Размерные функции над алгебраическими системами

В. Н. Ремесленников

15 ноября 2013 г.

1. Определение размерной функции для частично упорядоченных множеств.
2. О размерности алгебраических множеств над нётеровыми по уравнениям алгебраическими системами (по материалам совместной работы с Э. Ю. Данияровой и А. Г. Мясниковым)
3. Размерная функция для множества регулярных языков в свободной группе конечного ранга (по материалам совместной работы с Е. В. Френкель).

Пусть M — частично упорядоченное множество,
A — абелева линейно упорядоченная группа,
A^+ — полугруппа её неотрицательных элементов.

Размерная функция

Функцию $d\colon M \to A^+$ будем называть A-размерной функцией для M, если выполнено следующее условие:

$$\forall\, x, y \in M \text{ если } x < y \text{ в } M, \text{ то } d(x) < d(y) \text{ в } A.$$

О размерности алгебраических множеств над нётеровыми по уравнениям алгебраическими системами

- E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov
  Unification theorems in algebraic geometry
  Algebra and Discrete Mathematics, 1, 2008, 80–112
- Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников
  Ал. геом. над ал. системами II: Основания
  Фундамент. и прикл. матем., 17:1, 2012, 65–106
- E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov
  Alg. geom. over alg. structures III: Eq. Noeth. prop. and comp.
  Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 35, 2011, 35–68
- Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников
  Ал. геом. над ал. сист. IV: Экврац. области и ко-области
  Алгебра и логика, 49:6, 2010, 765–808
- Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников
  Ал. геом. над ал. сист. V: Случай произвольной сигнатуры
  Алгебра и логика, 51:1, 2012, 41–60

Пусть k — алгебраически замкнутое поле.

Размерность в классической алгебраической геометрии обладает следующими свойствами:

(I) Существование нескольких эквивалентных способов вычисления размерности $\dim(Y)$ алгебраического множества Y над полем k:

1. $\dim(Y) =$ **размерности топологического пространства Y с индуцированной топологией Зарисского;**
2. $\dim(Y) =$ размерности Крулля координатного кольца $k[Y]$;
3. если Y — неприводимое алгебраическое множество, то $\dim(Y) =$ степени трансцендентности поля рациональных функций $k(Y)$ над полем k.

Размерность в классической алгебраической геометрии обладает следующими свойствами:

(II) Если $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ — приводимое алгебраическое множество, то

$$\dim(Y) = \max\{\dim(Y_1), \ldots, \dim(Y_m)\}.$$

(III) Строгая изотонность: для любой пары неприводимых алгебраических множеств

$$Y \subsetneq Z \quad \longrightarrow \quad \dim(Y) < \dim(Z).$$

(IV) Размерность любого непустого алгебраического множества оказывается целым неотрицательным числом, так что по размерности можно вести математическую индукцию.

(V) Для двух неприводимых алгебраических множеств Y_1, Y_2 над k верно, что

$$\dim(Y_1 \times Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2).$$

$\dim(Y) = \sup\{n\} =$ точной верхней грани длин строго убывающих цепочек

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_n$$

неприводимых алгебраических подмножеств в Y.

Самое естественное обобщение:

$\dim(Y) = \sup\{\lambda\} =$ точной верхней грани длин строго убывающих цепочек

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_\lambda$$

неприводимых алгебраических подмножеств в Y.

$Y \subsetneq Z$ — неприводимые алгебраические множества над нётеровой по уравнениям алгебраической системой $\mathcal{A}$.

$$\dim(Y) = \dim(Z) = \omega$$

Для любого натурального числа n существует цепочка

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_n$$

различных неприводимых подмножеств в Y.

Определить размерность, удовлетворяющую свойствам (I')–(V'), но со значениями в области порядковых чисел, возможно только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем.

