных X имеет место $|X|\leqslant|c\,\Omega(X,P)|\leqslant D|cP|\cdot|X|^{2+\varepsilon}$.

Эти моделирующие формулы в [**1**] фактически строятся для более простой теории — теории булевой алгебры B, состоящей из двух элементов. Там же отмечается, что при моделировании вычислений длины $\exp(2,|X|^t)$, соответствующая формула $\Omega_t(X,P)$ может строиться по тому же принципу, хотя при этом её длина существенно возрастает: $|X|^t \leqslant |\Omega_t(X,P)| \leqslant D_t|P||X|^{t(2+\varepsilon)}$, но время построения остаётся полиномиальным. Это позволяет вывести следующий факт.

Теорема 1. *Теория $Th(B)$ является p-универсальной для класса языков, распознаваемых за экспоненциальное время.*

Из приведённого в [**1**] построения хорошо видно, что все формулы $\Omega_t(X,P)$ являются $\forall\exists$-формулами, таким образом теорема 1 верна уже для фрагмента $\Pi^0_2(B)$ теории $Th(B)$, состоящего из Π^0_2-формул. Кроме того, отсюда несложно получается

Теорема 2. *Фрагменты $\Pi^0_2(B)$ и $\Sigma^0_2(B)$ p-сводятся друг к другу.*

Список литературы

[1] Латкин И. В. О сложности распознавания теорий и их вычислительной выразительности, Алгебра и логика, 2012, Т. 51, № 2, 216–238.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск
E-mail: lativan@yandex.ru

Сложность умножения матриц над полями различной характеристики

В. В. Лысиков

Асимптотическое поведение вычислительной сложности умножения матриц характеризуется *экспонентой матричного умножения* — таким числом ω, для которого

$$R(\langle n,n,n\rangle) \leqslant C_\varepsilon n^{\omega+\varepsilon} \quad \forall\varepsilon > 0, \tag{1}$$

где $R(\langle n,n,n\rangle)$ — ранг тензора матричного умножения [**1**].

Шёнхаге [**4**] показал, что экспонента матричного умножения одинакова для всех полей одной характеристики c. Будем обозначать ее ω_c.

Основным результатом данной работы является следующая теорема:

Теорема. *Для экспонент матричного умножения справедливо соотношение*

$$\lim_{p\to\infty} \omega_p = \omega_0. \tag{2}$$

Более слабый результат $\limsup \omega_p \leqslant \omega_0$ прост, и, по-видимому, является фольклорным. Автор узнал о нем из интернет-дискуссии с участием Г. Коэна [**2**].

Основным пунктом доказательства является следующая лемма:

Лемма. *Существует набор полей F_c, по одному для каждой характеристики c, такой, что из существования билинейного алгоритма ранга r для $\langle n,n,n\rangle$ над F_p для всех p из некоторой бесконечной последовательности простых чисел следует существование билинейного алгоритма ранга r для $\langle n,n,n\rangle$ над F_0*

Эта лемма может быть доказана с помощью конструкции ультрапроизведения, однако использование неконструктивных методов кажется нам избыточным. Если F — рекурсивное поле [**3**], то билинейные алгоритмы над F являются конструктивными объектами и могут быть результатами вычислимых функций. Удалось доказать следующий конструктивный вариант рассматриваемой леммы:

Лемма. *Пусть $A(n,p)$ — функция, сопоставляющая $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathrm{PRIMES}$ билинейный алгоритм для $\langle n,n,n\rangle$ над полем вычетов $\mathbb{F}_p$. Существует A'''-вычислимая функция $A_0(n)$, сопоставляющая $n \in \mathbb{N}$ билинейный алгоритм для $\langle n,n,n\rangle$ над полем $F_0 = \overline{\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)}$, ранг которого $R(A_0(n)) = \liminf_{p\to\infty} R(A(n,p))$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 12-01-91331-ННИО_а

Список литературы

[1] Buergisser P., Clausen M., Shokrallahi M. A. Algebraic Complexity Theory. — Springer, 1997.

[2] Cohn H. Is there a fast way to compute matrix multiplication mod p? http://mathoverflow.net/questions/62759.

[3] Rabin M. Computable algebra, general theory and theory of computable fields // Trans. AMS — 1960. vol. 95(2) — pp. 341–360.

[4] Schonhage A. Partial and Total Matrix Multiplication // SIAM J. Comput. — 1981. vol. 10(3) — pp. 434–455.

Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Москва
E-mail: lysikov-vv@yandex.ru

Universal numberings for families of d.c.e. sets

K. Abeshev

We investigate properties of universal numberings of finite families of d.c.e. sets and n-c.e. sets. We show different cases of finite families of d.c.e. sets for which there is a universal numbering and case of finite families of d.c.e. and n-c.e. sets for which there is not.

References

[1] Abeshev K., Badaev S.A., A note on universal numberings, in: "5th Conference on Computability in Europe", CiE 2009, pp. 23-27.

[2] Badaev S.A., Goncharov S.S., The theory of numberings: open problems, in: "Computability theory and its applications. Current trends and open problems" (eds. Cholak, Peter A.; Lempp, Steffen; Lerman, Manuel; and Shore, Richard A.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 23–38.

[3] Badaev S. A., Goncharov S. S., Sorbi A., Completeness and universality of arithmetical numberings, in: "Computability and models. Perspectives east and west" (eds. Cooper, S. Barry and Goncharov, Sergey S.), Kluwer/Plenum, New York, 2003, 11–44.

[4] Ershov Y. L., Theory of numerations. Part I: General theory of numerations, Z. Math. Logik Grundlagen Math. **19** (1973), 289–388 (German).

[5] Ershov Y. L., Theory of numerations. Part II: Computable numerations of morphisms, Z. Math. Logik Grundlagen Math. **21** (1975), 473–584 (German).

[6] Ershov Y. L., Theory of numerations. Part III: Constructive models, Z. Math. Logik Grundlagen Math. **23** (1977), 289–371 (German).

[7] Ershov Y. L., Theory of numerations, Nauka, Moscow, 1977 (Russian).

[8] Ershov Y. L., Theory of numberings, in: "Handbook of computability theory", North-Holland, Amsterdam, 1999, 473–503.

[9] Lempp S., Lecture Notes on Priority Arguments, preprint available at http://www.math.wisc.edu/~lempp/papers/prio.pdf.

Department of Mathematics of Kazakh National University, 71 Al-Farabi Ave., Almaty 050038, Kazakhstan
E-mail: kuanqk@gmail.com

On Boolean Algebras of Regular Quasi-aperiodic Languages

A. S. Konovalov

Boolean algebras (BA's) are of principal importance for several branches of logic and computation theory. Accordingly, characterization of naturally arising BA's attracts attention of many researchers (several examples may be found in [**2, 3, 4, 1**]).

In automata theory, people consider many classes of languages which form BA's. In this work we characterize some of these BA's up to isomorphism. If $\mathbb{B}$ is a BA and α an ordinal, let $F_\alpha(\mathbb{B})$ be the α-th iterated Frechet ideal of $\mathbb{B}$ [**1**], $\mathbb{B}^{(\alpha)} = \mathbb{B}/F_\alpha(\mathbb{B})$ and $\mathbb{B}' = \mathbb{B}^{(1)}$. For a finite alphabet Σ, let $\mathbb{Q}_\Sigma$ (resp. $\mathbb{Q}_{\Sigma,d}$) denote the BA of all regular quasi-aperiodic (resp. all regular d-quasi-aperiodic) languages over Σ. A typical result of this paper looks as follows:

Theorem. *1. For any alphabet Σ, $\mathbb{Q}_\Sigma$ is an atomic BA with infinitely many atoms, and $\mathbb{Q}'_\Sigma$ is a countable atomless BA.*

2. For any $d > 1$ and a unary alphabet Σ, $\mathbb{Q}_{\Sigma,d}$ is an atomic BA with infinitely many atoms, and $\mathbb{Q}'_{\Sigma,d}$ is an BA with 2^d elements.

3. For any $d > 1$ and alphabet Σ with at least two symbols, $F_0(\mathbb{Q}_{\Sigma,d}) \subset F_1(\mathbb{Q}_{\Sigma,d}) \subset \cdots \subset F_\omega(\mathbb{Q}_{\Sigma,d}) = F_{\omega+1}(\mathbb{Q}_{\Sigma,d})$, for each $n < \omega$ the BA $\mathbb{Q}^{(n)}_{\Sigma,d}$ is atomic with infinitely many atoms, and $\mathbb{Q}^{(\omega)}_{\Sigma,d}$ is a countable atomless BA.

From the well-known facts on BA's (see Chapter 1 of [**1**]) it follows that assertions 1 — 3 characterize the corresponding BA's up to isomorphism.

The analogous results for regular languages were obtained earlier in collaboration with V. L. Selivanov [**5**].

References

[1] Goncharov S. S. Countable Boolean Algebras and Decidability. Plenum, New York, 1996.

[2] Hanf W. The boolean algebra of logic. Bull. Amer.Math. Soc., 20, No 4 (1975), 456–502.

[3] Lempp S., Peretyat'kin M., Solomon R. The Lindenbaum algebra of the theory of the class of all finite models. Journal of Mathematical Logic 2, No 2 (2002), 145–225.

[4] Selivanov V. L. Positive structures. In: Computability and Models, Perspectives East and West, S. Barry Cooper and Sergei S. Goncharov, eds., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003, 321–350.

[5] Selivanov V., Konovalov A. Boolean Algebras of Regular Languages. DLT 2011, LNCS 6795, G. Mauri and A. Leporati, eds., Springer, Heidelberg, 2011, 386–396.

Institute of Informatics Systems, Novosibirsk
E-mail: jack@sibmail.ru

Categoricity and Complexity Relations over Algebraic Structures

J. A. Tussupov

We will consider the problems on algorithmic complexity of isomorphic and definable properties on models and connections with Scott families.

In paper [**1**] authors showed that for each computable ordinal α there is a structure that is Δ^0_α categorical but not relatively Δ^0_α categorical. This structure of the countable relational language. S.S. Goncharov [**2**] suggested the method of definability structure with countable computable set of predicates where arity of them bounded by finite number to the oriented graph such that categoricity is preserving. J.A. Tussupov suggested [**2**], [**3**] the different methods of definability oriented graph to the structures of the next signatures σ_i, $i = 0, 1, 2$ where σ_0 of the symmetric irreflexive graphs,σ_1 of the bipartite graph and to the structure of the signature σ_2 with two equivalences and used the idea from [**4**] for the definability symmetric irreflexive graphs to the σ_3 of the signature nilpotent groups, the idea from [**5**] for the definability symmetric irreflexive graphs to the structures signature σ_4 of the rings, σ_5 of the commutative semigroups, σ_6 of the lattices, such that categoricity is preserving for the computable **successor ordinal** α. These results are true for the **limit ordinal** α.

Let $\mathcal{A}$ structure of signature σ_i, where $i = 0, 6$.

Theorem 1. *For each computable ordinal α there is a computable structure $\mathcal{A}$ of signature σ_i that is Δ^0_α categorical but not relatively Δ^0_α (and without formally Σ^0_α Scott family).*

Theorem 2. *For each computable ordinal α there is a computable structure $\mathcal{A}$ of signature σ_i with additional relation R that is intrinsically Σ^0_α but not relatively intrinsically Σ^0_α* on $\mathcal{A}$.

References

[1] Chisholm J., Fokina E. B., Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., Miller S. Intrinsic bounds on complexity and definability at limit levels. J. of Symbolic Logic, Vol.74, No.3,2009, pp.1047-1060.

[2] Goncharov S. S. Isomorphisms and definable relations on Computable Models, Proceeding of the Logic Colloquium 2005, Athens, pp..26–45.

[3] Tussupov J. A. Isomorphisms And Algorithmic Properties Structures With Two Equivalences, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 18, No 3, Sept. 2012, P. 468.

[4] Mekler A. H. Stability of nilpotent groups of class 2 and prime exponent, J. Symbolic Logic. – 1981. – Vol.46. – P.534-562.

[5] Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M. Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures // Annals of Pure and Applied Logic. – 2002. – Vol. 115 – P.71-113.

Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
E-mail: tussupov@mail.ru

Classes of Lachlan's sets for 2-c.e. Turing degrees

M. M. Yamaleev

Given 2-computable enumerable (2-c.e.) set D with an effective approximation $\{D_s\}_{s\in\omega}$, we say that $L(D) = \{s : \exists x \in D_s - D\}$ is the Lachlan set for D. This associated set for D has well-known properties: it is c.e., it is Turing reducible to D, and D is c.e. relative to $L(D)$. Let $L[\mathbf{d}] = \{\deg(L(B)) : B$ is 2-c.e and $B \equiv_T D\}$ be the class of degrees of Lacnlan's sets for the Turing degree $\mathbf{d} = \deg(D)$.

In the talk, we will discuss a distribution of elements in $L[\mathbf{d}]$ for different 2-c.e degrees $\mathbf{d}$. It's easy to see that for a c.e. degree $\mathbf{d}$ any c.e. degree below it is an element of $L[\mathbf{d}]$. If $\mathbf{d}$ has a properly 2-c.e. degree (i.e., it doesn't contain a c.e. set) then the situation is different, particular, neither $\mathbf{0}$ nor $\mathbf{d}$ is in $L[\mathbf{d}]$. In [**1**], Ishmukhametov proved that for some properly 2-c.e. degrees $\mathbf{d}$ the class $L[\mathbf{d}]$ has the least and the greatest elements, moreover, he showed that in this case $L[\mathbf{d}]$ can be either a singleton or an interval of c.e. degrees (and both cases are possible). Also he asked in [1] whether there exists a 2-c.e. degree $\mathbf{d}$ such that $L[\mathbf{d}]$ has no minimal element. In a joint work with Fang and Wu we show that the answer is affirmative.

Also we will discuss applications of the Lachlan sets for studying 2-c.e. Turing degrees, especially, for the recent construction of "bubble" by Arslanov, Kalimullin and Lempp [**2**].

The work is supported by RFBR (Projects 09-01-97010, 10-01-00399), ADTP "Development of the Scientific Potential of Higher School" of the Russian Federal Agency of Education (Grant 2.1.1/5367), Federal Target Grant "Scientific and Educational Personnel of Innovation of Russia" (Government contract No. P 269), NTU grant RG37/09, M52110101.

References

[1] Ishmukhametov Sh. On the predecessors of d.r.e. degrees // Arch. Math. Logic. – 1999. – V. 38. – P. 373–386.

[2] Arslanov M., Kalimullin I., Lempp S. On Downey's conjecture // J. Symbolic Logic. – 2010. – V. 75. – P. 401–441.

N. I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics of Kazan Federal University, Kazan (Russia)
E-mail: marsiam2@yandex.ru

IV. Секция «Теория групп»

О локальной эквивалентности дистанционно регулярных раскрасок графов

С. В. Августинович, А. Ю. Васильева

Разбиение вершин графа G на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_{k-1}$ называется *совершенной k-раскраской*, если для произвольных $i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ существует такое число α_{ij}, что любая вершина из V_i имеет ровно α_{ij} соседей из V_j. Матрицу $A = (\alpha_{ij})$ будем называть матрицей параметров раскраски. Раскраску можно также представить как функцию φ из множества вершин графа в множество цветов $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Совершенная раскраска $V_0, V_1, \ldots, V_{k-1}$ *дистанционно регулярна*, если матрица ее параметров тридиагональна. Две дистанционно регулярные раскраски графа назовем r-локально-эквивалентными, если в их матрицах параметров первые r строк совпадают. Данное понятие может оказаться полезным при исследовании дистанционно регулярных структур.

Теорема. *Пусть дистанционно регулярная раскраска φ n-мерной прямоугольной решетки является 3-локально-эквивалентной нередуцируемой раскраске той же решетки в максимально возможное число цветов. Тогда существует совершенная раскраска $2n$-мерного единичного куба E^{2n} с теми же параметрами, что и раскраска φ.*

Ранее (см.[1]) было доказано, что число цветов в нередуцируемой дистанционно регулярной раскраске n-мерной прямоугольной решетки не превосходит $2n+1$, причем раскраска с максимально возможным числом цветов существует. Из Теоремы получаем

Следствие. *Нередуцируемая дистанционно регулярная раскраска n-мерной прямоугольной решетки в $2n+1$ цвет является единственной.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 10-01-00424-а), а также Целевой программы СО РАН на 2012-2014гг. (интеграционный проект No. 14).

Список литературы

[1] Avgustinovich S., Vasil'eva A. Distance regular colorings of n-dimensional rectangular grid // XIII International Workshop "Algebraic and Combinatorial Coding Theory", Pomorie, Bulgaria, June 15-21, 2012. P. 35-40.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: avgust@math.nsc.ru, vasilan@math.nsc.ru

О свойстве антиподальности собственных функций графов

С. В. Августинович, Е. В. Горкунов, Ю. Д. Семина

Раскраска вершин простого графа называется *совершенной*, если цветовой состав окружения любой вершины зависит только от ее цвета. Граф называется *дистанционно регулярным*, если его дистанционная раскраска относительно любой вершины является совершенной с одними и теми же параметрами. Всякий собственный вектор матрицы смежности графа естественным образом задает на его вершинах *собственную функцию*.

Граф называется *антиподальным*, если на расстоянии диаметра от любой его вершины находится ровно одна другая. Собственная функция антиподального графа является *плюс-антиподальной* (*минус-антиподальной*), если ее значения в антиподальных вершинах совпадают (противоположны). Будем говорить, что собственная функция обладает свойством антиподальности, если она плюс- или минус-антиподальна. Свойство антиподальности зачастую бывает полезным [**1**] при восстановлении комбинаторных объектов по частичной информации.

Хорошо известно, что собственные функции антиподального дистанционно регулярного графа обладают свойством антиподальности. В настоящей работе исследуются собственные функции произведения таких графов. Здесь под *произведением* графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ понимается граф с множеством вершин $V_1 \times V_2$, в котором вершины $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ смежны тогда и только тогда, когда или $u_1 = v_1$ и $(u_2, v_2) \in E_2$, или $u_2 = v_2$ и $(u_1, v_1) \in E_1$.

Собственные функции произведения графов известным образом определяются по собственным функциям графов-сомножителей (см., например, [**2**, глава 2]). Эта связь позволяет получить следующий результат.

Теорема. *Каждая собственная функция произведения двух антиподальных дистанционно регулярных графов единственным образом представляется в виде суммы плюс-антиподальной и минус-антиподальной собственных функций.*

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0368), РФФИ (проекты №№ 10-01-00424, 10-01-00616), а также Целевой программы СО РАН на 2012–2014 гг. (проект № 14).

Список литературы

[1] Августинович С. В. Об одном свойстве совершенных двоичных кодов // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1995. — Т. 2, № 1. — С. 4–6.

[2] Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и применение. — Киев: Наукова думка, 1984. — 384 с.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск; Новосибирский государственный университет

E-mail: avgust@math.nsc.ru, evgumin@gmail.com, jul.syomina@gmail.com

Расширения централизаторов в нильпотентных холловых R-группах

М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников

Пусть G — группа, g — нееденичный элемент в G. В любом многообразии групп естественным образом определяется понятие расширения централизатора и итерированное расширение централизаторов. В 1991 г. В. Н. Ремесленников [1] сформулировал следующую гипотезу (на другом, но эквивалентном языке): если F — свободная группа, H — координатная группа неприводимого алгебраического множества над F, то H изоморфна подгруппе некоторого итерированного расширения централизаторов. В то время были уже известно результат Р. Линдона и результат А. Г. Мясникова и О. Г. Харлампович о том, что подгруппы итерированных расширений централизаторов над F являются неприводимыми координатными группами. Знаменитая теорема А. Г. Мясникова и О. Г. Харлампович утверждает, что верно и обратное. Мы вводим понятие $CT_{1,R}$-группы, где R — кольцо, и доказываем аналог результата Линдона выше.

Определение. Группа G (R-группа) называется CT_1-группой, если для любого нецентрального элемента x централизатор $C_G(x)$ является абелевой подгруппой (R-модулем).

Теорема. Пусть R — евклидово кольцо, G — конечно порожденная 2-ступенно нильпотентная группа без R-кручения со свойством $CT_{1,R}$, и H — итерированное расширение централизаторов над G. Тогда группа H дискриминируется R-группой H. В частности, H является $CT_{1,R}$-группой, все её подгруппы, содержащие G, являются неприводимыми координатными группами над G.

Далее на примере свободной 4-ступенно нильпотентной R-группы (R — евклидово кольцо) ранга 2 показываем, что теорему выше нельзя обобщить на нильпотентные группы ступени ≥ 4. Мы приводим также пример неприводимой координатной группы H над $F_Q(2)$ (свободная 2-нильпотентная Q-группа ранга 2), которая не изоморфна никакой подгруппе итерированного расширения централизаторов над $F_Q(2)$, и следовательно, аналог теоремы Мяснокова–Харлампович не верен для нильпотентных групп.

Список литературы

[1] Remeslennikov V. N. ∃-free groups and groups with length function // Int. conf. algebra ded. the memory of A. I. Shirshov (August 20-25, 1991, Barnaul, Russia), Contemp. Math., Am. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 369–376.

Тбилисский гос. университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge
ИМ СО РАН, Омский филиал, Омск, Россия
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Доминионы абелевых подгрупп метабелевых групп

А. И. Будкин

Доминион $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H группы A в квазимногообразии $\mathcal{M}$ — это множество всех элементов $a \in A$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из A в каждую группу из $\mathcal{M}$, т.е.

$$\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : A \to M,\ \text{если } f\mid_H = g\mid_H,\ \text{то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : A \to M$ обозначены гомоморфизмы группы A в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы A, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). В результате возникает понятие замкнутой подгруппы.

Группа H называется абсолютно замкнутой в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы A из $\mathcal{M}$ из каждого включения $H \leq A$ следует, что $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = H$. Известно, что существует свободная абелева группа конечного ранга, которая не является абсолютно замкнутой в классе метабелевых групп.

Направление исследований, представленное в данной работе, связано с нахождением всех групп H, замкнутых в любой метабелевой группе, содержащей H в качестве подгруппы.

Обозначения: $gr(a, H)$ — группа, порожденная H и элементом a, $\mathcal{A}^2$ — класс метабелевых групп.

Теорема 1. *Если свободная абелева группа конечного ранга k не абсолютно замкнута в классе метабелевых групп, то любая абелева группа без кручения ранга k не является абсолютно замкнутой в $\mathcal{A}^2$.*

Теорема 2. *Пусть $G = gr(A, H)$ — метабелева группа, A, H — группы, причем H изоморфна аддитивной группе рациональных чисел. Предположим, что нормальное замыкание $M = H^G$ подгруппы H в группе G — абелева группа без кручения. Пусть еще $A' \cap M = (1)$ и $M \neq [A, M]$. Тогда $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.*

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

О ниль-радикале кольца эндоморфизмов абелевой группы без кручения

С. В. Вершина, В. Х. Фарукшин

Пусть A — редуцированная абелева группа без кручения, V — ее делимая оболочка, $A_1 = \widehat{A}$ — $\mathbb{Z}$-адическое пополнение группы A, $A_2 = \widehat{A} \otimes \mathbb{Q}$ — делимая оболочка группы A_1, $E = E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A, $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = E \otimes \mathbb{Q}$ — кольцо квазиэндоморфизмов группы A, $E_1 = \widehat{E}$ — $\mathbb{Z}$-адическое пополнение кольца E, $E_2 = E_1 \otimes \mathbb{Q}$ — делимая оболочка кольца E_1.

Если B — подгруппа группы A, то B_* — сервантная оболочка группы B в группе A, $\overline{B}_*$ — $\mathbb{Z}$-адическое замыкание подгруппы B_* в группе A. Все вложения групп и колец канонические. Сервантные замкнутые в $\mathbb{Z}$-адической топологии вполне характеристические подгруппы группы A будем называть s-подгруппами. $S_0 = \langle 0 \rangle$ — нулевая подгруппа, S_1 — сервантная замкнутая подгруппа группы A, порожденная ненулевыми минимальными s-подгруппами группы A. Если S_α — построены для всех ординалов $\alpha < \beta$, то при непредельном β подгруппа S_β — сервантная замкнутая подгруппа, порожденная всеми минимальными по модулю $S_{\beta-1}$ s-подгруппами группы A; при предельном β подгруппа S_β — сервантная замкнутая подгруппа порожденная всеми S_α при $\alpha < \beta$.

Лемма 1. *Если S — нильпотентный идеал в кольце без кручения R, то:*

1) S_* — нильпотентный идеал в R;

2) $\overline{S}_*$ — нильпотентный идеал в R.

3) $\widehat{S_*}$ — нильпотентный идеал в $\widehat{R}$;

4) $\widehat{S_*} \otimes \mathbb{Q}$ — нильпотентный идеал в кольце $\widehat{R} \otimes \mathbb{Q}$.

Лемма 2. *Пусть A — редуцированная абелева группа без кручения конечного ранга. Тогда:*

1) Существует биекция между всеми сервантными вполне характеристическими подгруппами группы A и $\mathcal{E}(\mathcal{A})$-подмодулями $\mathcal{E}(\mathcal{A})$-модуля V; (Reid J. D.)

2) Существует биекция между всеми s-подгруппами группы A и E_1-подмодулями E_1-модуля A_1, имеющими ненулевое пересечение с A;

3) Существует биекция между всеми s-подгруппами группы A и E_2-подмодулями E_2-модуля A_2, имеющими ненулевое пересечение с V.

Теорема 3. *Если $A = S_\alpha$ и α — конечный, то эндоморфизм $\varphi \in N(E)$ в том и только в том случае, если $\varphi(S_k) \subset S_{k-1}$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, \alpha$.*

Следствие 4. *Если $A = S_1$, то $N(E) = 0$.*

Следствие 5 (П. А. Крылов). *Если группа A имеет конечный ранг, то ниль-радикал $N(E)$ кольца ее эндоморфизмов нильпотентен.*

Московский Педагогический Государственный Университет, Москва
E-mail: svetlanavershina@gmail.com, fvkh@mail.ru

О решетках, порожденных вполне модулярными элементами

А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов

Напомним, что пара $(a,\ b)$ элементов решетки $\langle L;\wedge,\vee\rangle$ называется *модулярной*, если

$$\forall x \in L : x \leq b \rightarrow x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b.$$

Если пара элементов модулярна в двойственной решетке, то её называют *дуально модулярной*.

Следуя [**1**], элемент a назовём *левомодулярным*, если для любого элемента b пара $(a,\ b)$ модулярна. Элемент b называется *правомодулярным*, если пара $(a,\ b)$ модулярна для любого элемента a. Нетрудно видеть, что свойство «быть левомодулярным элементом» самодвойственно, что неверно для свойства «быть правомодулярным элементом». Если элемент в двойственной решетке является правомодулярным, то будем называть его *правокомодулярным* элементом.

Все три свойства не только попарно различны, но и наличие у одного элемента любых двух из них не влечет обладания третьим.

Назовем элемент *вполне модулярным*, если он левомодулярен, правомодулярен и правокомодулярен одновременно.

Теорема 1. *Пусть a и b — вполне модулярные элементы решетки L. Тогда подрешетка, порожденная элементами a, b и x, модулярна для любого элемента x из L.*

В [**2**] анонсировано утверждение, что решетка, порожденная четырьмя или большим числом левомодулярных элементов, не обязана быть модулярной. Этот результат может быть усилен следующим образом:

Теорема 2. *Для любого натурального $n > 3$ существует немодулярная решетка, порожденная n атомами, каждый из которых вполне модулярен в ней.*

Список литературы

[1] Stern M. Semimodular Lattices. Theory and Applications, Cambridge University Press, 1999.

[2] Shushpanov M. P. Nonmodular lattices generated by modular elements. International Conference on Algebra, Kyiv (2012), 146.

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург
E-mail: Alexander.Gein@usu.ru, Mikhail.Shushpanov@gmail.com

Линейная жесткость линейных МДР-кодов с кодовым расстоянием 2 в пространстве над простым полем

Е. В. Горкунов, Е. В. Сотникова

Кодом C длины n называют произвольное подмножество векторного пространства F_q^n размерности n над полем Галуа $F_q = GF(q)$. Если код образует линейное подпространство в F_q^n, то он *линеен*. Изометрия пространства F_q^n, оставляющая нулевой вектор неподвижным, называется *симметрией*. Симметрии линейного кода составляют основу его группы автоморфизмов, поскольку известно, что $\mathrm{Aut}(C) \cong \mathrm{Sym}(C) \leftthreetimes C$. При $q \geq 4$ пространство F_q^n имеет симметрии, не являющиеся полулинейными, то есть не все симметрии F_q^n лежат в общей полулинейной группе $\Gamma\mathrm{L}_n(q)$.

Будем называть линейный код *линейно жёстким*, если все его симмметрии полулинейны. В [**1**] доказано, что код Хэмминга является линейно жёстким. Однако там же приведён пример бесконечного класса линейных кодов, которые имеют симметрии, не являющиеся полулинейными. В настоящей работы продолжено исследование линейной жесткости кодов. В частности, рассматриваются линейные МДР-коды с кодовым расстоянием $d = 2$ в пространстве над простым полем F_p. Имеет место

Теорема. *В пространстве F_p^n, где p — простое, линейный МДР-код с кодовым расстоянием 2 является линейно жестким.*

Список литературы

[1] Горкунов Е. В. Группы автоморфизмов кодов Хэмминга и их компонент: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Новосибирск, 2010. — 78 с.

ММФ НГУ, г. Новосибирск
E-mail: jennies@list.ru

О разрешимых AFA–группах

О. Ю. Дашкова

Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки, и изучались достаточно много. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из важных условий конечности является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например [**1**], [**2**]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [**2**].

В [**3**] авторы ввели в рассмотрение антифинитарные линейные группы. Пусть $G \leq GL(F, A)$, $A(wFG)$ — фундаментальный идеал группового кольца FG. Авторы полагают $augdim_F(G) = dim_F(A(wFG))$. Линейная группа G называется антифинитарной, если любая собственная подгруппа H группы G, для которой размерность $augdim_F(H)$ бесконечна, конечно порождена.

Если $G \leq GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$–модуля A, где $\mathbf{R}$ — ассоциативное кольцо. Б.А.Ф.Верфриц ввел в рассмотрение артиново–финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$ и нетерово–финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbf{R}$, являющиеся аналогами финитарных линейных групп [**4**]–[**6**].

Автором рассматривается аналог антифинитарных линейных групп в теории модулей над групповыми кольцами. Пусть A — $\mathbf{R}G$–модуль, где $\mathbf{R}$ — ассоциативное кольцо, G — группа. Будем говорить, что группа G является AFA–группой, если любая собственная подгруппа H группы G, коцентрализатор которой в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$–модулем, конечно порождена.

В [**7**] исследовались локально разрешимые AFA–группы в случае, когда $\mathbf{R}$ — произвольное дедекиндово кольцо. В данной работе изучаются конечно порожденные разрешимые AFA–группы в случае, когда $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Как выяснилось, структура рассматриваемой конечно порожденной разрешимой AFA–группы проще, чем в [**7**]. Далее всюду исследуется AFA–группа G, такая, что $C_G(A) = 1$.

При изучении модулей над групповыми кольцами с различными условиями конечности важную роль играет понятие коцентрализатора подгруппы H в модуле A, введенное в [**8**].

Определение. *Пусть A — $\mathbf{R}G$–модуль, где $\mathbf{R}$ — ассоциативное кольцо, G — группа. Если $H \leq G$, то фактор–модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$–модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.*

Пусть $AD(G)$ — множество всех элементов $x \in G$, таких, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A — артинов $\mathbf{R}$–модуль. Из определения $AD(G)$ вытекает, что $AD(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

Основным результатом работы являются следующая теорема.

Теорема. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$–модуль, G — конечно порожденная разрешимая AFA–группа, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbb{Z}$–модулем, справедливы следующие утверждения:*

(1) коцентрализатор подгруппы $AD(G)$ в модуле A является артиновым $\mathbb{Z}$–модулем;

(2) группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу U, такую. что фактор–группа G/U полициклическая.

Список литературы

[1] Phillips R. E. The structure of groups of finitary transformations. J. Algebra., 119, № 2(1988), 400–448.

[2] Phillips R. E. Finitary linear groups: a survey. "Finite and locally finite groups". NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci., Kluver Acad. Publ., Dordreht, 471 (1995), 111–146.

[3] Kurdachenko L. A., Muñoz-Escolano J. M., Otal J. Antifinitary linear groups. Forum Math., 20, № 1 (2008), 27–44.

[4] Wehrfritz B. A. F. Artinian-finitary groups over commutative rings. Illinois J. Math., 47, № 1–2 (2003), 551–565.

[5] Wehrfritz B. A. F. Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings. J. Lond. Math. Soc. (2), 70, № 2 (2004), 325–340.

[6] Wehrfritz B. A. F. Artinian-finitary groups are locally normal-finitary. J. Algebra, 287, № 2 (2005), 417–431.

[7] Дашкова О. Ю. Локально разрешимые AFA–группы. Теория групп и ее приложения. Тезисы IX Международной школы–конференции по теории групп, посвященной 90–летию со дня рождения З.И.Боревича. Владикавказ, 2012, 41–43.

[8] Курдаченко Л. А. О группах с минимаксными классами сопряженных элементов. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Академия наук Украины, Киев, 1993, 160–177.

Днепропетровск, Днепропетровский национальный университет
E-mail: odashkova@yandex.ru

Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага–Солитера

Ф. А. Дудкин

Группа называется *хопфовой*, если всякий её гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т.е. является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$), не равные нулю. Баумслаг и Солитер [**1**] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются

$$BS(p,q) = \langle a, t \mid t^{-1}a^p t = a^q \rangle.$$

Эти группы оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т.д.

Д. Маклаури [**2**], используя утверждения алгебраической геометрии, описал все неприводимые представления группы $BS(p,q)$ над $\mathbb{C}$. Мы укажем все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$ над $\mathbb{C}$. При этом мы используем только описание подгрупп конечного индекса групп Баумслага-Солитера, полученное ранее, и стандартные теоремы линейной алгебры и теории чисел.

Обозначим через H_m группу заданную своим копредставлением

$$H_m \cong \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_m, d \mid a_i^p = a_{i+1}^q, i = 1, 2, \ldots, m-1, d^{-1}a_m^p d = a_1^q \right\rangle.$$

Заметим, что группа $BS(p,q)$ изоморфна H_1. В [**3**] доказано, что всякая подгруппа конечного индекса группы $BS(p,q)$ изоморфна некоторой группе H_m. Обозначим для некоторых $\mu, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $s \in \mathbb{N}$ невырожденные n на n матрицы

$$\mathbf{A_{m-i}} = \begin{pmatrix} \mu^{s^i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu^{s^{i+m}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \mu^{s^{i+(n-1)m}} \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & c_n \\ c_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & c_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

здесь $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Теорема. *Пусть H – подгруппа конечного индекса группы $BS(p,q)$, изоморфная H_m и $\varphi\colon H \to \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ – неприводимое представление. Тогда существуют такие*
1. Натуральное число $l \perp pq$, которое не делит $q^{km} - p^{km}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и делит $q^{nm} - p^{nm}$,
2. Натуральное число s такое, что $q \equiv ps \mod l$,
3. Комплексные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ не равные нулю,
4. Комплексное число μ – примитивный корень из 1 степени l,
что в подходящем базисе $\varphi(a_i) = \mathbf{A_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\varphi(d) = \mathbf{D}$. Других неприводимых представлений нет.

