Неразрешимая и не-p-разрешимая длина конечных групп

Е. И. Хухро

ноябрь 2013

Доклад содержит совместные результаты с П. Шумяцким (Бразилиа, Бразилия)

Доклад содержит совместные результаты с П. Шумяцким (Бразилиа, Бразилия)

Результаты частично получены во время визита докладчика в Университет г. Бразилиа, а частично во время его визита в Научно-технический университет Китая в Хёфее. Докладчик благодарен этим университетам за гостеприимство, в особенности профессорам Павлу Шумяцкому и Гуо Венбину.

Определения

Каждая конечная группа G обладает нормальным рядом

$$1 \leqslant G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_{2h+1} = G,$$

в котором факторы с нечётными номерами G_{2i+1}/G_{2i} разрешимы (возможно тривиальны), а с чётными номерами G_{2i}/G_{2i-1} являются прямыми произведениями (непустыми) неабелевых простых групп.

Определения

Каждая конечная группа G обладает нормальным рядом

$$1 \leqslant G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_{2h+1} = G,$$

в котором факторы с нечётными номерами G_{2i+1}/G_{2i} разрешимы (возможно тривиальны), а с чётными номерами G_{2i}/G_{2i-1} являются прямыми произведениями (непустыми) неабелевых простых групп.

Неразрешимая длина $\lambda(G)$ группы G равна h, числу неразрешимых факторов в кратчайшем таком ряду.

Определения

Каждая конечная группа G обладает нормальным рядом

$$1 \leqslant G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_{2h+1} = G,$$

в котором факторы с нечётными номерами G_{2i+1}/G_{2i} разрешимы (возможно тривиальны), а с чётными номерами G_{2i}/G_{2i-1} являются прямыми произведениями (непустыми) неабелевых простых групп.

Неразрешимая длина $\lambda(G)$ группы G равна h, числу неразрешимых факторов в кратчайшем таком ряду.

Не-p-разрешимая длина $\lambda_p(G)$ группы G определяется так же, но с заменой разрешимости на p-разрешимость, а неабелевы простые факторы должны иметь порядки, делящиеся на p.

Определения

Каждая конечная группа G обладает нормальным рядом

$$1 \leqslant G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_{2h+1} = G,$$

в котором факторы с нечётными номерами G_{2i+1}/G_{2i} разрешимы (возможно тривиальны), а с чётными номерами G_{2i}/G_{2i-1} являются прямыми произведениями (непустыми) неабелевых простых групп.

Неразрешимая длина $\lambda(G)$ группы G равна h, числу неразрешимых факторов в кратчайшем таком ряду.

Не-p-разрешимая длина $\lambda_p(G)$ группы G определяется так же, но с заменой разрешимости на p-разрешимость, а неабелевы простые факторы должны иметь порядки, делящиеся на p. (Ясно, что $\lambda(G) = \lambda_2(G)$, так как группы нечётного порядка разрешимы.)

Определения

Каждая конечная группа G обладает нормальным рядом

$$1 \leqslant G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_{2h+1} = G,$$

в котором факторы с нечётными номерами G_{2i+1}/G_{2i} разрешимы (возможно тривиальны), а с чётными номерами G_{2i}/G_{2i-1} являются прямыми произведениями (непустыми) неабелевых простых групп.

Неразрешимая длина $\lambda(G)$ группы G равна h, числу неразрешимых факторов в кратчайшем таком ряду.

Не-p-разрешимая длина $\lambda_p(G)$ группы G определяется так же, но с заменой разрешимости на p-разрешимость, а неабелевы простые факторы должны иметь порядки, делящиеся на p. (Ясно, что $\lambda(G) = \lambda_2(G)$, так как группы нечётного порядка разрешимы.)

Напомним, что группа *p-разрешима*, если у неё есть нормальный ряд, все факторы которого есть либо p- либо p'-группы. Число p-факторов в таком кратчайшем ряду называетя *p-длиной* $l_p(G)$ группы G.

Применения не(-p-)разрешимой длины

Ясно, что неразрешимая и не-p-разрешимая длина как-то измеряют сложность группы. Их верхние оценки важны для того, чтобы более эффективно применять классификацию конечных простых групп (CFSG).

Применения не(-p-)разрешимой длины

Ясно, что неразрешимая и не-p-разрешимая длина как-то измеряют сложность группы. Их верхние оценки важны для того, чтобы более эффективно применять классификацию конечных простых групп (CFSG).

Получение таких оценок само обычно также использует CFSG. Обычно применяется так называемая гипотеза Шрейера, что $\mathrm{Aut}\, G/G$ разрешима, если G — конечная простая группа.

Пример: ОПБ

Положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда (ОПБ)

Порядок d-порождённой группы периода n не превосходит $f(d,n)$.