Теорема

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка L нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда она обладает следующими двумя свойствами:

N_1: любая строго убывающая цепочка неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{A}$ конечна;

N_2: любое непустое алгебраическое множество над $\mathcal{A}$ представимо в виде конечного объединения неприводимых алгебраических подмножеств.

N_1: $Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_n$

N_2: $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$

Топологическая размерность для нётеровых по уравнениям алгебраических систем

Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система.

Определим M — частично упорядоченное множество:

- Y — неприводимое множество над $\mathcal{A}$ $\quad\longrightarrow\quad$ $m_Y \in M$;
- $m_Y < m_Z \quad\longleftrightarrow\quad Y \subsetneq Z$.

Получаем, что M — артиново частично упорядоченное множество.

Топологическая размерность для нётеровых по уравнениям алгебраических систем

Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система.

Определим M — частично упорядоченное множество:

- Y — неприводимое множество над $\mathcal{A}$ $\quad\longrightarrow\quad$ $m_Y \in M$;
- $m_Y < m_Z \quad\longleftrightarrow\quad Y \subsetneq Z$.

Получаем, что M — артиново частично упорядоченное множество.

Топологическая размерность для нётеровых по уравнениям алгебраических систем

Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система.

Определим M — частично упорядоченное множество:

- Y — неприводимое множество над $\mathcal{A}$ $\quad\longrightarrow\quad$ $m_Y \in M$;
- $m_Y < m_Z \quad\longleftrightarrow\quad Y \subsetneq Z$.

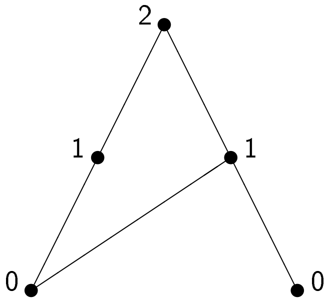
Получаем, что M — артиново частично упорядоченное множество.

Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система.

Определим M — частично упорядоченное множество:

- Y — неприводимое множество над $\mathcal{A}$ $\longrightarrow$ $m_Y \in M$;
- $m_Y < m_Z$ $\longleftrightarrow$ $Y \subsetneq Z$.

Получаем, что M — артиново частично упорядоченное множество.

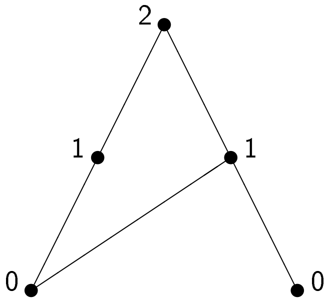


Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система.

Определим M — частично упорядоченное множество:

- Y — неприводимое множество над $\mathcal{A}$ $\quad\longrightarrow\quad$ $m_Y \in M$;
- $m_Y < m_Z \quad\longleftrightarrow\quad Y \subsetneq Z$.

Получаем, что M — артиново частично упорядоченное множество.



Пусть k — алгебраически замкнутое поле.

Размерность в классической алгебраической геометрии обладает следующими свойствами:

(I) Существование нескольких эквивалентных способов вычисления размерности $\dim(Y)$ алгебраического множества Y над полем k:

1. $\dim(Y) =$ **размерности топологического пространства Y с индуцированной топологией Зарисского;**
2. $\dim(Y) =$ размерности Крулля координатного кольца $k[Y]$;
3. если Y — неприводимое алгебраическое множество, то $\dim(Y) =$ степени трансцендентности поля рациональных функций $k(Y)$ над полем k.

Размерность в классической алгебраической геометрии обладает следующими свойствами:

(II) Если $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ — приводимое алгебраическое множество, то

$$\dim(Y) = \max\{\dim(Y_1), \ldots, \dim(Y_m)\}.$$

(III) Строгая изотонность: для любой пары неприводимых алгебраических множеств

$$Y \subsetneq Z \quad \longrightarrow \quad \dim(Y) < \dim(Z).$$

(IV) Размерность любого непустого алгебраического множества оказывается целым неотрицательным числом, так что по размерности можно вести математическую индукцию.