Работа поддержана грантами РФФИ № 10-01-00391, 12-01-90006-Бел-а и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.1510).

Список литературы

[1] Baumslag G., Solitar D., Some two-generator one-relator non-hopfian groups, Bull. AMS, 68, N 3(1962), 199-201.

[2] McLaury D., "Irreducible Representations of Baumslag-Solitar Groups" Submitted; arXiv:1112.3952, 2011.

[3] Dudkin F. A., Subgroups of finite index in Baumslag-Solitar groups, Algebra and Logic, Vol. 49 No. 3 2010, 221-232.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: DudkinF@ngs.ru

О конгруэнциях m-групп

А. В. Зенков

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, {}_*\rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge\rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция ${}_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1}\rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge\rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения $(xy)_* = x_*y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*$. В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом ${}_*$ записываем *как пару* $(G,_*)$. Будем говорить [**1**], что m-группа $(G,_*)$ допускает (точное) представление порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω, если $G \subseteq Aut(\Omega)$ и $g_* = aga$ для любого $g \in G$, где a– реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a). Представление (G, Ω, a) назовем *m-транзитивным*, если для всех $w, w' \in \Omega$, быть может за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = gr.(G, a)$, что $(w)x = w'$ (здесь o - неподвижная, относительно a, точка Ω).

Указывается способ построения m-конгруэнции произвольного m-транзитивного представления. Вводится понятие m-примитивного представления и получено описание таких представлений в терминах стабилизаторов точек. Далее, исследовано строение m-групп, допускающих собственно m-транзитивное представление. Показано, что m-транзитивная и m-примитивная группа с единичным стабилизатором точки будет архимедовой линейно упорядоченной группой. Вводится понятие m-2-транзитивного представления и указаны необходимые и достаточные условия m-2-транзитивности. Изучены некоторые свойства m-2-транзитивных представлений. В частности, такие представления m-транзитивны и m- примитивны.

Список литературы

[1] Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49, № 124. P. 743–766.

Алтайский Государственный Аграрный Университет, кафедра математики
E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

О минимальных пересечениях пар нильпотентных подгрупп в группах из $Aut(A_n)$, содержащих $Inn(A_n)$

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G, $M = \{A \cap B^g |\ g \in G\}$, M_{min} — подмножество из M, состоящее из минимальных по включению элементов множества M. В работе [**1**, теорема 1] для абелевых подгрупп A и B доказано, что $\langle M_{min}\rangle \leq F(G)$. Если же хотя бы одна из подгрупп A и B неабелева, даже минимальная неабелева, а вторая абелева, то соответствующие примеры показывают, что заключение $\langle M_{min}\rangle \leq F(G)$ становится неверным. Возникает следующий вопрос: что мешает выполнению заключения $\langle M_{min}\rangle \leq F(G)$ хотя бы в некоторых классах групп? В настоящем сообщении ответ на этот вопрос получен для нильпотентных подгрупп A и B группы G такой, что $Inn(A_n) \leq G \leq Aut(A_n)$.

Теорема. *Пусть G — конечная группа изоморфная подгруппе из $Aut(A_n)$, содержащая подгруппу, изоморфную $Inn(A_n)$, $n \geq 3$, A и B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $\langle M_{min}\rangle \not\leq F(G)$;

(б) выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $G \cong S_4$, $A = \langle M_{min}\rangle \in Syl_2(G)$ и либо $V_4 \cong B \not\leq O_2(G)$, либо $B \cong Z_4$;

(2) $G \cong Aut(A_6)$, $A = B = \langle M_{min}\rangle \in Syl_2(G)$;

(3) $G \cong S_8$, $T \in Syl_2(G)$, z — инволюция из $Z(T)$, $T_1 = O_2(C_G(z))$, $< M_{min} >= T_1$ и $(A, B) \in \{(T, T), (T, T_1), (T_1, T), (T_1, T_1)\}$

Замечание. Порядок в записи пары $\{A, B\}$ является существенным. Так в пункте (б1) теоремы, если поменять местами подгруппы A и B, то $\langle M_{min}\rangle \leq O_2(C_G(z)) = F(G)$.

Теорема в частном случае дает положительный ответ на вопросы 15.40 и 17.40 из [**2**] даже в более сильной редакции, чем требуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы отделения математических наук РАН (проект 09-T-1-1004), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-C-1-1018) и УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12-C-1-1009).

Список литературы

[1] Зенков В. И. Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах. Мат. заметки, № 56 (1994). С. 869–871.

[2] Коуровская тетрадь. Нерешенные проблемы в теории групп. 17-е издание, РАН, Сибирское отделение, Институт математики, Новосибирск 2010.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: zenkov@imm.uran.ru

О группах со слойно конечными централизаторами инволюций

М. Н. Ивко

В работе [**1**] В.П.Шунковым было показано, что периодическая группа, обладающая почти регулярными инволюциями локально конечна. С тех пор этот результат был обобщён в различных направлениях в более обширных классах групп (см., например, [**2**], [**3**], [**4**]).

Поскольку понятие слойно конечной группы является естественным обобщением понятия конечной группы, в докладе рассматриваются некоторые достаточные условия, при которых группа с конечной инволюцией и слойно конечными централизаторами инволюций является локально конечной.

Список литературы

[1] Шунков В. П. О периодической группе с почти регулярными инволюциями, Алгебра и логика, 7, №1 (1968), 113–121.

[2] Беляев В. В. Группы с почти регулярной инволюцией, Алгебра и логика, 26, №5 (1987), 531–535.

[3] Шунков В. П. Группы с конечно вложенной инволюцией, Алгебра и логика, 29, №1 (1990), 102–123.

[4] Созутов А. И. О группах с почти регулярной инволюцией, Алгебра и логика, 46, №3 (2007), 360–368.

филиал ОмГПУ, г.Тара
E-mail: ivko_m@mail.ru

О конечных непростых трипримарных группах с несвязным графом простых чисел

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

В работе [**1**] были изучены главные факторы коммутантов конечных трипримарных групп с несвязным графом простых чисел. В данной работе продолжается изучение таких групп. Доказана следующая

Теорема. *Пусть G—конечная неразрешимая трипримарная группа с несвязным графом простых чисел, $\overline{G} = G/F(G)$ — почти простая, но не простая группа и $F(G) \neq 1$. Тогда $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\overline{G} \cong S_5$, каждый 2-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(2)S_5$-модулей и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(3)S_5$-модулей.

(2) $\overline{G} \cong S_6$, каждый 2-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 4-мерных квазиэквивалентных неприводимых $GF(2)S_6$-модулей и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(3)S_6$-модулей.

(3) $\overline{G} \cong M_{10}$, каждый 2-главный фактор группы G изоморфен единственному 8-мерному неприводимому $GF(2)M_{10}$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 4-мерных неприводимых $GF(3)M_{10}$-модулей.

(4) $\overline{G} \cong Aut(L_2(8))$, $O_3(G) = 1$ и каждый 2-главный фактор группы G изоморфен одному из двух неприводимых $GF(2)Aut(L_2(8))$-модулей размерности 6 или 12.

(5) $\overline{G} \cong PGL_2(7)$, каждый 2-главный фактор группы G изоморфен единственному 6-мерному неприводимому $GF(2)PGL_2(7)$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух неприводимых $GF(3)PGL_2(7)$-модулей размерности 6 или 12.

(6) $\overline{G} \cong G_2(2)$, каждый 2-главный фактор группы G изоморфен единственному 6-мерному неприводимому $GF(2)G_2(2)$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух неприводимых $GF(3)G_2(2)$-модулей размерности 6 или 12.

(7) $\overline{G} \cong Aut(L_3(3))$, каждый 2-главный фактор группы G изоморфен единственному 12-мерному неприводимому $GF(2)Aut(L_3(3))$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из трех неприводимых $GF(3)Aut(L_3(3))$-модулей размерности 6, 12 или 30.

(8) $\overline{G} \cong PGL_2(17)$, каждый 2-главный фактор группы G изоморфен либо одному из двух 16-мерных неприводимых $GF(2)PGL_2(17)$-модулей, либо единственному 48-мерному $GF(2)PGL_2(17)$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G изоморфен одному из двух 16-мерных неприводимых $GF(3)PGL_2(17)$-модулей.

Каждый из пунктов теоремы реализуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), Совета по грантам Президента РФ (проект № МК-3395.2012.1).

Список литературы

[1] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, ihramtsov@gmail.com

К вопросу П. Камерона о примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них

А. В. Коныгин

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [**1**] и [**4**, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на орбите $G_x(y)$ (т.е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т.е. что $|G_x| = |G_x(y)|$? Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [**2, 3**]).

Ясно, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X.

Ранее было доказано, что если цоколь группы G не является степенью исключительной группы лиева типа, изоморфной ${}^2E_6(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$ или $E_8(q)$, то для группы G выполняется свойство **(Pr)**. В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что цоколем группы G является исключительная группа лиева типа, изоморфная ${}^2E_6(q)$ или $E_6(q)$. Тогда для группы G выполняется свойство* **(Pr)**.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00349-а) и Уральского отделения РАН (грант для молодых ученых за 2012 год, проект A_3).

Список литературы

[1] Cameron P.J. Suborbits in transitive permutation groups // Combinatorics / M. Hall, Jr. and J. H. van Lint, eds. Amsterdam: Math. Centrum. 1975, P. 419–450.

[2] Reitz H.L. On primitive groups of odd order // Amer. J. Math. 1904. Vol. 26. P. 1–30.

[3] Weiss M.J. On simply transitive groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 401–405.

[4] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд. Новосибирск: Ин-т матем. СО РАН, 2006. 193 с.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: konygin@imm.uran.ru

Максимальные унипотентные подгруппы двойных стабилизаторов примитивных параболических подстановочных представлений групп $B_l(q)$

В. В. Кораблева

Пусть G — конечная группа лиева типа и P — параболическая максимальная подгруппа в G. Рассмотрим представление группы G подстановками множества Γ правых смежных классов группы G по подгруппе P, в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс Px в Pxg. Орбиты Γ_i подгруппы P на Γ называются *подорбитами* группы G, а подгруппы вида $P \cap z^{-1}Pz$, где $Pz \in \Gamma_i$, называются ее *двойными стабилизаторами*. Такие представления называются *параболическими*. Ранее автором было получено полное описание примитивных параболических подстановочных представлений всех конечных простых групп лиева типа. Исследования исключительных групп проводились методом BN-пар. У классических групп лиев ранг не фиксирован, и поэтому метод BN-пар удалось применить только для групп типа A_l. Для других классических групп применение этого метода привело к вычислениям большого объема и к поиску иных подходов. Классические группы изучались в их естественных матричных представлениях, и доказательства были получены в терминах матриц линейных преобразований и билинейных или квадратичных форм. Необходимо унифицировать описание примитивных параболических подстановочных представлений конечных простых групп лиева типа и получить единое (лиево) описание таких представлений. Это описание было бы полезным для решения других задач, возникающих в теории групп.

С этой точки зрения в данной работе исследуются группа $B_l(q)$ и ее параболические максимальные подгруппы P_k, полученные отбрасыванием k-й вершины диаграммы Дынкина в стандартном упорядочении ее вершин:

Более точно, для каждого представителя z_i подорбиты Γ_i указываются корневые подгруппы, порождающие максимальную унипотентную подгруппу двойного стабилизатора $P_k \cap z_i^{-1}P_k z_i$, соответствующего этой подорбите. Это позволяет получить коммутаторные соотношения для группы $P_k \cap z_i^{-1}P_k z_i$ и тем самым найти ее нормальное строение. Элементы z_i явно указываются в терминах порождающих группы Вейля. В частности, определено нормальное строение параболической максимальной подгруппы P_k, $1 \leqslant k \leqslant l$, и выписаны коммутаторные соотношения для нее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10–01–00324).

Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: vvk@csu.ru

О группах с наименьшим централизатором почти регулярной инволюции

О. А. Коробов

Инволюции в группах, и, в частности, централизаторы инволюций, часто накладывают жёсткие ограничения на строение группы. Одной из широко известных иллюстраций этого факта является замечательная теорема Брауэра, которая утверждает, что множество конечных простых групп, у которых имеется централизатор инволюции заданного порядка, конечно.

Б. Хартли [**1**] показал, что если отбросить условие простоты, а условие конечности заменить на периодичность в указанном выше множестве, то ступень нильпотентности некоторой подгруппы конечного индекса любой группы с централизатором инволюции, порядок которой равен m, можно ограничить функцией от m. Б. Хартли существенно использовал в своем доказательстве знаменитую теорему Владимира Петровича Шункова о группах с почти регулярной инволюцией (см [**2**], теорема 1.3). Первоначально очень громоздкое доказательство Теоремы Шункова В. В. Беляев [**3**] сделал простым и изящным, рассмотрев FC-центр группы и воспользовавшись его свойствами. Продолжение исследования "критических" групп в направлении, указанном В. В. Беляевым привело к следующему результату.

Теорема. *Пусть G группа, содержащая инволюцию a и $\forall g \in G |гр(a, a^g)| < \infty$, и пусть $|C_G(a)| = 2$. Тогда G ненильпотентная метабелева группа; $|G : G'| = 2$; $\forall g \in G' g = [g_1, g_2]$, где $g_1, g_2 \in G$; $\forall g \in G' g^a = g^{-1}$; $G' = [a, G]$; G' — $2'$-группа. Причём, если группа G бесконечна, то $FC(G) = G'$.*

Здесь через G' обозначен комутант группы G, и все прочие обозначения стандартные (см. [**4**]).

Список литературы

[1] Шунков В. П. T_0-группы. Новосибирск: Наука, 2000.

[2] Беляев В. В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 64, N 1. — С. 531-536.

[3] Hartley B., Meihner Th. Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order // J. Algebra. — 1980. — Vol. 64, N 1. — P. 285-291.

[4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. СПб.: Лань, 2009.

НГУ, 3 курс, Новосибирск
E-mail: oleg0101@ngs.ru

К вопросу о вычислении функции роста в бернсайдовой группе $B_0(2,5,7)$

А. А. Кузнецов, А. С. Кузнецова

Пусть $B_0(2,5,k)$ – максимальная конечная двупорожденная бернсайдова группа периода 5 ступени нильпотентности k. В данном классе групп наибольшей является группа $B_0(2,5,12)$, порядок которой равен 5^{34}. Для каждой из $B_0(2,5,k)$ известны коммутаторные представления (pc-presentation), которые несложно получить, используя систему компьютерной алгебры GAP. Положим, $X = \{a_1, a_2\}$ – порождающие элементы $B_0(2,5,k)$. Для случаев $k \leq 6$ к настоящему времени уже вычислены функции роста и диаметры Кэли групп $B_0(2,5,k)$ относительно X. Отметим, что для нахождения функций роста при $k \geq 2$, использовались компьютерные вычисления. А для случая $k = 6$ необходимо было использовать суперкомпьютер. В таблице приведены значения порядков групп $B_0(2,5,k)$, а также их диаметры $D_k(X)$ относительно X.

k	$\|B_0(2,5,k)\|$	$D_k(X)$	k	$\|B_0(2,5,k)\|$	$D_k(X)$
1	5^2	8	4	5^8	30
2	5^3	10	5	5^{10}	32
3	5^5	20	6	5^{14}	45

Следующий нерешенный случай – $k = 7$. Для нахождения функции роста в группе очень часто требуется вычислять произведения ее элементов. А поскольку $B_0(2,5,7)$ имеет достаточно большой порядок (он равен 5^{18}), то указанная процедура станет одной из определяющих. Итоговое время расчета во многом будет зависеть от того, насколько быстро мы сможем умножать элементы в группе. Пусть $a_1^{x_1} \dots a_{18}^{x_{18}}$ и $a_1^{y_1} \dots a_{18}^{y_{18}}$ – два произвольных элемента в $B_0(2,5,7)$, записанных в коммутаторном виде. Тогда их произведение равно

$$a_1^{x_1} \dots a_{18}^{x_{18}} \cdot a_1^{y_1} \dots a_{18}^{y_{18}} = a_1^{z_1} \dots a_{18}^{z_{18}}.$$

Основой для нахождения коэффициентов z_i является собирательный процесс. Однако это не единственный способ для вычисления произведений элементов группы. Ф. Холл показал, что z_i представляют собой полиномиальные функции (в нашем случае над полем $\mathbb{Z}_5$), зависящие от переменных $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i$, которые называют сейчас полиномами Холла. Согласно Холлу:

$$z_i = x_i + y_i + p_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, \dots, y_{i-1}).$$

Данные полиномы z_i были найдены при помощи машинных вычислений в системе компьютерной алгебры MATLAB, после чего полученные формулы реализованы в виде отдельной программы на языке Си. Сравнив скорость вычислений около 10^4 произведений случайно выбранных элементов из группы $B_0(2,5,7)$, было отмечено, что метод полиномов Холла имеет значительное преимущество перед собирательным процессом.

СибГАУ, Красноярск
E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru, alexakulch@rambler.ru

Декартовы свойства категорий условно полных решеточно-упорядоченных абелевых групп и векторных решеток с непрерывными морфизмами

А. А. Лялецкий

Рассматриваются две категории **LatAbGrCont** и **VectLatCont**, которые определяются следующим образом. Объектами категории **LatAbGrCont** являются условно полные решеточно-упорядоченные абелевы группы, а морфизмами – вполне (o)-непрерывные регулярные групповые гомоморфизмы. Аналогично, объектами категории **VectLatCont** являются условно полные векторные решетки, а морфизмами – вполне (o)-непрерывные аддитивные регулярные операторы. (Заметим, что в русско-язычной литературе условно полные векторные решетки часто фигурируют как пространства Канторовича или, более кратко, K-пространства, а в западной литературе – как пространства Рисса.)

Получен следующий основной результат.

Теорема 1. Категории **LatAbGrCont** и **VectLatCont** являются декартово замкнутыми.

Отметим некоторые другие свойства категорий **LatAbGrCont** и **VectLatCont**. Во-первых, эти категории являются "почти" строго конкретными, т. е. сответствующие забывающие функторы . $\to$ **Set** являются инъективными на стрелках, сохраняют терминальные объекты, прямые произведения, проекции и аппликацию, однако не являются сюръективными на стрелках из $hom(\top, O)$, где $\top$ и O – соответственно терминальный и произвольный объекты. Во-вторых, **LatAbGrCont** и **VectLatCont** можно естественным образом дооснастить до структуры абелевой категории.

Теорема 1 позволяет по-новому, а именно с теоретико-аппликативной точки зрения взлянуть на вопросы, касающиеся:

(1) вложений условно полных решеточно-упорядоченных абелевых групп и векторных пространств в соответствующие вторые сопряженные пространства;

(2) описания пространств функций из hom-множеств.

Отметим, что, помимо уже известных утверждений, доказательство теоремы 1 опирается на следующий новый результат, являющийся аналогом теоремы Намиоки из теории банаховых векторных простраств.

Теорема 2. Пусть заданы условно полные решеточно-упорядоченные абелевы группы (K-простраства) X и Y, причем X представлена в виде соединения своих компонент: $X = \mathbf{S}\ X_i$, $i \in I$, $|I| \geqslant 2$. Тогда функция $f\colon X \to Y$ в том и только том случае является является вполне (o)-непрерывным регулярным групповым гомоморфизмом (соответственно вполне (o)-непрерывным аддитивным регулярным оператором), когда она является таковой при каждом $i' \in I$ и при любых фиксированных значениях $x_i \in X_i$, где $i \in I \setminus i'$.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев
E-mail: foraal@mail.ru

Инволюции в группах периода 12

А. С. Мамонтов

Проблема Бернсайда о локальной конечности групп данного периода n решена отрицательно для достаточно больших n [1-3], положительно для $n = 4$ (И.Н. Санов [4]) и $n = 6$ (М. Холл [5]) и остается открытой для других малых значений n. В этом направлении получены следующие результаты, обобщающие теоремы Санова и Холла соответственно.

Теорема 1. Пусть G — группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 6, и пусть H — подгруппа, порождённая всеми инволюциями из G. Тогда G локально конечна и выполнено одно из следующих утверждений.

(1) Группа G является 3-группой.

(2) Подгруппа H является расширением 3-группы посредством группы порядка 2, а G — расщепляемым расширением 3-группы посредством некоторой нетривиальной подгруппы группы кватернионов порядка 8 или группы $SL_2(3)$.

(3) Подгруппа H изоморфна расщепляемому расширению элементарной абелевой 2-группы V посредством неабелевой группы порядка 6, действующей на V без неподвижных точек, а G/H является 3-группой.

(4) Фактор-группа $G/O_2(G)$, где $O_2(G)$ — наибольшая нормальная 2-подгруппа из G, является расширением 3-группы посредством элементарной абелевой 2-группы и $H \leq O_2(G)$.

Теорема 2. Группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 4, локально конечна.

Теорема 2 даёт новое доказательство теоремы Холла о локальной конечности групп периода 6.

Результаты работы получены совместно с Д.В. Лыткиной и В.Д. Мазуровым.

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научно-образовательные кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (государственный контракт 14.740.11.1510).

Список литературы

[1] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах // Наука, М., 1975.

[2] Ivanov S. V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Int. J. of Algebra and Computation, 4, № 1 (1994), С. 1–307.

[3] Лысёнок И. Г. Бесконечные бернсайдовы группы чётного периода // Изв. РАН. Сер. матем., Т. 60, № 3 (1996), С. 3–224.

[4] Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Учен. зап. Ленингр.гос. ун-та, сер. матем., № 55 (1940), С. 166–170.

[5] Hall Jr. M. Solution of the Burnside problem for exponent six // Ill. J. Math., 2, № 4 (1958), P. 764–786.

Решение проблемы Виланда для спорадических групп

Н. Ч. Манзаева

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Следуя Ф. Холлу, будем говорить, что конечная группа G обладает свойством D_π (или, короче, $G \in D_\pi$), если все её максимальные π-подгруппы сопряжены. Группу со свойством D_π будем также называть D_π-группой. Свойство D_π означает справедливость полного аналога теоремы Силова для π-подгрупп группы G.

В 1979 г. на знаменитой конференции по конечным группам в г. Санта-Круз Х. Виланд поставил следующую проблему [**1**]. *В каких известных простых группах верна «сильная π-теорема Силова»: для любых двух π-подгрупп A и B существует элемент $t \in \langle A, B\rangle$ такой, что $\langle A, B^t\rangle$ является π-группой?* В «Коуровскую тетрадь» [**2**] под номером 17.43(а) записан вопрос, эквивалентный проблеме Виланда: *в каких конечных простых D_π-группах любая подгруппа является D_π-группой?*

Обозначим через W_π класс всех конечных групп, в которых любая подгруппа является D_π-группой. Простые группы из класса W_π будут решением проблемы Виланда и проблемы 17.43(а). В [**3**] было доказано, что знакопеременные D_π-группы лежат в классе W_π (см. док-во [**3**, теорема 3]). В этом докладе рассматривается случай спорадических простых D_π-групп.

Теорема. *Пусть $G \in D_\pi$ — спорадическая группа. Тогда G принадлежит классу W_π, за исключением следующих случаев: $G = J_1$, $\pi \cap \pi(G) = \{3, 5\}$ и $G = J_4$, $\pi \cap \pi(G) = \{5, 7\}$.*

Список простых спорадических D_π-групп известен [**4**], и, таким образом, данная теорема дает решение проблемы Виланда и проблемы 17.43(а) для спорадических групп.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт №14.740.11.0346)

Список литературы

[1] Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // The Santa Cruz Conference on Finite Groups, Santa Cruz, 1979, ed. B. Cooperstein and G. Mason, Proc. Sympos. Pure Math., 37 (1980), 161–173.

[2] Mazurov V. D., Khukhro E. I. (editors) The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory // RAS Siberian Division, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 17 (2010).

[3] Вдовин Е. П., Манзаева Н. Ч., Ревин Д. О. О наследуемости свойства D_π подгруппами // Труды ИММ УрО РАН, 17 № 4 (2011), 44–52.

[4] Ревин Д. О. Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика, 47 вып. 3 (2008), 364–394.

НГУ, Новосибирск
E-mail: manzaeva@mail.ru

О неабелевых композиционных факторах конечной группы, распознаваемой по простому спектру среди своих подгрупп

Н. В. Маслова

Пусть G — конечная группа. Множество всех простых делителей числа $|G|$ будем называть *простым спектром группы* G и обозначать через $\pi(G)$. Конечную группу G назовем *распознаваемой по простому спектру среди своих подгрупп,* если $\pi(H) \neq \pi(G)$ для любой собственной подгруппы H в G. Класс таких групп будем обозначать через $\mathfrak{Y}$.

П. Шумяцкий записал в «Коуровскую тетрадь» следующую гипотезу [**1**, проблема 17.125]: *в конечной группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что* $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$. Можно показать, что гипотеза Шумяцкого эквивалентна следующей гипотезе: *любая группа из класса $\mathfrak{Y}$ порождается двумя сопряженными элементами.* В [**2**] было получено частичное подтверждение гипотезы Шумяцкого, а именно, было показано, что любая конечная группа с холловыми максимальными подгруппами порождается парой сопряженных элементов. Этот результат основывается на полученном в [**3**] описании неабелевых композиционных факторов конечных групп с холловыми максимальными подгруппами. Поэтому представляется естественной и интересной следующая проблема: *каковы неабелевы композиционные факторы групп из класса $\mathfrak{Y}$?*

Теорема. *Пусть S — конечная простая спорадическая группа. Тогда*

(а) *если $S \in \{M_{11}, M_{12}, M_{24}, HS, Co_3, Co_2\}$, то S не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из $\mathfrak{Y}$;*

(б) *если $S \in \{M_{22}, M_{23}, J_1, J_2, J_3, J_4, He, Ru, Suz, ON, HN, Ly, Th, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Co_1, B, M\}$, то $S \in \mathfrak{Y}$.*

Замечание. Группа $McL \notin \mathfrak{Y}$. Вопрос изоморфности этой группы неабелеву композиционному фактору некоторой группы из класса $\mathfrak{Y}$ остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), Совета по грантам Президента РФ (проект МК-3395.2012.1), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и УрО РАН с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), и Уральского отделения РАН (проект А3).

Список литературы

[1] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010.

[2] Маслова Н. В., Ревин Д. О. Порождаемость конечных групп с холловыми максимальнми подгруппами двумя сопряженными элементами // Теория групп и ее приложения. Тез. IX Межд. конф. по теории групп. Владикавказ: Сев.-Осет. гос. ун-т, 2012.—С. 83-85.

[3] Маслова Н. В. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. матем. ж. 2012. Т 53, N5. С. 1065–1076.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: butterson@mail.ru

Локальные представления группы кос

Ю. А. Михальчишина

Э. Артин доказал, что группа кос B_n имеет точное представление в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n. По этому представлению строится линейное представление (представление Бурау):

$$\rho_B : B_n \to GL_n(\mathbf{Z}[t^{\pm 1}]).$$

Долгое время существовала гипотеза о том, что представление Бурау является точным. В настоящее время доказано, что представление ρ_B не является точным при $n \geq 5$. Тем не менее это представление используется для построения полинома Александера, который является инвариантом узла. Представление Бурау является локальным, т. е. каждый порождающий переходит в матрицу, которая отличается от единичной матрицы диагональной клеткой порядка 2. Кроме того, представление Бурау является также и однородным, т. е. клетки порядка 2 совпадают для всех порождающих.

В работе Вады [**1**] построены четыре представления группы B_n в $\mathrm{Aut}(F_n)$, которые отличны от представления Артина, и как показал Шпильрайн [**2**] эти представления являются точными.

В данной работе описаны все локальные представления группы B_3 в группу $GL_3(\mathbb{C})$ и все локальные однородные представления группы B_n в группу $GL_n(\mathbb{C})$. Также построены линейные представления B_n в группу $GL_n(\mathbb{C})$, аналогичные представлению Бурау для представлений Вады и изучена связь этих представлений с представлением Бурау.

Список литературы

[1] Wada M., Group invariants of links, Topology 31 (1992), 399-406.
[2] Shpilrain V., Representing braids by automorphisms, IJAC, 11, № 6 (2001), 773-777.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: kustova83@ngs.ru

Дистанционно регулярные графы на классе p-элементов группы $L_2(p^m)$

И. Т. Мухаметьянов

В работе [**1**] был описан граф Γ с множеством вершин $B = g^G \cup (g^{-1})^G$, где g^G – класс сопряжённых элементов порядка p группы $G = L_2(p^m)$ (p – нечётно, $p^m \geq 5$) и с множеством рёбер $\{\{x, y\} | xy^{-1} \in C\}$, где C – класс сопряжённых инволюций группы G.

Нами получено обобщение результатов этой работы на случай, когда $B = g^G$ – класс сопряжённых p-элементов группы G, C – некоторые классы элементов, порядки которых не делятся на p. А именно, доказана

Теорема. *Пусть Γ – граф, множеством вершин которого является некоторый класс сопряжённых элементов порядка p группы $L_2(p^m)$ (p – нечётно, $p^m \geq 5$) и с множеством рёбер $\{\{x, y\} | xy^{-1} \in C\}$, где C – произвольный фиксированный неединичный класс сопряжённых элементов, порядки которых делят $(p^m - 1)/2$ при $p^m \equiv -1 \pmod 4$ и $(p^m + 1)/2$ при $p^m \equiv 1 \pmod 4$. Тогда Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{p^m, p^m - 3, 1; 1, 2, p^m\}$.*

Список литературы

[1] Мухаметьянов И. Т. О дистанционно регулярных графах на множестве неединичных p-элементов группы $L_2(p^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т.18, №3, С. 164–178.

Лысьвенский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, Лысьва (Пермский край)
E-mail: muiltal@yandex.ru

Полуполевые плоскости нечетного порядка

С. В. Панов

Вопрос построения и классификации конечных плоскостей исследуется на основе метода из [**1**], [**2**], использующего координатизирующее множество W и регулярное множество R плоскости. Проективную плоскость π называют полуполевой, когда соответствующее множество W является полуполем. Известно, что если регулярное множество R проективной плоскости является полем, то соответствующая плоскость называется дезарговой.

Доказана

Теорема 1. *С точностью до изоморфизма, существует ровно две полуполевые плоскости ранга 3 над $GF(3)$, одна из которых дезаргова, а другая - недезаргова.*

Для построенной недезарговой плоскости из Теоремы 1 гипотеза о разрешимости группы коллинеаций подтвердилась.

Теорема 2. *Полная группа коллинеаций недезарговой полуполевой плоскости порядка 27 разрешима.*

Работа поддержана грантами РФФИ (код проекта 12-01-00968) и Мин. обр. и науки (тема 1.34.11).

Список литературы

[1] Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes // Springer - Verlag: New-York Ink. 1973.

[2] Podufalov N. D. On spread sets and collineations of projective planes // Contemp. Math., 1992. (Part 1). V. 131. P.697-705.

[3] Левчук В. М., Панов С. В., Штуккерт П. К. Вопросы перечисления проективных плоскостей и латинских прямоугольников // Механика и моделирование (сборник научных трудов) — Красноярск: СибГАУ, 2012. с.18-39.

Институт Математики Сибирского Федерального Университета, г. Красноярск
E-mail: pansevakrasn@mail.ru

Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций

О. Г. Паршина

Обозначим через $C_\infty(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ бесконечный граф, вершины которого - все целые числа, а ребрами соединены те из них, которые находятся на расстоянии $d \in \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n\}$.

Раскраска вершин графа $C_\infty(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ в два цвета (черный и белый) называется совершенной с параметрами (A, B, C, D), если каждая черная вершина соседствует ровно с A черными и B белыми вершинами, а каждая белая - с D белыми и C черными вершинами. Не теряя общности можно считать, что $B \geq C$.

Если соответствующая раскраска существует, то пара (B, C) называется допустимой.

В работе доказана следующая

Теорема. *Для графа $C_\infty(1, 2, \ldots, n)$ пара (B, C) является допустимой только в следующих случаях:*
1. $B = C$;
2. $B + C = 2n + 1$;
3. $B + C = 2n$, $B \neq C$ - четные;
4. $B + C = 2n + 2$, $B \neq C$ - четные;

Список литературы

[1] Хорошилова Д. Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. Т. 16, N 1. — С. 80-92.

[2] Axenovich M. A. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. — 2003. Vol. 268, N 1-3. — P. 31-48.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
E-mail: parolja@gmail.com

К теории бинарных групп Шункова

Павлюк И. И.

Класс групп, введенных В.П. Шунковым [**1**], хорошо известен в теории групп. Теория этих классов интенсивно развивается. В сообщении представлено утвердительное решение проблемы Шункова 6.59 [**2**].

Теорема. *Периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа (группа Шункова) конечного ранга локально конечна.*

Список литературы

[1] Шунков В. П. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970г. №4. С. 484-496.

[2] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск. 2002г.

Павлодарский Государственный университет им. С.Торайгырова, Павлодар
E-mail: Ivan.pavlyuk@mail.ru

О группах Шункова

Ин. И. Павлюк, И. И. Павлюк

Сопряженно бипримитивно конечные группы [**1**] А.К.Шлёпкин назвал группами Шункова. Это понятие устоялось в Красноярской теоретико-групповой школе. В сообщении представлена

Теорема. *Периодическая группа Шункова, все собственные подгруппы которой почти абелевы, локально конечна.*

Список литературы

[1] Шунков В. П. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970 г. №4. С. 484-496.

Павлодарский Государственный университет им. С.Торайгырова, Павлодар
E-mail: inessa7772@mail.ru

Жесткие алгебры с делением

К. Н. Пономарев

Ассоциативная унитарная алгебра называется UA-алгеброй, если все автоморфизмы ее мультипликативной полугруппы определяются автоморфизмами самой алгебры. В известной теореме Стефенсона доказано, что алгебра матриц $\mathrm{M}_n,\ n \geqslant 2$ над любым ассоциативным кольцом является UA-алгеброй.

Получено расширение этого результата на класс всех конечномерных алгебр.

Теорема. *Конечномерная алгебра над полем K с рациональными структурными константами является* UA*-алгеброй тогда и только тогда, когда это – простая алгебра. Причем если она является алгеброй с делением, то поле K образует* UA*-алгебру.*

Список литературы

[1] Stephenson W. Unique addition rings. Can. J. Math. 21 (1969), 1455–1461.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ponomaryov@ngs.ru

Взаимоотношения класса почти слойно конечных групп с близкими классами групп

А. В. Сенашов, В. И. Сенашов

Определение. Группа называется *слойно конечной*, если она имеет конечное число элементов каждого порядка.

Свойства слойно конечных групп подробно рассматриваются в монографиях [1, 2].

Определение. *Почти слойно конечная группа* — это группа, являющаяся расширением слойно конечной группы при помощи конечной группы.

Почти слойно конечные группы представляют собой существенно более широкий класс групп, чем слойно конечные группы, в него, в частности, входят все черниковские группы. В то же время легко привести пример черниковской группы, которая не является слойно конечной.

Авторы доказывают некоторые свойства почти слойно конечных групп и используют их для определения взаимоотношения класса почти слойно конечных групп к ближайшим классам групп: слойно конечным группам, группам с конечными классами сопряженных элементов, черниковским группам, обобщенно черниковским группам. Для этой же цели строятся примеры групп, разделяющих эти классы групп.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00509) и гранта Сибирского федерального университета (проект — элитное математическое образование в СФУ.

Список литературы

[1] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М.: Наука, 1980. 384 с.

[2] Сенашов В. И. Слойно конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993. 159 с.