Пример: ОПБ

Положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда (ОПБ)

Порядок d-порождённой группы периода n не превосходит $f(d, n)$.

(Заметим, что это эквивалентно локальной конечности финитно-аппроксимируемых (или проконечных) групп периода n.)

Пример: ОПБ

Положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда (ОПБ)

Порядок d-порождённой группы периода n не превосходит $f(d, n)$.

(Заметим, что это эквивалентно локальной конечности финитно-аппроксимируемых (или проконечных) групп периода n.)

Решение включает

1) сведение к разрешимым группам с помощью CFSG — при этом как раз оценивалась неразрешимая длина (хотя и неявно);

Пример: ОПБ

Положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда (ОПБ)

Порядок d-порождённой группы периода n не превосходит $f(d, n)$.

(Заметим, что это эквивалентно локальной конечности финитно-аппроксимируемых (или проконечных) групп периода n.)

Решение включает

1) сведение к разрешимым группам с помощью CFSG — при этом как раз оценивалась неразрешимая длина (хотя и неявно);

2) сведение к p-группам путём оценивания p-длины в теоремах Холла–Хигмэна;

Пример: ОПБ

Положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда (ОПБ)

Порядок d-порождённой группы периода n не превосходит $f(d, n)$.

(Заметим, что это эквивалентно локальной конечности финитно-аппроксимируемых (или проконечных) групп периода n.)

Решение включает

1) сведение к разрешимым группам с помощью CFSG — при этом как раз оценивалась неразрешимая длина (хотя и неявно);

2) сведение к p-группам путём оценивания p-длины в теоремах Холла–Хигмэна;

3) теоремы Зельманова для p-групп и алгебр Ли.

Пример: ОПБ-2

"ОПБ-2":

Теорема Зельманова

Периодические проконечные группы локально конечны.

Пример: ОПБ-2

"ОПБ-2":

Теорема Зельманова

Периодические проконечные группы локально конечны.

1) сведение Уилсона к случаю про-p-групп с помощью CFSG — при этом как раз и оценивалась неразрешимая и не-p-разрешимая длина;
2) теорема Зельманова для про-p-групп.

Пример: ОПБ-3

"ОПБ-3":

Задачи Шумяцкого

Пусть w — некоторое групповое слово. Предположим, что в финитно аппроксимируемой (или даже проконечной) группе G все значения слова w имеют конечный порядок (или даже для некоторого n выполняется тождество $w^n = 1$). Будет ли вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечной?

Пример: ОПБ-3

"ОПБ-3":

Задачи Шумяцкого

Пусть w — некоторое групповое слово. Предположим, что в финитно аппроксимируемой (или даже проконечной) группе G все значения слова w имеют конечный порядок (или даже для некоторого n выполняется тождество $w^n = 1$). Будет ли вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечной?

Заметим, что при $w = x_1$ (групповая переменная) как частные случаи получаются ОПБ и ОПБ-2.

Пример: ОПБ-3

"ОПБ-3":

Задачи Шумяцкого

Пусть w — некоторое групповое слово. Предположим, что в финитно аппроксимируемой (или даже проконечной) группе G все значения слова w имеют конечный порядок (или даже для некоторого n выполняется тождество $w^n = 1$). Будет ли вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечной?

Заметим, что при $w = x_1$ (групповая переменная) как частные случаи получаются ОПБ и ОПБ-2.

Пока ОПБ-3 открыта, кроме некоторых специальных случаев. Например,

Шумяцкий-1999

Если в финитно аппроксимируемой группе G выполняется тождество $[x, y]^{p^k} = 1$, где p^k — степень простого числа, то коммутант $[G, G]$ локально конечен.

Ещё об ОПБ-3

Шумяцкий-2012

Пусть w — мультилинейный коммутатор, n — натуральное число. Предположим, что G — финитно аппроксимируемая группа, в которой любое произведение не более чем 896 значений w имеет порядок, делящий n. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

Мультилинейный коммутатор веса m — от m различных переменных.

Ещё об ОПБ-3

Шумяцкий-2012

Пусть w — мультилинейный коммутатор, n — натуральное число. Предположим, что G — финитно аппроксимируемая группа, в которой любое произведение не более чем 896 значений w имеет порядок, делящий n. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

Мультилинейный коммутатор веса m — от m различных переменных.

Доказательство (в основном о конечных группах) включает:

1) сведение к разрешимым (оценка неразрешимой длины с помощью CFSG);

Ещё об ОПБ-3

Шумяцкий-2012

Пусть w — мультилинейный коммутатор, n — натуральное число. Предположим, что G — финитно аппроксимируемая группа, в которой любое произведение не более чем 896 значений w имеет порядок, делящий n. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

Мультилинейный коммутатор веса m — от m различных переменных.