(V) Для двух неприводимых алгебраических множеств Y_1, Y_2 над k верно, что

$$\dim(Y_1 \times Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2).$$

Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система.

Определённая выше размерность обладает следующими свойствами:

(I') Существование нескольких эквивалентных способов вычисления размерности $\dim(Y)$ неприводимого алгебраического множества Y над $\mathcal{A}$:

1. $\dim(Y) =$ **размерности топологического пространства Y с индуцированной топологией Зарисского;**
2. $\dim(Y) =$ радикальной размерности радикала $\mathrm{Rad}(Y)$;
3. $\dim(Y) =$ проективной размерности координатной алгебры $\Gamma(Y)$.

Определённая выше размерность обладает следующими свойствами:

(II) Если $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ — приводимое алгебраическое множество, то положим

$$\dim(Y) = \max\{\dim(Y_1), \ldots, \dim(Y_m)\}.$$

(III) Строгая изотонность: для любой пары неприводимых алгебраических множеств

$$Y \subsetneq Z \quad \longrightarrow \quad \dim(Y) < \dim(Z).$$

(IV') Размерность любого непустого алгебраического множества оказывается порядковым числом (ординалом), так что по размерности можно вести математическую индукцию.

(V') Для двух неприводимых алгебраических множеств Y_1, Y_2 над $\mathcal{A}$ верно, что

$$\dim(Y_1 \times Y_2) \geqslant \dim(Y_1) + \dim(Y_2).$$

Пусть λ — некоторый ординал и

M_λ — множество всех ординалов, не превосходящих λ;

$\mathcal{M}_\lambda = \langle M_\lambda;\ P_\alpha, \alpha \leqslant \lambda \rangle$ — алгебраическая система,

$$P_\alpha(x) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad x \leqslant \alpha.$$

Алгебраическая система $\mathcal{M}_\lambda$ нётерова по уравнениям. Алгебраическими множествами над $\mathcal{M}_\lambda$, отвечающими уравнениям от одной переменной, являются множества

$$M_\alpha = \{x \mid x \leqslant \alpha\}, \quad \alpha \leqslant \lambda,$$

и только они, причём все эти множества неприводимы. Таким образом,

$$\dim(M_\alpha) = \alpha.$$

1. Конструктивного определения размерности мало. Как дать теоретико-множественное определение?
2. Как обосновать то, что для алгебраических систем, не являющихся нётеровыми по уравнениям, не существует “хорошей” размерности?
3. Можно ли для таких систем определить хотя бы какую-то размерность, быть может, “похуже”?

Ответ:

Размерные функции

Вопросы

1. Конструктивного определения размерности мало. Как дать теоретико-множественное определение?
2. Как обосновать то, что для алгебраических систем, не являющихся нётеровыми по уравнениям, не существует “хорошей” размерности?
3. Можно ли для таких систем определить хотя бы какую-то размерность, быть может, “похуже”?

Ответ:
Размерные функции

Пусть M — частично упорядоченное множество,
A — абелева линейно упорядоченная группа,
A^+ — полугруппа её неотрицательных элементов.

Размерная функция

Функцию $d\colon M \to A^+$ будем называть A-размерной функцией для M, если выполнено следующее условие:

$$\forall\, x, y \in M \text{ если } x < y \text{ в } M, \text{ то } d(x) < d(y) \text{ в } A.$$

Множество A с операцией " $+$ " и линейным порядком " $\leqslant$ " называется линейно упорядоченной абелевой группой, если

1. $\langle A; +\rangle$ — абелева группа;
2. $\langle A; \leqslant\rangle$ — линейно упорядоченное множество;
3. $\forall\ a, b, c \in A \qquad a \leqslant b \quad \longrightarrow \quad a + c \leqslant b + c.$

