Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

10–13 ноября 2014 г.

Тезисы докладов

РФФИ Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 14-01-20293-г)

Новосибирск • 2014

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL’TSEV MEETING

November 10–13, 2014

Collection of Abstracts

РФФИ

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 14-01-20293-г)

Novosibirsk • 2014

Содержание

I. Пленарные доклады

Градуированные алгебры и кольца Кокса алгебраических многообразий

И. В. Аржанцев

Хорошо известно, что наличие градуировки на алгебре зачастую упрощает изучение связанных с ней структур. Градуированные алгебры естественно возникают во многих геометрических задачах, например, как тотальные координатные кольца или кольца Кокса алгебраических многообразий. В докладе будет рассказано о недавних результатах из теории колец Кокса. Мы поговорим об однородных локально нильпотентных дифференцированиях и описании группы автоморфизмов алгебраического многообразия. Также будет рассмотрено несколько комбинаторных задач, связанных с градуированными кольцами и двойственностью Гейла.

Список литературы

[1] Аржанцев И. В. О факториальности колец Кокса. Математические Заметки 85 (2009), вып. 5, 643-651.

[2] Аржанцев И. В., Гайфуллин С. А. Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий. Математический Сборник 201 (2010), вып. 1, 3-24.

[3] Arzhantsev I. V., Derenthal U., Hausen J., Laface A. Cox rings. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 144, Cambridge University Press, 2014, 472 pp.

[4] Bechtold B. Factorially graded rings and Cox rings. Journal of Algebra 369 (2012), no. 1, 351-359.

[5] Berchtold F., Hausen J. Homogeneous coordinates for algebraic varieties, Journal of Algebra 266 (2003), no. 2, 636-670.

[6] Elizondo E. J., Kurano K., Watanabe K. The total coordinate ring of a normal projective variety. Journal of Algebra 276 (2004), no. 2, 625-637.

Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, Москва
E-mail: arjantse@mccme.ru

О группах автоморфизмов и полугруппах эндоморфизмов свободных бернсайдвых групп

В. С. Атабекян

Естественный вопрос об описании группы автоморфизмов свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ достаточно большой нечетной экспоненты n и ранга $m > 1$ был поставлен в Коуровской тетради еще в 1982 г. А.Ю. Ольшанским. Однако результаты в этом направлении стали появляться лишь в последней декаде. Получено описание всех, так называемых, нормальных автоморфизмов групп $B(m,n)$, получен ответ на вопрос С. Иванова 1990 года из Коуровской тетради об описании расщепляющих автоморфизмов $B(m,n)$, указаны свободные полугруппы в $B(2,n)$ и свободные подгруппы в $B(3,n)$. Решена проблема башни автоморфизмов группы $B(m,n)$. Описана также группа автоморфизмов полугруппы эндоморфизмов $B(m,n)$ (ответ на вопрос Б.Плоткина).

Ереванский гос.университет, Ереван
E-mail: varujan@atabekyan.com

Спектры автоустойчивости булевых алгебр

Н. А. Баженов

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется $\mathbf{d}$-*автоустойчивой*, если для любой вычислимой копии $\mathfrak{B}$ модели $\mathfrak{A}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. *Спектром автоустойчивости* модели $\mathfrak{A}$ называют множество всех тьюринговых степеней $\mathbf{d}$, таких что $\mathfrak{A}$ является $\mathbf{d}$-автоустойчивой. В докладе будет дан обзор результатов, посвященных спектрам автоустойчивости вычислимых моделей. Особое внимание будет уделено спектрам автоустойчивости булевых алгебр.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: nickbazh@yandex.ru

Счетные модели малых упорядоченных теорий

Б. С. Байжанов

Доклад посвящен классификации счетных моделей теорий с определимым линейным порядком и счетным множеством всех пусто определимых типов.

