Графы простых чисел и группы с факторизацией

Л.С. Казарин

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова
ул. Советская 14, 150000 Ярославль, Россия
e-mail:kazarin@uniyar.ac.ru

1 Графы, ассоциированные с множествами натуральных чисел

Если x – натуральное число, то $\pi(x)$ – множество простых делителей x. Если X множество натуральных чисел, то $\rho(X) = \cup_{x \in X} \pi(x)$. Определим граф $\Delta(X)$ с множеством вершин $\rho(X)$, причем верщины $p, q \in \rho(X)$ соединены ребром, если $pq \mid x$ для некоторого $x \in X$.

Другой граф $\Gamma(X)$ на множестве X возникает следующим образом. Вершины a и b из X соединены ребром, если наибольший общий делитель a и b отличен от единицы.

Следующее простое соображение показывает связь между двумя типами графов:

Лемма 1.1 (M.L.Lewis) *Пусть X – множество натуральных чисел и $a, b \in X$. Если $p \mid a, q \mid b$, то a и b лежат в одной компоненте графа $\Gamma(X)$ тогда и только тогда, когда p и q лежат в одной компоненте графа $\Delta(X)$. При этом расстояния $|d_{\Gamma(X)}(a, b) - d_{\Delta(X)}(p, q)| \leq 1$. Более того, в случае связности одного из графов диаметры этих графов отличаются не более, чем на единицу.*

Пример. $X = \{4, 6, 9\}$. Тогда $\Delta(X)$ имеет диаметр один, тогда как $\Gamma(X)$ имеет диаметр 2. Ш.Прэгер (2010) ввела двудольный граф $B(X)$ на том же множестве X, множество вершин которого является объединением вершин графов $\Gamma(X)$ и $\Delta(X)$. При этом вершина $p \in \rho(X)$ соединена с вершиной $a \in X$, если $p \mid a$.

2 Различные типы графов в теории конечных групп

Наверное первыми типами графов в теории конечных групп (исключая граф Кэли) были графы, введенные в обиход С.А. Чунихиным (30-е годы XX века) и графы Грюнберга - Кегеля, ставшие широко известными после работы Вильямса (1981). Работа Грюнберга -Кегеля осталась неопубликованной, а граф, получивший название графа Чунихина, появился в литературе около 1980 г.

Три множества арифметических параметров, связанных с конечной группой, вызывают постоянный интерес: размеры классов сопряженных элементов группы (обозначение $cs(G)$), степени неприводимых представлений ($cd(G)$) и множество $\omega(G)$ порядков элементов группы. В последнем случае вопросы о строении групп с заданным множеством $\omega(G)$ интересны и в случае бесконечных групп (проблемы Бернсайда).

Соответственно, имеем графы простых чисел, связанные с изучением указаных параметров. Граф Чунихина Γ_{ch} определен на множестве $X = cs(G)$ размеров классов сопряженных элементов. При этом два класса K и K' образуют ребро, если $(|K|, |K'|) \neq 1$. В оригинале рассматривался дуальный граф, где (K, K') – ребро, когда размеры классов K и K' взаимно просты. С.А.Чунихиным доказана непростота конечной группы, у которой имеется 3 класса сопряженных элементов попарно взаимно просты (т.е. в дополнительном графе имеется треугольник). Развивая подход С.А.Чунихина, автор (1980) нашел строение группы, имеющей два класса K и K' сопряженных элементов, у которой размер любого класса сопряженных элементов взаимно прост либо с $|K|$, либо с $|K'|$. В терминах графов этот результат первый, относящийся к группам с несвязным графом классов сопряженных элементов. Позже этот результат был передоказан Бертрамом, Герцогом и Манном (1990). В 1984 г. автор доказал, что у неабелевой простой группы граф классов является полным. Более общий результат получен Ц.Арадом и Е.Фисман (1987). Они доказали непростоту конечной группы, имеющей 2 элемента a и b, отличных от единицы, для которых $G = C_G(a)C_G(b)$. Заметим, что если $K = a^G$ и $K' = b^G$ имеют взаимно простые размеры, то

$$G = C_G(a)C_G(b).$$

Позже рассматривались группы с ограничениями на число вершин графа Чунихина (А.Бельтран, М.Х.Фелипе, А. и Р. Камины). К этому же кругу вопросов относится проблема Томпсона:

Верно ли, что набор размеров классов сопряженных элементов определяет конечную простую группу с точностью до изоморфизма?