Полугруппа A^+ всех неотрицательных элементов A есть множество

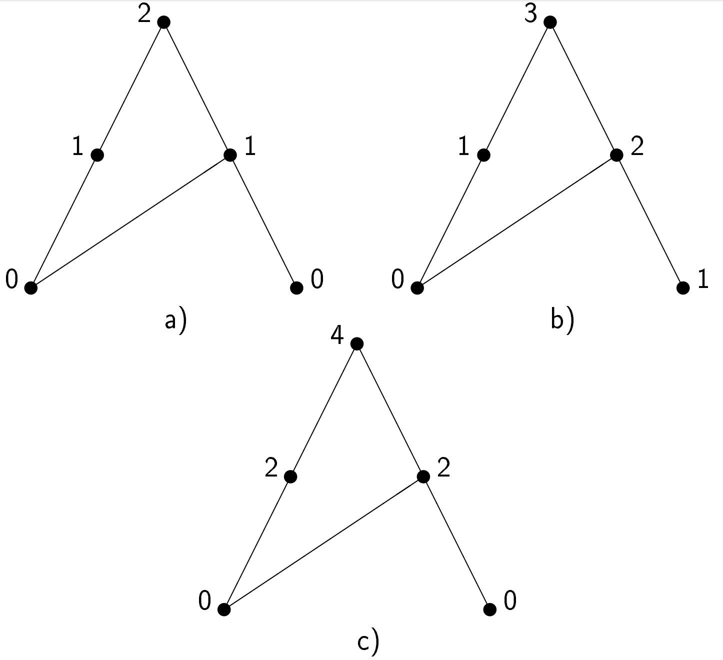
$$A^+ = \{a \in A \mid 0 \leqslant a\}.$$

Интерпретация ординалов в группе $\mathbb{Z}^h$

Группа $\overrightarrow{\mathbb{Z}^h}$ с правым лексикографическим порядком является линейно упорядоченной абелевой группой. В ней естественным образом интерпретируются все ординалы до ω^n:

$$
\begin{array}{ccc}
0 & \to & (0,0,0,0,\ldots,0), \\
1 & \to & (1,0,0,0,\ldots,0), \\
 & \ldots & \\
\omega & \to & (0,1,0,0,\ldots,0), \\
\omega+1 & \to & (1,1,0,0\ldots,0), \\
 & \ldots & \\
2\omega & \to & (0,2,0,0,\ldots,0), \\
 & \ldots & \\
\omega^2 & \to & (0,0,1,0,\ldots,0), \\
 & \ldots & \\
\omega^{n-1} & \to & (0,0,0,\ldots,0,1), \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Множественность размерных функций



Ординально плотные размерные функции

Размерную функцию $d\colon M \to \overrightarrow{\bigoplus\limits_{i\in I}} \mathbb{Z}^{(i)}{}^{+}$ будем называть **ординально плотной**, если для любого $m \in M$ значение $d(m)$ равно наименьшему ординалу λ, удовлетворяющему условию $\lambda > d(x)$ для всех $x < m$.

Теорема

Для любого артинова частично упорядоченного множества M существует и единственная ординально плотная размерная функция.

Вопрос: Как дать теоретико-множественное определение размерности, построенной конструктивно для артинова частично упорядоченного множества?

Ответ: Ординально плотная размерная функция со значениями в линейно упорядоченной абелевой группе $\overrightarrow{\bigoplus\limits_{i\in I}} \mathbb{Z}^{(i)}$.

Ординально плотные размерные функции

Размерную функцию $d\colon M \to \overrightarrow{\bigoplus_{i\in I}}\mathbb{Z}^{(i)+}$ будем называть ординально плотной, если для любого $m \in M$ значение $d(m)$ равно наименьшему ординалу λ, удовлетворяющему условию $\lambda > d(x)$ для всех $x < m$.

Теорема

Для любого артинова частично упорядоченного множества M существует и единственная ординально плотная размерная функция.