СФУ, Красноярск, ИВМ СО РАН, Красноярск
E-mail: cubometr5@mail.ru, sen1112home@mail.ru

Группы близкие к точно транзитивным

А. А. Симонов

Определение. *Группа $T_n(B)$ преобразования множества B называется точно n–транзитивной если:*

1. Для двух неравных упорядоченных n–элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ из множества $\widehat{B^n} \subset B^n$ существует единственный элемент $g \in T_n(B)$ группы $T_n(B)$ для которого справедливы равенства $g\,(x_i) = g\,(y_i)$ для произвольных $i \in \{1, \ldots, n\}$;

2. Для произвольного $(x_1, \ldots, x_n) \in \widehat{B^n}$ и произвольных неравных $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо $x_i \neq x_j$;

3. Подмножество $\widehat{B^n}$ в B^n максимальное, т.е., если $(x_1, \ldots, x_n) \in B^n$ и при этом элементы x_i удовлетворяют условию 2, то $(x_1, \ldots, x_n) \in \widehat{B^n}$.

Если, теперь, снять ограничение 3, налагаемое на подмножество $\widehat{B^n}$, то придём к определению группы близкой к точно n–транзитивной.

В качестве примера такой группы будет выступать группа матриц $GL_n(F) = T_n(F^n)$, построенная над произвольным полем F, а множество векторов $F^n = B$, тогда множество $\widehat{B^n}$ определяется как максимальное множество линейно-независимых векторов.

Над почтиполем можно построить точно дважды транзитивные группы, а над почтикольцом, при некотором условии, можно построить группы близкие к точно дважды транзитивным, т.к.:

Лемма. *Над почтикольцом $K = \langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$, в котором мультипликативная операция на некотором подмножестве $K_1 \subset K$ групповая $\langle K_1; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$, можно построить точно транзитивную группу преобразования множества $\widehat{K^2} = \{(x, y) \in K^2 | x - y \in K_1\}$.*

Известно, что точно дважды транзитивные группы категорно эквивалентны почтиобластям $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$, но до сих пор неизвестны примеры почтиобластей отличных от почтиполей. В почтиобластях $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ аддитивная операция лупа. Если ослабить требования на почтообласти так, чтобы аддитивная операция была правой лупой, то

Теорема. *При некоторых дополнительных условиях можно также построить категорную эквивалентность между группами близкими к точно дважды транзитивным и ослабленными почтиобластями.*

В данном случае можно привести нетривиальные примеры таких ослабленных почтиобластей и соответствующих групп.

Новосибирск
E-mail: Andrey.Simonoff@gmail.com

Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов

Д. В. Соломатин

Изучается введенное Л. М. Мартыновым понятие ранга планарности многообразия полугрупп для многообразий моноидов. Пусть $\boldsymbol{V}$ – произвольное многообразие моноидов. Если существует такое натуральное число r, что все $\boldsymbol{V}$-свободные полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарный граф Кэли [**1**], а $\boldsymbol{V}$-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то *рангом планарности* $\boldsymbol{V}$ называется это число r. Если для многообразия $\boldsymbol{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет бесконечный ранг планарности.

В статье [**2**] на языке тождеств описаны многообразия коммутативных моноидов. Условимся в дальнейшем для системы Σ моноидных тождеств через varΣ обозначать многообразие коммутативных моноидов, заданное этой системой. Ниже будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{M} = \mathrm{var}\{x = x\}$ – многообразие всех коммутативных моноидов; $\mathbf{A}_m = \mathrm{var}\{x^m = 1\}$; $\mathbf{S}^1_{i,p} = \mathrm{var}\{x^{i+p} = x^i\}$. Опираясь на результаты [**2**] и [**3**], доказана следующая

Теорема. *Пусть* $\boldsymbol{V}$ *– нетривиальное многообразие коммутативных моноидов,* $r_\pi(\boldsymbol{V})$ *– его ранг планарности. Тогда* $r_\pi(\boldsymbol{V}) \leq 3$. *Более того:*

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ *или* $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, *где* $m \neq 2$, $i \geq 1$ *и* $p > 2$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2$ *тогда и только тогда, когда либо* $\boldsymbol{V} = \mathbf{M}$, *либо* $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$, *либо* $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, *где* $i_1 \geq 2$ *и* $i_2 \geq 1$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ *или* $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Список литературы

[1] Zelinka B. Graphs of Semigroups // Casopis. Pest. Mat, — 1981. — Vol. 106. — P. 407–408.
[2] Head T. J. The varieties of commutative monoids // Nieuw Archief voor Wiskunde, — 1968. — Vol. 3. — P. 203–206.
[3] Соломатин Д. В. Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли // Вестник Омского университета, Омск: Изд-во ОмГУ, — 2005. — Вып. 4. — С. 36–38.

Омский государственный педагогический университет, г.Омск
E-mail: denis_2001j@bk.ru

Большие абелевы унипотентные подгруппы и подгруппа Томсона группы лиева типа

Г. С. Сулейманова

Пусть G – группа лиева типа над конечным полем K, U – ее максимальная унипотентная подгруппа. В 70-80-е годы для классических типов изучено множество $A(U)$ больших абелевых подгрупп в U вместе с подмножествами $A_N(U)$ нормальных и $A_e(U)$ элементарных абелевых подгрупп в U и подгруппами Томпсона $J(U) = \langle A \mid A \in A(U)\rangle$ и $J_e(U) = \langle A \mid A \in A_e(U)\rangle$. В [**2**] записана

Проблема (1.6):*Описать множества $A(U), A_e(U), A_N(U)$ и подгруппы Томпсона $J(U)$, $J_e(U)$ для оставшихся случаев G.*

Порядки подгрупп из $A(U)$ найдены в [**1**]. Существование и описание нормальных больших абелевых подгрупп в U установлены в [**3**], [**4**] и [**8**]. Там же и в [**5**] – [**7**] доказано, что всякая большая абелева подгруппа унипотентной подгруппы U группы G лиева типа над конечным полем G-сопряжена с нормальной подгруппой в U или G есть типа G_2, F_4, ${}^3D_4$ или ${}^2E_6$. В настоящей работе завершается описание исключительных больших абелевых подгрупп групп U типа G_2, ${}^3D_4$ и ${}^2E_6$ (для типа F_4 они перечислены в [**6**]). Уточняются известные результаты о подгруппах Томпсона и завершается решение проблемы (1.6) из [**2**].

Список литературы

[1] Вдовин Е. П. Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика, т. 40(2001), № 5, с. 523–544.

[2] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи математических наук, т. 41(1986), №1(247), с. 57-96.

[3] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы // Доклады РАН, т. 419(2008), №5, с. 595-598.

[4] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Нормальное строение и экстремальные подгруппы в унипотентной подгруппе групп лиева типа // Фундаментальная и прикладная математика, т. 17(2011), № 10, с. 155-189.

[5] Сулейманова Г. С. О сопряженности в группе Шевалле больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы // Фундаментальная и прикладная математика, т. 15(2009), № 7, с. 205-216.

[6] Сулейманова Г. С. Классы сопряженных в группе Шевалле типа F_4 больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы // Владикавказский математический журнал, т. 13(2011), Вып. 2, с. 45-55.

[7] Сулейманова Г. С. Сопряженность в конечной группе Шевалле типа E_8 больших абелевых унипотентных подгрупп // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics, 4(2011), no. 4, p. 536-540.

[8] Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Extremal and Maximal Normal Abelian Subgroups of a Maximal Unipotent Subgroup in Lie Type Groups // J. Algebra, 349(2012), no. 1, 98-116.

Хакасский технический институт — филиал Сибирского федерального университета, Абакан
E-mail: suleymanova@list.ru

К теории отношения централизаторной сравнимости элементов группы

Л. И. Теняева

В работе продолжено изучение свойств классов централизаторно - сопряженных элементов произвольной группы G. Основные понятия были изложены в [1].

Лемма 1. *Отношение "*$\,{}^{a}_{c} \equiv_z$*", заданное на элементах группы инвариантно относительно действия ее внутренних автоморфизмов, т.е. в группе G верна формула* $(\forall g \in G)\,((x\,{}^{a}_{c} \equiv_z y) \Leftrightarrow (x^g\,{}^{a}_{c} \equiv_z y^g))$.

Лемма 2. *Бинарное отношение централизаторной сопряженности элементов группы G относительно произвольного элемента $a \in G$ является отношением эквивалентности.*

В доказательстве следующей теоремы использованы вышеотмеченные леммы.

Теорема. *Класс* $\overset{{}^{a}_{c}\equiv_z}{x}$ *централизаторно - сопряженных элементов группы G относительно некоторого элемента $a \in G \setminus e$, содержащий нейтральный элемент e группы G, является инвариантной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $C(a)$ - инвариантная подгруппа G.*

Список литературы

[1] Теняева Л. И. О группе с нетривиальным классом централизаторно-сопряженных элементов. Материалы Международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск. 2011. С. 55.

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, Павлодар, Казахстан
E-mail: Tenyaeva80mail.ru

Частично коммутативные группы — свойства, универсальные теории, квазимногообразия

Е. И. Тимошенко

Первый круг вопросов связан со свойствами и универсальными теориями частично коммутативных нильпотентных метабелевых групп. Находится мальцевский базис такой группы. Используя его, выясняются некоторые свойства группы, необходимые для исследования универсальной теории. Для групп, определенных деревьями, приводятся необходимые и достаточные условия для их универсальной эквивалентности. Рассматриваются некоторые преобразования произвольного определяющего графа группы, которые не меняют её универсальной теории.

Второй круг вопросов относится к свободным и метабелевым частично коммутативным группам, точнее к квазимногообразиям, порожденным ими. Доказана теорема, из которой следует, что любые две неабелевы метабелевы частично коммутативные группы порождают одинаковые квазимногообразия и предмногообразия. Вместе с тем строится бесконечная последовательность свободных частично коммутативных групп, порождающих различные квазимногообразия.

Новосибирск

Аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных супергрупп

П. А. Уляшев, А. Н. Зубков

Определение. Функтор $SSp\,R$ из категории коммутативных суперaлгебр над полем K в категорию групп, определенный как $(SSp\,R)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, A)$ для $A \in \mathbf{SAlg}_K$, будем называть аффинной супергруппой. Аффинная супергруппа называется алгебраической, если ее координатная алгебра является конечнопорожденной.

В статье [**1**] вводится понятие связной аффинной супергруппы, рассматривается супергалгебра Ли $\mathrm{Lie}(G)$, которая появляется при изучении суперaлгебр распределений.

Теорема 1 (В. Кац [3]). *Супералгебра Ли $L = L_0 \oplus L_1$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима алгебра Ли L_0.*

Разрешимая аффинная супергруппа определяется аналогично тому, как это сделано в [**2**]. По аналогии с теоремой Каца при определенных условиях аффинная супергруппа разрешима тогда и только тогда, когда разрешима ее четная часть. Четной частью аффинной супергруппы называется ее наибольшая четная подгруппа.

Теорема 2. *Пусть $\mathrm{char} K = 0$, G - связная алгебраическая аффинная супергруппа. G разрешима $\iff \mathrm{Lie}(G)$ разрешима $\iff G_{ev}$ разрешима.*

Список литературы

[1] Zubkov A. N. Affine Quotients of Supergroups. Transformation Groups, 14(3):713–745, 2009.

[2] Waterhouse W. C. Introduction to Affine Group Schemes. Springer Verlag, 1979.

[3] Kac V. G. Lie superalgebras. Advanced in Mathematics, 26:8–96, 1977.

ОФ ИМ СО РАН, Омск
E-mail: p.ulyashev@gmail.com

Функции Эйлера-Холла на группах лиева типа ранга 1

Ю. Ю. Ушаков

Как показал Ф. Холл [**1**], для любой конечной простой неабелевой группы G и натурального числа n существует наибольшее число $d = d_n(G)$ такое, что прямая степень G^d порождается n элементами. Вопрос о нахождении чисел $d_2(G)$ записал С.А. Сыскин в Коуровской тетради [**2**].

Рекуррентное описание чисел d_2 для групп Судзуки и $PSL_2(q)$ над полем четного порядка получено Н.М. Сучковым и Д.М. Приходько [**3**]; для нечетных q описание $d_2(PSL_2(q))$ получил Д.М. Приходько.

Для групп Ри рекуррентное описание чисел $d_2({}^2G_2(q))$ получено автором и Д.В. Левчуком. Исследуется аналогичное рекуррентное описание для оставшегося случая групп лиева типа ранга 1 (унитарный случай).

Работа поддержана грантами РФФИ (код проекта 12-01-00968) и Мин. обр. науки (тема 1.34.11).

Список литературы

[1] Hall Ph. The Eulerian functions of a group // Quart. J. Math., 7(1936), P.134-151

[2] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). 15-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002.

[3] Сучков Н. М., Приходько Д. М. О числе пар порождающих групп $L_2(2^m)$ и $Sz(2^{2k+1})$. Сиб. мат. журн., 42(2001) № 5, 1162-1167.

Расщепляемые многообразия полугрупп

Т. Ю. Финк

В теории абелевых групп важную роль играет понятие полноты (делимости) и редуцированности. Эти понятия можно интерпретировать, используя терминологию теории многообразий групп, что позволяет определить их аналоги для произвольных алгебр [**1**]. Напомним эти определения для полугрупп. Произвольная полугруппа называется (атомно) *полной*, если она не имеет гомоморфизмов на нетривиальные полугруппы из атомов решетки многообразий всех полугрупп. Полугруппа называется *редуцированной*, если она не имеет неодноэлементных полных подполугрупп. Полугруппа называется *расщепляемой*, если любая ее полная подполугруппа выделяется прямым множителем. Многообразие полугрупп называется *расщепляемым*, если все его полугруппы расщепляемые, и *редуцированным*, если все его полугруппы редуцированы.

Основным результатом работы является следующее утверждение

Теорема. *Многообразие $\mathbf{V}$ полугрупп является расщепляемым тогда и только тогда, когда $\mathbf{V}$ — редуцированное многообразие полугрупп.*

Заметим, что доказательство этой теоремы опирается на основной результат работы [**2**] для групп, согласно которому кроме редуцированных многообразий групп свойством расщепляемости обладает единственное нередуцированное многообразие — многообразие $\mathbf{A}$ всех абелевых групп.

Отметим еще, что свойство редуцированности многообразия $\mathbf{V}$ полугрупп по теореме 4 из [**3**] равносильно выполнению одного из следующих эквивалентных условий:

а) $\mathbf{V} \cap \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}_k$ *и* $\mathbf{V} \cap \mathbf{G} \subseteq \mathbf{A}^n \cap \mathbf{B}_m$ *для некоторых* $k,\ n,\ m$*;*

б) $\mathbf{V}$ *состоит из полурешеток нильпотентных идеальных расширений вполне простых полугрупп, структурные группы которых являются периодическими и разрешимыми.*

(Здесь $\mathbf{A}^n$ — класс всех n–ступенно разрешимых групп; $\mathbf{B}_m$ — бернсайдовское многообразие групп экспоненты m; $\mathbf{G}$ — класс всех групп; $\mathbf{N}$ — класс всех нильполугрупп; $\mathbf{Z}_k$ — многообразие всех нильпотентных полугрупп класса k.)

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универс. алгебра и ее приложения: Труды межд. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. - с.179-190.

[2] Мартынов Л. М. Расщепляемые многообразия групп // Сборник научных статей Международной школы-семинара "Ломоносовские чтения на Алтае", Барнаул, 8-11 ноября, 2011, Часть I, Барнаул, 2011. С. 39.

[3] Мартынов Л. М. Редуцированные многообразия полугрупп // Известия вузов. Математика - 2004. - № 2. - С. 76-79.

Омский государственный технический университет, г. Омск
E-mail: tatyanafink@yandex.ru

О подавтоматах гиперграфических автоматов

Е. В. Хворостухина

В работе под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [**1**] $A = (X, S, \delta)$, множество состояний которого X наделено такой структурой гиперграфа [**2**] $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом гиперграфа H. Например, для любого гиперграфа H алгебраическая система $A = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$ (где $(\varphi, x) \in \mathrm{End}H \times X$) является гиперграфическим автоматом, который обозначается $\mathrm{Atm}(H)$ и называется универсальным гиперграфическим автоматом.

Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому его ребру. Для натурального числа p гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа принадлежат не более, чем одному его ребру. Например, эффективный гиперграф с 1-определимыми ребрами - это гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. С другой стороны, как проективная плоскость, так и аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами, вершинами которых являются точки этих плоскостей, а ребрами - соответствующие прямые (см., например, [**3**]).

Будем говорить, что $H_1 = (X_1, L_1)$ – полный подгиперграф гиперграфа $H_2 = (X_2, L_2)$, если $X_1 = X_2$ и выполняется $(\forall l \in L_1)(\exists\, l' \in L_2) l \subseteq l'$.

Пусть $A_1 = (H_1, S_1, \delta_1), A_2 = (H_2, S_2, \delta_2)$ - гиперграфические автоматы над гиперграфами H_1, H_2 соответственно. Автомат A_1 будем называть подавтоматом автомата A_2, если гиперграф $H_1 = (X, L_1)$ - это полный подгиперграф гиперграфа $H_2 = (X, L_2)$, полугруппа S_1 - это подполугруппа полугруппы S_2, а отображение δ_1- это сужение отображения δ_2 на $X \times S_1$.

Теорема. Пусть $\mathrm{Atm}(H_1), \mathrm{Atm}(H_2)$ - универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами $H_1 = (X_1, L_1)$, $H_2 = (X_2, L_2)$ соответственно, полугруппа $\mathrm{End}(H_1)$ - подполугруппа полугруппы $\mathrm{End}(H_2)$. Тогда $\mathrm{Atm}(H_1)$ - это подавтомат автомата $\mathrm{Atm}(H_2)$.

Список литературы

[1] Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

[2] Зыков А.А. Гиперграфы // УМН, 1974. т. 29. №6. С. 89–154.

[3] Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970.

Саратовский государственный социально-экономический университет, Саратов
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

Свойство графов Кэли бесконечной циклической группы

Д. Г. Храмцов

Граф Кэли $Cay(G,X)$ произвольной группы G относительно некоторого множества порождающих $X \subseteq G$ является отмеченным ориентированным графом с множеством вершин $\{g|g \in G\}$, множеством ориентированных рёбер $\{(g,gx)|g \in G, x \in X\}$ с метками $x \in X$. Граф, полученный стиранием в $Cay(G,X)$ меток и ориентации рёбер и меток вершин, назовём графом $\Gamma(G,X)$. При этом кратные рёбра, отвечающие инволюциям, склеиваются в одно. На нём естественно задаётся структура метрического пространства, в которой рёбра имеют единичную длину. Свойства полученных пространств и их отображений с различных точек зрения несут существенную информацию о структуре самой группы и активно изучаются. Характерным вопросом с точки зрения теории графов является CI - свойство групп: когда изоморфизм графов $\Gamma(G,X)$ и $\Gamma(G,Y)$ для порождающих множеств X, Y группы G обязательно влечёт автоморфную сопряжённость X и Y в G? Например, таковыми являются свободные абелевы группы [**1**]. Также, изучаются вопросы изоморфизма графов $\Gamma(G,X)$ для различных групп G. Приведём результат [**2**]: графы $\Gamma(G,X)$ и $\Gamma(H,Y)$ конечнопорождённых абелевых групп G и H в некоторых системах порождающих $X \subseteq G$ и $Y \subseteq H$ изоморфны тогда и только тогда, когда их числа Бетти и порядки подгрупп элементов конечного порядка равны. При снятии предположения об абелевости получен следующий результат.

Теорема. *Граф $\Gamma(G,X)$ группы G относительно конечного множества порождающих X изоморфен графу $\Gamma(Z,Y)$ бесконечной циклической группы Z относительно некоторого конечного множества порождающих Y тогда и только тогда, когда G является бесконечной циклической или бесконечной диэдральной группой.*

Попытки прямого обобщения этого результата на свободные абелевы группы ранга два и выше не проходят - свободная абелева группа ранга два и свободное произведение двух копий бесконечной циклической группы с объединением по подгруппе индекса два обладают изоморфными графами Γ в естественных системах порождающих, но вторая группа не изоморфна прямой сумме двух бесконечных циклических или диэдральных групп.

Список литературы

[1] Рябченко А.А., Изоморфизмы графов Кэли свободных абелевых групп, Сибирский математический журнал, 48(5), 2007, 1142 - 1146.

[2] Loh C., Which finitely generated abelian groups admit isomorphic Cayley graphs? arXiv: 1202.5484v1.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: khramtso@math.nsc.ru

Групповая интерпретация преобразования типа Фурье–Бесселя для обобщенной функции Бесселя

М. Д. Хриптун

Рассматривается серия представлений группы треугольных матриц третьего порядка специального вида в пространстве Гильберта $L^2(\phi)$ таких функций $f(\phi)$ из $L^2(\phi)$, что

$$\int_0^{2\pi} \left|f(\phi)\right|^2 d\phi < \infty.$$

матричные элементы этих представлений выражаются через обобщенные функции Бесселя

$$U_k^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{z}{m}\left(e^{i\phi} + e^{-i(m-1)\phi}\right)\right] e^{-ik\phi} d\phi,$$

которые при $m = 2$ переходят в модифицированные функции Бесселя $I_k(z)$, k — целое, z — комплексная переменная.

На основании теории представлений этих групп получаются основные свойства функции $U_k^{(m)}(z)$.

При рассмотрении квазирегулярного представления этой же группы в пространстве функций $f(x, y)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x, y)\right|^2 dx\, dy < \infty,$$

которое является приводимым и при разложении его на прямую непрерывную сумму неприводимых представлений, используя преобразование Фурье для $f(x, y)$, получаем интегральное преобразование типа Фурье–Бесселя для этих функций.

Функции $U_k^{(m)}(z)$ находят приложения в операционном исчислении, в теории чисел, в теории массового обслуживания, в сложных задачах математической физики и других исследованиях.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: Khriptun@math.nsc.ru

Конструкция кристаллографических групп с двумя решетками с помощью алгебр Ли

В. А. Чуркин

В [**1**] построена серия кристаллографических групп движений псевдоевклидовых пространств $\mathbb{R}^{p,q}$ при $\min\{p, q\} \geqslant 3$, каждая из которых содержит *две* различные автоморфно сопряженные *псевдоевклидовы решетки* — возможные решетки трансляций при реализации группы в качестве кристаллографической группы движений псевдоевклидова пространства. Конструкция основывалась на анализе определяющих соотношений для нильпотентной подгруппы, порожденной двумя различными решетками в кристаллографической группе. Здесь указан более простой способ построения таких групп с помощью подходящих алгебр Ли.

Теорема. *Пусть L — вещественная конечномерная алгебра Ли, допускающая невырожденную симметрическую билинейную форму, относительно которой линейные операторы $\mathrm{ad}_x : y \mapsto [x,y]$, $y \in L$, являются кососимметрическими при всех $x \in L$. Предположим, что алгебра L имеет базис $e_1, \ldots, e_n$ с целочисленными структурными константами, и пусть $Z = \{\sum k_i e_i \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$ — его целочисленная оболочка. Тогда прямая сумма $\Sigma = Z \oplus Z \oplus Z$ имеет структуру кристаллографической группы движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{n,n}$, обладающей двумя различными автоморфно сопряженными псевдоевклидовыми решетками.*

Замечание 1. Теорема применима для классических простых и полупростых алгебр Ли относительно формы Киллинга-Картана.

Замечание 2. Группа Σ двуступенно нильпотентна, но она естественно погружается во все кристаллографические группы между Σ и ее нормализатором в группе движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{n,n}$.

Список литературы

[1] Чуркин В. А. Ослабленная теорема Бибербаха для кристаллографических групп в псевдоевклидовых пространствах, Сибирский матем. журнал, 51, N 3 (2010), 700–714.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет
E-mail: churkin@math.nsc.ru

Перечисление полуполевых плоскостей порядка 16

П. К. Штуккерт

Мы рассматриваем вопросы, связанные с определением числа попарно неизоморфных полуполевых плоскостей порядка 16.

Компьютерными методами построены полуполевые плоскости порядка 16: ранга 2 над полем $GF(4)$ и ранга 4 над полем $GF(2)$. Полуполевых плоскостей ранга 2 порядка 16 точно 56 (из них 6 дезарговых и 50 недезарговых) [1]; полуполевых плоскостей ранга 4 порядка 16 - 19936 (из них 336 дезарговых и 19600 недезарговых).

Плоскость оказывается дезарговой, если ее регулярное множество R является полем (определения см. [2]). Обозначим через N нормализатор регулярного множества R в соответствующей группе $GL(n,k)$.

Для любой дезарговой полуполевой плоскости ранга 2 над полем $GF(4)$ порядок нормализатора $|N| = 30$, а для любой дезарговой полуполевой плоскости ранга 4 над $GF(2)$ - $|N| = 60$.

Доказаны следующие 2 леммы.

Лемма 1. *Индекс нормализатора $|GL(2,4) : N|$ определяет число попарно изоморфных дезарговых полуполевых плоскостей ранга 2 порядка 16.*

Лемма 2. *Индекс нормализатора $|GL(4,2) : N|$ определяет число попарно изоморфных дезарговых полуполевых плоскостей ранга 4 порядка 16.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968).

Список литературы

[1] Левчук В. М., Панов С. В., Штуккерт П. К. Вопросы перечисления проективных плоскостей и латинских квадратов // Механика и моделирование (сборник научных трудов) Красноярск: СибГАУ. 2012. С. 18-39.

[2] Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes. New-York: Springer-Verlag, 1973.

аспирант ИМ СФУ, Красноярск
E-mail: Poli422@yandex.ru

Semiproportional irreducible characters of groups $\mathbf{PSp}_4(q)$

V. A. Belonogov

The characters φ and ψ of a group G are called *semiproportional* if they are not proportional and there exists a subset M of G such that the restrictions of φ and ψ on M, as well as their restrictions on $G\setminus M$, are proportional. This notion arose in the investigation of D-blocks (see [**1, 2**]): different irreducible characters φ and ψ of a finite group G are semiproportional if and only if $\{\varphi, \psi\}$ is a D-block of G for some normal subset D of G.

For groups of Lie type, considered by the author (see, for example, [**3**]), an interesting connection between the presence or the absence of a pair of semiproportional irreducible characters in a group and the parity of characteristic of the defining field of the group is revealed. For instance, in the simple groups $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, and $\mathrm{U}_3(q)$ there are no such pairs for even q, but they exist for odd q, except for the groups $\mathrm{L}_2(5)$, $\mathrm{L}_2(7)$, and $\mathrm{L}_2(9)$ (which are isomorphic to the groups $\mathrm{L}_2(4)$, $\mathrm{L}_3(2)$, and $\mathrm{PSp}_4(2)'$, respectively). The author stated the following

Conjecture. *Finite simple groups of Lie type, defined over a field of characteristic p, generally, have no pairs of semiproportional irreducible characters for $p = 2$ and have pairs of semiproportional irreducible characters for $p > 2$.*

The following confirmation of this conjecture is obtained (see [**4**] for even q).

Theorem. *The finite simple groups $PSp_4(q)$ $(q \geq 3)$ have no pairs of semiproportional irreducible characters for even q, but they have such pairs for odd q, except for the group* $\mathrm{PSp}_4(3) \cong \mathrm{PSU}_4(2)$ *(and all such pairs are obtained).*

Note that the simple alternating group A_n have no pairs of semiproportional irreducible characters (see [**5**]). Among sporadic simple group only the groups M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, J_3, Suz, He and Co_1 have no pairs of semiproportional irreducible characters [**2**, p. 306].

This work was supported by RFBR–GFEN of China (project no. 12-01-91155), Program DMS of RAS (project no. 12-T-1-1003), Programs of JR of UB RAS with SB RAS (project no. 12-S-1-10018) and Belarusian NAS (project no. 12-S-1-1009).

References

[1] Belonogov V. A. D-blocks of characters of finite group, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 143 (1989), 103-128.

[2] Belonogov V. A. Representations and characters in the theory of finite groups. Sverdlovsk, Ural Branch of AS USSR, 1990, 380 pp. (in Russian).

[3] Belonogov V. A. Small interactions in groups $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$, $\mathrm{PSU}_3(q)$, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, Ekaterinburg, 1998, vol. 5, pp. 3–27 (in Russian).

[4] Belonogov V. A. Small interactions in groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ for even q, Proc. Steklov Inst. of Math., 2012, vol. 279, suppl. 1, pp. S1–S20.

[5] Belonogov V. A. On irreducible characters of the groups S_n that are semiproportional on A_n or $S_n \setminus A_n$, VII. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, Ekaterinburg, 2011, vol. 17, pp. 3–16. (in Russian).

Inst. Math. Mech., Ural Branch of RAS, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

On finite groups with bounded centralizer chains

A. A. Buturlakin, A. V. Vasilev

The groups with bounded centralizer chains were studied in several papers (see references in [1]). The maximal length of a nested chain of centralizers of subsets in a group G is called the c-dimension of G. The following statement was proved in [1].

Proposition. *If a periodic locally soluble group G has finite c-dimension k, then G is soluble of k-bounded derived length.*

What will happen if we replace “locally soluble” with “locally finite”? There is a conjecture by A.V. Borovik in this case.

Conjecture. Let G be locally finite group G of finite c-dimension k. Let S be the full inverse image of the ’generalized Fitting subgroup’ $F^*(G/F(G))$, which is equal to the product of $F(G/F(G))$ and all quasi-simple subnormal subgroups of $G/F(G)$. Then

(1) the number of non-abelian simple composition factors of G is finite and k-bounded;

(2) G/S has an abelian subgroup of finite k-bounded index.

Here we prove the following theorem.

Theorem. *If a finite group G has finite c-dimension k, then G has a k-bounded number of non-abelian composition factors.*

Thus the first part of the conjecture holds.

References

[1] Khukhro E. I. On solubility of groups with bounded centralizer chains, Glasgow Math. J., **51** (2009), 49–54.

On the vertex connectivity of a class of Deza graphs

A. L. Gavrilyuk, S. V. Goryainov, V. V. Kabanov

For a graph Γ and its vertex x, we define $\Gamma(x) = \{y \mid y \in V(\Gamma), y \sim x\}$ to be the *neighbourhood* of x.

A graph Γ is called *strongly regular* with parameters (n, k, λ, μ) if Γ contains n vertices, is regular with valency k, and, for every pair of distinct vertices $x, y \in \Gamma$, $|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = \lambda$ whenever $x \sim y$, and $|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = \mu$ otherwise.

A graph Γ is called a *Deza graph* with parameters (n, k, b, a) if Γ contains n vertices, is regular with valency k, and, for every pair of distinct vertices $x, y \in \Gamma$, $|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| \in \{a, b\}$ holds. Clearly, Deza graphs can be considered as a generalization of strongly regular graphs, see [**1**].

The following construction [**1**] allows to obtain Deza graphs from strongly regular graphs. Let Γ be a strongly regular graph with parameters (n, k, λ, μ), where $k \neq \mu$ and $\lambda \neq \mu$, A be its adjacency matrix, P be a permutation matrix corresponding to an automorphism of Γ of order 2. Then PA is the adjacency matrix of a Deza graph with parameters (n, k, b, a), where, w.l.o.g., $b = max(\lambda, \mu)$ and $a = min(\lambda, \mu)$.

The *vertex connectivity* $\kappa(\Gamma)$ of a connected non-complete graph Γ is the smallest integer m such that Γ can be disconnected by removing m vertices.

In [**2**], Brouwer and Mesner showed that if Γ is a strongly regular graph with valency k, then $\kappa(\Gamma) = k$. In [**3**], Brouwer and Koolen showed that if Γ is a distance regular graph with valency k, then $\kappa(\Gamma) = k$.

In this work, we study the vertex connectivity of Deza graphs obtained from strongly regular graphs in the manner described above.

References

[1] Erickson M., Fernando S., Haemers W. H., Hardy D., Hemmeter J. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // J. Comb. Designs. 7 (1999) 359–405.

[2] Brouwer A. E., Mesner D. M. The connectivity of strongly regular graphs // Europ. J. Combin. 6 (1985) 215–216.

[3] Brouwer A. E., Koolen J. H. The vertex connectivity of a distance regular graph // Europ. J. Combin. 30 (2009) 668–673.

Institute of Mathematics and Mechanics of Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: alexander.gavriliouk@gmail.com, 44g@mail.ru

On the Godsil – Higman necessary condition for equitable partitions of association schemes

A. L. Gavrilyuk, I. Y. Mogilnykh

Let $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ denote the matrix algebra of all $m \times n$-matrices over $\mathbf{C}$. Let $\mathbf{A} = (X, \{A_0 = I, A_1, \ldots, A_d\})$ be an association scheme with $v = |X|$ vertices and d classes, and $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ be the corresponding matrix algebra (*the Bose – Mesner algebra* of $\mathbf{A}$) generated by the matrices $A_0, \ldots, A_d$. Then $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ has a basis of pairwise orthogonal idempotents $E_0 = \frac{1}{|X|}\mathbf{1}_{v\times v}, E_1, \ldots, E_d$, which represent orthogonal projections onto the $d+1$ common eigenspaces of A_i.

For $M, N \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ define a complex inner product on $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$ as follows:

$$\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}(M^*N), \tag{1}$$

where M^* is a conjugate transpose of M.

We recall that a partition π of X is called an *equitable* partition of $\mathbf{A}$ if the space of characteristic vectors (columns) of its cells is $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$-invariant.

In his monograph [**1**], Godsil gave various applications of the inner product (1), in particular, he challenged readers with the unclear meaning of the following necessary existence condition for an equitable partition π of association scheme $\mathbf{A}$:

$$\langle H, E_j\rangle = \frac{m_j}{v}\sum_{i=0}^{d}\frac{p_i(j)}{v_i}\langle H, A_i\rangle \tag{2}$$

is a non-negative integer for all $j = 0, \ldots, d$, where $m_j = \mathrm{rank}(E_j)$, $A_iE_j = p_i(j)E_j$, $v_i = p_i(0)$, and H is a certain projection matrix defined by π.

The condition (2) goes back to G. Higman, and its analogue with a permutation matrix instead of H is widely used in a study of feasible automorphisms of distance-regular graphs [**3**].

In the talk, we will discuss this condition, in particular, we will show that, for P-polynomial association schemes (i.e., distance-regular graphs), (2) cannot be used to show non-existence of a putative equitable partition if it is feasible with respect to the well-known Lloyd theorem [**2**].

The work is supported by the Grants of the President of the Russian Federation for Young Russian Researchers (project nos. MK-1700.2011.1, MK-938.2011.1) and by the Grants RFBR 09-01-00244, 10-01-00616-a, 12-01-31098.

References

[1] Godsil C. Association schemes. — University of Waterloo, 2010.

[2] Godsil C., Royle G. Algebraic Graph Theory. — Springer Science+Business Media, LLC, 2004.

[3] Makhnev A. A. On automorphisms of distance-regular graphs // J. Math. Sci. (New York), 2010, 166:6, p. 733–742.

Institute of Mathematics and Mechanics of Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

E-mail: alexander.gavrilliouk@gmail.com, ivmog84@gmail.com

New examples of finite non-supersolvable groups factored by two normal supersolvable subgroups

W. Guo, A. S. Kondratiev

It is very known that the product of two normal subgroups A and B of a finite group is solvable, if A and B are solvable, and is nilpotent, if those subgroups are nilpotent. This gives the basis for the considering in any finite group G of especially useful characteristic subgroups: the solvable radical $S(G)$ and the nilpotent radical (Fitting radical) $F(G)$. However, if A and B are supersolvable, then their product is not necessarly to be supersolvable. Therefore, a hope on the appearence of a new (supersolvable) radical vanishes.