3 Факторизации конечных групп

Согласно известной p^α-лемме Бернсайда, группа G, имеющая класс сопряженных элементов размера, равного степени простого числа, не может быть простой. Отсюда сразу вытекает разрешимость групп порядка $p^\alpha q^\beta$, где p и q - простые числа. Естественно, что в этом случае $G = C_G(x)P$, где x - представитель указанного класса, а P - силовская p-подгруппа G. Если конечная группа $G = AB$ - произведение абелевой группы A и группы B, то $Z(B)$ содержится в разрешимой нормальной подгруппе группы G (см. [3]). Отметим, что доказательство этого не зависит от классификации конечных простых неабелевых групп в случае, когда порядки A и B взаимно просты. Следующий результат [4], являющийся обобщением классических теорем Бернсайда, Кегеля и Виланда, использует классификацию простых неабелевых групп:

Теорема 3.1 *Пусть конечная группа $G = AB$ является произведением нильпотентной группы A и группы B. Тогда $Z(B)$ содержится в разрешимой нормальной подгруппе группы G.*

Другое обобщение получено в работах [11] – [14]. Напомним, что группа X называется π-разложимой (π-некоторое множество простых чисел, а π'-его дополнение во множестве всех простых чисел), если она представима в виде $X = O_\pi(X) \times O_{\pi'}(X)$. Например, любая конечная нильпотентная группа будет π-разложимой для любого подмножества π множества простых чисел.

Теорема 3.2 *Пусть конечная группа $G = AB$ является произведением π-разложимых групп A и B. Если π содержит только нечетные числа, то $O_\pi(A)O_\pi(B)$ -холлова π- подгруппа группы G.*

4 Графы простых чисел Кегеля - Грюнберга и Абе и Йиори

.

Граф Грюнберга-Кегеля $GK(G)$ группы G определен на множестве $X(G) = \omega(G)$ порядков элементов группы G и, в терминологии раздела 1, может рассматриваться как $\Delta(\rho(\omega(G))$. Две вершины p и q соединены ребром, если в группе G есть элемент порядка pq. Польза от знания этого графа конечной неабелевой простой группы для решения задач факторизации была выявлена при классификации композиционных факторов групп $G = AB$, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп A и B, даже до завершения описания А.С. Кондратьевым в [27] связных компонент неабелевых простых групп лиева типа четной характеристики (1986). Впоследствии этот граф был использован для распознавания конечных простых групп по их спектрам в работах многих математиков (при существенном вкладе екатеринбургских и новосибирских исследователей).

Существенным подспорьем было существование пар вершин, которые не могли быть соединены ребром в конкретных простых группах (независимых вершин). Позднее максимальные независимые множества вершин в конкретных простых неабелевых группах были найдены в [18] и [19] А.В. Васильевым и Е.П. Вдовиным.

Граф $\Gamma_{sol}(G)$ конечной группы G, введенный С. Абе и Н. Йиори (см. [27]), имеет то же множество вершин, что и $GK(G)$, но в этом графе две вершины p и q соединены ребром, если в G имеется разрешимая подгруппа, порядок которой делится на pq. Абе и Йиори доказали, что простая неабелева группа G всегда имеет связный граф $\Gamma_{sol}(G)$ и описали все простые группы, у которых граф $\Gamma_{sol}(G)$ имеет полный подграф на вершинах, являющихся нечетными простыми делителями. В [1] Б.Амберг, А.Каррокка и автор описали простые неабелевы группы G, у которых граф $\Gamma_{sol}(G)$ содержит полный подграф уже на вершинах, отличных от 2 и 3. Неожиданный результат из [1] следующий:

Теорема 4.1 *Пусть G - конечная простая неабелева группа, p - наибольший простой делитель ее порядка. Тогда найдется такая вершина $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, что она не соединена с p в графе $\Gamma_{sol}(G)$.*

Наибольшее количество независимых вершин в графе $GK(G)$ обозначим через $t(G)$, а наибольшее количество независимых вершин в графе $\Gamma_{sol}(G)$ обозначим $t_s(G)$. Очевидно, $1 \leq t_s(G) \leq t(G)$. В работе Б.Амберга и автора [2] определены все простые группы с $t_s(G) = 2$.