Вопрос: Как дать теоретико-множественное определение размерности, построенной конструктивно для артинова частично упорядоченного множества?

Ответ: Ординально плотная размерная функция со значениями в линейно упорядоченной абелевой группе $\overrightarrow{\bigoplus_{i\in I}}\mathbb{Z}^{(i)}$.

Размерную функцию $d\colon M \to \overrightarrow{\bigoplus_{i\in I}}\mathbb{Z}^{(i)+}$ будем называть **ординально плотной**, если для любого $m \in M$ значение $d(m)$ равно наименьшему ординалу λ, удовлетворяющему условию $\lambda > d(x)$ для всех $x < m$.

Теорема

Для любого артинова частично упорядоченного множества M существует и единственная ординально плотная размерная функция.

Вопрос: Как дать теоретико-множественное определение размерности, построенной конструктивно для артинова частично упорядоченного множества?

Ответ: Ординально плотная размерная функция со значениями в линейно упорядоченной абелевой группе $\overrightarrow{\bigoplus_{i\in I}}\mathbb{Z}^{(i)}$.

Ординально плотные размерные функции

Размерную функцию $d\colon M \to \overrightarrow{\bigoplus_{i\in I}}\mathbb{Z}^{(i)+}$ будем называть ординально плотной, если для любого $m \in M$ значение $d(m)$ равно наименьшему ординалу λ, удовлетворяющему условию $\lambda > d(x)$ для всех $x < m$.

Теорема

Для любого артинова частично упорядоченного множества M существует и единственная ординально плотная размерная функция.

Вопрос: Как дать теоретико-множественное определение размерности, построенной конструктивно для артинова частично упорядоченного множества?

Ответ: Ординально плотная размерная функция со значениями в линейно упорядоченной абелевой группе $\overrightarrow{\bigoplus_{i\in I}}\mathbb{Z}^{(i)}$.

Вопрос: Как обосновать то, что только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует "хорошая" теория размерности?

Размерную функцию $d\colon M \to A^{+}$ будем называть **ординальной**, если $d(M)$ — вполне упорядоченное множество.

Теорема

Частично упорядоченное множество M обладает ординальной размерной функцией тогда и только тогда, когда оно артиново.

Ответ: "Хорошая" теория размерности для $\mathcal{A} =$
$=$ ординальная размер. функция для $M +$
$\{N_2 : \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$= \{N_1 : \ Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_n\} + \{N_2 : \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$=$ нётеровость по уравнениям для $\mathcal{A}$.

Вопрос: Как обосновать то, что только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует "хорошая" теория размерности?

Размерную функцию $d\colon M \to A^+$ будем называть ординальной, если $d(M)$ — вполне упорядоченное множество.

Теорема

Частично упорядоченное множество M обладает ординальной размерной функцией тогда и только тогда, когда оно артиново.

Ответ: "Хорошая" теория размерности для $\mathcal{A}$ =
= ординальная размер. функция для M +
$\{N_2: \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\}$ =
$= \{N_1: \ Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_n\} + \{N_2: \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
= нётеровость по уравнениям для $\mathcal{A}$.

Ординальные размерные функции

Вопрос: Как обосновать то, что только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует “хорошая” теория размерности?

Размерную функцию $d\colon M \to A^{+}$ будем называть ординальной, если $d(M)$ — вполне упорядоченное множество.

Теорема

Частично упорядоченное множество M обладает ординальной размерной функцией тогда и только тогда, когда оно артиново.

Ответ: “Хорошая” теория размерности для $\mathcal{A} =$
$=$ ординальная размер. функция для $M +$
$\{N_2 :\ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$= \{N_1 :\ Y_0 \supsetneqq Y_1 \supsetneqq \ldots \supsetneqq Y_n\} + \{N_2 :\ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$=$ нётеровость по уравнениям для $\mathcal{A}$.