The first example of such product was given by Huppert still in 1953. This is the Frobenius group of the order 200 with quaternion Sylow 2-subgroup.

Under the influence of this example in further it was formed the whole direction studiying the conditions of the supersolvability of a finite group factored by some two (not necessarily normal) supersolvable subgroups.

We concentrate on the study of non-supersolvable groups G factored by two normal supersolvable subgroups A and B. In 1957 Baer proved that in this case the commutator subgroup G' is not nilpotent and constructed an infinite class of the examples of such factorization consisting of groups of the order $8p^2$, where p is an odd prime, with dihedral Sylow 2-subgroup. In 1971 Friesen proved that in the considered case the indexes $|G:A|$ and $|G:B|$ are not coprime. Huppert's and Baer's examples were up to now the unique known such examples, although it is easily to see that the finite direct product of non-supersolvable groups factored by two normal supersolvable subgroups is also factored by two normal supersolvable subgroups. Hence, the indices $|G:A|$ and $|G:B|$ can be arbitrarily large.

In the given work, we supplement essentially the store of examples of finite non-supersolvable groups factored by two normal supersolvable subgroups, using the results of Huppert (1954), Doerk (1966) and V. T. Nagrebetsky (1975) on the structure of the finite minimal non-supersolvable groups.

Theorem. *A finite minimal non-supersolvable group G is factored by two normal supersolvable subgroups if and only if $G/F(G)$ is a primary minimal non-abelian group.*

Note, that Huppert's example and Baer's examples for $p \equiv 1 \ (mod\ 4)$ are minimal non-supersolvable groups from the theorem, but Baer's examples for $p \not\equiv 1 \ (mod\ 4)$ are not such.

This work was supported by RFBR-GFEN of China (project no. 12-01-91155).

University of Science and Technology of China, Hefei; Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg
E-mail: wbguo@ustc.edu.cn, a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Transitive 1-perfect codes from quadratic functions

D. S. Krotov, V. N. Potapov

Let F be a finite field of order q; let F^n be the vector space of all n-words over the alphabet F. A subset C of F^n is called a 1-perfect code if for every word v from F^n there is exactly one c in C agreeing with v in at least $n-1$ positions.

Let $H \subset F^n$ be a 1-perfect code and $\lambda : H \to F$ be an arbitrary function. Define the set

$$C(H,\lambda) = \{((v_i)_{i\in F}, p) \,:\, v_i \in F^n,\ \sum_{i\in F} v_i = c \in H,\ p = \sum_{i\in F} i|v_i| + \lambda(c)\}$$

where $(v_i)_{i\in F}$ is treated as the concatenation of the words v_i in some prefixed order, $|v_i|$ is the sum of all n elements of v_i. Then $C(H,\lambda)$ is a 1-perfect code of length $qn+1$, known as a Schonheim code (in the case $q=2$, Vasil'ev code).

The *automorphism group* $\mathcal{AUT}(C)$ of a code $C \subset F^n$ is the set of permutations of F^n that preserve the neighbourship (two words are neighbours if they differ in exactly one position) and stabilize (fix setwise) C. The code C is *transitive* if for every two codewords a, b there exists $\varphi \in \mathcal{AUT}(C)$ such that sends a to b.

Assume H is a subspace of F^n. A function $\lambda : H \to F$ is called *quadratic* if for every $c \in V$ there exist $\alpha_0^c, \alpha_1^c, \ldots, \alpha_n^c$ such that $\lambda(x+c) = \lambda(x) + \alpha_0^c + \alpha_1^c x_1 + \ldots + \alpha_n^c x_n$ for all $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$.

Theorem. *If $H \subset F^n$ is a linear 1-perfect code and $\lambda : H \to F$ is a quadratic function, then $C(H,\lambda)$ is a transitive 1-perfect code.*

The key point in the proof is the following statement.

Lemma. *Let $\lambda'(x) = \lambda(x) - \alpha x_j$ for some $j \in [1..n]$, $\alpha \in F$. Then $C(H,\lambda') = \pi_j^\alpha C(H,\lambda)$ where π_j^α is the coordinate permutation that sends the $(i+\alpha, j)$th coordinate to the (i,j)th coordinate (the jth coordinate of the block v_i, $i \in F$) for all $i \in F$ and fix the other coordinates.*

Now, denoting $\pi^c = \pi_1^{\alpha_1^c} \pi_2^{\alpha_2^c} \ldots \pi_n^{\alpha_n^c}$, where the coefficients α_j^c correspond to λ (for simplicity we suppose $\lambda(0) = 0$), we get the following fact, which immediately proves the theorem:

Proposition. *For every codeword $w = ((v_i)_{i\in F}, p)$ of $C(H,\lambda)$ the transform $\varphi_w(x) = \pi^c(x) + w$, where $c = \sum_{i\in F} v_i$, is an automorphism of $C(H,\lambda)$, which sends the all-zero word to w.*

In fact the set of φ_w is close under composition; so, $C(H,\lambda)$ is a so-called *propelinear* code.

Problem. For a vector space V and a group $\mathcal{A}$ of linear permutations of V, find non-quadratic functions λ such that for every c from V there exists $\mu \in \mathcal{A}$ meeting $f(\mu(x)+c) = f(x) + l(x) + \text{const}$ for some linear l. For example, in the application considered above, $V = H$ and $\mathcal{A} \subset \mathcal{AUT}(H)$.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: krotov@math.nsc.ru, vpotapov@math.nsc.ru

Asymptotic density of rational sets in $\mathbb{Z}^n$

A. V. Menshov

Let $\mathbb{Z}^n$ be a free abelian group of rank n. We identify group $\mathbb{Z}^n$ with the standard integer lattice in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We assume that $\mathbb{R}^n$ is equipped with the uniform norm defined for $v = (v_1, \dots, v_n)$ by the formula

$$\|v\| = \max(|v_1|, \dots, |v_n|).$$

For any $r \in \mathbb{R}^+$ we define the ball

$$\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le r\}.$$

Denote $\mathcal{B}_r(\mathbb{Z}) = \mathcal{B}_r \cap \mathbb{Z}^n$ where $r \in \mathbb{N}$.

Definition. *The asymptotic density of $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ is defined to be*

$$\rho(A) = \lim_{m\to\infty} \rho_m(A), \quad \textit{where} \quad \rho_m(A) = \frac{|A \cap \mathcal{B}_m(\mathbb{Z})|}{|\mathcal{B}_m(\mathbb{Z})|},$$

when the limit exists.

A *lattice polytope* $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ is a convex polytope whose vertices have integral coordinates. For $t \in \mathbb{Z}^+$ denote $L(\mathcal{P}, t) = |t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n|$ — the number of integer points that lie in the t^{th} dilate of $\mathcal{P}$. Eugene Ehrhart proved that for n-dimensional convex lattice polytope $\mathcal{P}$ function $L(\mathcal{P}, t)$ is a polynomial in t of degree n. See [**1**] for details.

Following [**3**] we define the class of rational subsets of a monoid M as the closure of its finite subsets under union, product and monoid closure.

In [**2**] it is proved that any rational subset R of commutative monoid M is *semi-simple*, i. e. a finite *disjoint* union of *simple* sets

$$R = \bigcup_{i=1}^{k} (a_i + B_i^*),$$

where $a_i \in M,\ B_i \subset M$ — finite and B_i^* is a free commutative monoid with basis B_i.

Using results above we prove

Theorem. *For any rational subset $R \subseteq \mathbb{Z}^n$ there esists $\rho(R)$.*

If R is presented as a semi-simple set we introduce the method to calculate its asymptotic density.

References

[1] Beck M., Robins S. Computing the continuous discretely, Springer, New York, 2007.

[2] Eilenberg S., Schutzenberger M. P. Rational sets in commutative monoids, J. of Algebra 13(1969), 173-191.

[3] Gilman R. H. Formal languages and infinite groups, in: Geometric and Computational Perspectives on Infinite Groups (DIMACS, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 25), Providence, RI, Am. Math. Soc., 1996, 27-51

Omsk State Dostoevskii University, Omsk (Russia)
E-mail: menshov.a.v@gmail.com

Characterization of groups with almost layer-finite periodic part

V. I. Senashov

Definition. The group is called the *layer-finite*, if the set of elements of any given order is finite.

This concept was first introduced by S.N. Chernikov in [1].

Definition. *Almost layer-finite group* is an extension of layer-finite group by a finite group.

Definition. Group is called *Chernikov group* if it is either finite or is a finite extension of the direct product of finite number of quasi-cyclic groups.

Definition. Group is called *Shunkov group*, if for any finite subgroup H in the quotient group $N_G(H)/H$, any two conjugate elements of prime order generate a finite subgroup.

Proved the following:

Theorem. *Let G be a Shunkov group, centralizer of every involution of which have Chernikov periodic part. If in G the normalizer of any non-trivial finite subgroup has an almost layer-finite periodic part, then the group G has an almost layer-finite periodic part.*

Definition. Element of the second order is called *involution*.

Definition. If the set of elements of finite order is a subgroup, then it is called *periodic part* of the group.

This work was supported by RFBR (project 10-01-00509) and by Siberian Federal University (Project - an elite mathematical education at SFU).

References

[1] Chernikov S. N. Dokl. USSR Academy of Sciences (1945), p. 71–74.

Institute of Computational modelling SD RAS, Krasnoyarsk (Russia)
E-mail: sen1112home@mail.ru

V. Секция «Теория колец»

Алгебры Ли, индуцированные ненулевым дифференцированием ассоциативной алгебры

А. Г. Гейн

Пусть A — ассоциативно-коммутативная алгебра над полем F, D — ее ненулевое дифференцирование. Через $A^{(D)}$ обозначим линейную алгебру над тем же полем, в которой операция умножения заменена операцией $\circ$, определяемой формулой $a \circ b = D(a)b - aD(b)$. Легко убедиться, что относительно операции $\circ$ алгебра $A^{(D)}$ является алгеброй Ли. Будем говорить, что эта алгебра индуцирована дифференцированием D.

В [**1**] в качестве базовой алгебры A взято несепарабельное расширение поля F простой характеристики. Для такой алгебры существует ненулевое дифференцирование D, ядро которого содержит поле F. В [**1**] показано, что получающаяся в этом случае алгебра $A^{(D)}$ проста.

Если же A — произвольная ассоциативно-коммутативная алгебра над полем F, то имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если алгебра $A^{(D)}$ разрешима, то её коммутант нильпотентен. Если алгебра $A^{(D)}$ неразрешима, то её разрешимый радикал нильпотентен и факторалгебра по разрешимому радикалу разлагается в прямое произведение простых алгебр.*

Теорема 2. *Алгебра $A^{(D)}$ над полем характеристики 0 разрешима.*

Над полем F простой характеристики существуют, как показано в [**1**], простые алгебры $A^{(D)}$. Отметим, что если алгебра $A^{(D)}$ проста, то ядро дифференцирования D (которое будем обозначать как $\mathrm{Ker}D$) является конечным расширением поля F (возможно совпадающим с F).

Теорема 3. *Над совершенным полем простой характеристики простая алгебра $A^{(D)}$ изоморфна $W_1(m) \otimes \mathrm{Ker}D$, где $W_1(m)$ — алгебра Цассенхауза.*

Для произвольно поля F простой характеристики нетрудно построить алгебру A с таким дифференцированием D, чтобы алгебра $A^{(D)}$ была изоморфна алгебре $W_1(m)$. Именно такую конструкцию использовал Х. Чанг (см. [**2**]) для реализации алгебры Витта $W_1(1)$.

Список литературы

[1] Гейн А. Г., Егоров А. Н. Алгебры Ли, индуцированные ненулевым дифференцированием. Мальцевские чтения 2009: Тез. докладов Международной конференции (Новосибирск), Институт математики им. Соболева, НГУ, 2009, 115.

[2] Chang H. J. Uber Wittsche Lie-Ringei. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 14 (1941), 151 – 184.

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург
E-mail: alexander.gein@usu.ru

Вложение коалгебр Мальцева в коалгебры Ли с тройственностью

М. Е. Гончаров, В. Н. Желябин

В работах [**1, 2, 3**] была установлена связь между лупами Муфанг и группами, на которых действуют автоморфизмы специального вида (группы с тройственностью). Это оказалось полезным для изучения свойств луп Муфанг. В частности, Лиебек [**4**] использовал эту связь при классификации конечных простых луп Муфанг. Гришков и Заварницин [**5**] использовали связь между лупами Муфанг и группами с тройственностью при доказательстве аналога теоремы Лагранжа для конечных луп Муфанг.

Михеевым в [**6**] было установлено, что любая алгебра Мальцева вкладывается в алгебру Ли, на которой действуют автоморфизмы специального вида. Там же показано, что верно и обратное. Позднее, в работе Гришкова [**7**] для таких алгебр Ли был введен термин алгебры Ли с тройственностью. В той же работе было показано, что связь между алгебрами Мальцева и алгебрами Ли с тройственностью может быть весьма полезной при исследовании свойств алгебр Мальцева. В частности, используя эту связь, было доказано, что основные результаты структурной теории алгебр Мальцева над полем характеристики ноль получаются как следствие известных результатов для алгебр Ли.

Данная работа посвящена изучению связи между коалгебрами Мальцева и коалгерами Ли с тройственностью. Доказано, что кососимметричные относительно инволюции элементы коалгебры Ли с тройственностью образуют коалгебру Мальцева. Также доказывается, что любая коалгебра Мальцева вкладывается в коалгебру Ли с тройственностью.

Список литературы

[1] Glauberman G. On loops of odd order II, // Journal of Algebra 8 (1986), 393–414.
[2] Doro S. Simple Moufang loops, // Math. Z. 73 (1960), 59–78.
[3] Mikheev P. O. Enveloping groups of Moufang loops, // Russ. Math. Surv. 48 №2 (1993), 195–196.
[4] Liebeck M. W. The classification of finite simple Moufang loops, // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 102 (1987), 33–47.
[5] Grishkov A. N., Zavarnitsine A. V. Lagrange's theorem for Moufang loops,// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 139, 41 (2005) 41–57.
[6] Михеев П. О. О вложении алгебр Мальцева в алгебры Ли, // Алгебра и Логика, 31, 2 (1992) 167–173.
[7] Grishkov A. Lie algebras with triality, // J. of Algebra, 266 (2003) 698–722.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: gme@math.nsc.ru, vicnic@math.nsc.ru

Операторы Рота — Бакстера простых йордановых алгебр симметрической невырожденной формы

В. Ю. Губарев

Пусть даны алгебра A и скаляр $\Delta \in F$, где F — основное поле. Оператором Рота—Бакстера (РБ-оператором) A веса Δ называют линейный оператор $R : A \to A$, удовлетворяющий следующему тождеству:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \Delta xy)$$

для любых $x, y \in A$.

Утверждение 1. *Пусть алгебра A разлагается как линейное пространство в прямую сумму своих подалгебр A_1 и A_2. Тогда оператор P, заданный как*

$$P|_{A_1} \equiv 0, \quad P|_{A_2} \equiv \Delta \mathrm{id}, \tag{1}$$

будет РБ-оператором алгебры A веса $-\Delta$.

Пусть $A = F \cdot 1 \oplus V$ — прямая сумма линейных пространств, и на конечномерном пространстве V задана невырожденная симметрическая билинейная форма f. Тогда относительно умножения, определяемого следующим образом

$$(\alpha \cdot 1 + a)(\beta \cdot 1 + b) = (\alpha\beta + f(a, b)) \cdot 1 + (\alpha b + \beta a),$$

пространство A будет простой йордановой алгеброй [2].

Теорема. *Пусть R — РБ-оператор ненулевого веса Δ простой конечномерной йордановой алгебры J симметрической невырожденной формы. Тогда J разлагается в сумму двух своих подалгебр так, что R задаётся на J по* (1).

Работа поддержана грантом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (проект 14.740.11.1510).

Список литературы

[1] Guo L. An Introduction to Rota—Baxter Algebra. High Education Press and International Press (to appear). 183 p.

[2] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 432 с.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: vsevolodgu@mail.ru

Локальные дифференцирования и локальные автоморфизмы алгебры $NT(n, K)$

А. П. Елисова

Пусть K — ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. *Локальным автоморфизмом* (*дифференцированием*) алгебры A над K называют автоморфизм (соответственно, эндоморфизм) K - модуля A, действующий на каждый элемент α из A как некоторый, вообще говоря, зависящий от выбора α автоморфизм (соответственно, дифференцирование) алгебры. *Тривиальные* локальные автоморфизмы (и дифференцирования) - это обычные автоморфизмы (соответственно, дифференцирования) алгебры A; они характеризуются действием на любом множестве, порождающем A как алгебру.

Мы исследуем задачу описания локальных автоморфизмов и локальных дифференцирований алгебры $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K, а также ее ассоциированной алгебры Ли; их автоморфизмы и дифференцирования известны.

При $n = 3$ решение задачи известно. В случае $n = 4$ решение задачи получено, когда K – поле. В исследовании локальных автоморфизмов алгебры $NT(n, K)$ произвольной размерности n мы используем следующую редукционную теорему.

Теорема. *Пусть* $R = NT(n, K)$, $n \geq 4$. *Произвольный локальный автоморфизм* φ *алгебры* R, *с точностью до умножения на ее автоморфизм, тождественен на элементах* e_{ii-1}, $1 < i \leq n$, *а элементы* e_{ii-2}, $2 < i \leq n$ *умножает на один и тот же обратимый элемент* $c \in K$.

Работа поддержана грантами РФФИ (код проекта 12-01-00968) и Мин.обр. и науки (тема 1.34.11).

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: anshub@mail.ru

Примеры первичных супералгебр векторного типа

В. Н. Желябин

Пусть F — поле характеристики не 2. Супералгебра $J = J_0 + J_1$ — это $\mathbb{Z}_2$-градуированная F-алгебра, т.е.

$$J_0^2 \subseteq J_0, J_1^2 \subseteq J_0, J_1 J_0 \subseteq J_1, J_0 J_1 \subseteq J_1.$$

Пусть G — алгебра Грассмана над F. Тогда $G = G_0 + G_1$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная F-алгебра.

Алгебра $J = J_0 \oplus J_1$ называется йордановой супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(J) = G_0 \otimes J_0 + G_1 \otimes J_1$ является йордановой алгеброй, т.е. в ней выполняются тождества

$$xy = yx, (x^2 y)x = x^2(yx).$$

Пусть Γ — ассоциативная коммутативная F-алгебра с ненулевым дифференцированием D. Изоморфную копию пространства Γ с отображением изоморфизма $a \mapsto \overline{a}$ обозначим через $\overline{\Gamma}$. Рассмотрим прямую сумму пространств $J(\Gamma, D) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ и определим на $J(\Gamma, D)$ умножение $(\cdot)$ по правилам:

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot \overline{b} = \overline{ab}, \quad \overline{a} \cdot b = (-1)^{|b|}\overline{ab}, \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = (D(a)b - aD(b)),$$

где $a, b \in \Gamma$ и ab — произведение в Γ. Тогда $J(\Gamma, D)$ — йорданова супералгебра и называется супералгеброй векторного типа.

Произвольная алгебра A называется первичной, если для любых ее идеалов I и K из равенства $IK = 0$ следует $I = 0$ или $K = 0$.

В [**1**] доказана следующая

Теорема. *Пусть $J = A + M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра, ее четная часть A — ассоциативная алгебра, а нечетная часть M — ассоциативный A-модуль. Предположим, что J не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы. Тогда существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_n \in M$, что $M = x_1 A + \ldots + x_n A$, и произведение в M задается равенством*

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij} ab + D_{ij}(a)b - aD_{ji}(b), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\gamma_{ij} \in A$, а D_{ij} — дифференцирование алгебры A. Алгебра A является дифференциально простой относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{ij} | i, j = 1, \ldots, n\}$. Модуль M является проективным A-модулем ранга 1. Кроме того, супералгебра J является подалгеброй супералгебры $J(\Gamma, D)$.

Примеры новых простых йордановых супералгебр, удовлетворяющих условию теоремы, построены в [**1, 2, 3, 4**]. В этих примерах нечетная часть M является двух порожденным A-модулем. Приведем примеры первичных йордановых супералгебр векторного типа, у которых нечетная часть является конечнопорожденным проективным модулем ранга 1 с произвольным числом порождающих.

Пусть R — поле действительных чисел и n — натуральное число. Рассмотрим алгебру полиномов $R[x_0, \ldots, x_n]$ от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Пусть $\Gamma_n = R[x_0, \ldots, x_n]/(x_0^2 + \cdots + x_n^2 - 1)$ — фактор-алгебра алгебры $R[x_0, \ldots, x_n]$ по идеалу $(x_0^2 + \cdots + x_n^2 - 1) = (x_0^2 + \cdots + x_n^2 - 1)R[x_0, \ldots, x_n]$. Отождествим образы элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ при каноническом гомоморфизме $R[x_0, \ldots, x_n] \mapsto \Gamma_n$ с элементами $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Пусть A_n — подалгебра в Γ_n, порожденная элементами $1, x_1^2, \ldots, x_n^2$,

[1]РФФИ 11-01-00938-а, Развитие научного потенциала высшей школы (проект 2.1.1.419), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (№14.740.11.0346).

$x_i x_j, i, j = 0, \ldots, n,\ i \neq j$ и $M_n = A_n x_0 + \ldots + A_n x_n$. Тогда $\Gamma_n = A_n + M_n$ — Z_2-градуированная алгебра.

Пусть D — четное дифференцирование алгебры Γ_n, т.е. $D(A_n) \subseteq A_n$, $D(M_n) \subseteq M_n$. Предположим, что D не равно нулю на A_n. Тогда $D_{ij} = x_i x_j D$ — ненулевые дифференцирования алгебры A_n, $i, j = 0, ..., n$. Положим $\gamma_{ij} = D(x_i)x_j - D(x_j)x_i$. В супералгебре $J(\Gamma_n, D)$ рассмотрим подпространство $J(A_n, \Delta_n) = A_n + \overline{M_n}$, где $\Delta_n = \{D_{ij} | i, j = 0, ..., n\}$.

Справедлива

Теорема. *Супералгебра $J(A_n, \Delta_n)$ — йорданова. Умножение нечетных элементов задается по (1). Кроме того, $J(A_n, \Delta_n)$ — первична, и ее нечетная часть M_n — проективный A_n-модуль ранга 1, модуль M_n порождается $n+1$ элементом, но не порождается меньшим числом элементов.*

Список литературы

[1] Желябин В. Н., Шестаков И. П. Простые специальные супералгебры с ассоциативной четной частью, Сиб. матем. ж. 45 (2004), №5, С. 1046-1072.

[2] Желябин В. Н. Дифференциальные алгебры и простые йордановы супералгебры, Мат. труды 12 (2009), №2, С. 41–51.

[3] Zhelyabin V. N. Differential algebras and simple Jordan superalgebras, Siberian Advances in Math. 20 (2010), №3, P. 223–230.

[4] Желябин В. Н. Новые примеры простых йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики ноль. Алгебра и Анализ 24 (2012), №4, 84–96.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru

Координатное кольцо n-мерной сферы и примеры дифференциально простых альтернативных алгебр

В. Н. Желябин, А. А. Попов

Пусть $R[x_0, \ldots, x_n]$ — алгебра полиномов от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ над полем R действительных чисел, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ — ее дифференцирование по переменной x_i, $i = 0, \ldots, n$. Определим новые дифференцирования X_i алгебры $R[x_0, \ldots, x_n]$ по следующему правилу: $X_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим многочлен $S^n(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 + \ldots + x_n^2 - 1$. Тогда $X_i(S^n(x_0, \ldots, x_n)) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть Γ_n — фактор-алгебра алгебры $R[x_0, \ldots, x_n]$ по идеалу, порожденному многочленом $S^n(x_0, \ldots, x_n)$. Дифференцирование алгебры Γ_n, индуцированное отображением X_i, также будем обозначать через X_i, $i = 1, \ldots, n$. Отождествим образы элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ при каноническом гомоморфизме $R[x_0, \ldots, x_n] \mapsto \Gamma_n$ с элементами $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тогда справедливо

Предложение 1.
1. *Алгебра Γ_n дифференциально проста относительно дифференцирований $X_1, \ldots, X_n$.*
2. *Подалгебра A_n алгебры Γ_n, порожденная элементами $1, x_k^2, x_i x_j$, где $i, j, k = 0, \ldots, n$, $i \neq j$, дифференциально проста относительно дифференцирований $X_1, \ldots, X_n$.*
3. *Подпространство $M_n = A_n x_0 + \ldots + A_n x_n$ пространства Γ_n будет проективным A_n-модулем ранга 1, не содержащим A_n-подмодулей, инвариантных относительно $X_1, \ldots, X_n$.*

Заметим, что результаты предложения 1 справедливы для любого поля характеристики ноль.

Возникает вопрос о числе порождающих модуля M_n. Здесь имеет место

Теорема 1 (R. Swan, см. [1]). *Модуль M_n не может быть порожден меньшим чем $n + 1$ числом элементов.*

Если $n = 1$, то теорема 1 верна (см. [2,3]) для любого поля характеристики ноль, в котором нельзя извлечь квадратный корень из -1.

Напомним, что алгебра A называется *альтернативной*, если для любых ее элементов x, y выполнены соотношения $x^2 y = x(xy), xy^2 = (xy)y$.

В работе [4] было доказано, что альтернативная неассоциативная дифференциально простая алгебра над полем характеристики ноль будет проективным модулем ранга 8 над своим центром, в связи с чем возникает вопрос о свободе данного модуля.

Конструкции, описанные выше, позволяют построить пример дифференциально простой альтернативной неассоциативной алгебры над полем вещественных чисел, не являющейся свободным модулем над своим центром.

Список литературы

[1] Swan R. G. Vector bundles and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), №2, 264–277.

[2] Желябин В. Н. Дифференциальные алгебры и простые йордановы супералгебры, Мат. труды **12** (2009), №2, С. 41–51.

[3] Zhelyabin V. N. Differential Algebras and Simple Jordan Superalgebras, Siberian Advances in Math. **20** (2010), №3, P. 223–230.

[4] Попов А. А. Дифференциально простые альтернативные алгебры, Алгебра и логика **49** (2010), №5. С. 670–689.

ИМ СО РАН
E-mail: vicnic@math.nsc.ru, canmail@mail.ru

Ассоциативные нилькольца с булевой алгеброй стабильных толерантностей

Д. А. Жинжилов

Понятие стабильной толерантности для произвольных алгебр введено и изучалось в [**1**]. В частности, там отмечено, что множество всех стабильных толерантностей произвольной алгебры является полной дистрибутивной решёткой относительно включения, любая стабильная транзитивная толерантность алгебры является её конгруэнцией и выделены классы полугрупп, в которых любая стабильная толерантность транзитивна. В [**2**] охарактеризованы коммутативные нётеровы ассоциативные кольца с единицей и кольца матриц над телом, в которых любая стабильная толерантность транзитивна; а также ассоциативные кольца с единицей с булевой решёткой стабильных толерантностей. Последнее свойство изучается нами для ассоциативных нилько-лец.

Формулировке соответствующего результата предпошлем необходимые определения. Бинарное отношение на множестве называется толерантностью, если оно рефлексивно и симметрично. Толерантность ρ кольца K называется *стабильной*, если для любых элементов a, b, c кольца K из $a\rho b$ следует $(a+c)\rho(b+c)$, $ac\rho bc$ и $ca\rho cb$. Кольцо, решётка стабильных толерантностей которых является булевой алгеброй, называется *B-кольцом* [**2**] .

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *Ассоциативное нилькольцо K является B–кольцом тогда и только тогда, когда K — кольцо с нулевым умножением.*

Поскольку любое ассоциативное нильпотентное кольцо является нилькольцом, получаем

Следствие. *Ассоциативные нильпотентные B–кольца исчерпываются кольцами с нулевым умножением.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М., Ситников В. М. О полугруппах, в которых любая стабильная толерантность транзитивна // Алгебра и теория чисел. — Вып.4. — Нальчик, 1979. — С.68–78.

[2] Мартынов Л. М., Нагель В. В. Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник. — Омск: Изд–во ОмГПУ. — 2007. — Вып. 6. — С. 35–38.

Омский государственный педагогический университет, г. Омск
E-mail: 19300185@mail.ru

Вложение алгебр Новикова — Пуассона в алгебры Новикова — Пуассона векторного типа

А. С. Захаров

Алгебра Новикова возникли в работе И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфмана [1] и в работе А. А. Балинского и С. П. Новикова [2]. Алгебры Новикова-Пуассона были введены в работе К. Ксу [3]. А. С. Тихов и В. Н. Желябин рассматривали алгебры Новикова-Пуассона с ассоциативной коммутативной единицей [4].

Векторное пространство $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ с двумя умножениями называется обобщенной алгеброй Новикова-Пуассона, если $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра и верны тождества

$$xy \circ z = x(y \circ z); (x \circ y)z - x \circ (yz) = (y \circ x)z - y \circ (xz). \tag{1}$$

Обощенная алгебра Новикова-Пуассона $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ будет алгеброй Новикова-Пуассона, если $\langle A, \circ \rangle$ — алгебра Новикова, в ней выполнены тождества

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y; (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z). \tag{2}$$

Если $a \circ b = a \cdot \partial(b) + \alpha \cdot a \cdot b$, где $\alpha \in A$, ∂ — диффенцирование алгебры $\langle A, \cdot \rangle$, то $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона векторного типа.

По ассоциативной коммутативной алгебре $\langle A, \cdot \rangle$ с кососимметричной операцией $\{ , \}$, которую мы будем называть скобка, можно построить дубль Кантора следующим образом. Пусть $J(A) = A + A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия A. Введем умножение слудующим образом:

$$a \bullet b = ab;\ a\xi \bullet b = a \bullet b\xi = (ab)\xi;\ a\xi \bullet \xi b = \{a, b\}.$$

Для алгебры Новикова-Пуассона $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ введем скобку по правилу $\{a, b\} = a \circ b - b \circ a$.

Теорема 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — обобщенная алгебра Новикова-Пуассона. Тогда, построенный по $\langle A, \cdot, \circ \rangle$, дубль Кантора $J(A, \{ , \})$ будет йордановой супералгеброй.*

Рассмотрим произвольное мультипликативное множество S в $\langle A, \cdot \rangle$. Обозначим через $\langle Fr_S(A), \cdot \rangle$ кольцо частных $\langle A, \cdot \rangle$ относительно S. Пусть $a, b, c \in S$, $\lambda = \frac{abc + ac \circ b - a \circ bc}{abc}$ и $1 = \frac{a}{a}$. Определим новое умножение $\circ_{Fr}$ на $Fr_S(A)$, полагая

$$\frac{a}{n} \circ_{Fr} \frac{b}{m} = \frac{a}{nm}(\lambda \frac{b}{1} + 1 \circ b - \frac{b}{m} \circ m).$$

Теорема 2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — обобщённая алгебра Новикова-Пуассона, и x не делитель нуля в $\langle A, \cdot \rangle$. Тогда $\langle Fr_S(A), \cdot, \circ_{Fr} \rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона векторного типа и $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ вложима в $\langle Fr_S(A), \cdot, \circ_{Fr} \rangle$. В частности, $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова-Пуассона.*

Следствие 1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — обобщённая алгебра Новикова-Пуассона, x не делитель нуля в $\langle A, \cdot \rangle$, тогда соответствующий дубль Кантора $\langle J(A), \{ , \} \rangle$ будет специальной йордановой супералгеброй.*

Список литературы

[1] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы опреаторы и связанные с ними алгебраические структуры, Функц. анализ прил., 13, №4 (1979), 13–30.

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1.10726), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1), Работа поддержана грантом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (код проекта 14.740.11.1510), гранта РФФИ 11-01-00938-а.

[2] Балинский А. А., Новиков С. П. Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли, ДАН СССР, 283, №5 (1985), 1036–1039.
[3] Xu X. Novikov-Poisson algebra, J. Algebra, 190, №2 (1997), 253–279.
[4] Желябин В. Н., Тихов А. С. Алгебры Новикова-Пуассона и ассоциативные коммутативные дифференциальные алгебры, Алгебра и логика, 47, №2 (2008), 186–202.

НГУ, Новосибирск
E-mail: antzakh@gmail.com

Некоторые примеры хопфовых абелевых групп

Е. В. Кайгородов

Определение 1. Группа G называется хопфовой, если она не имеет собственных изоморфных себе факторгрупп.

Используется также и другое определение хопфовой группы.

Определение 2. Группа G называется хопфовой, если всякий эпиморфизм группы G на себя является автоморфизмом.

В настоящей работе описываются хопфовы группы в некоторых классах абелевых групп. Получены следующие результаты:

Теорема 1 [1]. *Делимая группа хопфова тогда и только тогда, когда она является прямой суммой конечного числа копий рациональной группы* $\mathbb{Q}$.

Следствие [1]. *Абелева группа является хопфовой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть есть хопфова группа, а делимая часть, если она ненулевая, есть конечная прямая сумма копий рациональной группы* $\mathbb{Q}$.

Таким образом, проблема изучения хопфовых абелевых групп сводится к изучению и описанию хопфовых редуцированных абелевых групп.

Теорема 2 [1]. *Пусть A — прямая сумма циклических групп:*

$$A = \bigoplus A_{p_i} \bigoplus A_0,$$

где A_{p_i} — прямая сумма циклических p_i-групп, A_0 — прямая сумма циклических групп бесконечного порядка. Тогда группа A хопфова, если и только если все группы A_{p_i} конечны, а группа A_0 имеет конечный ранг.

Интересные примеры хопфовых абелевых групп появляются при изучении аддитивных групп отдельных колец.

Теорема 3 [2]. *Аддитивная группа любого E-кольца хопфова.*

Теорема 4 [2]. *Для того чтобы аддитивная группа A артинова кольца была хопфовой, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид:*

$$A = \left(\bigoplus_r \mathbb{Q}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{s_i} \mathbb{Z}\left(p_i^{k_i}\right)\right),$$

где $p_i^{k_i}$ — делители фиксированного целого числа m, r и s_i — фиксированные натуральные числа.

Список литературы

[1] Кайгородов Е. В. Хопфовы абелевы группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2(18). – С. 5-12.

[2] Кайгородов Е. В. О хопфовости аддитивных групп некоторых колец // Современные проблемы математики и механики. III Всероссийская молодежная научная конференция: Сборник трудов конференции (Томск, 23 – 25 апреля 2012 г.) – Томск: Томский государственный университет, 2012. – 473 с.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: gazetaintegral@gmail.com

Метод ортогональной полноты в теории градуированных колец

А. Л. Канунников

Метод ортогональной полноты разработан К. И. Бейдаром и А. В. Михалёвым в 1970-х годах. Изначально метод применялся в теории колец и использовался главным образом для вывода теорем о полупервичных кольцах путём редукции к случаю первичных колец. В 1980-х годах авторы развили теорию ортогональной полноты произвольных алгебраических систем (см. [**1**] и указанную там литературу).

Доклад посвящён развитию теории ортогональной полноты, ее применению к ассоциативным кольцам, градуированным по группе. Все объекты классической теории заменены их градуированными аналогами для согласования построений с градуировкой: рассматривается градуированное по группе G gr-полупервичное кольцо R (не содержащее нильпотентных градуированных идеалов), его полное правое градуированное кольцо частных Q^{gr}, градуированный расширенный центроид C^{gr} (см. [**2**]), булево кольцо B однородных идемпотентов последнего и собственно ортогональное градуированное пополнение O^{gr}, построенное автором. При этом кольцо B оказывается ортогонально полным, но кольцо Q^{gr} может оказаться не ортогонально полным относительно B, в отличие от классического случая. Автором доказан критерий ортогональной полноты кольца Q^{gr} [**3**].