Теорема 4.2 *Пусть G - конечная простая неабелева группа, у которой дополнительный граф к графу $\Gamma_{sol}(G)$ не имеет треугольников. Тогда G изоморфна одной из следующих групп.*

1. *$L_n^{\epsilon}(q)$, где либо $n \leq 4$, или $n \leq 7, q = 2$, или $5 \leq n \leq 6, q_4 = 5$;*

2. *$PSp_4(q)$, $P\Omega_8^+(2), {}^3D_4(2), {}^2F_4(2)', G_2(3)$, или $Sp_6(2)$;*

3. *$M_{11}, M_{12}, M_{22}, HS, McL, J_2$ или $A_n, n \leq 10$.*

Здесь q_4 - наибольший простой делитель числа $q^2 + 1$, $\epsilon = \pm$ - знак, $L_n^+(q) = L_n(q)$ и $L_n^-(q) = U_n(q)$.

Отметим два простых следствия (см. [2]).

Теорема 4.3 *Пусть G – конечная группа, в которой каждая подгруппа нечетного простого порядка с-перестановочна по отношению к семейству* **S** *всех силовских подгрупп. Тогда разрешимый радикал $S(G)$ группы G нетривиален.*

Теорема 4.4 *Пусть G – конечная неабелева простая группа, содержащая такие разрешимые подгруппы A и B, что $\pi(G) = \pi(A) \cup \pi(B)$. Тогда G – одна из групп, перечисленных в Теореме 4.2. Если G – простая неабелева группа содержащая разрешимые подгруппы A и B, не входящие в список Теоремы 4.2, то найдется простое число $r \in \pi(G) \setminus (\pi(A) \cup \pi(B))$. Если неабелева простая группа $G = ABA$ с разрешимыми подгруппами A и B не изоморфна одной из групп теоремы 4.2, то существует простое число $r \in \pi(G) \setminus (\pi(A) \cup \pi(B))$.*

Теорема 4.4 дает возможность ревизовать доказательство основного результата из [10]. В минимальном контрпримере к теореме о том, что неабелевы композиционные факторы группы, представимой в виде произведения двух разрешимых подгрупп, принадлежат списку $\{U_3(8), L_4(2), M_{11}, PSp_4(3), L_2(q)(q > 3), L_3(q), (q < 9)\}$, цоколь N группы G является прямым произведением изоморфных простых групп $N_i(i = \overline{1,k})$ со свойством $\pi(N_i) \subseteq \pi(N_i \cap A) \cup \pi(N_i \cap B)$. Но тогда N_i изоморфны одной из групп теоремы 4.2. Завершение доказательства из [10] теперь существенно упрощается.

В [18] найдены значения параметра $t(G)$, практически, для всех простых неабелевых групп.

Аналогичная работа проделана в [2], где найдены значения числа $t_s(G)$ для всех простых групп.

5 Силовские графы и их применения

.

Другой класс графов изучался в работе [15] автора вместе с А. Мартинес - Пастор и М.Д. Перес - Рамос. У графа $\Gamma_A(G)$ вершинами являются все простые делители порядка группы G. Две вершины p и q в графе образуют ребро, если существует такая силовская p-подгруппа P группы G, что q делит $|N_G(P) : PC_G(P)|$. Основной результат, полезный для конструирования некоторых (нормализаторно - замкнутых) формаций групп, следующая.

Теорема 5.1 *Пусть G - конечная почти простая неабелева группа. Тогда граф $\Gamma_A(G)$ связен.*

Группа G называется почти простой, если $L \leq G \leq Aut(L)$, где L - простая неабелева группа.

Основная цель введения этого типа графов – нахождение классов групп, замкнутых относительно взятия нормализаторов. Более точно, пусть G – группа, и G_p – ее силовская p-подгруппа. Определим для произвольного класса $\mathcal{X}$ отображение N, ставящее классу $\mathcal{X}$ класс $N\mathcal{X}$ по следующему правилу:

$$N\mathcal{X} = \{G \mid N_G(G_p) \in \mathcal{X} \text{ для любого } p \in \pi(G).$$

Одна из мотиваций направления – теорема Глаубермана, утверждающая, что группа G примарна, если таковым является нормализатор всякой ее силовской подгруппы. Бьянчи, Джилло Берта Маури и Гаук доказали, что группа будет нильпотентной, если нормализатор вякой ее силовской подгруппы нильпотентен.