Ординальные размерные функции

Вопрос: Как обосновать то, что только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует "хорошая" теория размерности?

Размерную функцию $d \colon M \to A^+$ будем называть ординальной, если $d(M)$ — вполне упорядоченное множество.

Теорема

Частично упорядоченное множество M обладает ординальной размерной функцией тогда и только тогда, когда оно артиново.

Ответ: "Хорошая" теория размерности для $\mathcal{A} =$
$=$ ординальная размер. функция для M $+$
$\{N_2 : \; Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$= \{N_1 : \; Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_n\} + \{N_2 : \; Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$=$ нётеровость по уравнениям для $\mathcal{A}$.

Вопрос: Как обосновать то, что только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует “хорошая” теория размерности?

Размерную функцию $d\colon M \to A^+$ будем называть ординальной, если $d(M)$ — вполне упорядоченное множество.

Теорема

Частично упорядоченное множество M обладает ординальной размерной функцией тогда и только тогда, когда оно артиново.

Ответ: “Хорошая” теория размерности для $\mathcal{A} =$
$=$ ординальная размер. функция для $M +$
$\{N_2 : \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$= \{N_1 : \ Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_n\} + \{N_2 : \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$=$ нётеровость по уравнениям для $\mathcal{A}$.

Вопрос: Как обосновать то, что только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует “хорошая” теория размерности?

Размерную функцию $d\colon M \to A^+$ будем называть ординальной, если $d(M)$ — вполне упорядоченное множество.

Теорема

Частично упорядоченное множество M обладает ординальной размерной функцией тогда и только тогда, когда оно артиново.

Ответ: “Хорошая” теория размерности для $\mathcal{A} =$
$=$ ординальная размер. функция для $M +$
$\{N_2 : \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$= \{N_1 : \ Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_n\} + \{N_2 : \ Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$=$ нётеровость по уравнениям для $\mathcal{A}$.

Вопрос: Как обосновать то, что только для нётеровых по уравнениям алгебраических систем существует “хорошая” теория размерности?

Размерную функцию $d\colon M \to A^+$ будем называть ординальной, если $d(M)$ — вполне упорядоченное множество.

Теорема

Частично упорядоченное множество M обладает ординальной размерной функцией тогда и только тогда, когда оно артиново.

Ответ: “Хорошая” теория размерности для $\mathcal{A} =$
$=$ ординальная размер. функция для M $+$
$\{N_2 : \; Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$= \{N_1 : \; Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq Y_n\} + \{N_2 : \; Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m\} =$
$=$ нётеровость по уравнениям для $\mathcal{A}$.

Размерные функции в общем случае

Вопрос: Как можно определить размерность в случае, если алгебраическая система $\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям?

Ответ:

Теорема

Для любого частично упорядоченного множества M существует линейно упорядоченная абелева группа A и размерная функция $d\colon M \to A^+$.

Утверждение

Пусть $d_1\colon M_1 \to A^+$ и $d_2\colon M_2 \to A^+$ — размерные функция на частично упорядоченных множествах M_1 и M_2 соответственно. Тогда функция $d\colon M_1 \times M_2 \to A^+$, определённая правилом

$$\forall\, m_1 \in M_1 \quad \forall\, m_2 \in M_2 \qquad d((m_1, m_2)) = d_1(m_1) + d_2(m_2),$$

является размерной функцией на $M_1 \times M_2$.

Вопрос: Как можно определить размерность в случае, если алгебраическая система $\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям?

Ответ:

Теорема

Для любого частично упорядоченного множества M существует линейно упорядоченная абелева группа A и размерная функция $d\colon M \to A^+$.

Утверждение

Пусть $d_1\colon M_1 \to A^+$ и $d_2\colon M_2 \to A^+$ — размерные функция на частично упорядоченных множествах M_1 и M_2 соответственно. Тогда функция $d\colon M_1 \times M_2 \to A^+$, определённая правилом

$$\forall\, m_1 \in M_1 \quad \forall\, m_2 \in M_2 \qquad d((m_1, m_2)) = d_1(m_1) + d_2(m_2),$$

является размерной функцией на $M_1 \times M_2$.