Для применения теорем об ортогональной полноте из работы [**1**] градуированное кольцо рассматривается как алгебраическая система с сигнатурой кольца, дополненной операциями взятия однородных компонент и предикатом ,,быть однородным элементом", B-допустимость которых установлена.

Теорема. *Пусть кольцо Q^{gr} ортогонально полно, $A = Q^{gr}$ или O^{gr}. Тогда A — ортогонально полная над B алгебраическая система сигнатуры*

$$\Omega = \langle +, 0, -, \cdot, (\cdot)_g, (\cdot) \in K, (\cdot) \in A_g, (\cdot) \in h(A) \mid K \in \mathcal{K},\, g \in G \rangle,$$

где $h(A)$ — множество всех однородных элементов A, $\mathcal{K}$ — семейство всех ортогонально полных подмножеств в A.

В докладе будут также показаны примеры применения метода ортогональной полноты в теории градуированных колец.

Список литературы

[1] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи математических наук, 1985, т. 40, вып. 6, с. 79–115.

[2] Балаба И. Н., Канунников А. Л., Михалёв А. В. Градуированные кольца частных ассоциативных колец, I // Фундаментальная и прикладная математика, 2012, вып. 2, с. 3–74.

[3] Канунников А. Л. Ортогональное градуированное пополнение градуированно полупервичных колец // Фундаментальная и прикладная математика (в печати).

Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

Пример центральной простой коммутативной конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств

А. В. Кислицин

И.П. Шестаков в 1993 г. поставил вопрос о существовании центральной простой конечномерной алгебры над полем нулевой характеристики, тождества которой не задаются конечным набором [**1**].

В работе [**2**] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $A = \langle 1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_F$ *– алгебра над произвольным полем* F*, где* 1 *– единица и ненулевые произведения базисных элементов, отличных от единицы, определяются следующими правилами:* $v_i e_{ij} = v_j$*,* $v_2 p = 1$*. Алгебра* A *является простой центральной* F*-алгеброй, не имеющей конечного базиса тождеств.*

В частности, теорема 1 дает положительный ответ на вопрос И.П. Шестакова.

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $C = \langle 1, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_F$ *– алгебра над полем* F *нулевой характеристики, где* 1 *– единица и ненулевые произведения базисных элементов, отличных от единицы, определяются следующими правилами:* $v_i e_{ij} = e_{ij} v_i = v_j$*,* $v_2 p = p v_2 = 1$*. Алгебра* C *является простой центральной коммутативной* F*-алгеброй, не имеющей конечного базиса тождеств.*

Список литературы

[1] Днестровская тетрадь. Издание четвертое. ИМ СО РАН. Новосибирск. 1993.

[2] Исаев И. М., Кислицин А. В. Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447. № 3.

Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул
E-mail: kislitsin@uni-altai.ru

Проектирования моногенных алгебр

С. С. Коробков

Пусть A, A^φ — две ассоциативные алгебры, рассматрирваемые над одним и тем же полем F. Назовем алгебру A^φ решеточно изоморфной алгебре A, если существует изоморфизм φ решетки подалгебр алгебры A на решетку подалгебр алгебры A^φ. Для сокращения речи решеточный изоморфизм φ будем называть проектированием, а алгебру A^φ — проективным образом алгебры A.

К числу основных вопросов при рассмотрении проектирований следует отнести вопрос о наследовании свойства моногенности проективными образами моногенных алгебр. Известно, что не во всех алгебраических системах свойство моногенности сохраняется при решеточных изоморфизмах. Так, например, свойство группы быть циклической сохраняется при решеточных изоморфизмах групп, а в ассоциативных кольцах существуют примеры проектирований между моногенными и не моногенными кольцами (см. [**1**]). Что касается ассоциативных алгебр, то для них было доказано, что проективный образ моногенной нильпотентной алгебры является моногенной алгеброй (см. [**2**]). Следующим шагом может быть переход от нильалгебр к алгебраическим алгебрам. Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Проективный образ моногенной алгебраической алгебры, рассматриваемой над полем характеристики 0, является моногенной алгебраической алгеброй.*

Следующая теорема содержит важную информацию о проективном образе радикала $R(A)$ моногенной алгебры A.

Теорема 2. *Пусть A — моногенная алгебраическая алгебра, рассматриваемая над полем характеристики 0, и φ — ее решеточный изоморфизм на алгебру A^φ. Тогда равенство $(R(A))^\varphi = R(A^\varphi)$ выполнимо тогда и только тогда, когда алгебра A не изоморфна ни одной из следующих алгебр:*

1) $A_1 = \langle r \rangle$, где $r^3 = 0$;

2) A_2 — поле длины, не превосходящей двух;

3) $A_3 = A_1 \dotplus A_2$;

4) $A_4 = \langle e \rangle \oplus A_1$, где e — единичный элемент.

Список литературы

[1] Коробков С. С. О решеточных изоморфизмах моногенных колец. Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах России на современном этапе. Тезисы докладов научно-практической конференции вузов Уральской зоны 26-29 марта 2001 г. Челябинский гос. пед. институт. Челябинск, 2001.

[2] Коробков С. С. Решеточные изоморфизмы ассоциативных нильалгебр. Свердл. гос. пед. ин-т. Свердловск, 1980. 44 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1519–80.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

Нетеровость по уравнениям от одной переменной свободной коммутативной (неассоциативной) алгебры

Д. Овчинников

Рассматривается свободная коммутативная (неассоциативная) алгебра

$$K = \mathbb{K}[a_1, \dots, a_n]$$

с порождающими $a_1, \dots, a_n$ и исследуется вопрос о нетеровости по уравнениям алгебры K. Вопрос тесно связан с изучением алгебраической геометрии над K. Основы алгебраической геометрии над произвольными алгебраическими системами изложены в [1]. Согласно этой работе на аффинном пространстве K^m определяется топология Зарисского: в качестве предбазы системы замкнутых множеств берутся алгебраические множества, которые по определению являются множествами решений систем уравнений над K от переменных $x_1, \dots, x_m$. Эта топология является нетеровой (что важно) в том и только том случае, если алгебра K нетерова по уравнением от m переменных. Последнее означает, что любая система уравнений эквивалентна какой-то своей конечной подсистеме.

Для работы с алгеброй K используется результат Ширшова [2], явно описывающий базис K, как линейного пространства.

Теорема. *Свободная коммутативная (неассациативная) алгебра нетерова по уравнениям от одной переменной.*

Полученный результат дает возможность изучать алгебраические множества на K в размерности 1. Вопрос о нетеровости по уравнениям алгебры K от большего числа переменных остается открытым.

Список литературы

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry, Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008), 80–112.

[2] Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр, Мат. сб., 34(76), N 1 (1954), 81–88.

НГУ, Новосибирск

n-Арные йордановы алгебры

А. П. Пожидаев, P. Saraiva

Ранее в литературе рассматривались не только различные бинарные обобщения йордановых алгебр, такие как некоммутативные йордановы алгебры и йордановы супералгебры, но и n-арные (в первую очередь — тернарные): йордановы тройные системы, йордановы пары, а также и другие (см., например, работы M. Bremner [1], A.V. Gnedbaye и M. Wambst [2]).

Мы предлагаем другой подход к определению n-арных йордановых алгебр, а именно, n-арную алгебру мы называем йордановой, если операция является коммутативной по всем аргументам и кроме того коммутатор любых двух операторов правого умножения является дифференцированием этой алгебры. Заметим, что в коммутативном случае тройные лиевы алгебры, введенные J.M. Osborn в [3], являются в точности бинарными алгебрами с данным свойством.

Примером такой алгебры является следующая тернарная алгебра. Пусть V — это n-мерное векторное пространство над полем P, наделенное билинейной, симметрической и невырожденной формой $(\,,)$. Рассмотрим следующее тернарное умножение на V:

$$(x, y, z) = (y, z)x + (x, z)y + (x, y)z. \tag{1}$$

Обозначим полученную алгебру через A. Легко видеть, что данная операция является просто симметризацией операции тернарной алгебры Филиппова A_1 векторного произведения [4].

Теорема 1. A является простой тернарной йордановой алгеброй.

Теорема 2. Все дифференцирования тернарной алгебры A являются внутренними.

Список литературы

[1] Bremner M. New ternary versions of Jordan algebras, Algebra colloquium 8, 1 (2001), 11–24.

[2] Gnedbaye A. V., Wambst M. Jordan triples and operads, Proceedings of Renaissance Conferences, American Mathematical Society, 202 (2007), 83–113.

[3] Osborn J. M. Identities on nonassociative algebras, Can. J. Math., 17 (1965), 78–92.

[4] Filippov V. T. n-Lie algebras, Sib. Math. J. 26, 6 (1985), 126–140.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия; University of Coimbra, Portugal
E-mail: app@math.nsc.ru

Централизаторы в частично коммутативных алгебрах Ли

Е. Н. Порошенко

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — конечное множество и $G = \langle X, E\rangle$ — неориентированный граф без петель, множеством вершин которого является множество X, а множеством ребер — множество $E \subseteq X \times X$. Элементы E — неупорядоченные пары, которые будем обозначать $\{x, y\}$, где $x, y \in X$.

Частично коммутативной алгеброй Ли над областью целостности R называется R-алгебра $\mathcal{L}_R(X; G)$ с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений

$$(x_i, x_j) = 0, \text{ где } \{x_i, x_j\} \in E.$$

((g, h) обозначает лиевское произведение элементов g и h). Граф G называется *определяющим графом* соответствующей алгебры.

Пусть $[u]$ — лиевский моном на множестве порождающих X, не равный нулю в алгебре $\mathcal{L}_R(X; G)$. *Мультистепенью* монома $[u]$ назовем вектор $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, где δ_i — это число вхождений порождающего x_i в моном $[u]$. Мультистепень монома $[u]$ будем обозначать через $\mathrm{mdeg}([u])$.

Пусть $[u]$ — лиевский моном и $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — его мультистепень. Через $\mathrm{supp}([u])$ будем обозначать множество $\{x_i \mid \delta_i \neq 0\}$. Любой элемент $g \in \mathcal{L}_R(X; G)$, отличный от нуля в алгебре $\mathcal{L}_R(X; G)$, может быть представлен в виде линейной комбинации линейно независимых лиевских мономов $g = \sum\limits_i \alpha_i[u_i]$, где все $\alpha_i \in R\backslash\{0\}$. В этом случае положим $\mathrm{supp}(g) = \bigcup\limits_i \mathrm{supp}([u_i])$. Из однородности соотношений и тождеств в частично коммутативных алгебрах Ли следует, что $\mathrm{supp}(g)$ не зависит от конкретного представления g в виде линейной комбинации линейно независимых лиевских мономов.

Для $Y, Z \subseteq X$ будем писать $Y \leftrightarrow Z$, если $Y \cap Z = \varnothing$ и каждая вершина из Y смежна с каждой вершиной из Z в графе G.

Пусть $g, h \in \mathcal{L}_R(X; G)$. Будем говорить, что эти элементы *пропорциональны*, если $\alpha g = \beta h$ для некоторых $\alpha, \beta \in R$, таких что $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$. Для пропорциональных элементов g и h используем обозначение $g \backsim h$.

Теорема. *Пусть $g \in \mathcal{L}(X; G)$, H — подграф графа $\overline{G}$, порожденный множеством $\mathrm{supp}(g)$, и $H_1, \ldots, H_p$ — компоненты связности графа H. Пусть также $g = \sum_{i=1}^{p} g_i$, где $\mathrm{supp}(g_i)$ состоит из вершин графа H_i для всех $i = 1, 2, \ldots p$. Тогда централизатор элемента g состоит из элементов вида $h = \sum_{i=1}^{p} h_i + h'$, где $g_i \backsim h_i$ для $i = 1, 2, \ldots p$ и $\mathrm{supp}(g) \leftrightarrow \mathrm{supp}(h')$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00084.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: auto_stoper@ngs.ru

Классы проективно конгруэнтных и эквивалентных квадрик над локальными кольцами

О. А. Старикова

Квадратичные формы и квадрики проективного пространства RP_{n-1} $(n > 2)$ над локальным кольцом $R = 2R$ главных идеалов при ограничении $|R^* : R^{*2}| = 2$ классифицированы и перечислены в [**1**]. Там же выявлено комбинаторное выражение числа $N(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадрик для случая нильпотентного ступени s максимального идеала в R. Простые формулы для числа $N(n, s)$ нашли Г.П. Егорычев и Е.В. Зима методом интегрального представления комбинаторных сумм, записанная ими проблема [**2**] о независимом алгебраическом доказательстве и интерпретации простых формул решена в [**3**]. При тех же ограничениях найдено число классов проективно эквивалентных квадрик.

Для случая $|R^* : R^{*2}| = 4$ классы квадрик перечисляют теоремы 1 и 2. Положим

$$K(x) = \sum_{q=1}^{s} 4^{q-1} \binom{s}{q} \binom{x}{q}.$$

Теорема 1. *Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом $J =< \varepsilon >$, $2 \in R^*$, $|R^* : R^{*2}| = 4$ и $aR^{*2} + bR^{*2} = R^*$ для всех $a, b \in R^*$. Тогда число $\widehat{N}(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадрик пространства RP_{n-1} $(n > 2)$ равно $K(n) + 3K(\lfloor n/2 \rfloor)$.*

Если элементы ε и $k\varepsilon$ для $k \in R^*/R^{*2}$ неавтоморфны в R, то отношения проективной конгруэнтности и проективной эквивалентности квадрик пространства RP_{n-1} совпадают. Остается рассмотреть случай, когда для $k \in R^*/R^{*2}$ существует автоморфизм ϕ_k кольца R, при котором $\phi_k(\varepsilon) = k\varepsilon$. Пусть

$$V(x) = \widehat{N}(n, s-x) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4^q \binom{x}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} (1 + \widehat{N}(n-2r, s-x)).$$

Теорема 2. *В случае, когда элементы ε и $k\varepsilon$ автоморфны для любого обратимого элемента k из R, число классов проективно эквивалентных квадрик пространства RP_{n-1} $(n > 2)$ равно*

$$\frac{1}{4}(K(n) + 3(V(s - \lfloor s/2 \rfloor) + V(\lfloor s/2 \rfloor)) - 9K(\lfloor n/2 \rfloor)).$$

Список литературы

[1] Левчук В. М., Старикова О. А. Квадратичные формы проективных пространств над кольцами. – Матем. сборник. 2006, no. 6, 97-110.

[2] Egorychev G. P., Zima E. V. Simple formulae for the number of quadrics and symmetric forms of modules over local rings. Comm. in Algebra **36**, 1426-1436 (2008).

[3] Старикова О. А., Свистунова А. В. Перечисление квадрик проективных пространств над локальными кольцами. — Изв. вузов. Матем., 2011,

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968) и Мин.обр.науки (тема 1.34.11).

Почти перестановочные многообразия ассоциативных колец и алгебр над полем

О. Б. Финогенова

Все кольца и алгебры далее предполагаются ассоциативными. Многообразие колец или алгебр называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет некоторому тождеству вида $x_1x_2\cdots x_n = x_{1\sigma}x_{2\sigma}\cdots x_{n\sigma}$, где σ — нетривиальная перестановка множества $\{1,2,\ldots,n\}$. Неперестановочное многообразие, все собственные подмногообразия которого перестановочны, будем называть *почти перестановочным.* Из леммы Цорна легко следует, что каждое неперестановочное многообразие содержит почти перестановочное подмногообразие. Цель работы – классификация почти перестановочных многообразий колец и алгебр над полем.

Пусть F – поле, U – алгебра над F. Будем обозначать через $U^\star$ алгебру, антиизоморфную U. Кроме того, положим

$R(U) = \begin{pmatrix} F & U \\ 0 & U \end{pmatrix}$, $C(U,m) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^m \end{pmatrix}\right\}$, $TZ(U) = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right\}$, $TD(U) = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right\}$, где a, b, c, d пробегают U,

$K_{F,\,n} = \langle k_1,k_2,\ldots \mid k_ik_j = k_jk_i,\ k_i^n = 0,\ i,j = 1,2\ldots\rangle$, при $n>0$,

$K_{F,\,0} = \langle k_1,k_2,\ldots \mid k_ik_j = k_jk_i,\ i,j = 1,2\ldots\rangle$.

Наш первый результат решает поставленную задачу для алгебр над бесконечным полем.

Теорема 1. *Многообразие алгебр над бесконечным полем F характеристики $p \geq 0$ почти перестановочно тогда и только тогда, когда оно порождено одной из алгебр $TZ(K_{F,p})$ или $TD(K_{F,p})$.*

В [**1**] автором были найдены все почти перестановочные многообразия алгебр над конечным полем, порождаемые конечной алгеброй. С учетом этого, следующий результат завершает классификацию в случае алгебр над конечным полем.

Теорема 2. *Пусть F – конечное поле характеристики p и порядка q. Многообразие F-алгебр, не порождаемое никакой конечной алгеброй, почти перестановочно тогда и только тогда, когда оно порождено одной из алгебр $C(K_{F,\,pq^m}, q^m)$, $C(K_{F,\,pq^m}, q^m)^\star$, $R(K_{F,\,p})$, $R(K_{F,\,p})^\star$, $TZ(K_{F,\,p})$ или $TD(K_{F,\,p})$.*

В случае колец верно следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть M — многообразие колец, не порождаемое никаким конечным кольцом. Многообразие M является почти перестановочным тогда и только тогда, когда для некоторого простого p оно удовлетворяет тождеству $px = 0$ и является почти перестановочным многообразием алгебр над p-элементным полем.*

Список литературы

[1] Пайсон О. Б. Перестановочные псевдомногообразия ассоциативных алгебр над конечным полем. *Известия вузов. Математика*, 1995, №1, 71–79.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: olgafinogenova@gmail.com

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10–01–00524.

Кольца конечного ранга, все p-ранги которых не превосходят 1

А. В. Царев

Всюду ниже для кольца мы не требуем существования единицы. Групповая терминология, используемая для колец, относится к их аддитивным группам. Под p-рангом абелевой группы A мы подразумеваем величину $\dim_{\mathbb{Z}_p} A/pA$.

Известно, что изучение колец, p-ранги которых $\leqslant 1$, сводится к изучению сервантных подколец колец $\mathbb{Z}_\chi$. Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика. Построим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p\in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ при $m_p \neq \infty$ и $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел — в противном случае. Кольца $\mathbb{Z}_\chi$ естественным образом возникают при рассмотрении факторколец кольца *полиадических* (*целых универсальных*) *чисел* $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_{p\in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Пусть $x = (x_p)$ — произвольный ненулевой элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Ему соответствует идемпотент $\xi = (\xi_p) \in \mathbb{Z}_\chi$, такой что $\xi_p = 1_p$ при $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$. Рассмотрим группу $L(x)$, сервантно порожденную множеством всех натуральных степеней элемента x в идеале $\xi\mathbb{Z}_\chi$,

$$L(x) = \langle\, x^k \mid k \in \mathbb{N} \,\rangle_* \subseteq \xi\mathbb{Z}_\chi.$$

Нетрудно видеть, что множество $L(x)$ замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, определенных в кольце $\mathbb{Z}_\chi$, и удовлетворяет всем условиям кольца.

Теорема 1. *Если $R \subseteq \mathbb{Z}_\chi$ — сервантное подкольцо конечного ранга, без нильпотентных элементов бесконечного порядка, то*

$$R = L(x_1) \oplus \ldots \oplus L(x_n) \oplus T$$

где $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_\chi$ и $T \subseteq t(R)$, причем $\mathrm{Hom}(L(x_i)^+, L(x_j)^+) = 0$ при всех $i \neq j$.

Москва

Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами

А. Р. Чехлов

Все группы предполагаются абелевыми. Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы A; Z_n — циклическая группа порядка n, Z_{p^∞} — квазициклическая p-группа. Подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$.

Напомним, что кольцо называется *нормальным*, если центральны все его идемпотенты. Если кольцо с 1, то его нормальность эквивалентна перестановочности его идемпотентов. Хорошо известно, что нормальность кольца эндоморфизма эквивалентна вполне инвариантности прямых слагаемых группы. Для некоторых классов групп нормальность их кольца эндоморфизмов влечет его коммутативность.

Изучаются группы A, мономорфизмы которых инвариантны слева (соответственно справа), т.е. для любых мономорфизмов α, β группы A найдется ее мономорфизм γ со свойством $\alpha\beta = \gamma\alpha$ (соответственно $\alpha\beta = \beta\gamma$).

Отметим, что автоморфизмы любой группы инвариантны как справа, так и слева. Следовательно, к рассматриваемому классу групп относятся все конечные группы. Для сравнения заметим, что периодические группы с инвариантными слева или справа эндоморфизмами имеют коммутативное кольцо эндоморфизмов. Существуют группы, у которых перестановочность мономорфизмов не влечет даже нормальность их кольца эндоморфизмов.

Пример. В группе $G = Z_{2^\infty} \oplus Z_2$ все мономорфизмы перестановочны.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — группа с перестановочными мономорфизмами. Тогда*

1) *если A не имеет прямых слагаемых, изоморфных группе $Z_{2^\infty} \oplus Z_2$, то кольцо $E(A)$ является нормальным;*

2) *если A содержит прямое слагаемое G, изоморфное группе $Z_{2^\infty} \oplus Z_2$, то дополнительное прямое слагаемое к G в группе A вполне инвариантно в A и является периодической группой с коммутативным кольцом эндоморфизмов.*

Для групп с инвариантными мономорфизмами получены следующие результаты.

Теорема 2. *Для делимой группы D эквивалентны следующие условия:*

(а) *ее мономорфизмы инвариантны справа;*

(б) *любой ее мономорфизм является автоморфизмом;*

(в) *часть без кручения группы D, а также каждая ее p-компонента имеют конечный ранг.*

Предложение 1. *Мономорфизмы каждой делимой группы D инвариантны слева.*

Теорема 3. 1) *У нередуцированной группы A мономорфизмы инвариантны слева тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ее редуцированная часть.*

2) *У нередуцированной группы A мономорфизмы инвариантны справа тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ее редуцированная и делимая части.*

Предложение 2. *Если A — редуцированная группа без кручения с инвариантными слева или справа мономорфизмами, то кольцо $E(A)$ является нормальным.*

Томский государственный университет, кафедра алгебры, г. Томск
E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Free Novikov algebras as S_n-modules

A. S. Dzhumadil'daev, N. A. Ismailov

An algebra $(A, \circ)$ is called Novikov if

$$a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c),$$
$$a \circ (b \circ c) - (a \circ b) \circ c = a \circ (c \circ b) - (a \circ c) \circ b,$$

for any $a, b, c \in A$. Free Novikov algebras and their bases are described in [1] and [2].

Let $n \in \mathbf{Z}^{+}$ and $P(n)$ be a set of all partitions of n. We write $\alpha \vdash n$ and $\alpha = 1^{i_1} 2^{i_2} \cdots n^{i_n}$, if $\alpha \in P(n)$,

$$\sum_{l=1}^{l} i_l l = n, \qquad 0 \leq i_l, l = 1, 2, \ldots .$$

We define a *weight* function

$$w : P(n) \to P(n+1)$$

by

$$w(\alpha) = sort(n + 1 - \sum_{j=1}^{n} i_j, i_1, i_2, ..., i_n).$$

Let F_{n+1}^{multi} be a multilinear component of a free Novikov algebra generated by $n+1$ elements. Recall that the Kostka number $K_{\lambda\,\mu}$, where $\lambda, \mu \vdash n$, is defined as a number of semistandard Young tableaux of shape λ and content μ. We consider F_{n+1}^{multi} as a module over symmetric group S_{n+1} under natural action of S_{n+1} on a set of generators.

Theorem. *Takes place the following isomorphism of S_{n+1}-modules*

$$F_{n+1}^{multi} \cong \bigoplus_{\alpha \vdash n} \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq w(\alpha)} K_{\lambda\, w(\alpha)} S^{\lambda},$$

where $\trianglerighteq$ is a dominance ordering and S^{λ} is a Specht module corresponding to a partition λ.

References

[1] Dzhumadil'daev A. S., Löfwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Appl.,4(2002), No.2(1), pp.165–190.

[2] Dzhumadil'daev A. S. Codimension growth and non-Koszulity of Novikov operad, Comm. Algebra., 39 (2011), No. 8, pp.2943–2952.

Almaty, Kazakhstan

The Ado Theorem for conformal algebras with Levi decomposition

P. S. Kolesnikov

From the formal point of view, the category of conformal algebras is the first member (after "ordinary" algebras over a field) in the hierarchy of pseudo-algebras over cocommutative bialgebras. As in the case of ordinary algebras, an associative conformal algebra turns into a Lie conformal algebra with respect to the (conformal) commutator. The converse statement does not hold in general: There exist Lie conformal algebras that cannot be embedded into an associative one (constructed by M. Roitman [**1**]). However, it is an open problem whether a *finite* (i.e., finitely generated over H) conformal Lie algebra has such an embedding. A more precise problem can be stated as follows: Whether a finite conformal Lie algebra which is torsion-free as an H-module can be faithfully represented by *conformal endomorphisms* (V. Kac [**2**]) of a finitely generated torsion-free H-module M? This statement is exactly the "conformal analogue" of the classical Ado Theorem.

Either of the known proofs of the Ado Theorem for (ordinary) Lie algebras exploits the following fundamental properties of finite-dimensional Lie algebras:

(A1) The Poincaré—Birkhoff—Witt (PBW) Theorem (at least for nilpotent algebras);
(A2) Complete reducibility of finite-dimensional modules over semisimple algebras;
(A3) The image of a solvable Lie algebra under its derivation is nilpotent;
(A4) The Levi Theorem (splitting of the solvable radical).

For conformal algebras (even for finite ones), these properties do not hold in general. This is the reason why proving an analogue of the Ado Theorem for conformal algebras is a challenging problem.

The property (A1) was eliminated by M. Roitman [**3**]: he showed that a nilpotent conformal Lie algebra can be embedded into a nilpotent associative algebra. In 2011, this result was generalized to solvable Lie algebras. Also, the conformal version of the Ado Theorem was proved by P. Kolesnikov [**4**] for those conformal algebras where the analogues of (A3) and (A4) holds.

It is easy to see that (A3) is a rare property: A derivation corresponding to a Virasoro element in conformal Lie algebra may be nondegenerate. If a Lie conformal algebra has a splitting solvable radical and its semisimple part does not contain Virasoro elements then one may use an analogue of (A3).

But the most interesting examples of conformal algebras, especially those coming from mathematical physics, contain Virasoro elements. In this work, we completely eliminated the property (A3).

Theorem. *Let L be a finite torsion-free conformal Lie algebra with a splitting solvable radical R. Then L has a finite faithful conformal representation.*

The preprint with a complete exposition of the results is available at
http://arxiv.org/submit/0531377/pdf

References

[1] Roitman M. Universal enveloping conformal algebras, Sel. Math., New Ser. 6 (2000), no. 3, 319–345.
[2] Kac V. G. Vertex algebras for beginners, second ed., University Lecture Series 10, AMS, Providence, RI, 1998.
[3] Roitman M. On embedding of Lie conformal algebras into associative conformal algebras, J. Lie Theory 15 (2005) no. 2, 575–588.
[4] Kolesnikov P. S. On finite representations of conformal algebras, J. Algebra 331 (2011) no. 2, 169–193.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: pavelsk@math.nsc.ru

On nilpotent rings of order p^4 with some additional properties

A. S. Kuzmina

Nilpotent rings of order p^n (p is a prime number, $n = 1, 2, 3$) have been described (see [**1, 2, 3, 4**]). There exists a desription of nilpotent $\mathbb{Z}_p$-algebras of order p^4(see [**3**]). In this thesis, nilpotent rings of order p^4 satisfied the identity $x^2 = 0$ have been described. Moreover, nilpotent rings of order p^4 that have an element of additive order p^3 have been classified.

The work is supported by RFFI (grant 12-01-00329) and by RF Ministry of Education and Science via project 1.4311.2011.

References

[1] Antipkin V. G., Elizarov V. P. Rings of Order p^3 Siberian Math. J., (1982) 23(4), 9–18 (in Russian).
[2] Elizarov V. P. Finite rings, Moscow, Gelios–ARV, 2006 (in Russian).
[3] Kruse R. L., Price D. T. Nilpotent rings, Gordon and Breach, 1969.
[4] Nechaev A. A. Finite Rings with Applications Handbook of Algebra (2008) 5, 1–119.

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul
E-mail: akuzmina1@yandex.ru

On finite nilpotent alternative rings with planar zero-divisor graphs

A. S. Kuzmina

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of a ring R is the graph whose vertices are all nonzero zero-divisors of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$ [**6, 3**].

In [**3**], it was shown that zero-divisor graph of any alternative ring is connected. In [**1, 2, 4, 5**], all finite associative rings with planar zero-divisor graphs are described. In the present thesis, finite nilpotent alternative rings with planar zero-divisor graphs are studied.

Main result of this thesis is Theorem 1.

Theorem 1. *Any finite nilpotent alternative ring with planar zero-divisor graph is associative.*

The work is supported by RFFI (grant 12-01-00329) and by RF Ministry of Education and Science via project 1.4311.2011.

References

[1] Akbari S., Maimani H. R., Yassemi S. When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph, J.Algebra, (2003) **270**, 169–180.

[2] Belshoff R., Chapman J. Planar zero-divisor graphs, J. Algebra, (2007) 316, 471–480.

[3] Isaev I. M., Kuzmina A. S. On Connectivity of Zero-Divisor Graphs of Φ-Algebras, Vestnik of Altai State Pedagogical Academy, (2011) 7, 7–10.

[4] Kuzmina A. S. On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs, Discretnaya Matematika, (2009) 21(4), 60–75 (in Russian).

[5] Kuzmina A. S., Maltsev Yu. N. Nilpotent finite rings with planar zero-divisor graphs, Asian-European J. Math., (2008) 1(4), 565–574.

[6] Redmond S. P. The zero-divisor graph of a noncommutative ring. Int. J. Commut.Rings (2002) 1(4), 203–211.

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul
E-mail: akuzmina1@yandex.ru

Algebraic approach to optimal initial populations and initial populations of the optimal size of a genetic algorithm

I. Shestakov, S. Sverchkov

Initial population is an important parameter of the global optimization performance of genetic algorithm (GA). Traditionally, it is initiated by different types of pseudo random numbers generators, and its size and optimality are defined by numerical experiments (see [1] for references). There has been very little theory developed on the behavior of the initial populations. We introduce a new algorithm for construction of optimal initial population of GA.

The splicing $(n-1)$-groupoid GA $= (A(n); \times_1, \times_2, \ldots, \times_{n-1})$ is the solution space $A(n) = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i = 0, 1\}$ with the splicing operations $\times_1, \times_2, \ldots, \times_{n-1}$ defined by $(a_1, \ldots, a_n) \times_i (b_1, \ldots, b_n) = (a_1, \ldots, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$. The set $X^{(i+1)} = X^{(i)} \times_k X^{(i)}$ is called *i-population* generated by initial population $X^{(0)} = X \subseteq A(n)$. The set X is a *generating* set if $A(n) = X^{(k)}$ for some $k \in \mathrm{N}$. Let GS denotes the set of all generating sets, and $GS_k = \{X \in GS : |X| = k\}$. It is not hard to see that GS_2 is the set of minimal generating sets. We will denote by $k \times n$ matrix $X = (x_{ij})$ the generating set $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \in GS_k$, $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}), x_{ij} = 0, 1$.

A number $d(X, a) = \min\{k | a \in X^{(k)}\}$ is called *distance* between $X \in GS$ and an element $a \in A(n)$, and it defines the minimal number of populations generated by X needed to obtain a. Define $d(X) = \max\limits_{y \in A(n)} d(X, y)$. By Holland's schema theorem [2], an initial set X is likely to produce good performance of global optimization if X is a generating set of a small size with a lowest distance $d(X)$.

Definition. An initial set $X \in GS_k$ is called *optimal* if $\forall Y \in GS$ $|Y| = k \Rightarrow d(X) \leq d(Y)$. An initial optimal set $X \in GS_k$ is called set of *optimal size* if $\forall Y \in GS$ $|Y| < k \Rightarrow d(X) < d(Y)$.

We construct all optimal sets and all sets of optimal size in GS_m, $m \geq 2$. Let $\{e_1(k), \ldots, e_{2^k}(k)\}$ be the set of all strings in $A(k)$. Let $m = 2^k + l$, $0 \leq l < 2^k$, $n = s{\cdot}k + t$, $0 \leq t < k$, for $n, s, k, t, m, l \in \mathrm{N}$. We will denote by $\alpha_i(t), \beta_i(t), \ldots, \gamma_i(t)$ the arbitrary strings $\alpha_i(t), \beta_i(t), \ldots, \gamma_i(t) \in A(t)$. Let $E(r) = (e_1(r), \ldots, e_{2^r}(r), \alpha_{2^r+1}(r), \ldots, \alpha_m(r))^\tau = (E_1, \ldots, E_r)^\tau$, where $m \geq 2^r$. Set $E^\phi(r) = (E_{\phi(1)}, \ldots, E_{\phi(r)})^\tau$ for $\phi \in S_r$. Let $L = \{l_1, \ldots, l_{s+1}\}$ be the set of all integer solutions of the equation $l_1 + \ldots + l_{s+1} = n$, which satisfy the conditions $1 \leq l_i \leq k$, $\exists l_j = k$. Then the generating sets $E(n, m, k, \phi_i, l_i) = (E^{\phi_1}(l_1), \ldots, E^{\phi_{s+1}}(l_{s+1})) \in GS_m$ are the desired ones.

Theorem. $\forall \phi_i \in S_m,\ l_i \in L,\ E(n, m, k, \phi_i, l_i) \in GS_m$ is an optimal initial set, and $\forall \phi_i \in S_m,\ l_i \in L,\ E(n, m = 2^k, k, \phi_i, l_i) \in GS_{2^k}$ is an initial set of optimal size. Conversely, suppose that $X \in GS_m$ is an optimal initial set, then $\exists \phi_i \in S_m,\ l_i \in L :\ E(n, m, k, \phi_i, l_i) = X$; and suppose that $X \in GS_m$ is an initial set of optimal size, then $m = 2^k$ and $\exists \phi_i \in S_m,\ l_i \in L :\ E(n, m, k, \phi_i, l_i) = X$.

In practical computing the population size typically contains several hundreds or thousands of possible solutions. Consequently, we can pseudo randomly generate $\phi_i \in S_m, 1 \leq i \leq s+1$ and $l_i \in L, 1 \leq i \leq s+1$, which defines a random optimal initial population $X = E(n, m, k, \phi_i, l_i)$ or initial population of optimal size for $m = 2^k$.

References

[1] Heikki M., Miettinen K., Penttinen A. On initial populations of a genetic algorithm for continuous optimization problems, J. Glob. Optim., (2007), 405–436.

[2] Holland J. Adaptation in Natural and Artificial Systems, The MIT Press. Reprint edition, (1992).

University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil; Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: sverchkovsr@yandex.ru

String metric defined by the splicing operations

S. Sverchkov

The string metrics in formal language theory are the metrics that determine the string operations similarity (dissimilarity) between two strings $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$ for $a_i, b_j \in \{0, 1, \dots, l\}$. For example, well known Levenshtein distance [1] is defined by a minimum number of substitutions and deletions needed to transform a to b. The splicing operations $\times_1, \times_2, \dots, \times_n$ on $A(l) = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) | \ 0 \leq a_i \leq l\}$ are defined by $(a_1, \dots, a_{n+1}) \times_i (b_1, \dots, b_{n+1}) = (a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_{n+1})$. They are actively used in DNA computing (see [2] for details). We introduce a new string metric defined by the splicing operations.