Определим симметрическое и рефлексивное отношение на множестве $\pi(G)$ по следующему правилу. Поставим каждому элементу $p \in \pi(G) = \pi$ подмножество $\pi(p)$ в $\pi(G)$ со следующими свойствами:

1. $p \in \pi(p) \subseteq \pi$.
2. Для всякого $q \in \pi(p)$ выполнено $p \in \pi(q)$.

С указанным множеством простых чисел ассоциируется следующий класс групп. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, локально определенная с помощью формационного функтора f следующим образом:

$$f(p) = \mathcal{E}_{\pi(p)} \text{для } p \in \pi, \ f(q) = \emptyset \text{ для } q \notin \pi.$$

Такая формация называется *накрывающей*.

С этой формацией связано множество простых чисел Σ, являющееся максимальным независимым подмножеством графа, определенного выше. Рассматриваются следующие формации: $\mathcal{U} = \cup_{\sigma \in \Sigma} E^n_\sigma \cap \mathcal{E}_\pi$ и $\mathcal{V} = \cup_{\sigma \in \Sigma} S^n_\sigma \cap \mathcal{E}_\pi$. Легко показать, что $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Один из основных результатов в [16] (Л.Казарин, А.Мартинес - Пастор и М.-Д.Перес - Рамос) следующий:

Теорема 5.2 *Накрывающая формация $\mathcal{F}$ обладает свойством Шеметкова (все критические $\mathcal{F}$ -группы являются либо циклическими, либо группами Шмидта) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} = \mathcal{U} = \mathcal{V}$.*

Свойство Шеметкова для формации оказывается важным для нахождения новых классов нормализаторно замкнутых формаций:

Теорема 5.3 *Если накрывающая формация $\mathcal{F}$ обладает свойством $N\mathcal{F} = \mathcal{F}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{U} = \mathcal{V}$.*

6 ABA-группы

1^0. Группы этого типа начали изучать Д.Горенстейн и Херстейн (1959). Они рассматривали произведения этого вида с циклическими подгруппами A и B. В случае, когда порядки A и B взаимно просты, доказана разрешимость.

М.Гутерман (1969) рассмотрел случай абелевых A и B и доказал разрешимость G в случае, когда A и B взаимно простых порядков и B нечетного порядка. Классификация простых групп с абелевой силовской использовалась.

Я.П.Сысак доказал разрешимость $G = ABA$ для ряда случаев (1982 - 1988). Например, когда A абелева, B – примарная циклическая и порядки A и B взаимно просты.

Д.Загорин и Л.Казарин (1996) анонсировали разрешимость группы $G = ABA$ для случая абелевой A и циклической B. Кроме того, в диссертации Д.Загорина показано, что только группы $L_2(q)$ для четного q могут быть простыми неабелевыми группами, допускающими ABA -факторизацию с абелевыми A и B.

Независимо, но из других соображений, описание простых ABA-групп с абелевыми факторами A и B получил Е.П.Вдовин (1999).

Недавно Ш.Прэгер и Х.Алави выдвинули программу описания ABA факторизаций конечных групп, руководствуясь необходимостью изучения некоторых комбинаторных объектов.

2^0. Каждая 2-транзитивная группа подстановок будет ABA-группой, где A – стабилизатор точки, а B – циклическая группа (порядка 2).

Другие важные примеры доставляют группы лиева типа, представимые в виде BNB, где B – борелева подгруппа, а N подгруппа из нормализатора подгруппы Картана C. Учитывая, что $W = N/C$ – это группа Вейля, можно записать $G = BWB$ и $G = UNU$, где U – унипотентная подгруппа.

Простейший пример $A_5 = C_5V_4C_5$. Аналогично для любой из групп $L_2(2^n)$. Другая факторизация $G = A_5 = V_4D_6V_4$.

Рассмотрим еще одну факторизацию $G = S_5 = D_8C_6D_8$. То есть, группа A есть 2-группа, а B -циклическая.

Следующий пример найден Я.Сысаком. $G = S_6 = ABA$, где A – силовская 2-подгруппа G, а B – диэдральная группа.