Институт математики и математического моделирования, Алматы
E-mail: baizhanov@hotmail.com

Тождества в алгебрах и функции роста

М. В. Зайцев

В докладе представлен краткий обзор результатов по количественной PI-теории.

Пусть F — поле нулевой характеристики. С каждой алгеброй A над F связана целочисленная последовательность $\{c_n(A)\}, n = 1, 2, \ldots$, называемая последовательностью коразмерностей, которая характеризует количество тождественных соотношений алгебры A. Изучение асимптотического поведения последовательности $\{c_n(A)\}$ — одна из центральных задач количественной PI-теории.

Для широкого класса алгебр, к которому относятся, например, все ассоциативные PI-алгебры, все специальные алгебры и супералгебры Ли, все конечномерные алгебры произвольной сигнатуры, последовательность коразмерностей растет не быстрее экспоненциальной функции. В этом случае возникает вопрос о существовании предела

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

называемого PI-экспонентой A. В последние десятилетия появилось большое количество работ, в которых этот вопрос решался положительно для самых разнообразных алгебр, и только недавно был построен первый контрпример (этот результат был анонсирован в [**1**]).

Кроме существования PI-экспоненты, возникает целый ряд других вопросов о характере асимптотического поведения $\{c_n(A)\}$, например, в каких классах алгебр допускается или не допускается промежуточный рост, какие полиномиальные и экспоненциальные функции можно реализовать в качестве функций роста коразмерностей, и т.д.

В докладе предполагается обсудить как современное состояние, так и открытые проблемы указанной тематики. С основными понятиями и методами количественной PI-теории можно познакомиться в монографии [**2**].

Список литературы

[1] Зайцев М. В. Существование PI-экспонент роста тождеств. Международная конференция Мальцевские чтения, 11 - 13 ноября 2013 г. Тезисы докладов. Новосибирск 2013, с. 120.

[2] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial identities and asymptotic methods. Mathematical Surveys and Monographs, 122. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xiv+352 pp.

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: zaicevmv@mail.ru

О некоторых задачах теории конечных p-групп

В. И. Зенков

В докладе будут обсуждаться решения задач В. Д. Мазурова (Владикавказ, 2012), Д. В. Лыткиной (Коуровская тетрадь, 18.57), Я. Г. Берковича (Коуровская тетрадь, 16.13).

ИММ УрО РАН
E-mail: v1i9z52@mail.ru

Нечёткие логики и теория нечётких моделей

Д. Е. Пальчунов

В докладе будет сделан обзор современных исследований по нечетким логикам, а также будут изложены полученные в последнее время результаты по нечетким и булевозначным моделям.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Генерические теории нескольких серий конечных алгебраических систем

В. Н. Ремесленников

Пусть определена серия конечных систем языка L и подходящая вероятностная мера на множестве систем этой серии. Для этих параметров будет определена генерическая теория языка L данной серии, зависящая от выбранной вероятностной меры. В докладе будет дан обзор как известных результатов, так и некоторых новых результатов для нескольких серий конечных групп, конечных решеток и конечных полугрупп. Будут приведены некоторые примеры приложения этих результатов к математическим проблемам информатики.

ОФ ИМ СО РАН
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Неразрешимая длина конечной группы и неподвижных точек ее автоморфизмов

Е. И. Хухро

Результаты данного доклада получены в совместной работе с П. Шумяцким (Бразилия).

Доказываются «неразрешимые» аналоги известной теоремы Томпсона, ограничивающей высоту Фиттинга $h(G)$ (=нильпотентную длину) конечной разрешимой группы G в терминах $h(C_G(A))$ и $\alpha(|A|)$, где $C_G(A)$ — подгруппа неподвижных точек, а $\alpha(|A|)$ — число простых сомножителей в $|A|$ с учётом кратностей.