Set GA $= (A(l); \times_1, \times_2, \dots, \times_n)$. Let $\sigma(i)$, $\sigma \in S_{l+1}$ denote the mutations

$$\sigma(i)(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \sigma(x_i), \dots, x_{n+1})$$

on $A(l)$. We denote by $\overline{1} = 0, \overline{0} = 1$, and $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ the mutations for the binary strings. One can prove that $\sigma(i) \in Aut(\mathrm{GA})$, and $Aut(\mathrm{GA})$ is generated by all mutations. Define $\lambda(a) = \lambda(a_1, \dots, a_n) = \sum\limits_{a_i \neq a_{i+1}} 1$ for $a \in A(l)$. The set $X^{(i+1)} = X^{(i)} \times_k X^{(i)}$ is called *i-population* generated by $X^{(0)} = X \subseteq A(l)$. The set X is *generating* set if $A(l) = X^{(m)}$ for some $m \in \mathrm{N}$. Let GS denotes the set of all generating sets, and $GS_k = \{X \in GS : |X| = k\}$. A number $d(X, a) = \min\{k | a \in X^{(k)}\}$ is called *distance* between $X \in GS$ and $a \in A(l)$, and it defines the minimal number of populations generated by X needed to obtain a. Define $d(X, Y) = \max\limits_{y \in Y} d(X, y)$ for any $Y \subseteq A(l)$. Set $n(x, y) = d(\{x, \bar{x}\}, y)$ for any binary strings x, y. It is not hard to prove that GS_{l+1} is the set of all minimal generating sets.

Theorem. (i) $(GS_{l+1}, d(,))$ is a metric space.

(ii) $(A(1), n(,))$ is a pseudometric space. In particular, $n(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x = \bar{y}$.

(iii) Let $X \in GS_{l+1}, a \in A(l)$, and ϕ be a superposition of the mutations such that $\phi(X) = E = \{(0, \dots, 0), \dots, (l, \dots, l)\}$. Then $d(X, a) = d(E, \phi(a)) = [\log_2 \lambda(\phi(a))] + 1$.

For example,

$$n(\underbrace{(1, \dots, 1)}_{2k}, \underbrace{(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)}_{2k}) = d(\{\underbrace{(1, \dots, 1)}_{2k}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{2k}\}, A(1)) = [\log_2 k] + 1.$$

References

[1] Levenshtein V. I. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals, Soviet Physics Doklady, V. 10, N. 8 (1966), 707–710.

[2] Landweber L. F., Kari L. The evolution of cellular computing: nature's solution to a computational problem, Biosystems, V. 52, N. 1–3 (1999), 3–13.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: sverchkovsr@yandex.ru

New classes of the genetic algorithms are defined by nonassociative groupoids

S. Sverchkov

A finite set A closed under the set of (not necessary associative) multiplications $M = \{\cdot_1, \ldots, \cdot_n\}$ is called n-groupoid. $A = (A; \cdot_1, \ldots, \cdot_n)$ and the set A is called the solution space. A groupoid means a 1-groupoid. Generally speaking any n-groupoid A defines A-algorithm, which is an analog of classical genetic algorithm denoted by GA. Indeed, any operation of $M = \{\cdot_1, \ldots, \cdot_n\}$ defines the children $a \cdot_i b, b \cdot_i a \in A$ for any parents $a, b \in A$, and the autoisomorphisms of A define the mutations. Then A-algorithm has the same scheme as GA. For example, in GA we have the solution space $A = \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) : 0 \le a_i \le d_i\}$ and n splicing operations $M = \{\times_1, \ldots, \times_n\}$ on A defined by $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \times_i (b_1, \ldots, b_{n+1}) = (a_1, \ldots, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_{n+1})$. It defines splicing n-groupoid $GA = GA(n; d_1, \ldots, d_{n+1}) = (A; \times_1, \ldots, \times_n)$ and GA-algorithm. We have to indicate the important properties of splicing operations, which eliminate the repetitions in the genetic algorithm process. For every splicing operation $\cdot \in M$, we have

$$\forall a, b \in A \ a \cdot a = a, a \cdot b = b \cdot a \Rightarrow a = b. \tag{1}$$

We call a groupoid (n-groupoid) *genetic* if it satisfies (1). We will denote by $\mathcal{GEN}$ the class of all genetic n-groupoids, for all $n \in \mathbb{N}$. Naturally, an A-algorithm for a genetic n-groupoid of a large enough solution space has useless meaning for the computer applications. The multiplication table of such n-groupoids is too large to operate with. The obvious advantage of GA is simplest and easy computer applicable multiplication table of splicing n-groupoids. We introduce a construction of generating the subclasses of $\mathcal{GEN}$ which preserves those benefits. It will give us an approach to construct the new classes of genetic algorithms, which are computable ones.

Let $A = (A, M), B = (B, M)$ be a n-groupoid with the solution space $A = \{a_i\}$ and operations $M = \{\cdot_1, \ldots, \cdot_n\}$; and a m-groupoid with the solution space $B = \{b_j\}$ and operations $N = \{*_1, \ldots, *_m\}$, respectively. Let us define the $(n+m+1)$ operations on the set $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ by the next rules:

$$(a, b) \cdot_x (c, d) = \begin{cases} (a \cdot_x c, d), & x \le n, \\ (a, d), & x = n+1, \\ (a, b *_{x-n-1} d), & n+2 \le x \le n+m+1 \end{cases}$$

for any $(a, b), (c, d) \in A \times A$. The obtained $(n+m+1)$-groupoid $A *_G B$ with the operation set $\bar{M} = \{\cdot_1, \ldots, \cdot_{n+m+1}\}$ is called the *genetic product* of A and B. One can prove that $(A *_G B) *_G C = A *_G (B *_G C)$ for all $A, B, C \in \mathcal{GEN}$. It follows immediately that genetic product preserves genetic property of the groupoids. We call $A = A_1 \times_G \ldots \times_G A_n$, $A_i \in \mathcal{GEN}$, the *genetic decomposition* of A into A_i. It provides the simple computer applicable multiplication table

$$\forall a_i, b_i \in A_i \ (a_1, \ldots, a_n) *_i (b_1, \ldots, b_n) = \begin{cases} (a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, \ldots, b_n), & i = 2k, \\ (a_1, \ldots, (a_i \cdot_i b_i), \ldots, b_n), & i = 2k+1 \end{cases}$$

by modulo of the multiplications of $A_i = (A_i, \cdot_i)$. Moreover, it is easy to check that $Aut(A)$ is completely defined by $Aut(A_i)$ of A_i, $1 \le i \le n$. From this we conclude that the complexity of computer calculations of $A \cong A_1 \times_G \ldots \times_G A_n$-algorithm for small dimensions of the groupoids A_i (let us say $|A_i| \le 4$) is no substantially greater than the complexity of classical GA (respectively, complexity of $GA(2n; 2, \ldots, 2)$). Let $A = A_1 \times_G \ldots \times_G A_n$ be the genetic product of arbitrary finite genetic semigroups (rectangular band, see [1] for the details) $A_i = (A_i, \cdot_i)$. We first prove that A-algorithm is a classical genetic algorithm for a splicing $(2n-1)$-groupoid.

Theorem 1. *Let $A_i = (A_i, \cdot_i)$, $1 \le i \le n$, be a family of finite genetic semigroups. Then $A = A_1 \times_G \ldots \times_G A_n \cong GA(2n-1; d_1, \ldots, d_{2n})$ for some $d_i \in \mathbb{N}$.*

Consequently, there are no new classes of genetic algorithms in associative case. Therefore, to obtain a generalization of GA if it any exists, we have to describe nonassociative genetic groupoids of the small dimensions. The procedure of creating new generations in A-algorithm shows that it is sufficient to characterize groupoids up to isomorphism and anti-isomorphism. It is easy to check that any two element genetic groupoid is a semigroup. Hence, we have to describe the class $\mathcal{GEN}(3)$ of all three-element groupoids. Let us denote by $\begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \end{pmatrix}$, $i \neq x, j \neq y, k \neq z$, the genetic groupoid $A = (\{a_1, a_2, a_3\}, \cdot)$ with multiplication table $\begin{pmatrix} a_1 & a_i & a_j \\ a_x & a_2 & a_k \\ a_y & a_z & a_3 \end{pmatrix}$. Set

$$\mathcal{M} = \{A_i : 1 \le i \le 17\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\left. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Theorem 2. $\mathcal{GEN}_3 = \mathcal{M} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. *The class $\mathcal{M}$ consists of all three-element genetic nonassociative groupoids up to isomorphism or anti-isomorphism. There is only one three-element genetic associative groupoid in $\mathcal{GEN}(3)$. It is a semigroup $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, and it is precisely the rectangular band of $\{1\} \times \{1, 2, 3\}$.*

Let us denote by $G(0, d)$ the set $\{0, \ldots, d\}$ without any operations. Application of Theorem 2 gives us the new classes of computer applicable $A = A_1 \times_G \ldots \times_G A_m$-algorithms. They are strictly nonassociative A-algorithms for $A_i \in \mathcal{M}$, $m \in \mathbb{N}$, and partially associative A-algorithms for $A_i \in \mathcal{M} \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \{G(0, d)\}$.

References

[1] Howie J. M. An introduction to semigroup theory, Academic Press, 1976.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: sverchkovsr@yandex.ru

Infinitesimal criterion for flatness of projective morphism of schemes

N. V. Timofeeva

We will generalize the following well-known criterion [**1**, ch. III, theorem 9.9]:

Theorem. *Let T be an integral Noetherian scheme and $X \subset \mathbb{P}^N_T$ be some closed subscheme. For each closed point $t \in T$ take Hilbert polynomial $P_t \in \mathbb{Q}[m]$ of the fibre X_t. This fibre is considered as closed subscheme in $\mathbb{P}^N_t$. Then the subscheme X is flat over T if and only if Hilbert polynomial P_t does not depend on the choice of t.*

We avoid the requirement of reducedness of the scheme T. The work is done in the category of Noetherian schemes over an algebraically closed field k. The main part of the work is the following purely algebraic result.

Theorem 1. *Let M be a finitely generated module over the local Noetherian k-algebra A with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and residue field $k = \overline{k}$. Module M is free if and only if for all $n > 0$*

$$\dim M \otimes_A A/\mathfrak{m}^n = \dim A/\mathfrak{m}^n \, \dim M \otimes_A k.$$

If $t \in T$ is a closed point of the scheme T and this point corresponds to a sheaf of maximal ideals $\mathfrak{m}_t \subset \mathcal{O}_X$, then the symbol $t^{(n)}$ stands for nth infinitesimal neighborhood of the point $t \in T$. The nth infinitesimal neighborhood is a subscheme defined by the sheaf of ideals $\mathfrak{m}_t^{n+1}$ in T. For each $n \in \mathbb{N}$ the subscheme $t^{(n)}$ is zero-dimensional subscheme of finite length equal to length $t^{(n)} = \chi(\mathcal{O}_{t^{(n)}})$.

Theorem 2. *Let a projective morphism of Noetherian schemes of finite type $f : X \to T$ fits into commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^N_T \arrow[d] \\ & T \end{tikzcd}$$

with i being closed immersion. The coherent sheaf of $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ is flat with respect to f (i.e. flat as $\mathcal{O}_T$-module) if and only if for an invertible $\mathcal{O}_X$-sheaf $\mathcal{L}$ very ample relatively T and such that $\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}(1)$, for any closed point $t \in T$ the function

$$\varpi_t^{(n)}(\mathcal{F}, m) = \frac{\chi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m|_{f^{-1}(t^{(n)})})}{\chi(\mathcal{O}_{t^{(n)}})}$$

does not depend on the choice of $t \in T$ and of $n \in \mathbb{N}$.

Since T is of finite type, the power n to be examined for the given morphism f, is bounded from above.

References

[1] Hartshorne R. Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1977.

Yaroslavl State University, Yaroslavl (Russia)
E-mail: ntimofeeva@list.ru

On base fields of csp-rings

E. A. Timoshenko

A systematic research of base fields of csp-rings was started in the paper [**1**]. The symbols P, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{Q}$ denote the sets of all primes, natural numbers, integers, and rational numbers respectively. Let χ be a sequence of the form $\chi = (m_p)_{p\in P}$, where $m_p \in \mathbf{N}\cup\{0,\infty\}$. By P_χ we denote the set of all primes p such that $m_p \neq 0$. If $m_p = \infty$, then let K_p be the ring of p-adic integers; otherwise define $K_p = \mathbf{Z}/p^{m_p}\mathbf{Z}$. Assume that the set $L = P_\chi$ is infinite. Let

$$K_\chi = \prod_{p\in L} K_p, \qquad T_\chi = \bigoplus_{p\in L} K_p \subset K_\chi.$$

By a csp-*ring* we mean any subring R of the ring K_χ such that $T_\chi \subset R$ and the quotient ring R/T_χ is a field. The field R/T_χ as well as every field isomorphic to it is called a *base field* of the csp-ring R. It is easy to see that every base field (i.e., a field that can be embedded in K_χ/T_χ as a subring) has characteristic 0 and a cardinality which does not exceed the cardinality of the continuum $\mathfrak{c}$.

Note that any polynomial in $\mathbf{Q}[x]$ can be regarded as an element of the ring $\mathbf{Z}_p[x]$ for almost all $p \in P$ (here $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$). There exists a set $L \subset P$ such that

$$\begin{array}{l}|L| = \aleph_0 \text{ and every nonconstant polynomial in } \mathbf{Q}[x] \text{ splits}\\ \text{completely into linear factors in } \mathbf{Z}_p[x] \text{ for almost all } p \in L\end{array} \qquad (*)$$

[**1**, Theorem 3.2]; this theorem also gives a number of conditions equivalent to $(*)$.

Remark. There is a sufficient supply of such sets. In fact, we can construct a continuum almost disjoint family of subsets of P, each of which has property $(*)$.

We introduce an order relation $\prec$ on the set $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ of all functions $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ as follows: $z' \prec z$ if and only if $z'(i) < z(i)$ for almost all $i \in \mathbf{N}$. A subset B of $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ is said to be *bounded* if there exists $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ such that $z' \prec z$ for all $z' \in B$. By $\mathfrak{b}$ we denote the smallest cardinality of an unbounded subset of $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$; it is easy to check that $\mathfrak{b}$ (known as the *bounding number*) is regular and $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$. Each of the possibilities $\aleph_1 = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\aleph_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, $\aleph_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\aleph_1 < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ is known to be consistent with ZFC.

Theorem. *Let $L = P_\chi$ be a subset of P satisfying* $(*)$. *Then every field F with $|F| \leqslant \mathfrak{b}$ and* $\operatorname{char} F = 0$ *can be embedded in K_χ/T_χ as a subring.*

If we assume Martin's axiom (in this case $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$), then we arrive at the following statement: *F is a base field of some* csp-*ring if and only if $|F| \leqslant \mathfrak{c}$ and* $\operatorname{char} F = 0$.

The author was supported by the Federal Target Program "Scientific and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia in 2009–2013" (contract 14.B37.21.0354).

References

[1] Timoshenko E. A. Base fields of csp-rings. Algebra and Logic, 2010, 49:4, 378–385.

Tomsk State University, Tomsk (Russia)
E-mail: tea471@mail.tsu.ru

On varieties of rings whose finite rings are determined by their zero-divisor graphs

E. V. Zhuravlev, A. S. Kuzmina, Yu. N. Maltsev

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of an associative ring R is the graph whose vertices are all nonzero zero-divisors of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$ [**3**].

For a prime number p let $N_{0,p}$ be a ring with p elements and with trivial multiplication.

In [**1, 2**], we studied some properties of ring varieties where every finite ring is uniquely determinated by its zero-divisor graph. In the present thesis, full description of such varieties are given.

Main result of this thesis is Theorem 1.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{M}$ be a variety of associative rings. Then $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ implies $R \cong S$ for any finite rings $R, S \in \mathfrak{M}$ if and only if $\mathfrak{M} \subseteq var \langle N_{0,p_1} \oplus \ldots \oplus N_{0,p_s} \oplus \mathbb{Z}_p \rangle$, where $s \geq 0$ and $(p_i, p) \neq (3, 2)$ for all $i \in \{1, \ldots, s\}$.*

The work is supported by RFFI (grant 12-01-00329) and by RF Ministry of Education and Science via project 1.4311.2011.

References

[1] Kuzmina A. S. On some properties of ring varieties, where isomorphic zero-divisor graphs of finite rings give isomorhic rings, Siberian Electronic Mathematical Reports (2011) 8, 179–190 (in Russian).

[2] Kuzmina A. S., Maltsev Yu. N. On varieties of rings whose finite rings are determined by their zero-divisor graphs, Asian-European Journal of Mathematics (2012) 5(2), 119–130.

[3] Redmond S. P. The zero-divisor graph of a noncommutative ring. Int. J. Commut. Rings (2002) 1(4), 203–211.

Altai State University, Altai State Pedagogical Academy, Barnaul
E-mail: evzhuravlev@mail.ru, akuzmina1@yandex.ru, maltsevyn@gmail.com

VI. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

О числе предельных моделей локально свободных алгебр

К. А. Байкалова

В работе исследуется число простых над конечными множествами и предельных моделей счетных полных теорий локально свободных алгебр [**1, 2**].

Напомним [3], что модель M называется *предельной*, если M не является простой моделью ни над каким кортежом и $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n\in\omega}$ простых моделей над некоторыми кортежами.

Теорема 1. *Счетная теория локально свободной алгебры мала тогда и только тогда, когда ее сигнатура состоит только из одноместных функциональных символов.*

Теорема 2. *Если T — малая теория локально свободной алгебры, то T имеет 0, 1, ω или 2^ω предельных моделей.*

Теорема 3. *Если T — счетная теория локально свободной алгебры с континуальным числом типов, то T имеет 2^ω простых и 2^ω предельных моделей.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-01-00460-а.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 729–743.

[2] Белеградек О. В. Теория моделей локально свободных алгебр // Теория моделей и её применения. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — С. 3–25.

[3] Судоплатов С. В. Проблема Лахлана. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. — 336 с.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: bkristina@bk.ru

Свойства дискретной модели генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями от трех переменных

Ц. Ч. Батуева

Пусть $G_{n,k}$ — ориентированный циркулянтный граф с $n \geqslant k$ числом вершин полустепени захода и исхода которых равны $(k-1)$. Слово $a_1a_2\dots a_n$ называется циклическим, если считать, что после символа a_n снова идет a_1 и т.д. Множество всех циклических слов длины n будем обозначать через Ω_n.

Пусть f — пороговая булева функция, зависящая от $(k-1)$ переменных. Построим отображение $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$, которое каждому слову $a_1a_2\dots a_n$ ставит в соответствие слово $b_1b_2\dots b_n$, если

$$b_i = f(a_{i-k+1}, a_{i-k+2}, \dots, a_{i-1})$$

для всех $i \in \overline{1,n}$. Неподвижной точкой отображения A_f называется слово α, такое что $\alpha = A_f(\alpha)$.

Функциональным графом отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$ называется ориентированный граф, где Ω_n — множество вершин, а дуги соединяют слова α и β, если $\beta = A_f(\alpha)$. Известно, что компоненты связности таких графов состоят из цикла и деревьев, прикрепленных к его вершинам.

Циклическое слово α называется *истоком* для отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$, если не существует слова β такого, что $A_f(\beta) = \alpha$. *Длиной максимальной цепочки* называется максимальное количество ребер в цепи от истоков до циклов.

Данная работа посвящена описанию свойств функционального графа отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$ с пороговыми функциями от трех переменных.

Теорема. *Пусть f — пороговая функция от трех переменных. Для функционального графа отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$ получены описания истоков, неподвижных точек и циклов, а также значения длин максимальной цепочки и цикла.*

Список литературы

[1] Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О. Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями, Вестник ТГУ, N 2(3) (2008). С. 18–21.

[2] Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей, Вестник ТГУ. Приложение. N 14 (2005). С. 206–212.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: batueva@math.nsc.ru

Концепция подобия в теории моделей

М. И. Бекенов

В данной статье приводятся результаты исследований по классическому направлению в теории моделей. Исследования проводятся с точки зрения элементарной вложимости моделей. В дальнейшем по тексту T - теория счетного языка первого порядка L. Модель A элементарно вкладывается в модель B в дальнейшем будем обозначать $A \triangleright B$.

Определение 1. Пусть $\omega \leq \lambda \leq \mu$, A и B модели языка L, $|A| = |B| = \mu$. Модели A и B назовем λ-подобными, если для любой $A' \triangleright A$ и $|A'| \leq \lambda$, она элементарно вкладывается в B и для любой $B' \triangleright B$ и $|B'| \leq \lambda/$ она элементарно вкладывается в A.

Понятно, что отношение λ-подобия является отношением эквивалентности. Это отношение разбивает множество моделей теории T на непересекающиеся классы в различных мощностях. Естественно возникает понятие спектральной функции - количества этих классов в каждой конкретной мощности для теории T. Аналогично спектральной функции $T(\mu)$ для теории T - количества моделей мощности μ, с точностью до изоморфизма, вводится спектральная функция $T(\lambda, \mu)$ для теории T.

Определение 2. Пусть T - теория, $\omega \leq \lambda \leq \mu$. Спектральная функция $T(\lambda, \mu)$ - количество классов моделей мощности μ по отношению λ-подобия теории T.

Вообще, для одной и той же теории T спектральные функции $T(\mu)$ и $T(\lambda, \mu)$ могут быть различными уже для $T(\omega)$ и $T(\omega, \omega)$. Например, известный пример Эренфойхта - теории T с тремя счетными моделями имеет $T(\omega, \omega) = 2$. Существуют также примеры теорий T у которых $T(\omega) = 2^{\omega}$, а $T(\omega, \omega) = \omega$. Исследуются свойства этой функции и ее взаимосвязь со структурными свойствами моделей теории T вообще и конкретных теорий в частности. Между классами моделей также естественно возникает отношение порядка, т.е. каждая теория имеет алгебраическую структуру множества классов с отношением порядка, связанную с различными кардинальными числам подобия. Рассматриваются также свойства и взаимосвязь этих алгебраических структур с теорией. Можно привести известные факты в ракурсе этой концепции: Например, Морли и Шелахом было доказано, что эта алгебраическая структура для ω_1-категоричных теорий изоморфна множеству кардинальных чисел с порядком. Обратное тоже верно:

Теорема. *Если алгебраическая структура соответствующая теории T в этой концепции изоморфна множеству кардинальных чисел с порядком, то такая теория ω_1-категоричная.*

Заметим, что если для некоторых $\omega \leq \lambda \leq \mu$, $T(\lambda, \mu) = 1$, то T - полная теория (аналог теоремы Воота).

Также, если все модели теории T бесконечны и объединение всякой цепи моделей теории T является моделью теории T и $T(\lambda, \mu) = 1$ для некоторых $\omega \leq \lambda \leq \mu$, то теории T модельно полная (аналог теоремы Линдстрема).

Свойства спектральной функции $T(\lambda, \mu)$ теории T также влияет на свойство некоторых моделей теории T. Например: Пусть T не ω-категоричная теория, но $T(\lambda, \mu) = 1$ для некоторых $\omega \leq \lambda \leq \mu$. Если A - простая модель теории T, то она также является минимальной моделью теории T (аналог теоремы Воота).

При таком подходе, рассматривается также расширенный вариант проблемы Куэккера.

Евразийский национальный университет, Астана (Казахстан)
E-mail: bekenov50@mail.ru

О богатых семействах типов, теоремах расширения, определимости в алгебраических системах и кластеризации конечных типов

А. А. Викентьев

Доклад посвящен *переносу и уточнению результатов теорем о богатых семействах типов,* доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[2] *на случай богатых семейств неполных типов с параметрами для теорий с $\varkappa$–компактными (насыщенными, однородными) моделями и свойством $\varkappa$–отделимости новых элементов, реализующих типы (над малыми подмножествами) из этих семейств, от элементов меньшей модели и наличия реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых (стабильных) типов или упорядоченно неразличимых элементов.*

Основными инструментами доказательств являются теоремы типа компактности, развитая техника современной теории моделей и стабильности (Шелах, Лахлан, Балдвин, Пуаза, Пиллай, Хрушовский, Невельский, Зильбер, Палютин, Перетятькин, Еримбетов, Кудайбергенов, Судоплатов, Байжанов, Кулпешов, Вербовский, Мустафин, Омаров и многих др.) и наличия (достаточно локального) нужных компактных (подходящих мощностей $\varkappa$) моделей теории со свойствами $\varkappa$–отделимости над реализациями семейств стабильных (определимых) типов. Рассмотрены вопросы различных видов определимости алгебраических систем (включая классические поля) в наследственно конечных надстройках, и о мощностях типово определимых подмножеств. Интерес к этим вопросам и моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (сильно опровержимых) типов, закономерностей для кластеризации, и для ранжирования таких знаний эспертов с помощью привлечения упорядоченных и измеримых алгебраических систем, для введения расстояний (метрик) на классах неэквивалентных типов с помощью измеримых подклассов измеримых (метрических) моделей теории, необходимых для алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий и кластеризации знаний. Изучены различные методы кластеризации для множеств формул различных логик. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 10–01–00113а, 11–07–00346а, и кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

[2]Некоторые из них вошли в диссертацию автора «Теории с покрытием и формульные подмножества», ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, а также опубликованы в сборнике, посвященному 90–летию академика А.Д. Тайманова — «Two cardinal theorems for sets of types in stable theory», Казахстан, Алма–Ата, 2007, с. 67–69, были доложены Алма–Ате и Новосибирске — на ежегодных Мальцевских Чтениях с 2006 г., в том числе к 100–летию акад. А.И. Мальцева, 70–летию акад. Ю.Л. Ершова и 60–летию чл.-к. РАН С.С. Гончарова.

Кластеризации многозначных высказываний на основе расстояний и мер достоверностей

А. А. Викентьев, Р. А. Викентьев

В настоящее время появляется большой интерес к построению решающих функций на основе анализа (кластеризации) экспертной информации, заданной в виде логических высказываний от экспертов [1–6]. Высказывания экспертов записываются в виде формул n–значной ($n > 2$) логики. На значения истинности таких формул можно смотреть как на степени их ошибочности. Для проведения алгоритмов кластеризации помощью теории моделей найдено семейство расстояний между такими формулами и мер недостоверностей. Доказаны свойства, важные для анализа высказываний. Мера значений ложности формулы на модели может служить степенью достоверности формулы. Расстоянием между формулами φ и ψ, $S(\varphi)\cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$, в множестве моделей $P(S(\Sigma))$ назовем

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\left(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \wedge \psi_1\right)\right| + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\left(\varphi_1 \wedge \psi_{\frac{k}{n-1}}\right)\right|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Теорема. *Для любых n и формул φ, ψ выполняется следующее:*

(1) $0 \le \rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) \le 1$; $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\psi,\varphi)$;
(2) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi$;
(3) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) = 1 \Leftrightarrow \bigcup\limits_{l=1}^{n-1}\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{Mod}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \sqcup \mathrm{Mod}(\psi)_{\frac{l}{n-1}}\right) = P(S(\Sigma))$.
(4) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi) \le \rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\chi) + \rho_{S(\Sigma)}(\chi,\psi)$;
(5) *Если* $\varphi^1 \equiv \varphi^2$, *то* $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^1,\psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\varphi^2,\psi)$.

Результаты использованы в кластеризации знаний. Рассмотрены различные методы кластеризации знаний на основе различных расстояний и мер достоверностей. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проекты 10–01–00113а, 11–07–00346а, кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Список литературы

[1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Изд–во ИМ СО РАН, 1999г.
[2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
[3] Викентьев А. А, Лбов Г. С. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказ. экспертов // Доклады РАН 1998. Т.361, №2 С. 174–176.
[4] Викентьев А. А, Лбов Г. С. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis, 1997, V.7, №2, P. 175–183.
[5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.
[6] Викентьев А. А., Коренева Л. Н., К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты // Математические методы распознавания образов (ММРО-99), РАН ВЦ, Москва, 1999. С.151–154.

ИМ СО РАН и НГУ, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

Алгебраическая геометрия над дистрибутивными решетками

Ю. С. Дворжецкий

Основными работами в универсальной алгебраической геометрии являются работы Э.Ю. Данияровой, А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова [**1**]–[**4**]. В этих работах доказаны две Объединяющие Теоремы в терминологии авторов, дающие 7 эквивалентных подходов к проблеме описания координатных алгебр для произвольной алгебраической системы. Данные теоремы применимы только к определённым классам алгебраических систем: классам $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$ — нётеровых и слабо нётеровых по уравнениям алгебр и классам $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{U}$ — q_ω и u_ω компактных алгебр, соответствено. Таким образом, чтобы применить результаты к определённой системе, нужно проверить, в каком из классов лежит рассматриваемая система.

А.Н. Шевляковым были доказаны критерии принадлежности булевых алгебр к классам $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$. С любезного разрешения автора приведём ещё не опубликованные критерии нётеровости (класс $\mathbf{N}$) и слабой нётеровости по уравнениям (класс $\mathbf{N}'$):

Теорема (А.Н. Шевляков) *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда подалгебра $\mathcal{C}$, порожденная константами, конечна.*

Теорема (А.Н. Шевляков) *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ слабо нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}$.*

В докладе же будет доказано, что критерий нётеровости по уравненям переносится с булевых решёток на более общие дистрибутивные решётки.

Теорема. *Дистрибутивная $\mathcal{C}$-решётка $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда дистрибутивная решётка $\mathcal{C}$, порождённая константами, конечна.*

В работе также приведены примеры, которые показывают, что критерий слабой нётеровости для булевых алгебр не переносится на дистрибутивные решётки. Также будет показано, что некоторые другие свойства в дистрибутивных решётках не могут быть достаточными условиями слабой нётеровости по уравнениям.

Список литературы

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry, Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008), pp. 80-112.

[2] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures II: Foundations, arXiv:1002.3562v1 [math.AG] (2010), 54 p.

[3] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures III: Equationally Noetherian Property and Compactness, Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2011) 35: 35-68, arXiv: 1002.4243

[4] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures IV: Equational domains and co-domains, Algebra & Logic, v. 49, 6, pp.715-756.

Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение Высшего Профессионального Образования «Омский Государственный Университет им. Ф.М. Достоевского»
E-mail: dvorzhetskij@mail.ru

Конечные группы в которых всякая чистая подгруппа выделяется прямым множителем

О. В. Князев

Подход с точки зрения многообразий к ряду понятий теории абелевых групп, в частности к чистоте и полноте, позволил Мартынову Л.М. определить в [**1**] их аналоги для произвольных алгебр и предложить обширную программу по изучению этих понятий. В [**1**] ставится задача (проблема 20): *описать алгебры данного многообразия, любая чистая подалгебра которых выделяется прямым множителем.*

Здесь мы рассматриваем эту задачу в классе групп.

Напомним некоторые определения.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех групп, $L(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$.

Пусть $\mathbf{X}(A)$ обозначает $\mathbf{X}-$вербальную подгруппу группы A, т.е. наименьшую из нормальных подгрупп группы A, фактор-группы по которым принадлежат $\mathbf{X}$.

Подгруппу B группы A называют *чистой* в A, если равенство $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$. Группу A называют *полной*, если равенство $\mathbf{X}(A) = A$ имеет место для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$. Если полная группа не имеет собственных, отличных от единицы, полных подгрупп, то ее называют *минимально полной* группой.

Имеет место следующая

Теорема. *Для конечной группы A следующие условия эквивалентны:*

1) A есть прямое произведение циклических p-групп и попарно не изоморфных минимально полных групп;

2) Всякая чистая подгруппа группы A выделяется прямым множителем.

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. Волгоград: Перемена. – 2000.– с.179–190.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev@omsk.edu

Несколько замечаний о нетеровости по уравнениям

М. В. Котов

Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами — это математическая дисциплина, изучающая множества решений систем уравнений над произвольными алгебраическими системами. Основные определения и результаты этой дисциплины можно найти в статьях [**1**] и [**2**].

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, L \rangle$ — произвольная алгебра, на множестве A^n можно рассмотреть *топологию Зарисского* $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},n}$ — топологию, предбазой замкнутых множеств которой является совокупность множеств решений систем уравнений. Изучению свойств этой топологии посвящены работы автора [**4**] и [**6**], результаты этих работ докладывались на предыдущей конференции.

Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного n и любой системы уравнений $S(\mathbf{x})$ от n переменных $\mathbf{x}$ найдётся такая некоторая конечная подсистема $S_0(\mathbf{x}) \subseteq S(\mathbf{x})$, что множества решений систем $S(\mathbf{x})$ и $S(\mathbf{x})$.

В работе автора [**5**] получены несколько результатов о нётеровых по уравнениям алгебр, ниже приведён один из них.

Теорема. *Если алгебра $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям, конгруэнция θ на алгебре $\mathcal{A}$ является замкнутым в топологии $\mathfrak{Z}_{\mathcal{A},2}$ множеством, то алгебра $\mathcal{A}/\theta$ также нётерова по уравнениям.*

Эта теорема является обобщением соответствующего результата для групп из работы [**3**]. В докладе будет рассказано как об этой теореме, так о и нескольких других из работы [**5**].

Список литературы

[1] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry, Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008), 80–112.

[2] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н., Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания, Фундамент. и прикл. матем. 17:1 (2012), 65–106.

[3] Baumslag G., Myasnikov A., Roman'kov V. Two theorems about equationally Noetherian groups, J. Algebra, 194 (1997), 654–664.

[4] Котов М. В. Несколько замечаний о топологии Зарисского на алгебраических системах, Вестн. Омск. ун-та, принята к публикации.

[5] Котов М. В. Несколько замечаний о нётеровости по уравнениям, Вестн. Омск. ун-та, принята к публикации.

[6] Котов М. В. О топологизируемости счётных нётеровых по уравнениям алгебр, готовится к публикации.

ОФ ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: matvej.kotov@gmail.com

Некоторое обобщение теоремы Робинсона о непротиворечивости

О. В. Кудинов

Поскольку многие возникающие в алгебре задачи связаны с возможностью опускания типа (типов) у неполных теорий, актуален вопрос о создании подходящих инструментов, гарантирующих такую возможность. Исторически, для обеспечения совместности теорий одним из соответствующих инструментов служила теорема Робинсона о непротиворечивости (наряду с другими классическими теоремами теории моделей). Автору удалось доказать следующий ее аналог для задачи опускания типа.

Теорема. Пусть T - полная теория языка L, $p(x)$ — неглавный тип языка L, теории T_1, T_2 языков L_1, L_2 соответственно с условием $L_1 \cap L_2 = L$ расширяют T и по отдельности имеют модели, опускающие тип $p(x)$. Тогда множество $T_1 \cup T_2$ имеет модель, опускающую тип $p(x)$.

Из теоремы получены некоторые следствия, позволяющие надеяться на становление нового метода для решения задач об опускании типа (типов).