Доказательство (в основном о конечных группах) включает:

1) сведение к разрешимым (оценка неразрешимой длины с помощью CFSG);
2) сведение к нильпотентным (оценка нильпотентной длины разрешимых (под)групп);

Ещё об ОПБ-3

Шумяцкий-2012

Пусть w — мультилинейный коммутатор, n — натуральное число. Предположим, что G — финитно аппроксимируемая группа, в которой любое произведение не более чем 896 значений w имеет порядок, делящий n. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

Мультилинейный коммутатор веса m — от m различных переменных.

Доказательство (в основном о конечных группах) включает:

1) сведение к разрешимым (оценка неразрешимой длины с помощью CFSG);
2) сведение к нильпотентным (оценка нильпотентной длины разрешимых (под)групп);
3) работа с нильпотентными с использованием теорем Зельманова об ОПБ.

Ещё об ОПБ-3

Шумяцкий-2012

Пусть w — мультилинейный коммутатор, n — натуральное число. Предположим, что G — финитно аппроксимируемая группа, в которой любое произведение не более чем 896 значений w имеет порядок, делящий n. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

Мультилинейный коммутатор веса m — от m различных переменных.

Доказательство (в основном о конечных группах) включает:

1) сведение к разрешимым (оценка неразрешимой длины с помощью CFSG);
2) сведение к нильпотентным (оценка нильпотентной длины разрешимых (под)групп);
3) работа с нильпотентными с использованием теорем Зельманова об ОПБ.

(Напомним, что нильпотентная длина разрешимой группы — это длина кратчайшего нормального ряда с нильпотентными факторами.)

Ещё об ОПБ-3

Шумяцкий-2012

Пусть w — мультилинейный коммутатор, n — натуральное число. Предположим, что G — финитно аппроксимируемая группа, в которой любое произведение не более чем 896 значений w имеет порядок, делящий n. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

Мультилинейный коммутатор веса m — от m различных переменных.

Доказательство (в основном о конечных группах) включает:

1) сведение к разрешимым (оценка неразрешимой длины с помощью CFSG);
2) сведение к нильпотентным (оценка нильпотентной длины разрешимых (под)групп);
3) работа с нильпотентными с использованием теорем Зельманова об ОПБ.

Альтернативное сведение к разрешимым тут можно получить используя часть 2) и следующий результат.

Связь с нильпотентной длиной разрешимых подгрупп

Теорема 1

Если нильпотентная длина разрешимых подгрупп конечной группы G не превосходит k, то неразрешимая длина группы G не превосходит k.

Связь с p-длиной разрешимых подгрупп

Теорема 2

Если p-длина p-разрешимых подгрупп конечной группы G не превосходит k, то не-p-разрешимая длина группы G не превосходит k при $p \neq 2$, и не превосходит $2k+1$ при $p=2$.

Связь с p-длиной разрешимых подгрупп

Теорема 2

Если p-длина p-разрешимых подгрупп конечной группы G не превосходит k, то не-p-разрешимая длина группы G не превосходит k при $p \neq 2$, и не превосходит $2k+1$ при $p = 2$.

Теорему 2 можно применять если знать, как оценить p-длину.

Связь с p-длиной разрешимых подгрупп

Теорема 2

Если p-длина p-разрешимых подгрупп конечной группы G не превосходит k, то не-p-разрешимая длина группы G не превосходит k при $p \neq 2$, и не превосходит $2k + 1$ при $p = 2$.

Теорему 2 можно применять если знать, как оценить p-длину.

Теоремы Холла–Хигмэна

Пусть P — силовская подгруппа конечной p-разрешимой группы G, причём p^e — период P, а d — ступень разрешимости P.

Связь с p-длиной разрешимых подгрупп

Теорема 2

Если p-длина p-разрешимых подгрупп конечной группы G не превосходит k, то не-p-разрешимая длина группы G не превосходит k при $p \neq 2$, и не превосходит $2k+1$ при $p = 2$.

Теорему 2 можно применять если знать, как оценить p-длину.

Теоремы Холла–Хигмэна

Пусть P — силовская подгруппа конечной p-разрешимой группы G, причём p^e — период P, а d — ступень разрешимости P. Тогда p-длина группы G удовлетворяет неравенствам

- $l_p(G) \leqslant d$, а также
- $l_p(G) \leqslant 2e+1$ (даже $\leqslant e$, если p — не простое число Ферма).

Связь с p-длиной разрешимых подгрупп

Теорема 2

Если p-длина p-разрешимых подгрупп конечной группы G не превосходит k, то не-p-разрешимая длина группы G не превосходит k при $p \neq 2$, и не превосходит $2k+1$ при $p = 2$.

Теорему 2 можно применять если знать, как оценить p-длину.