Вопрос: Как можно определить размерность в случае, если алгебраическая система $\mathcal{A}$ не является нётеровой по уравнениям?

Ответ:

Теорема

Для любого частично упорядоченного множества M существует линейно упорядоченная абелева группа A и размерная функция $d\colon M \to A^+$.

Утверждение

Пусть $d_1\colon M_1 \to A^+$ и $d_2\colon M_2 \to A^+$ — размерные функция на частично упорядоченных множествах M_1 и M_2 соответственно. Тогда функция $d\colon M_1 \times M_2 \to A^+$, определённая правилом

$$\forall\, m_1 \in M_1 \quad \forall\, m_2 \in M_2 \qquad d((m_1, m_2)) = d_1(m_1) + d_2(m_2),$$

является размерной функцией на $M_1 \times M_2$.

Примеры

1. Размерность любого (диофантового) алгебраического множества над свободной к.п. разрешимой группой конечна (А. Г. Мясников, Н. С. Романовский).
2. Пусть F — свободная метабелева группа конечного ранга $r \geqslant 2$, рассматриваемая в стандартном групповом языке $\mathrm{L}_{\mathrm{gr}} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$. Тогда для любого целого положительного числа n

$$\dim(F^n) = \begin{cases} F(n, n-1) - 1, & \text{если } n \geqslant 4 \text{ чётно}, \\ F(n, n-1), & \text{если } n \geqslant 1 \text{ нечётно}, \\ 4, & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

где $F(m, n)$ — рекурсивно заданная функция (В. Н. Ремесленников, Е. И. Тимошенко).

Для нётеровой по уравнениям алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A; \mathrm{L} \rangle$ функцию $D_{\mathcal{A}}(n) = \dim(A^n)$ будем называть граничной размерной функцией.

Примеры

1. Размерность любого (диофантового) алгебраического множества над свободной к.п. разрешимой группой конечна (А. Г. Мясников, Н. С. Романовский).
2. Пусть F — свободная метабелева группа конечного ранга $r \geqslant 2$, рассматриваемая в стандартном групповом языке $\mathrm{L}_{\mathrm{gr}} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$. Тогда для любого целого положительного числа n

$$\dim(F^n) = \begin{cases} F(n, n-1) - 1, & \text{если } n \geqslant 4 \text{ чётно}, \\ F(n, n-1), & \text{если } n \geqslant 1 \text{ нечётно}, \\ 4, & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

   где $F(m, n)$ — рекурсивно заданная функция (В. Н. Ремесленников, Е. И. Тимошенко).

Для нётеровой по уравнениям алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A; \mathtt{L} \rangle$ функцию $D_{\mathcal{A}}(n) = \dim(A^n)$ будем называть граничной размерной функцией.

Пусть L — свободная алгебра Ли конечного ранга над бесконечным полем.

Э. Ю. Даниярова, В. Н. Ремесленников
Ограниченная алгебраическая геометрия над свободной алгеброй Ли
Алгебра и логика, 44:3, 2005, 269–304

Из результатов этой статьи следует, что $D_L(1) = \dim(L^1) = \omega$.

Гипотеза 1: $D_L(n) = \dim(L^n) = n\omega$.

Гипотеза 2: Если Y — алгебраическое множество над L и $\dim(Y) = 1$, то Y — ограниченное множество.

Гипотеза 2': Не существует неограниченного алгебраического множества Y над L, пересечение которого с **любым** конечномерным подпространством пусто или состоит из конечного числа точек.

Гипотеза 3: Если Y — алгебраическое множество над L и размерность $\dim(Y)$ конечна, то Y — ограниченное множество.

Размерная функция для множества регулярных языков в свободной группе конечного ранга