Еще один важный класс примеров описан Д.Г. Хигманом и Дж.Е. МакЛафлином. Пусть G – группа автоморфизмов флаг-транзитивной геометрии, где A и B – стабилизаторы точки и прямой соответственно (флаг – пара инцидентных точки и прямой). Хигманом и МакЛафлином показано, что такая группа автоморфизмов $G = ABA$ в точности, когда каждая пара точек инцидентна по меньшей мере, одн прямой.

3^0. Факторизация $G = ABA$ называется **невырожденной**, если $G \neq AB$.

Следующий полезный пример принадлежит Ш.Прагер (1997):

Теорема 6.1 *Пусть $G = ABA$ – конечная группа с невырожденной факторизацией. Тогда*

$$|G : B| \leq \frac{|A|^2}{|A \cap B|^2} - \frac{|A|}{|A \cap B|} + 1$$

с равенством тогда и только тогда, когда группа G действует как флаг-транзитивная группа коллинеаций проективной плоскости.

Стандартный пример для такой ситуации – группа $G = PGL_3(q)$ действующая на Дезарговом пространстве $PG(2, q)$, где A и B – несопряженные параболические подгруппы.

4^0. Имеются следующие полезные критерии ABA-факторизации.

Определим $\Omega_A = \cup_{g\in G} Ag$ и $\Omega_B = \cup_{g\in G} Bg$

1. Хигман и МакЛафлин (1961). Множество $\{Ab \mid b \in B\}$ нетривиально пересекается с каждой A- орбитой на в Ω_A.

2. Саксл (2010). Множество $\{Ba \mid a \in A\}$ имеет ограниченный сдвиг (movement) при действии G на Ω_B.

5^0. Среди спорадических простых групп следующие группы обладают факторизацией вида $G = AB$. Это группы
$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, HS, Ru, He, Suz, Fi_{23}, Co_1$.

Кроме того, имеется 2-транзитивная группа Co_3. Заметим, что группы, имеющие подстановочное представление ранга 3, часто оказываются ABA-группами. Совместно с Д.Сахаровым и И.Рассадиным автору удалось доказать существование ABA-факторизаций для групп J_2, McL, HS, Ru и Suz с собственными подгруппами A и B.

6^0. Совместно с Б.Амбергом в [6] доказаны следующие теоремы.

Теорема 6.2 *Пусть $G = ABA$ – конечная группа с абелевой подгруппой A и циклической подгруппой B. Тогда G разрешима.*

Теорема 6.3 *Пусть $G = ABA$ – конечная группа с нильпотентной подгруппой A нечетного порядка и циклической подгруппой B. Если $(|A|, |B|) = 1$, то G разрешима.*

7 Арифметические свойства групп

1^0. Согласно знаменитой теореме Брауэра - Фаулера [8], конечная простая неабелева группа G всегда имеет собственную подгруппу порядка не меньше, чем $|G|^{1/3}$. В работе [24] установлено, что любая конечная простая неабелева группа G имеет неприводимый характер степени, большей $|G|^{1/3}$. Кроме того, если G отлична от знакопеременной группы или группы Матье M_{22}, всегда найдутся такие неприводимые характеры χ_1, χ_2, χ_3 группы G, что $|G|$ делит $\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)$. И.А. Сагиров доказал, что для группы A_n, где $14 \le n \le 30$, это свойство также выполнено. Позднее С.В. Поляков довел границу до $14 \le n \le 97$. Похоже, что утверждение верно и для всех простых знакопеременных групп, за исключением $n = 7$ и $n = 13$.

2^0. Следующая серия вопросов связана с работой Юджина Вигнера [20]. Вигнер называет группу G просто приводимой (SR-группой), если выполнены два условия:

1) Любой элемент группы G сопряжен со своим обратным;

2) Для любых двух неприводимых представлений ϕ и ψ их тензорное представление имеет в разложении по неприводимым представлениям группы G кратности, не превосходящие единицы.

В числе других результатов им было получено следующее удивительное неравенство:

$$\sum_{g \in G} |C_G(g)|^2 \geq \sum_{g \in G} \zeta(g)^3,$$

где $\zeta(g)$ - число корней квадратных из g в группе G. При этом равенство выполнено в точности, когда G является SR-группой.