Институт Математики СО РАН им. С. Л. Соболева
E-mail: kud@math.nsc.ru

Об аксиоматизируемых классах, замкнутых относительно подпрямых произведений

А. М. Нуракунов

Пусть $\mathcal{R}$ — класс алгебр, замкнутый относительно подпрямых произведений. Алгебра $A \in \mathcal{R}$ называется *конечно подпрямо $\mathcal{R}$-разложимой*, если A есть подпрямое произведение двух алгебр из класса $\mathcal{R}$. В противном случае, говорим, что алгебра $A \in \mathcal{R}$ *конечно подпрямо $\mathcal{R}$-неразложима.*

Теорема. *Пусть класс алгебр $\mathcal{R}$ замкнут относительно подпрямых произведений и ультрапроизведений. Тогда класс всех конечно подпрямо $\mathcal{R}$-разложимых алгебр замкнут относительно ультрапроизведений.*

В работе приводятся некоторые следствия из данной теоремы. В частности,

Следствие. *Пусть $\mathcal{R}$ квазимногообразие алгебр. Если класс всех конечно подпрямо $\mathcal{R}$-неразложимых алгебр бесконечно аксиоматизируем, то $\mathcal{R}$ также бесконечно аксиоматизируем.*

Евразийский национальный университет, Астана (Казахстан), Институт теоретической и прикладной математики НАН КР, Бишкек (Кыргызстан)
E-mail: a.nurakunov@gmail.com

Универсальные теории с одной счётной экзистенциально замкнутой моделью

А. Т. Нуртазин

Практически все вопросы об экзистенциално замкнутых структурах можно решать в универсально аксиоматизируемых теориях, для которых совместны множества всех выполнимых экзистенциальных формул (*универсалах со свойством совместного вложения*). В связи с результатом Сарацино [2] несомненный интерес представляет проблема описания таких теорий, в которых существует в точности одна счётная экистенциально замкнутая структура.

Описание этих теорий естественно начать с решения более узкой задачи выделения класса универсалов, имеющих хотя бы одну счётно категоричную экзистенцильно замкнутую модель. Ответ на этот вопрос даёт

Теорема 1. *Если универсально аксиоматизируемая, имеющая свойство совместного вложения теория T имеет хотя бы одну счётно категоричную экзистенциально замкнутую модель, то эта модель являтся её единственной счётной экзистенциально замкнутой моделью.*

Таким образом, дальнейшее решение вопроса сводится к изучению случая, когда данная теория имеет в точности одну счётную экзистенциально замкнутую модель, которая не является счётно категоричной.

Теорема. *Если универсально аксиоматизируемая теория имеет лишь одну счётную экзистенциально замкнутую не счётно категоричную модель, то эта модель является простой моделью своей теории, в которой все атомы являются экзистенциальными формулами, а в классе её моделей все изоморфные вложения простой модели являются элементарными.*

Список литературы

[1] Robinson A. On the Metamathematics of Algebra, – Amsterdam: North – Holland, 1951.
[2] Saracino D. Model companion for $\aleph_0$–categorical theories, Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 78, 591 – 598.
[3] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. - М., Мир, 1977.

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы
E-mail: AbyzNurtazin@mail.ru

О классическом Галуа-замыкании на счетных универсальных алгебрах

А. Г. Пинус

Через $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ ($\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$) обозначим решетку подалгебр (группу автоморфизмов) алгебры $\mathfrak{A}$. Для любого $f \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ через $\mathrm{fix} f$ обозначим подалгебру $\{a \in \mathfrak{A} \,|\, f(a) = a\}$ алгебры $\mathfrak{A}$, а для любой $\mathfrak{B} \in \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ через $\mathrm{Stab}\,\mathfrak{B}$ подгруппу $\{f \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A} \,|\, f(b) = b$ для любого $b \in \mathfrak{B}\}$ группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$. Для $\mathfrak{B} \in \mathrm{Sub}\,\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ пусть $\mathrm{Fix}\,\mathfrak{B} = \bigcap_{f\in\mathfrak{B}} \mathrm{fix}\, f$. Имеют место естественные отображения

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}: &\quad \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A} \to \mathrm{Sub}\,\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}, \\ \mathrm{Fix}: &\quad \mathrm{Sub}\,\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A} \to \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Операторы Fix и Stab стандартным образом определяют операцию Галуа-замыкания $\mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{B}}$ на решетке $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$:

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathrm{Fix}\,\mathrm{Stab}\,\mathfrak{B}.$$

Через $f \restriction \mathfrak{B}$ обозначим ограничение автоморфизма f на подалгебру $\mathfrak{B}$. Очевидно, что для любых $f, g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ и любой $\mathfrak{B} \in \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ равенство $f \restriction \mathfrak{B} = g \restriction \mathfrak{B}$ равносильно равенству $f \restriction \overline{\mathfrak{B}} = g \restriction \overline{\mathfrak{B}}$.

Для любого подмножества B основного множества алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ через $\mathfrak{A}_B$ обозначим константное обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ до сигнатуры $\sigma_B = \sigma \cup \langle c_b \,|\, b \in B\rangle$ при интерпретации в алгебре $\mathfrak{A}_B$ констант c_b элементами b. Имеет место следующее описание элементов Галуа-замыканий $\overline{\mathfrak{B}}$ подалгебр $\mathfrak{B}$ не более чем счетных универсальных алгебр $\mathfrak{A}$.

Теорема. *Для любой не более чем счетной универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ не более чем счетной сигнатуры и любой ее подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ элемент d из A входит в подалгебру $\overline{\mathfrak{B}}$ тогда и только тогда, когда существует некоторая $L_{\omega_1,\omega}$-формула $\Phi_d(x)$ сигнатуры σ_B такая, что $\mathfrak{A}_B \models \exists! x\, \Phi_d(x)$ и $\mathfrak{A}_B \models \Phi_d(d)$.*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: algebra@nstu.ru

Об аддитивности некоторых классов полигонов.

Д. О. Птахов

В данной работе рассматривается свойство аддитивности некоторых классов S-полигонов, в частности, аксиоматизируемых классов свободных, проективных и сильно плоских S-полигонов Напомним некоторые определения. Пусть S – моноид. Под (левым) S-полигоном ${}_SA$ понимается множество A, на котором определено действие элементов S слева, причем единица моноида S действует на A тождественно. Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_SA$, если существуют $n \in \omega, c_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ такие, что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. S-полигон ${}_SF$ называется свободным над множеством X, если для любого S-полигона ${}_SA$ и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный S-морфизм $\overline{\theta} : F \to A$ такой, что $i\theta = \overline{\theta}$, где $i : X \to F$ – вложение. S-полигон ${}_SP$ называется проективным, если для всякого S-морфизма $\varphi : P \to M$ и S-эпиморфизма $\psi : N \to M$ существует S-морфизм $\theta : P \to N$ такой, что $\varphi = \psi\theta$. S-полигон ${}_SB$ называется сильно плоским, если функтор $- \otimes {}_SB$ сохраняет универсальные квадраты.

В [1] приведено описание моноидов S, для которых классы свободных, проективных и сильно плоских S-полигонов аксиоматизируемы. В [2] рассмотрены моноиды S, для которых класс сильно плоских S-полигонов примитивно нормален. В [3] введено понятие аддитивной теории. В [4] рассмотрены S-полигоны с аддитивной теорией. В этой работе показано, что не существует моноида S такого, что аксиоматизируемый класс свободных, проективных и сильно плоских S-полигонов является аддитивным.

Теорема. *Пусть аксиоматизируемый класс $\mathcal{K}$ S-полигонов аддитивен. Тогда все S-полигоны класса $\mathcal{K}$ являются связными.*

Следствие. *Если аксиоматизируемый примитивно нормальный класс $\mathcal{K}$ S-полигонов замкнут относительно копроизведений, то $\mathcal{K}$ не является аддитивным классом.*

Поскольку классы свободных, проективных и сильно плоских S-полигонов замкнуты относительно копроизведений, то имеет место следующее утверждение.

Следствие. *Не существует моноида S такого, что класс свободных, проективных и сильно плоских S-полигонов является аксиоматизируемым и аддитивным.*

Список литературы

[1] Гоулд В., Михалёв А. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фундамент. и прикл. матем., 2008, Т.14, №7, С.63–110.

[2] Птахов Д.О. Примитивная нормальность сильно плоских полигонов // Синтаксис и семантика логических систем, 2012, С. 102–103.

[3] Palyutin E.A. Additive theories // Proceedings of Logic Colloquim'98 (Lectures Notes in Logic, 13), ASl, Massachusetts, 2000, 352–356.

[4] Степанова А.А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика, 2008, Т.47, №4, С.491?508.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: ptaxov@mail.ru

Редуцированные многообразия унаров

В. Н. Рудаков

Изучается понятие *редуцированности* в смысле Л. М. Мартынова [1] для унаров. Основной целью настоящей работы является описание редуцированных многообразий унаров, т. е. алгебр с одной унарной операцией. Для произвольного унара A определенная на нем операция обозначается штрихом и для $a \in A$ полагаем $a^0 = a$, $a^1 = a'$ и $a^{n+1} = (a^n)'$ для любого n. Унар называется *полным*, если у него нет гомоморфизмов на нетривиальные унары из атомов решетки всех многообразий унаров. Если унар не имеет нетривиальных полных подунаров, то он называется *редуцированным*. Многообразие унаров называется *редуцированным*, если все его унары редуцированны. Известно (см., напр., [2], с. 352), что каждое собственное многообразие унаров определяется либо одним тождеством вида $x^k = x^l$ $(k < l;\ k, l = 0, 1, ...)$, либо одним тождеством вида $x^m = y^m$ $(m = 0, 1, ...)$. Существенно используя результаты работы [3], доказана

Теорема. *Многообразиями унаров, определенными тождествами вида* $x^{m+1} = x^m$ *и* $x^m = y^m$ *(* $m = 0, 1, \ldots$ *), исчерпываются все редуцированные многообразия унаров.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. О понятиях полноты, редуцированности, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения: Труды междунар. семинара. – Волгоград: Перемена, 2000. – С. 179 – 190.

[2] Мальцев А. И. Алгебраические системы – М.: Наука, 1970. – 392 с.

[3] Мартынова Т. А. Полные унары // Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2011. – Вып. 10. – С. 11 – 16.

ОмГПУ, Омск
E-mail: rvn_omsk86@mail.ru

Универсальная эквивалентность свободных алгебр одного многообразия квазигрупп

Л. В. Шабунин

Пусть V — многообразие квазигрупп, определяемое системой тождеств Σ:

$$(xy)/y = x, \qquad (x/y)y = x, \qquad y\backslash(yx) = x,$$
$$y(y\backslash x) = x, \qquad (x(yx))y = x.$$

Это многообразие изучается в [1], где устанавливаются следующие его свойства:

1) многообразие V может быть задано полной системой из 15 тождеств Σ_1:

$$\begin{array}{ccc} (xy)/y = x, & y/(x\backslash y) = x, & (y\backslash x)x = x\backslash y, \\ (x/y)y = x, & x(yx) = x/y, & (y\backslash x)/y = x\backslash y, \\ y\backslash(yx) = x, & (xy)\backslash x = y/x, & (xy)(y/x) = x, \\ y(y\backslash x) = x, & x\backslash(x/y) = yx, & (x/y)/(yx) = x, \\ (y/x)\backslash y = x, & y/(x/y) = yx, & (y\backslash x)\backslash(x\backslash y) = x; \end{array}$$

2) для каждой конечно определенной квазигруппы Q из V положительно решается проблема равенства слов.

Известно также, что элементарная теория $Th(Q)$ любой конечно определенной квазигруппы Q из V разрешима, а элементарные теории $Th(K)$ класса K всех конечно определенных квазигрупп из V и $Th(V)$ многообразия V наследственно неразрешимы [2].

В данной работе исследуются свободные алгебры многообразия V.

Теорема 1. *Элементарная теория $Th(KF)$ класса KF всех свободных алгебр многообразия V разрешима.*

Теорема 2. *Любые две свободные алгебры из многообразия V универсально эквивалентны, т.е. имеют одну и ту же $\forall$-теорию.*

Список литературы

[1] Pedersen J. The word problem in absorbing varieties // Houston J. of Math., 1985, V. 11, N 4, P. 575–590.

[2] Шабунин Л. В. Об одном многообразии квазигрупп с полной системой тождеств // Тезисы докладов международной конф. “Мальцевские чтения”, Новосибирск, 2011, С. 90.

[3] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.

[4] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

Чувашский государственный университет, Чебоксары
E-mail: lvsh@mail.ru

Неразложимость в квазимногообразиях частичных алгебр

М. С. Шеремет

Мы рассматриваем квазимногообразия частичных алгебр, т. е. классы алгебр с, возможно, не всюду определенными основными операциями, заданные предложениями вида $(\bigwedge_{i<n} s_i \approx t_i \to s_n \approx t_n)$, которые интерпретируются следующим образом: для любого означивания переменных, если для всех $i < n$ значения термов s_i и t_i определены и равны, то значения термов s_n и t_n также определены и равны.

С точки зрения строения класса частичных алгебр как категории, в квазимногообразиях частичных алгебр естественно рассматривать обобщение понятия подпрямого разложения $\mathcal{A} \to \prod \mathcal{A}_i$ путем замены условия "$\pi_i(A) = A_i$" на условие "$\pi_i(A)$ порождает A_i", где $\pi_i : A \to A_i$ — проекции. Назовем такую обобщенную конструкцию просто *разложением* (она совпадает с подпрямым разложением в случае всюду определенных операций).

Естественность понятия разложения подтверждается также тем, что для него стандартным образом переносятся, как мы показывали ранее, все общие результаты о строении классов подпрямо неразложимых систем квазимногообразиях; при том, что такой перенос невозможен для подпрямо неразложимых алгебр в квазимногообразиях частичных алгебр. Для доказательства последнего строились два примера.

В первом квазимногообразии неразложимые частичные алгебры были, с точностью до изоморфизма, конечным множеством счетных алгебр; а класс подпрямо неразложимых частичных алгебр был аксиоматизируем в бесконечной логике первого порядка только если разрешить кванторы по множествам переменных без ограничения мощности. Во втором квазимногообразии неразложимые частичные алгебры были аксиоматизируемы в некоторой бесконечной логике первого порядка с ограничением мощности множеств переменных под кванторами; но подпрямо неразложимые частичные алгебры допускали аксиоматизацию только в логике второго порядка. При этом второе квазимногообразие было конечно аксиоматизируемым.

В настоящее время нам удалось улучшить первый пример так, чтобы соответствующее квазимногообразие было также конечно аксиоматизируемым.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: sheremet@math.nsc.ru

On partially ordered structures of finite width

B. Sh. Kulpeshov

Let L be a countable first-order language. Everywhere here we consider L-structures and assume that L contains a binary relation symbol $<$ that is interpreted as a linear ordering in these structures.

A structure of the form $\langle M, =, <, \ldots \rangle$, where $\langle M, < \rangle$ is a partially ordered set, is called a *partially ordered structure*. In every partially ordered structure that is not linearly ordered the relation of non-comparability of elements $\diamond$ is appeared, i.e. $x \diamond y := \neg(x = y) \wedge \neg(x < y) \wedge \neg(x > y)$. For arbitrary subsets A, B of a structure M we write $A \diamond B$ if $a \diamond b$ whenever $a \in A$ and $b \in B$. Any family of pairwise incomparable elements of a partially ordered structure is called an *antichain*. We say that a partially ordered structure has the *width* $\leq \lambda$ if any its antichain contains no more than λ elements. A set $A \subseteq M$ is *convex* if for all $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. In particular, points and intervals are convex sets. Obviously, antichains are also convex sets.

Our lecture concerns the notion of *weak partial o-minimality* originally studied by K.Zh. Kudaibergenov in [**1**]. A *weakly p.o-minimal structure* is a partially ordered structure $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a finite union of convex sets in M.

A set $A \subseteq M$, where M is a partially ordered structure, is called *connected* if A is convex and for all $a, b \in A$ $\neg(a \diamond b)$.

Example. Let $M = \langle M, =, < \rangle$ be a partially ordered structure, where $M = \cup_{i<\omega} D_i \cup A$, D_i is a copy of $\omega^* + \omega + Q + \omega^* + \omega$ for each $i < \omega$, A is a copy of Q, $D_i \diamond D_j$ for all $i, j : i \neq j$, $A < D_i$ for every $i < \omega$.

It can be proved that M is weakly p.o-minimal. Obviously, it has an infinite width. Let $\psi(x) := \forall z_1 \forall z_2 (z_1 < x < z_2 \to \exists t_1 \exists t_2 (z_1 < t_1 < x < t_2 < z_2))$, $\phi(x) := \exists y (y < x \wedge \psi(y))$.

Let $q(x) := \{x \diamond c | c \in M\} \cup \{\psi(x)\} \cup \{\phi(x)\}$. Obviously, q determines a 1-type over M, i.e. $q \in S_1(M)$, and there exists an elementary extension of M in which the set of realizations of the type q is not connected.

Theorem. *Let M be a partially ordered structure of finite width. Then the following conditions are equivalent:*

(1) M is weakly p.o-minimal.

(2) The set of realizations of every complete 1-type over M is connected in any elementary extension of M.

References

[1] Kudaibergenov K. Zh. Generalization of o-minimality on partial orders, Mathematicheskie Trudy, (2012), volume 15, No. 1, pp. 86–108.

International Information Technologies University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: kulpesh@mail.ru

The functional representation theorem of free De Morgan algebras

Yu. M. Movsisyan, V. A. Aslanyan

An algebra $Q(+,\cdot,^{-})$ with two binary and one unary operations is called a De Morgan algebra if $Q(+,\cdot)$ is a distributive lattice and $Q(+,\cdot,^{-})$ satisfies the following identities:

$$\overline{x+y} = \overline{x}\cdot\overline{y},$$

$$\overline{\overline{x}} = x,$$

where $\overline{\overline{x}} = \overline{(\overline{x})}$. The standard fuzzy algebra $F = ([0,1]; max(x,y), min(x,y), 1-x)$ is an example of a De Morgan algebra.

It is well known that free Boolean algebra on n free generators is isomorphic to the Boolean algebra of Boolean functions of n variables. The free distributive lattice on n free generators is isomorphic to the lattice of monotone Boolean functions of n variables.

In this paper we introduce the concept of De Morgan function and prove that the free De Morgan algebra on n free generators is isomorphic to the De Morgan algebra of De Morgan functions of n variables. This is a solution of a problem suggested by B.I. Plotkin.

References

[1] Movsisyan Yu. M., Aslanyan V. A. Hyperidentities of De Morgan algebras, Logic Journal of IGPL, (2012); doi:10.1093/jigpal/jzr053.

Yerevan State University, Yerevan (Armenia)
E-mail: yurimovsisyan@yahoo.com

On realizations of Rudin–Keisler preorders for theories with continuum many types

R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov

We continue the investigation [**1**] of structures $\mathrm{RKT}(T) = \langle S(T); \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ for countable complete theories T, where $S(T)$ is the set of complete types of T and $\leq_{\mathrm{RK}}$ is the Rudin–Keisler preorder on $S(T)$.

We say that a preordered set $\mathcal{X} = \langle X; \leq, f \rangle$ with a coloring $f\colon < \to \mathcal{P}(\alpha)$ (α is a countable ordinal) of arcs in $\leq$ is *countably generated* from a preordered set $\mathcal{X}_0 = \langle X_0; \leq_0, f_0 \rangle$ with a coloring $f_0\colon <_0 \to \mathcal{P}(\alpha_0)$ of arcs in $\leq_0$ if $\mathcal{X} = G^\omega(\mathcal{X}_0)$, i. e., $\mathcal{X}$ is obtained from $\mathcal{X}_0$ as a result of countably many application of operator G such that $G(\mathcal{Y}) = \langle G(Y); \leq_{G(\mathcal{Y})}, f_{G(\mathcal{Y})} \rangle$, for $\mathcal{Y} = \langle Y; \leq_{\mathcal{Y}}, f_{\mathcal{Y}} \rangle$, satisfies the following conditions: (1) each element $y \in Y$ is fixed or is replaced by at most countably many (> 1) or continuum many new elements; (2) if $y_0 <_{\mathcal{Y}} y_1$, y_0 is fixed, and y_1 is replaced by a set Y_1 then $y_0 < y_1'$ and $f_{G(\mathcal{Y})}(y_0, y_1') \supseteq f_{\mathcal{Y}}(y_0, y_1)$ for each $y_1' \in Y_1$; (3) if $y_0 <_{\mathcal{Y}} y_1$, y_0 is replaced by Y_0, and y_1 is fixed ($Y_1 \rightleftharpoons \{y_1\}$) or is replaced by Y_1 then for any $y_0' \in Y_0$ and $y_1' \in Y_1$ the condition $y_0' < y_1'$ relative to a color Col in $f_{\mathcal{Y}}(y_0, y_1)$ implies the uniqueness of y_0' for y_1' and Col; (4) for any $y_0', y_1' \in G(Y)$, if $y_0' <_{G(\mathcal{Y})} y_1'$ relative to a color Col in $\rho_{f_{\mathcal{Y}}}$ then y_0' is a representative of y_0, y_1' is a representative of y_1, $y_0, y_1 \in Y$, and $y_0 <_{\mathcal{Y}} y_1$ relative to Col; (5) for any $\mathrm{Col} \in \rho_{f_{G(\mathcal{Y})}} \setminus \rho_{f_{\mathcal{Y}}}$, the set $f^{-1}_{G(\mathcal{Y})}(\mathrm{Col})$ is at most countable, and for any $y_1 \in G(Y)$ if $y_0 <_{G(\mathcal{Y})} y_1$ relative to Col then such y_0 is unique.

Theorem 1. *For any finite preordered set $\mathcal{X}_0 = \langle X_0; \leq_0, f_0 \rangle$ with a coloring $f_0\colon <_0 \to \mathcal{P}(\alpha_0)$ and for any countably generated preordered set $G^\omega(\mathcal{X}_0)$, there is a countable theory T, for which some restriction of structure* $\mathrm{RKT}(T)$*, expanded by formulas providing the domination of types and the coloring of arcs, is isomorphic to the structure $G^\omega(\mathcal{X}_0)$.*

A continual preordered upward directed set $\langle X; \leq \rangle$ is called *premodel* if it has countably many elements under each element $a \in X$; only countable $(\leq \cap \geq)$-classes; countable, or continual and coinciding with X, co-countable, or co-continual set of common elements over any elements $a_1, \ldots, a_n \in X$; only countable chains.

Theorem 2. *For any countable restriction $\langle X; \leq \rangle$ of a premodel set there is a theory T with continuum many types, for which some countable restriction of* $\mathrm{RKT}(T)$ *is isomorphic to the structure $\langle X; \leq \rangle$.*

The work is supported by RFBR grant No. 12-01-00460-a.

References

[1] Sudoplatov S. V. On Rudin–Keisler preorders in small theories / S. V. Sudoplatov // Algebra and Model Theory 8. Collection of papers / eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko. — Novosibirsk : NSTU, 2011. — P. 94–102.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: r-popkov@yandex.ru, sudoplat@math.nsc.ru

Ranks and degrees of semi-isolation for families of types

S. V. Sudoplatov

We consider local variations of Morley rank and Morley degree [**1**] for labels of equivalence classes of semi-isolating [**2**] and, in particular, of isolating [**3**] formulas linking types. For triples (p,u,q), where $p,q\in S^1(\varnothing)$, u is an element in a set U of labels for equivalence classes of $(p\to q)$-formulas [**4**] with respect to a labelling function $\nu(p,q)$, $\rho_{\nu(p,q)}\subseteq U$, we define inductively the *rank* $\mathrm{si}(p,u,q)$ *of semi-isolation*: (1) $\mathrm{si}(p,u,q)=0$ if $u\notin\rho_{\nu(p,q)}$; (2) $\mathrm{si}(p,u,q)\geq 1$ if $u\in\rho_{\nu(p,q)}$; (3) for a positive ordinal α, $\mathrm{si}(p,u,q)\geq\alpha+1$ if there is a set $\{v_i\mid i\in\omega\}$ of pairwise inconsistent labels such that $v_i\trianglelefteq u$ (i. e., $\theta_{v_i}(a,y)\vdash\theta_u(a,y)$ for $(p\to q)$-formulas θ_{v_i} and θ_u representing corresponding labels, $\models p(a)$) and $\mathrm{si}(p,v_i,q)\geq\alpha$, $i\in\omega$; (4) for a limit ordinal α, $\mathrm{si}(p,u,q)\geq\alpha$ if $\mathrm{si}(p,u,q)\geq\beta$ for any $\beta\in\alpha$. As usual, we write $\mathrm{si}(p,u,q)=\alpha$ if $\mathrm{si}(p,u,q)\geq\alpha$ and $\mathrm{si}(p,u,q)\not\geq\beta$ for $\alpha\in\beta$; $\mathrm{si}(p,u,q)\rightleftharpoons\infty$ if $\mathrm{si}(p,u,q)\geq\alpha$ for any ordinal α. By the definition, for any label $u\in\rho_{\nu(p,q)}$ having the si-rank α, there is a greatest number $n\in\omega\setminus\{0\}$ of pairwise inconsistent labels $u_1,\ldots,u_n$ such that $u_i\trianglelefteq u$ and $\mathrm{si}(p,u_i,q)=\alpha$, $i=1,\ldots,n$. This number n is called the *degree of semi-isolation* or the si-*degree* of label u and it is denoted by $\deg(p,u,q)$.

We set $\mathrm{si}(p,q)\rightleftharpoons\sup\{\mathrm{si}(p,u,q)\mid u\in U\cup\{\varnothing\}\}$, $\mathrm{si}(p)\rightleftharpoons\mathrm{si}(p,p)$. For a nonempty family R of 1-types, we put $\mathrm{si}(R)\rightleftharpoons\sup\{\mathrm{si}(p,q)\mid p,q\in R\}$. The value $\mathrm{si}(p,q)$ is said to be the *rank of semi-isolation* or the si-*rank* of pair (p,q), and $\mathrm{si}(R)$ is the *rank of semi-isolation* or the si-*rank* of the family R.

Theorem. *Each* si-*rank in a theory* T *is either equal to* ∞ *or less than* $\min\{|T|^+,(\mathrm{MR}(x\approx x)+1)^+\}$. *If Morley rank* $\mathrm{MR}(x\approx x)$ *is equal to an ordinal* α *then any* si-*rank in* T *is not more than* $\alpha+1$.

Using the si-ranks and si-degrees we have a hierarchy and an axiomatization for algebras [**2**] of distributions of binary semi-isolating formulas on families of types.

The work is supported by RFBR grant No. 12-01-00460-a.

References

[1] Morley M. Categoricity in power / M. Morley // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 114, No. 2. — P. 514–538.

[2] Sudoplatov S. V. On algebras of distributions for binary semi-isolating formulas of a complete theories / S. V. Sudoplatov // Materials of the International scientific conference “Model Theory and Algebra”. — Karaganda: Edition of Karaganda State University, 2012. — P. 43-44.

[3] Shulepov I. V. Algebras of distributions for binary isolating formulas of a complete theory / I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov // arXiv:1205.3473v1 [math.LO]. — 2012. — 41 p.

[4] Baizhanov B. S. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation / B. S. Baizhanov, S. V. Sudoplatov, V. V. Verbovskiy // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — Vol. 9. — P. 161–184.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Minimal quasivarieties of nilpotent Moufang loops non-associative and non-commutative

V. I. Ursu

The theory of quasivarieties is one of the most important compartments of the universal algebra. The basis of this theory was set by A.I. Mal'cev [1-3]. A deeper exposure of this theory can be found in the monograph by V.A. Gorbunov [4]. The special attention is paid to important problem on description of the lattice of quasivarieties of algebras (mentioned in [2] and [4]). In this work we describe all minimal non-abelian quasivarieties for nilpotent Moufang loops:

- minimal non-associative quasivarieties of commutative Moufang loops;
- minimal non-associative and non-commutative quasivarieties of Moufang A-loops with one own minimal non-associative sub-quasivariety of commutative Moufang loops and one own minimal non-commutative sub-quasivariety of groups;
- minimal non-associative and non-commutative quasivarieties of Moufang loops with one single own non-commutative subquasivariety of groups;
- minimal non-commutative quasivarieties of groups.

Also is showed that the lattice formed of the sub-quasivarieties of the variety generated by a free Moufang loop of rank of any of these minimal quasivarieties has the cardinality of the continuum.

Therefore, the lattice of the quasivarieties of any nilpotent non-abelian variety of Moufang loops has the cardinality of the continuum and, hence, cannot be finite or countable. For some of these quasivarieties are constructed the examples of non-associative Moufang loops. For instance, the smallest non-associative and non-commutative nilpotent Moufang loop has 16 elements and formes the basis of the Cayley-Dixon algebra.

References

[1] Mal'cev A. I. Several remarks on quasivarieties of algebraic systems. Algebra i Logika Sem.5, Nr. 3 (1966), 3–9.

[2] Mal'cev A. I. Some borderline problems of algebra and logic. Proc. Internat. Congr. Math.(Moscow, 1966), 1968, p. 217–231.

[3] Mal'cev A. I. Algebraic systems. Moscow, Nauka, 1970.

[4] Gorbunov V. A. Algebraic Theory of Quasivarieties. Novosibirsk, 1998.

Institute of Mathematics Simion Stoilow of the Romanian Academy Technical University of Moldova
E-mail: Vasile.Ursu@imar.ro

On an expansion of stable up to Δ theory by extra-definable subsets

V. V. Verbovskiy

A theory is stable up to Δ if any Δ-type over a model has a few extensions up to complete types. I prove that an expansion of stable up to Δ theory by extra-definable subsets preserves stability up to Δ.

Let Δ consist of formulae of the form $\varphi(x_1, \ldots, x_n; \bar{y})$. As usual $S^n_\Delta(A)$ stands for the set of all Δ-types over the set A.

Let s be a partial n-type, A a set, Δ a collection of formulae in n free variables. Then $S^n_{\Delta,s}(A) \triangleq \{p \in S^n_\Delta(A) : p \cup s \text{ is consistent}\}$. If $\Delta = \mathcal{L}$ I omit it and write S^n_s. Note, s need not be a partial type over A.

Definition. Let $\mathcal{M}$ be an arbitrary structure, $A \subseteq M$. Let Δ and ∇ be sets of formulae of the form $\varphi(x; \bar{y})$.

(1) The model $\mathcal{M}$ is *stable up to* Δ in (λ, ∇) if for all $A \subseteq M$ with $|A| \le \lambda$, for any Δ-type p over M there are at most λ ∇-types over A which are consistent with p, i.e. $|S^1_{\nabla,p}(A)| \le \lambda$.

(2) The theory T is *stable up to* Δ in (λ, ∇) if every model of T is. Sometimes I write T is (λ, ∇)-stable up to Δ.

(3) If $\nabla = \mathcal{L}$ I omit it and write that T is stable in λ or λ-stable up to Δ.

(4) T is *stable up to* Δ if there exists a λ in which T is stable up to Δ. I write T is *stable up to* φ meaning that T is stable up to $\Delta = \{\varphi\}$.

Let T be a theory of a language $\mathcal{L}$, and $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ two models of T such that $\mathcal{N}$ is $|M|^+$-saturated. For any formula $\phi(\bar{x}, \bar{\alpha})$ with parameters $\bar{\alpha}$ in N I add a new relational symbol $P_{\phi(\bar{x},\bar{\alpha})}(\bar{x})$ interpreted by $P_{\phi(\bar{x},\bar{\alpha})}(M) = \phi(N, \bar{\alpha}) \cap M^k$ in order to form language $\mathcal{L}^*$.

S. Shelah in [**1**] proved the following theorem.

Fact. *Let T be a theory of a language $\mathcal{L}$ without the independence property. Then the expansion $\mathcal{M}^*$ of $\mathcal{M}$ as an $\mathcal{L}^*$-structure admits quantifier elimination. In particular, $\mathcal{M}^*$ does not have the independence property.*

He I prove some variant of this theorem.

Theorem. *Let T be a stable up to Δ theory of a language $\mathcal{L}$. Let T^* be the elementary theory of the expansion $\mathcal{M}^*$ of $\mathcal{M}$ as an $\mathcal{L}^*$-structure. Then T^* is stable up to Δ.*

References

[1] Shelah S. Dependent first order theories, continued // Israel J. Math. 2009. V. 173. P. 1–60.

Institute for Problems of Informatics and Control Sciences, Almaty (Kazahkstan)
E-mail: vvv@ipic.kz

VII. Секция «Неклассические логики и теория доказательств»

Аксиоматика полных по П. С. Новикову расширений суперинтуиционистской логики L2 в языке с одной дополнительной константой

А. К. Кощеева

Пусть Fm — множество формул стандартного пропозиционального языка. Обогатим язык дополнительной логической константой φ.

Логикой $L2$ называется суперинтуиционистская (с.и.) логика, характеризуемая классом $\mathbf{F} = \{F_n \mid n \in \omega\}$ шкал вида  (F_n — "веер" с n вершинами).

φ-*Логикой* называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

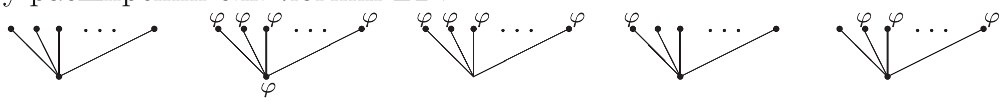
φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* логики L, если $L \subset \mathcal{L}$ и для для класса чистых формул выполнено $Fm \cap \mathcal{L} = L$.

φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *полным по П.С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L.

Под *проблемой Новикова для* $L2$ понимается описание класса всех полных по Новикову расширений (*пополнений*) $L2$.

Моделями φ-логик являются т.н. φ-*шкалы*, т.е. шкалы с выделенным конусом, в котором определенным образом интерпретируется константа.

Из работы А. Д. Яшина [**1**] известно, что существует ровно пять полных по Новикову расширений с.и. логики $L2$:



Аксиоматика этих расширений задается следующим образом:

$L_0 = L2 + \neg\varphi$; $\quad L_1 = L2 + \varphi$; $\quad L_2 = L2 + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$;

$L_3 = L2 + (\varphi \vee \neg\varphi) \to (A \vee \neg A)$

$\neg\neg\varphi \to \varphi$ (регулярность константы)

$(\varphi \to (A \vee B)) \to ((\varphi \to A) \vee (\varphi \to B))$ (неразложимость φ);

$L_4 = L2 + (\varphi \vee \neg\varphi) \to (A \vee \neg A)$

$\neg\neg\varphi \to \varphi$ (регулярность константы)

$(\neg\varphi \to (A \vee B)) \to ((\neg\varphi \to A) \vee (\neg\varphi \to B))$ (неразложимость $\neg\varphi$).

Исследовано влияние специфических аксиом расширений L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 на устройство канонической модели.

Решена алгоритмическая проблема консервативности для расширений $L2$.

Список литературы

[1] Яшин А. Д. О новых константах в двух предтабличных суперинтуиционистских логиках // Алгебра и логика, Т. 50, № 2, 2011. — с. 246–267.