Обобщённая высота Фиттинга конечной группы G определяется как наименьшее число $h = h^*(G)$, для которого $F^*_h(G) = G$, где $F^*_i(G)$ — обобщённый ряд Фиттинга: $F^*_1(G) = F^*(G)$ и $F^*_{i+1}(G)$ — прообраз подгруппы $F^*(G/F^*_i(G))$. Доказывается, что если G допускает разрешимую группу автоморфизмов A копростого порядка, то $h^*(G)$ ограничена в терминах $h^*(C_G(A))$ и $\alpha(|A|)$. Этот результат вытекает из частного случая, когда $A = \langle\varphi\rangle$ имеет простой порядок, где доказывается, что $F^*(C_G(\varphi)) \leqslant F^*_9(G)$.

Неразрешимая длина $\lambda(G)$ конечной группы G определяется как наименьшее возможное число неразрешимых факторов нормального ряда, каждый фактор которого либо разрешим, либо является прямым произведением неабелевых простых групп. Доказывается, что если A — группа автоморфизмов группы G копростого порядка, то $\lambda(G)$ ограничена в терминах $\lambda(C_G(A))$ и $\alpha(|A|)$.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, и Университет Линкольна, Великобритания
E-mail: khukhro@yahoo.co.uk

Полугруппы близкие к группам: уравнения, алгебраические множества, проблемы совместности

А. Н. Шевляков

В докладе будут представлены результаты по алгебраической геометрии над некоторыми классами полугрупп. Будут рассмотрены свойства алгебраических множеств и некоторые виды компактности систем уравнений.

Поскольку теория полугрупп возникла позднее теории групп, то многие понятия первой появились из ослабления аксиом теории групп. Так, например, возникли классы инверсных, клиффордовых и вполне простых полугрупп: данные полугруппы (как и группы) допускают операцию обращения, но данная операция может уже не обладать всеми свойствами операции обращения в теории групп.

В работах [**1, 2**] была развита алгебраическая геометрия над группами, то есть изучены общие свойства уравнений над группами. Целью моего доклада будет изучение некоторых проблем алгебраической геометрии в классах полугрупп близких к группам. Помимо указанных выше работ, в своих исследованиях мы существенно опираемся на серию работ Э.Ю. Данияровой, А.Г. Мясникова, В.Н. Ремесленникова [**3, 4, 5, 6**], в которой даются основы алгебраической геометрии над произвольной алгебраической системой в языке без предикатов.

Следуя [**3**], уравнение над полугруппой S — это равенство вида $t(X) = s(X)$, где $t(X), s(X)$ — конечные произведения переменных множества X и элементов полугруппы S. Например, следующие выражения являются уравнениями над полугруппой S: $x_1x_2 = x_2x_1$, $x_1s_1x_1 = s_2x_2^3s_3$ $(s_i \in S)$. В случае, если полугруппа допускает операцию обращения, некоторые части уравнения могут иметь отрицательные степени: $(xy)^{-1} = (y(x)^{-1}z)^{-1}$.

Алгебраическое множество над полугруппой S — это решение некоторой системы уравнений над S.

Доклад будет состоять из двух больших частей.

(1) Какие полугруппы S обладают следующим свойством: объединение любого конечного числа алгебраических множеств над S снова является алгебраическим? Следуя [**6**] такие полугруппы будем называть эквациональными областями.

Рассмотрим, как решается аналогичная проблема в классической алгебраической геометрии над полем. Здесь решение тривиальное: когда рассматриваются полиномиальные уравнения над полем F, то любое конечное объединение алгебраических множеств над F снова выразимо в виде решения системы уравнений, то есть является алгебраическим. Например, объединение решений систем уравнений $\{f(X) = 0\}$, $\{g(X) = 0\}$ над F является решение системы $\{f(X)g(X) = 0\}$. Таки образом, любое поле является эквациональной областью.

Ситуация усложняется при переходе от полей к другим классам алгебраических систем.