С.П. Струнковым поставлен естественный вопрос: верно ли что конечные SR-группы разрешимы?

В работе [25], изучая минимальный контрпример, авторы свели проблему к ситуации, когда все композиционные простые неабелевы факторы группы принадлежат множеству $\{A_5, A_6\}$ знакопеременных групп. Последний трудный случай был исключен в [26]. При этом оказалось, что достаточно рассматривать лишь тензорные квадраты неприводимых представлений, отказавшись от условия 1) Вигнера. Соответствующие группы названы в [25] ASR-группами.

В результате исследования минимальный контрпример удалось исключить. Тем самым, получена следующая теорема:

Теорема 7.1 *Пусть G - конечная ASR-группа. Тогда G разрешима.*

На самом деле, теорема также верна, если вместо тензорных квадратов представлений рассматривать тензорные произведения неприводимого представления и его контраградиентного представления. В частности, конечные SR-группы оказались разрешимы. Теорема 7.1 дает также продвижение в решении задачи Я.Саксла (9.56 из „Коуровской тетради“)

В кандидатской диссертации В.В. Янишевского (2006 г.) найдены все конечные несверхразрешимые группы порядка, меньшего, чем 2000. Е.И. Чанковым доказана следующая замечательная теорема, сводящая изучение сверхразрешимых SR-групп к изучению 2-групп.

Теорема 7.2 *Пусть G - конечная сверхразрешимая SR-группа, S – ее силовская 2-подгруппа. Тогда $O(G)$ - абелева группа и $G = O(G)S$. При этом $\Phi(S)$ нормальна в G и $G/\Phi(S)$ - прямое произведение групп диедрального типа.*

Группы порядка 2, разумеется, также можно считать группами диедрального типа. Среди других результатов, вошедших в кандидатскую диссертацию Чанкова (2010 г.), отметим следующее наблюдение. Среди всех 2-групп порядка не выше 2^8 класса нильпотентности 2 (их около 32000) всего лишь 70 не являются ASR-группами. Наконец, группа нечетного порядка может быть ASR-группой только когда она абелева.

Недавно С.В. Поляков полностью описал композиционные факторы конечных групп, у которых коэффициенты в разложении тензорных произведений квадратов неприводиводимых представлений не превосходят 2. Кроме того, им найдены оценки структурных констант в разложениях тензорных квадратов всех конечных простых групп.

Используя неравенство Вигнера, автор совместно с Б.Амбергом в [5] доказал следующий аналог теоремы Брауэра - Фаулера:

Теорема 7.3 *Пусть G - конечная простая неабелева группа и τ - любая ее инволюция. Если $|G| > 2|C_G(\tau)|^3$, то G имеет собственную подгруппу порядка, большего $|G|^{1/2}$. При этом если $|G| > |C_G(\tau)|^3$, то $|G| < k(G)^3$, где $k(G)$ – число классов сопряженных элементов G.*

Классификация конечных простых групп здесь не использовалась. С применением одного результата Янишевского (опирающегося на классификацию конечных простых групп) получается, что в любой простой неабелевой группе G порядок централизатора **любой** инволюции не меньше, чем $|G|^{1/3}$. Удивительно, что теорема Брауэра - Фаулера была доказана много позже статьи Вигнера.

Отметим еще одну оценку порядка неабелевой простой группы через число элементов, содержащихся в классе сопряженных элементов.

Теорема 7.4 *Пусть G - конечная простая неабелева группа и $x \neq 1$ - любой ее элемент. Пусть $m = |G : C_G(x)|$ Тогда $|G| < 2^m$. Если G – группа, порожденная классом сопряженных элементов порядка n и $|G : C_G(x)| = m$, то $|G| < n^m$.*

8 Некоторые нерешенные вопросы

1: Как найти все неабелевы M-группы G, для которых сумма кубов неприводимых представлений существенно ниже $|G|\log_2|G|$?

2: Верно ли, что нильпотентная длина конечной SR-группы ограничена?

3: Пусть $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ – размеры классов сопряженных элементов группы G. Можно ли распознать свойство разрешимости группы по этой информации?

4: Верно ли, что знакопеременная группа A_n степени $n > 13$ имеет три неприводимых характера χ_1, χ_2, χ_3, для которых число $n!$ делит $\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)$?