Удмуртский государственный университет, Ижевск
Московский городской психолого-педагогический университет, Москва
E-mail: kannakst@mail.ru

Об исчислении Ламбека с операцией обращения

С. Л. Кузнецов

Определим *исчисление Ламбека* L [**1**]. Типы (формулы) этого исчисления строятся из примитивных типов (переменных) $p_1, p_2, \ldots$ с помощью трёх связок: $\backslash$ (левое деление), $/$ (правое деление) и $\cdot$ (умножение). Секвенции L имеют вид $\Gamma \to A$, где Γ — последовательность типов, A — тип. Исчисление Ламбека задаётся аксиомами вида $A \to A$ и правилами вывода (латинские буквы обозначают типы, греческие — их последовательности):

$$\frac{A\,\Pi \to B}{\Pi \to A \,\backslash\, B}\ (\to \backslash),\ \text{где } \Pi \text{ непуста}; \qquad \frac{\Pi\, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \text{ непуста};$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma\,\Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot); \quad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, \Pi\, (A \,\backslash\, B)\, \Delta \to C}\ (\backslash \to); \quad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (B \,/\, A)\, \Pi\, \Delta \to C}\ (/ \to);$$

$$\frac{\Gamma\, A\, B\, \Delta \to C}{\Gamma\, (A \cdot B)\, \Delta \to C}\ (\cdot \to); \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma\, A\, \Delta \to C}{\Gamma\, \Pi\, \Delta \to C}\ (\mathrm{cut}).$$

Правило сечения (cut) устранимо [**1**].

Пусть Σ — алфавит. Определим интерпретацию $w(A) \subseteq \Sigma^+$ типа A: $w(p_i)$ определяется произвольно; $w(A \cdot B) = \{uv \mid u \in w(A), v \in w(B)\}$, $w(A \,\backslash\, B) = \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in w(A))\ vu \in w(B)\}$, $w(B \,/\, A) = \{u \in \Sigma^+ \mid (\forall v \in w(A))\ uv \in w(B)\}$. Пара $\langle \Sigma, w \rangle$ называется *языковой моделью*. Секвенция $A_1 \ldots A_n \to B$ истинна в этой модели, если $w(A_1) \cdot \ldots \cdot w(A_n) \subseteq w(B)$. Верна **теорема о полноте** [4]: *секвенция выводима в* L *тогда и только тогда, когда она истинна при всех языковых моделях.*

Добавим к исчислению L ещё одну одноместную связку $^{\mathrm{R}}$ (пишется в постфиксной форме: A^{R}), интерпретируемую как *обращение* языка: $w(A^{\mathrm{R}}) = \{a_n \ldots a_1 \mid a_1 \ldots a_n \in w(A)\}$. Добавление к исчислению L аксиом $(A \cdot B)^{\mathrm{R}} \leftrightarrow B^{\mathrm{R}} \cdot A^{\mathrm{R}}$ и $A^{\mathrm{RR}} \leftrightarrow A$ [**2**]) даёт исчисление $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}}$, полное относительно языковых моделей:

Теорема. *Секвенция выводима в* $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}}$ *тогда и только тогда, когда она истинна во всех языковых моделях.* [**3**]

Предъявим секвенциальную версию $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}}$ — исчисление L^{R}. Если $\Gamma = A_1 \ldots A_n$, положим $\Gamma^{\mathrm{R}} = A_n^{\mathrm{R}} \ldots A_1^{\mathrm{R}}$. Исчисление L^{R} получается добавлением к L следующих правил вывода:

$$\frac{\Gamma \to C}{\Gamma^{\mathrm{R}} \to C^{\mathrm{R}}}\ ({}^{\mathrm{R}} \to {}^{\mathrm{R}}) \qquad \frac{\Gamma A^{\mathrm{RR}} \Delta \to C}{\Gamma A \Delta \to C}\ ({}^{\mathrm{RR}} \to)_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\Gamma \to C^{\mathrm{RR}}}{\Gamma \to C}\ (\to {}^{\mathrm{RR}})_{\mathrm{E}}$$

Исчисления $\mathrm{L}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{H}}$ и L^{R} эквивалентны. Для L^{R} доказана **теорема об устранении сечения:** *всякая секвенция, выводимая в* L^{R}, *выводима без использования правила* (cut).

Доказаны также аналогичные результаты для вариантов рассматриваемых исчислений, допускающих пустые левые части секвенций.

Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00281-а и 12-01-00888-а, грантом НШ 65648.2010.1 и Российско-швейцарской программой научно-технического сотрудничества (STCP-CH-RU).

Список литературы

[1] Ламбек И. Математическое исследование структуры предложений. Матем. лингвистика: сб. пер. М.: Мир, 1964. С. 47–68.

[2] Lambek J. From categorial grammar to bilinear logic. Substructural Logics. Studies in Logic and Computation, vol. 2. Clarendon Press, Oxford, 1993. P. 128–139.

[3] Kuznetsov S. L-completeness of the Lambek calculus with the reversal operation. Logical Aspects of Computational Linguistics 2012. LNCS vol. 7351. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012. P. 151–160.

[4] Пентус М. Р. Полнота синтаксического исчисления Ламбека. Фунд. и прикл. матем., том 5, № 1 (1999). С. 193–219.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва
E-mail: skuzn@inbox.ru

Канонические формулы для логики BK

Е. И. Латкин

Рассматриваются расширения логики **BK**, Белнаповского варианта наименьшей нормальной модальной логики **K**. В работе [**1**] с помощью твист-структур над модальными алгебрами была описана алгебраическая семантика для этой логики, а так же семантика в терминах шкал Крипке. Было доказано, что локальное отношение $\vdash_{\mathbf{BK}}$ (следование только с помощью правила *modus ponens*) строго полно по отношению к классам шкал Крипке, тогда как алгебраическая семантика доказано, что строго полна и для глобального отношения $\vdash^*_{\mathbf{BK}}$ (следование с помощью *modus ponens* и правил монотонности для модальностей). В работе [**2**] были описаны инварианты определяющие твист-структуры над модальными алгебрами. Эти результаты в сумме с техникой канонических формул для расширений логик **K4** и **Int** описанной в [**3**] позволяют построить канонические формулы для **BK**. Это формулы специального вида, которые ассоциируются с конечными шкалами, являющимися контр-моделями для данных формул. Канонические формулы позволяют аксиоматизировать все логики из ε**BK** - решетки логик-расширений **BK** с сохранением *modus ponens* и правил монотонности для модальностей.

Теорема. *Существует алгоритм, который по данной формуле φ строит канонические формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ такие что*

$$\mathbf{BK} + \varphi = \mathbf{BK} + \alpha_1 + \ldots + \alpha_N.$$

Список литературы

[1] Odintsov S. P., Wansing H. Modal logics with Belnapian truth values // Journal of Applied Non-Classical Logics v.1-23, 2007.

[2] Odintsov S. P., Latkin E. I. BK-lattices. Algebraic semantics for Belnapian modal logics // Studia Logica, Volume 100, Numbers 1-2 (2012), 319-338.

[3] Chagrov A., Zakharyaschev M. Modal logic // Oxford, 1997.

НГУ, Новосибирск
E-mail: eilatkin@gmail.com

О теоремах эрбрановского типа для классических и интуиционистских модальных логик с равенством

А. В. Лялецкий

Для логик, рассмотренных в [**1**], результаты из [**1**] распространяются на случай *включения* в сигнатуру этих логик знака равенства. То есть, все рассматриваемые модальные логики получаются из генценовских исчислений $\mathbf{LK}^{=}$ или $\mathbf{LJ}^{=}$ (без правила сечения) [**2**] добавлением необходимых секвенциальных модальных правил **Mod**, обладающих свойством подформульности.

Не нарушая общности, мы ограничиваемся установлением выводимости секвенций вида $\to F$, где F – замкнутая формула.

Как и в [**1**], в проводимых построениях важную роль играют понятия допустимости и совместимости, а также аналоги эрбрановского расширения $HE(F)$ и эрбрановского универсума $QH(F)$ (замкнутой) формулы F .

Каждая формула F и подстановка σ термов из $QH(F)$ вместо всех отрицательных переменных формулы F генерируют, на базе всех отрицательных литер равенства из F, разбиение $QH(F)$ на попарно непересекающиеся классы термов. Это разбиение обозначается $\pi(F,\sigma)$, а класс, содержащий терм t, — $[t/\pi(F,\sigma)]$.

Для замкнутой бескванторной формулы G и замкнутой формулы F, с одинаковыми эрбрановскими универсумами, и подстановки σ выражение $[G/\pi(F,\sigma)]$ обозначает результат замены каждого терма t, занимающего аргументное место в G, классом $[t/\pi(F),\sigma)]$ (считающегося в $[G/\pi(F,\sigma)]$ константой).

Теорема. *Для замкнутой формулы F, секвенция $\to F$ выводима в* $\mathbf{LJ}^{=}$+**Mod** *(*$\mathbf{LK}^{=}$+**Mod***) тогда и только тогда, когда существуют $HE(\forall x(x=x)\supset F)$ и подстановка σ термов из $QH(HE(\forall x(x=x)\supset F))$ вместо всех отрицательных переменных из $HE(\forall x(x=x)\supset F)$, такие, что имеют место (1), (2) и (3) ((1) и (2)): (1) можно построить дерево вывода Tr для секвенции $\to [\mu(HE(\forall x(x=x)\supset F))\cdot\sigma/\pi(\forall x(x=x)\supset F,\sigma)]$ в пропозициональном фрагменте исчисления* $\mathbf{LJ}^{=}$+**Mod** *(*$\mathbf{LK}^{=}$+**Mod***), где $\mu(HE(\forall x(x=x)\supset F))$ – результат опускания всех кванторов в $HE(\forall x(x=x)\supset F)$ и $\mu(HE(\forall x(x=x)\supset F))\cdot\sigma$ – результат умножения $\mu(HE(\forall x(x=x)\supset F))$ на σ; (2) σ допустима для $HE(\forall x(x=x)\supset F)$; (3) дерево Tr совместимо с σ в рассматриваемом пропозициональном фрагменте.*

Заметим, что при $\mathbf{Mod}=\emptyset$ мы получаем редукционную теорему эрбановского типа для интуиционистской логики с равенством $\mathbf{LJ}^{=}$.

Список литературы

[1] Лялецкий А. В. Секвенциальные формы теорем эрбрановского типа для классических и интуиционистских модальных логик. Тезисы докладов Международной конференции “Мальцевские чтения”, Новосибирск, 2009, С. 227.

[2] Gentzen G. Untersuchungen uber das Logische Schliessen. Math. Z., 39:176–210, 1934.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев
E-mail: lav@unicyb.kiev.ua

Максимальная дедуктивная база для паранепротиворечивой семантики множеств ответов

Н. В. Маяцкий, С. П. Одинцов

Работа относится к направлению, начатому Д. Пирсом, который доказал [**6**], что неклассическая логика «здесь-и-там» с сильным отрицанием $\mathbf{N_5}$ представляет собой логическую основу для программирования множеств ответов (Answer Set Programming (ASP)). Характер связи между немонотонным следованием, задаваемым семантикой множеств ответов, и монотонным следованием логики $\mathbf{N_5}$ отражен в понятии дедуктивной базы немонотонного следования [**2**]. Монотонная логика L с ассоциированным отношением следования $\vdash_L$ является *дедуктивной базой* немонотонного отношения следования $\mid\!\sim_{el}$, если выполнены следующие условия: (1) $\vDash_L \subseteq \mid\!\sim$; (2) из $\Gamma \mid\!\sim A$ и $A \vDash_L B$ следует $\Gamma \mid\!\sim B$; (3) $\Gamma_1 \equiv_L \Gamma_2$ влечет $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$. Здесь $\Gamma_1 \equiv_L \Gamma_2$ означает $\Gamma_1 \vdash_L \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \vdash_L \Gamma_1$, а $\approx$ определяется аналогичным образом через $\mid\!\sim$.

Рассмотренные в [**6**] логические программы включали два вида отрицаний: традиционное для логического программирования отрицание-как-неудача и сильное отрицание основанное на понятии конструктивной или явной ложности [**3**], которая естественным образом сочетается с концепцией паранепротиворечивости. Паранепротиворечивая семантика множеств ответов (PAS) допускает множества ответов, которые противоречивы относительно сильного отрицания. Первая декларативная характеризация (PAS) получена в [**1**]. В [**5**] эта характеризация была упрощена и доказано, что 9-значное расширение $\mathbf{N_9}$ паранепротиворечивой логики Нельсона $\mathbf{N4}^\perp$ с дополнительной константой абсурдности [**4**] является дедуктивной базой для немонотонного следования семантики PAS.

В данном докладе мы покажем, что $\mathbf{N_9}$ является масимальной дедуктивной базой PAS в классе расширений логики $\mathbf{N4}^\perp$.

Список литературы

[1] Alcântara J., Damásio C., Pereira L. M. A declarative characterisation of disjunctive paraconsistent answer sets. In R. López de Mántaras & L. Saitta (eds), *Proc. of ECAI 2004*, IOS Press, 2004, 951-952. Full version available at http://centria.di.fct.unl.pt/~jfla/publications/.

[2] Dietrich J. Deductive bases of nonmonotonic inference operations. Technical report, NTZ Report, Universität Leipzig, 1994.

[3] Nelson D. Constructible falsity. *Journal of Symbolic Logic*, 14(2):16–26, 1949.

[4] Odintsov S. The Class of Extensions of Nelson's paraconsistent logic. *Studia Logica*, 80(2–3):293–322, 2005.

[5] Odintsov S., Pearce D. Routley semantics for answer sets. *In Proc. 8th International Conference on Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning.* LNCS 3662, 343–355, 2005.

[6] Pearce D. A new logical characterization of stable models and answer sets. In *Proc. of NMELP 96*, LNCS 1216, 57–70, Springer, 1997.

ИСИ СО РАН, ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: mnikvit@gmail.com, odintsov@math.nsc.ru

Базис глобально допустимых правил вывода предтабличных модальных логик

В. В. Римацкий

Определение 1. *Правило r называется* **глобально допустимо в логике** L, *если r допустимо во всех фининто аппроксимируемых логиках, расширяющих логику L. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется* **базисом глобально допустимых правил логики** L, *если (i) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в L; (ii) любое глобально допустимое в L правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L.*

Определение 2. *Логика λ, расширяющая логику $S4$, имеет* **слабое свойство ко-накрытий**, *если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathcal{F} = b^R$ и произвольной антицепи $\mathcal{X}$ сгустков из $\mathcal{F} \setminus \{b\}$, фрейм $\mathcal{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ко фрейму $\bigcup_{c \in \mathcal{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом.*

Для всех чисел $n > 1,\ 1 \leq i, j \leq n;\ n \in N$, определим формулы:

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg p_j;\ A_n := \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond \pi_i;\ A_{n,1} := \Box \Big[\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (p_i \to \neg \Diamond q) \Big];\ B := q \vee \neg \Diamond q.$$

Определим также для натуральных n последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_1 := \frac{\Diamond p \wedge \Diamond \neg p}{q}; \qquad \mathcal{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)}{\Box \neg A_n};\ n = 2, 3, \ldots.$$

Теорема 1. *Правило $\mathcal{R}_1$ образует базис глобально допустимых правил логик $PT1$, $PT4$, $PT5$.*

Теорема 2. *Правила $\{\mathcal{R}_n,\ n > 1, n \in N\}$, образуют базис глобально допустимых правил вывода логики $PT2$ ($PT3$).*

Аналогичным образом с некоторыми упрощениями доказывается:

Теорема 3. *Правила $\{\mathcal{R}_n, n > 1\ n \in N\}$, образуют независимый базис допустимых правил вывода логики $PT2$ ($PT3$).*

Теорема 4. *Правила $\{\mathcal{R}_n,\ 1 < n \leq t-1\}$ образуют конечный независимый базис допустимых правил вывода произвольной табличной логики ширины t, расширяющей $PT2$ ($PT3$).*

Свойства эффективности интуиционистской теории множеств, содержащей арифметику и конструктивнные принципы

Д. М. Смелянский

Под интуиционистской теорией множеств ZFI понимается система аксиом Цермело-Френкеля ZF, добавленная в качестве нелогической к интуиционистскому исчислению предикатов HPC, в которой, однако, аксиома регулярности

$$u \in v \to \exists x \left[x \in v \wedge \forall y \left(y \in v \to \neg y \in x \right) \right]$$

заменена аксиомой трансфинитной индукции:

$$\forall x \left[\forall y (y \in x \to \varphi(y)) \to \varphi(x) \right] \to \forall x \varphi(y)$$

и отсутствует аксиома выбора, в противном случае, как показал Майхилл, получим теорию, формально равнообъемную классической ZF. Основные исследования в этой области ведутся с 70-х гг. прошлого века и касаются в основном совместности этой теории с дополнительными конструктивными принципами, такими как тезис Черча: $\forall a \exists b \varphi\left(a, b\right) \to \exists e \forall a \exists b \left(\varphi\left(a, b\right) \wedge \left\{e\right\}\left(a\right) = b\right)$, принцип Маркова: $\forall a \left(\varphi\left(a\right) \vee \neg\varphi\left(a\right)\right) \to \left(\neg\forall a \varphi\left(a\right) \to \exists a \neg\varphi\left(a\right)\right)$ принцип униформизации - при этом рассматривается обычно двусортная теория с интуиционистской арифметикой на первом уровне, а также аксиома двойного дополнения: $\forall x \exists y \left[\forall z \left(z \in x \to \neg\neg z \in y\right) \wedge \forall a \left(a \in x \to \neg\neg z \in y\right)\right]$ и свойств эффективности теории, прежде всего дизъюнктивности (из доказуемости формулы $\varphi \vee \psi$ следует доказуемость φ или доказуемость ψ) и экзистенциальности (в случае стандартного языка теории множеств выглядит так: если доказуема формула $\exists y \varphi\left(y\right)$, то найдется формула ψ, свободными переменными которой могут являться только свободные переменные формулы φ - $x_1, x_2, ..., x_n$ и переменная y, такая, что доказуема формула $\exists y \left(\varphi\left(y\right)\right) \wedge \forall z \left(z \in y \to \psi\left(x_1, x_2, ..., x_n, y\right)\right)$). В 1973г. Майхилл в [2] построил обобщение штрих-реализуемости Клини, позволившее ему доказать ряд свойств эффективности для ZFI. Однако, его реализуемость носит неэффективный характер, что делает ее неприменимой к системам, содержащим тезис Черча. В том же 1973г. Х.Фридман в [1], используя модификацию реализуемости Клини, показал непротиворечивость интуиционистской теории множеств с тезисом Черча и принципами Маркова и униформизации относительно классической теории множеств, но без аксиомы объемности. Затем В.Х.Хаханяну удалось построить такую модификацию реализуемости Клини, что оказалась реализуема аксиома объемности, а также двойного дополнения, решив таким образом задачу, поставленную А.Г.Драгалиным. В настоящей работе предлагается эффективная модификация реализуемости Майхилла, которая позволяет доказать свойства эффективности для интуиционистской теории множеств с тезисом Черча, сохраняя реализуемость аксиомы объемности.

Список литературы

[1] Friedman H. Some applications of Kleene's methods for intuitionistic Systems. - Lect. Notes Math., 1973, N 337.

[2] Myhill J. Some properties of intuitionistic Zermelo-Frenkel set theory. - Lect. Notes Math., 1973, N 337.

[3] Хаханян В. В. Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с принципами Чёрча и униформизации. Вестник МГУ, серия 1. Математика, Механика, 1980, No.5, С. 3–7.

МПГУ, Москва
E-mail: soldm1@yandex.ru

Совместимость в прегрупповых исчислениях.

А. Сорокин

Прегруппы были предложены Й. Ламбеком в 1999 году как формальная модель синтаксиса естественных языков. Прегруппа есть структура $\mathcal{M} = \langle M, \leqslant, \cdot, {}^l, {}^r, 1\rangle$, где $\langle M, \leqslant, \cdot, 1\rangle$ — частично упорядоченный моноид, а ${}^l, {}^r$ есть операции левого и правого сопряжения, удовлетворяющие условиям $a^l a \leqslant 1 \leqslant aa^l$ и $aa^r \leqslant 1 \leqslant a^r a$. Пусть $\langle P, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченное множество элементов, тогда $\{p^n \mid p \in P, n \in \mathbb{N}\}$ — термы, $|n|$—порядок терма. Типы суть конечные последовательности простых термов, порядок типа есть максимум порядков входящих в него термов. На множестве типов введём операции сопряжения ${}^l, {}^r$: $\Lambda^l = \Lambda^r = \Lambda$, $(p^n)^l = p^{n-1}, (p^n)^r = p^{n+1}$, $(AB)^l = B^l A^l, (AB)^r = B^r A^r$. Секвенция есть выражения вида $\Gamma \leqslant \Delta$,где Γ, Δ — типы. Сформулированное ниже исчисление $\mathrm{PL}_{P,\leqslant}$ порождает в точности все формулы, истинные во всех прегруппах, удовлетворяющих отношению $\leqslant$.

$$\text{(AX)}\ \frac{}{\Gamma \leqslant \Gamma} \qquad \text{(AL)}\ \frac{\Gamma, \Gamma' \leqslant \Delta}{\Gamma p^n p^{n+1} \Gamma' \leqslant \Delta} \qquad \text{(AR)}\ \frac{\Gamma \leqslant \Delta\Delta'}{\Gamma \leqslant \Delta p^{n+1} p^n \Delta'}$$

$$\text{(IL)}\ \frac{\Gamma q^n \Gamma' \leqslant \Delta}{\Gamma p^n \Gamma' \leqslant \Delta},\ p^n \leqslant q^n \qquad \text{(IR)}\ \frac{\Gamma \leqslant \Delta p^n \Delta'}{\Gamma \leqslant \Delta q^n \Delta'},\ p^n \leqslant q^n$$

Два типа A и B называются совместимыми, если существует либо такой совмещающий тип C, что $A \leqslant C$ и $B \leqslant C$ — выводимые секвенции, либо такой соединяющий тип D, что $D \leqslant A$ и $D \leqslant B$ — выводимые секвенции (на самом деле эти условия эквивалентны). Критерий совместимости часто имеет простую алгебраическую формулировку, а оценки на длину совмещающего типа и алгоритм его построения имеют значение для лингвистических приложений.

Пусть $\langle P, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченное множество, порождающее прегруппу, а $\approx$ транзитивное симметричное замыкание отношения $\leqslant$. Пусть $FG(P/\approx)$ — свободная группа, порождённую множеством $P/\approx$. Для каждого типа Γ определим его интерпретацию $\lfloor\Gamma\rfloor$ в свободной группе $FG(P/\approx)$: $\lfloor\Lambda\rfloor = \varepsilon, \lfloor p^{2n}\rfloor = [p], \lfloor p^{2n+1}\rfloor = [p]^{-1}, \lfloor\Gamma\Delta\rfloor = \lfloor\Gamma\rfloor\lfloor\Delta\rfloor$. В работе получены следующие результаты:

Теорема. *Типы A и B совместимы в $\mathrm{PL}_{P,\leqslant}$ если и только если $\lfloor A\rfloor = \lfloor B\rfloor$.*

Индексом эквивалентности отношения $\leqslant$ есть максимальная длина совмещающего типа для элементов $p, q \in P$, находящихся в отношении $\approx$. Индекс эквивалентности конечен, в частности, когда $\leqslant$ есть конечное объединение цепей.

Теорема. *1) Для произвольного частичного порядка $\leqslant$ и любых чисел m, n, l найдутся такие совместимые в $\mathrm{PL}_{P,\leqslant}$ типы A, B порядка не выше l длиною m, n, что их совмещающий тип не может иметь длину меньше $(m+n)l$*

2) Для любых совместимых в $\mathrm{PL}_{P,=}$ типов A, B порядка не выше l и длиною m и n соответственно найдётся совмещающий тип длины не больше чем $2(m+n)l + O(l)$.

3) В случае, если индекс совместимости отношения $\leqslant$ конечен и равен C, для любых совместимых в $\mathrm{PL}_{P,=}$ типов A, B порядка не выше l и длиною m и n соответственно найдётся совмещающий тип длины не больше чем $2C(m+n)l + O(l)$.

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: alexey dot sorokin at list dot ru

Об α-полноте одной системы трехзначной логики

А. Л. Шабунин

В [**1**] введены понятия α-формулы, α-суперпозиции и α-полноты множества функций k-значной логики. Доказано, что при $k \geq 7$ α-полной является любая система функций из множества P_k всех функций k-значной логики, содержащая все подстановки из симметрической группы S_k подстановок множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и любую одну квазигрупповую функцию. В [**2**] приведены условия α-полноты систем функций k-значной логики, состоящих из функций, у которых все одноместные подфункции, полученные произвольной фиксацией всех переменных, кроме первой, являются подстановками; для $k \geq 5$ построены α-полные системы из двух бинарных операций с правым сокращением; для $k = 2$ доказано отсутствие конечных α-полных систем; для $k \geq 3$ установлено, что в P_k отсутствуют α-полные системы, состоящие из одной функции.

В [**3, 4**] построены конечные α-полные системы для $k = 3, 4$. Доказано, что полная система T функций четырехзначной логики, содержащей все подстановки множества E_4 и операцию сложения по модулю 4, не является α-полной, но ее α-пополнение $[T]_\alpha$ будет уже α-полной системой. Установлено, что множество функций $F \subseteq P_k$ α-замкнуто тогда и только тогда, когда F замкнуто.

В данной работе рассматриваюся функции трехзначной логики. Пусть $F = P_3(1) \cup \{+\}$ — система функций, состоящая из всех одноместных функций из P_3 и операции сложения по модулю 3. По теореме Слупецкого система F полна.

Теорема 1. *$[F]_\alpha \neq P_3$, т.е. система F не является α-полной.*

Теорема 2. *$[[[F]_\alpha]_\alpha]_\alpha = P_3$. Другими словами, двукратное α-пополнение системы F является α-полной системой.*

Остается открытым

ВОПРОС. Верно ли равенство $[[F]_\alpha]_\alpha = P_3$?

Список литературы

[1] Глухов М. М. Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики. Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 1. С. 16–21.

[2] Чернышов А. Л. Условия α-полноты систем функций многозначной логики. Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 117–130.

[3] Шабунин А. Л. Примеры α-полных систем k-значной логики при $k = 3, 4$. Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 4. С. 45–55.

[4] Шабунин А. Л. Об α-суперпозиции функций k-значной логики. Сиб. матем. журнал. 2007. Т. 48, № 2. С. 441–457.

[5] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979. 272 с.

Чувашский государственный университет, Чебоксары
E-mail: a_shabunin@rambler.ru

Новые константы в логике слабого исключённого третьего

А. Д. Яшин

Fm — класс формул пропозиционального языка (пропозициональные переменные $\{p_i, q_j, \ldots\}$, связки $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$).

Суперинтуиционистская логика (с.и.л.) — подмножество $L \subset Fm$, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

Расширим язык дополнительными логическими константами $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. $Fm(\overline{\varphi})$ — класс формул расширенного языка.

$\overline{\varphi}$-Логика — множество $\mathcal{L} \subset Fm(\overline{\varphi})$, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

$\overline{\varphi}$-Логика $\mathcal{L}$ консервативна над с.и.л. L, если $L \subset \mathcal{L}$ и $Fm \cap \mathcal{L} = L$.

$\overline{\varphi}$-Логика $\mathcal{L}$ полна по П. С. Новикову над L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\overline{\varphi})$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, $\overline{\varphi}$-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L.

Проблема Новикова для L — описание класса всех полных по Новикову расширений L.

Здесь рассматривается проблема Новикова применительно к т.н. *логике KC слабого исключённого третьего*: $KC = Int + \neg p \vee \neg\neg p$ (характеризуется классом конечных корневых шкал с наибольшим элементом).

Для описания примеров полных расширений KC применяем *метод наростов*. Пусть G — фиксированная конечная корневая KC-шкала, F — произвольная конечная корневая шкала. Строим новую шкалу $F[G]$, помещая G над F.

Пусть $\mathcal{G}$ — несжимаемая конечная корневая $\overline{\varphi}$-KC-шкала.

В шкале $F[G]$ точки нароста наследуют цвета из $\mathcal{G}$, все точки основы раскрашиваются как корень нароста G. Полученную $\overline{\varphi}$-шкалу обозначаем через $F[\mathcal{G}]$. Основной объект нашего интереса — $\overline{\varphi}$-логика

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}] := \mathcal{L}(\{F[\mathcal{G}] \mid F \text{— конечная корневая шкала}\}).$$

Теорема 1. а) *$\overline{\varphi}$-Логики вида $\mathcal{L}[\mathcal{G}]$ являются полными по Новикову расширениями с.и. логики KC;*

б) *Если $\mathcal{G}_1 \not\simeq \mathcal{G}_2$, то $\mathcal{L}[\mathcal{G}_1] \neq \mathcal{L}[\mathcal{G}_2]$.*

Теорема 2. а) Для одной константы существует ровно 3 пополнения логики KC;

б) Для двух и более констант семейство полных по Новикову расширений KC является континуальным.

A necessity operator in logic N^*

S. A. Drobyshevich

In [**1**] four basic modal logics $HK\Box$, $HK\Diamond$, $HK(Im)$ and $HK(Un)$ over intuitionistic logic were introduced, each corresponding to a different modality. Logic N^* in the language $\mathcal{L}^\neg = \langle \wedge, \vee, \to, -, \neg \rangle$ can be formulated as a modal logic over intuitionistic logic (minus sign stands for intuitionistic negation), in which modal negation $\neg$ combines properties of unnecessity operator and impossibility operator of logics $HK(Un)$ and $HK(Im)$ respectively (in fact, this formulation is a definitional extension of logic N^* as it was introduced in [**2**]). In [**3**] operator $-\neg$ of N^* was used to characterize subdirectly irreducible Heyting-Ockham algebras (class of algebras wrt which N^* was shown to be complete) and it was also pointed out that this operator is a necessity operator of some sort. Our aim is to find axiomatization of this necessity operator.

First we define the intended translation $\tau : For_{\mathcal{L}^\Box} \to For_{\mathcal{L}^\neg}$, where $\mathcal{L}^\Box = \langle \wedge, \vee, \to, -, \Box \rangle$, the following way: *i)* $\tau(p) = p$ *for propositional variable* p, *ii)* $\tau(-\phi) = -\tau(\varphi)$, *iii)* $\tau(\varphi \circ \psi) = \tau(\varphi) \circ \tau(\psi)$ *for* $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$ *and iv)* $\tau(\Box\varphi) = -\neg\tau(\varphi)$.

We then introduce logic $HK(-\neg)$ by adding to the list of axioms of $HK(\Box)$ the following formulas: $-\Box - (p \to p)$, $- - \Box p \to \Box p$, $- - (\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q))$ and $\{\Box - (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \to (-\Box p_1 \vee \ldots \vee -\Box p_n) \mid n \geq 2\}$.

We remind that $HK\Box$ is complete wrt class a of $\Box$-frames, i.e. frames of the form $\mathcal{W} = \langle W, \leq, R \rangle$, where: *i)* $\langle W, \leq \rangle$ *is a partially ordered set; ii)* $R \subseteq W^2$ *is an accessibility relation such that* $(\leq \circ R) \subseteq R$. We then prove

Theorem. *Logic* $HK(-\neg)$ *is complete and has a finite model property wrt a class of* $\Box$*-frames satisfying: i)* R *is serial; ii) there is a least* R*-accessible world from every maximal world; iii) if* xRt *then there is a maximal* $y \geq x$ *and* z *such that* yRz *and* $z \leq t$*; iv) for every* x *and* $y_1, \ldots, y_n \geq x$ *there exists* t *and* $z_1, \ldots, z_n \leq t$ *such that* $y_i R z_i$ *for* $i = 1, \ldots, n$.

Finally, we obtain the following

Theorem. *For any* $\varphi \in For_{\mathcal{L}^\Box}$ *we have* $\varphi \in HK(-\neg) \iff \tau(\varphi) \in N^*$.

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project RFBR-12-01-00168-a and by the Grants Council (under RF president) for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-276.2012.1).

References

[1] Božić M., Došen K. Models for normal intuitionistic modal logics, Studia Logica, **43** (1984), 217–245.

[2] Cabalar P., Odintsov S.P., Pearce D. Logical Foundations of Well-Founded Semantics, in: P.Doherty et al. (eds.) Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 10th International Conference (KR2006), AAAI Press, Menlo Park, California, 2006, 25-36.

[3] Odintsov S.P. Combining intuitionistic connectives and Routley negation, Siberian Electronic Mathematical Reports, **7** (2010), 21–41.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: drobs@math.nsc.ru

On connections between BK-extensions and K-extensions

S. O. Speranski

The system BK, the Belnapian version of the least normal modal logic K, was proposed in [**1**]. Actually, K may be viewed as a conservative enrichment of K by means of strong negation ($\sim$). An algebraic semantics for BK and its extensions can be described in terms of so-called *twist-structures over modal algebras* [**2**]. As was also shown in [**2**], the abstract closure of the collection of all twist-structures over modal algebras forms a variety $\mathcal{V}_{\mathsf{BK}}$ (the elements of which are called BK-*lattices*).

For a BK-lattice $\mathfrak{A}$, its *underlying modal algebra* is

$$\mathfrak{A}_{\bowtie} \;:=\; \langle A_{\bowtie}; \vee, \wedge, \neg, \Box \rangle \,,$$

where $A_{\bowtie} := \{\neg\neg a \mid a \in A\}$, and the operations from $\{\vee, \wedge, \neg, \Box\}$ are induced by those of $\mathfrak{A}$ (see [**2**] for the details).

Theorem 1. *For each* BK-*lattice* $\mathfrak{A}$, *we have* $Con\,(\mathfrak{A}) \cong Con\,(\mathfrak{A}_{\bowtie})$.

Hence a BK-lattice $\mathfrak{A}$ is subdirectly irreducible iff the modal algebra $\mathfrak{A}_{\bowtie}$ is so. Moreover, we prove that the variety $\mathcal{V}_{\mathsf{BK}}$ is congruence distributive, which eventually implies that the lattice $\mathcal{E}\mathsf{BK}$ is distributive.

Assume $L \in \mathcal{E}\mathsf{BK}$ and $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}_{\mathsf{BK}}$. Let $\sigma\,(L)$ be the classical modal fragment of L (i. e., drop the formulae containing $\sim$), and $\mathcal{K}_{\bowtie} := \{\mathfrak{A}_{\bowtie} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$.

Theorem 2. *For any* $L \in \mathcal{E}\mathsf{BK}$ *and* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}_{\mathsf{BK}}$ *with* $L\mathcal{K} = L$, *we have* $\sigma\,(L) = L\mathcal{K}_{\bowtie}$.

$$\eta\,(L) \;:=\; L + \mathsf{BK}\,, \quad \eta^{\circ}\,(L) \;:=\; \eta\,(L) + \{\sim p \to (p \to q), p \vee \sim p\}\,,$$
$$\mathsf{B3K}^{\circ} \;:=\; \mathsf{BK} + \{\sim p \to (p \to q), p \vee \sim p\}$$

Theorem 3. *For every* $L \in \mathcal{E}\mathsf{K}$, $\sigma^{-1}\,(L) = [\eta\,(L)\,, \eta^{\circ}\,(L)]$.

Theorem 4. *The following hold:*

- ∘ σ *is a lattice epimorphism from* $\mathcal{E}\mathsf{BK}$ *into* $\mathcal{E}\mathsf{K}$;
- ∘ η *is a lattice monomorphism from* $\mathcal{E}\mathsf{K}$ *into* $\mathcal{E}\mathsf{BK}$;
- ∘ η° *is a lattice isomorphism between* $\mathcal{E}\mathsf{K}$ *and* $\mathcal{E}\mathsf{B3K}^{\circ}$

(*in addition, both* σ *and* η *commute with infinite meets and joins*).

References

[1] Odintsov S. P., Wansing H. Modal logic with Belnapian truth values, Journal of Applied Non-classical Logics, 20 (2010), 270–301.

[2] Odintsov S. P., Latkin E. I. BK-lattices. Algebraic semantics for Belnapian modal logics, Studia Logica, 100 (2012), 317–336.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: katze.tail@gmail.com

VIII. Авторский указатель