Полное описание эквациональных областей среди ассоциативных колец, алгебр Ли и групп была произведена в [**6**]. В отличие от этих классов алгебраических систем, получить единый критерий для всех полугрупп не представляется мне возможным. Поэтому в докладе будут рассмотрены лишь важнейшие классы полугрупп (вполне простые, клиффордовы, инверсные, конечные полугруппы) и в каждом из классов будет сформулирован критерий, когда полугруппа S из данного класса является эквациональной областью. Отметим, что наши результаты для вполне простых полугрупп схожи с результатами [**6**] для групп. Например, было получено, что свободная вполне простая полугруппа ранга $r > 1$ (как и свободная группа ранга $r > 1$) является эквациональной областью.

(2) Наиболее простое описание алгебраических множеств над алгебраической системой A может быть получено в случае нетеровости по уравнения системы A, то есть когда любая бесконечная система уравнений над A эквивалентная своей конечной подсистеме. Однако существуют полугруппы, которые не являются нетеровыми по уравнениям.

В докладе будут рассмотрены бесконечные несовместные системы уравнений над различными полугруппами. Оказывается, что существуют примеры, когда все конечные подсистемы таких систем уравнений совместны. Более того, можно построить пример полурешетки S, в которой все совместные системы уравнений эквивалентны своим конечным подсистемам, но над S существует бесконечная несовместная система уравнений, каждая конечная подсистема которой совместна.

Существование такой полурешетки S позволяет ввести еще одно обобщение понятия нетеровости по уравнениям: нетеровость по совестным системам. А именно: полугруппа S нетерова по совестным системам, если любая совестная система уравнений над S эквивалентная своей конечной подсистеме.

В некоторых случаях новое определение совпадает с понятием нетеровости по уравнениям. Например, семейство нетеровых по совместным системам булевых алгебр совпадает с семейством нетеровых по уравнения булевых алгебр. Однако в классе полурешеток понятия нетеровости по уравнениям и нетеровости по совестным системам различны. В докладе будет показано, что свободная полурешетка бесконечного ранга (а также любая ее бесконечная подполурешетка) нетерова по совместным системам, но не является нетеровой по уравнениям. Напротив, свободная леворегулярная идемпотентная полугруппа (или бициклическая полугрупп) не является нетеровой по совестным системам уравнений.

Список литературы

[1] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and Ideal Theory // J. Algebra, 219, pp. 16–79, 1999.

[2] Myasnikov A, Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups II: logical foundations // J. Algebra, 234, pp. 225–276, 2000.

[3] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry // Algebra and Discrete Mathematics, 1, 2008, 80–111.

[4] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания // Фундамент. и прикл. матем., 17:1, 2012, 65–106.

[5] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures III: Equationally Noetherian property and compactness // South. Asian Bull. Math., 35:1, 2011, 35–68

[6] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. IV. Эквациональные области и ко-области // Алгебра и логика, 49:6, 2010, 715–756

ОФИМ СО РАН, Омск
E-mail: a_shevl@mail.ru

Some modal operators over intuitionistic logic

S. A. Drobyshevich

We study a number of modal operators over intuitionistic logic defined as compositions of principal modal operator of logic in consideration with intuitionistic negation. We adopt an approach due to K. Došen and M. Božić (see [**1**] and [**3**]), who introduced four systems of intuitionistic modal logics — $HK\Box$, $HK\Diamond$, $HK\Box'$ and $HK\Diamond'$ — each dealing with one of the modal operators of necessity, possibility, un-necessity and impossibility, respectively, as a framework for investigating intuitionistic modal logics. By a composition we understand simply a sequence consisting of occurrences of one of four types of modal operators and intuitionistic negation and we mainly focus on basic compositions, that is compositions of the form $\neg\delta$, $\delta\neg$ or $\neg\delta\neg$, where δ is the principal modal operator of the logic $HK\delta$. It is well known that such compositions over classical logic can be regarded as natural definitions of four types of modal operators above by means of each other.