5: Как устроены разрешимые группы, у которых число различных размеров классов сопряженных элементов не превосходит 4?

Список литературы

[1] *Amberg B., Carocca A., Kazarin L.S.* Criteria for the solubility and non-simplicity of finite groups //J. Algebra, 285, 2005, P. 58 - 72.

[2] *Amberg B., Kazarin L.S.* On the soluble graph of a finite simple group//Communications in Algebra, 41 (2013) 2297 – 2309.

[3] *Amberg B., Kazarin L.S.* Factorizations of groups and related topics //Science in China, Ser. A, Math., 52, N2, 2009, P. 217 - 230.

[4] *Amberg B., Kazarin L.S.* On the product of a nilpotent group and a group with non-trivial center //J. Algebra, 315, 2007, P. 69 - 95.

[5] *Amberg B., Kazarin L.S.* Large subgroup of a finite group of even order //Proc. AMS , 140, 2012, P. 65 - 68.

[6] *Amberg B., Kazarin L.S.* ABA-groups with cyclic subgroup B// Тр. ИММ УрО РАН, 18, 2012, С. 10–22.

[7] *Berkovich Ya.G., Kazarin L.S.* Indices of elements and normal structure of a finite group // J. Algebra, 283, 2005, P. 564 -583.

[8] *Brauer R., Fowler K.A.* On groups of even order// Ann. Math. 62, 1955, P. 565 - 583.

[9] *Camina A.R., Camina R.D.* Implications of conjugacy class size //J. Group Theory, 1, 1998, P. 257 - 269.

[10] *Kazarin L.S* On groups which are the products of two solvable subgroups //Communications in Algebra, V.14 (1986) P.1001 -1066/

[11] *Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.* On the product of a π-group and a π-decomposable group // J. Algebra, 315, 2007, P. 640 - 653.

[12] *Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.* On the product of two π-decomposable group // Publ. Math., 53, 2009, P. 439 - 456.

[13] *Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.* A reduction theorem for a conjecture on products of two π-decomposable groups// J.Algebra V.379, 2013, P.301 – 313.

[14] *Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.* On the product of two π-decomposable group // Rev. Vath. Iberoam., 53, 2009, P. 439 - 456.

[15] *Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.* On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers // Israel J.Math. V.188, 2011, P.251 – 271.

[16] *Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.* On Sylow normalizers of finite groups// J.Algebra and its applications DOI: 10.1142/S9219498813501168

[17] *Liebeck M.W., Praeger C. E., Saxl Y.* The maximal factorization of the finite simple groups and their automorphism groups, Providence, RI: Memoirs of the AMS, vol. 86, no 432, 1990.

[18] *Vasiliev A.V., Vdovin E.P.* An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group// Algebra and logic 44, 2005, P. 381 - 406.

[19] *Vasiliev A.V., Vdovin E.P.* Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group// Algebra and logic 50, 2011, P. 291 – 322.

[20] *Wigner E.P.* On representations of finite groups // Amer. J. Math. V.63, 1941, P. 57 -63.

[21] *Williams J.S.* Prime graph components of finite groups // J.Algebra V.69, 1981, P. 487 -513.

[22] *Казарин Л.С.* Исследования по теории групп в Ярославском университете// Математика в Ярославском университете. Ярославль: ЯрГУ, 1996, С. 93 - 106.

[23] *Казарин Л.С.* Конечные группы с факторизацией // Труды Ин.-та математики, т.16, №1: Минск, 2008, С. 40 - 46.

[24] *Казарин Л.С., Сагиров И.А.* О степенях неприводимых характеров конечных простых групп //Труды Ин.-та Математики и Механики УрО РАН, т7, №2: Екатеринбург, 2001, С. 113 - 123.

[25] *Казарин Л.С., Янишевский В.В.* О конечных просто приводимых группах // Алгебра и анализ, Т.19, №6, 2007, С. 86 - 117.

[26] *Казарин Л.С., Чанков Е.И.* Конечные просто приводимые группы разрешимы// Математический сборник, 201:5, № 2010, С. 27 - 40.

[27] *Кондратьев А.С.* ОО компонентах графа простых чисел конечных простых групп//Матем. сб., 180,1989, С. 787–797.

[28] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь (15-е издание)// Новосибирск, Новосибирский гос. ун-т., 2002.