Теоремы Холла–Хигмэна

Пусть P — силовская подгруппа конечной p-разрешимой группы G, причём p^e — период P, а d — ступень разрешимости P. Тогда p-длина группы G удовлетворяет неравенствам

- $l_p(G) \leqslant d$, а также
- $l_p(G) \leqslant 2e+1$ (даже $\leqslant e$, если p — не простое число Ферма).

На самом деле у Холла–Хигмэна не было случая $p = 2$,

Связь с p-длиной разрешимых подгрупп

Теорема 2

Если p-длина p-разрешимых подгрупп конечной группы G не превосходит k, то не-p-разрешимая длина группы G не превосходит k при $p \neq 2$, и не превосходит $2k + 1$ при $p = 2$.

Теорему 2 можно применять если знать, как оценить p-длину.

Теоремы Холла–Хигмэна

Пусть P — силовская подгруппа конечной p-разрешимой группы G, причём p^e — период P, а d — ступень разрешимости P. Тогда p-длина группы G удовлетворяет неравенствам

- $l_p(G) \leqslant d$, а также
- $l_p(G) \leqslant 2e + 1$ (даже $\leqslant e$, если p — не простое число Ферма).

На самом деле у Холла–Хигмэна не было случая $p = 2$, который был сделан позднее (Хоаре-1960, Гросс-1965, Бергер–Гросс-1977, Брюханова-1979, 1981).

Проблема Уилсона о p-длине

Проблема Уилсона (Коуровка 9.68)

Пусть $\mathfrak{V}$ — собственное многообразие групп. Ограничена ли p-длина конечных p-разрешимых групп, силовские p-подгруппы которых лежат в $\mathfrak{V}$?

Проблема Уилсона о p-длине

Проблема Уилсона (Коуровка 9.68)

Пусть $\mathfrak{V}$ — собственное многообразие групп. Ограничена ли p-длина конечных p-разрешимых групп, силовские p-подгруппы которых лежат в $\mathfrak{V}$?

Кроме Теорем Холла–Хигмэна (когда $\mathfrak{V}$ разрешимо или ограниченного периода, или энгелево) прогресса нет!

Проблема о не-p-разрешимой длине

Проблема

Пусть $\mathfrak{V}$ — собственное многообразие групп. Ограничена ли не-p-разрешимая длина конечных групп, силовские p-подгруппы которых лежат в $\mathfrak{V}$?

Проблема о не-p-разрешимой длине

Проблема

Пусть $\mathfrak{V}$ — собственное многообразие групп. Ограничена ли не-p-разрешимая длина конечных групп, силовские p-подгруппы которых лежат в $\mathfrak{V}$?

Получен положительный ответ для любой комбинации разрешимых многообразий и многообразий ограниченного периода.

Проблема о не-p-разрешимой длине

Проблема

Пусть $\mathfrak{V}$ — собственное многообразие групп. Ограничена ли не-p-разрешимая длина конечных групп, силовские p-подгруппы которых лежат в $\mathfrak{V}$?

Получен положительный ответ для любой комбинации разрешимых многообразий и многообразий ограниченного периода.

Теорема 3

Пусть силовские p-подгруппы конечной группы G лежат в многообразии $\mathfrak{B}_{p^{a_1}}\mathfrak{A}^{d_1}\cdots\mathfrak{B}_{p^{a_n}}\mathfrak{A}^{d_n}$. Тогда не-$p$-разрешимая длина группы G ограничена некоторой функцией от $\sum a_i + \sum d_i$.

Применение в одной редукционной теореме типа ОПБ-3

Полученные результаты применяются в одном из вариантов ОПБ-3.

Теорема 4

Пусть w — мультилинейный коммутатор. Предположим, что G — проконечная группа, в которой любая пронильпотентная подгруппа, порождённая значениями w, периодическая. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

Применение в одной редукционной теореме типа ОПБ-3

Полученные результаты применяются в одном из вариантов ОПБ-3.

Теорема 4

Пусть w — мультилинейный коммутатор. Предположим, что G — проконечная группа, в которой любая пронильпотентная подгруппа, порождённая значениями w, периодическая. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

В доказательстве Теоремы 1–3 применяются для ограничения неразрешимой и не-p-разрешимой длины соответствующих конечных групп.

Применение в одной редукционной теореме типа ОПБ-3

Полученные результаты применяются в одном из вариантов ОПБ-3.

Теорема 4

Пусть w — мультилинейный коммутатор. Предположим, что G — проконечная группа, в которой любая пронильпотентная подгруппа, порождённая значениями w, периодическая. Тогда вербальная подгруппа $w(G)$ локально конечна.

В доказательстве Теоремы 1–3 применяются для ограничения неразрешимой и не-p-разрешимой длины соответствующих конечных групп.

(Правда, затем ещё много работы, включая ограничения p-длины в (про-)p-разрешимом случае...)