We investigate which basic compositions yield modal operators of the same type over intuitionistic logic as over classical logic, which is a natural question, as there is no dualities between four types of modal operators over intuitionistic logic. It turns out that five basic compositions behave classically in that sense and for those five compositions we obtain theirs respective axiomatizations. Moreover, we show that logic KC is the smallest superintuitionistic logic over which all twelve basic compositions behave classically.

We also investigate the so called Heyting-Kripke logic N^* [**2**], which can be obtained by adding to intuitionistic non-modal base modal operator $\sim$, satisfying exactly the properties of negative operators $\Box'$ and $\Diamond'$ in logics $HK\Box'$ and $HK\Diamond'$, respectively. We study some basic properties of N^* such as finite model property, decidability and constructive properties. We then axiomatize two compositions, that is $\neg\sim$ and $\sim\sim$, in N^* as necessity operators. We show that the former composition has an infinite axiomatization and the latter one is axiomatized in the form of logic, modal operator in which combines properties of positive operators $\Box$ and $\Diamond$ in logics $HK\Box$ and $HK\Diamond$, respectively.

References

[1] Božić M., Došen K. 'Models for normal intuitionistic modal logics, *Studia Logica* 43 (1984): 217–245.

[2] Cabalar P., Odintsov S. P., Pearce D. 'Logical foundations of well-founded semantics', In P. Doherty et al (eds.), *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 10th International Conference (KR2006)*, AAAI Press, Menlo Park, California, 2006, pp. 25–36.

[3] Došen K., 'Negative modal operators in intuitionistic logic', *Publication de l'Instutute Mathematique, Nouv. Ser.* 35 (1984): 3–14.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: drobs@math.nsc.ru

Restrictions of representations of algebraic groups to subgroups: Big composition factors and tools for investigating the behaviour of elements

I. D. Suprunenko

Constructing of composition factors with certain special properties in restrictions of modular irreducible representations of classical algebraic groups to subsystem subgroups with two simple components and using the existence of such factors for investigating the behaviour of unipotent elements in these representations will be discussed. We shall deal with factors that are in a certain sense big enough (or not too small) for both components of a subgroup under consideration. Results on such factors yield effective tools for finding estimates for some parameters of the images of unipotent elements in representations, and not only for elements from these subsystem subgroups.

In what follows K is an algebraically closed field, $G = A_r(K)$, ω_i $(1 \leq i \leq r)$ are the fundamental weights of G, $\omega(\varphi)$ is the highest weight of an irreducible representation φ, and φ^* is the representation dual to φ. If $\omega(\varphi) = \sum_{i=1}^r a_i\omega_i$, set $s(\varphi) = \sum_{i=1}^r a_i$ and $l(\varphi) = a_1 + 2(a_2 + \ldots + a_{r-1}) + a_r$. Some of the results that will be discussed are stated below. In Theorem 1 we write an irreducible representation ρ of a semisimple group H with two simple components H_1 and H_2 in the form $\rho_1 \otimes \rho_2$ where ρ_i is an irreducible representation of H_i, $i = 1, 2$.

Theorem 1. *Let $2 \leq l \leq r-3$, H_1 and $H_2 \subset G$ be commuting subsystem subgroups of types A_l and A_{r-l-1}, respectively, $H = H_1H_2$, and φ be an irreducible representation of G with $\omega(\varphi) = \sum_{i=1}^r a_i\omega_i$. If $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ is a composition factor of the restriction $\varphi|H$, then $s(\psi_1) + s(\psi_2) \leq l(\varphi)$. The representation $\varphi|H$ has a composition factor $\tau = \tau_1 \otimes \tau_2$ with $s(\tau_1) = s(\varphi)$ and $s(\tau_2) = \sum_{i=2}^{r-1} a_i$.*

Theorem 2. *Assume that the characteristic of K is an odd prime p. Let φ be a p-restricted irreducible representation of G, and $x \in G$ be a unipotent element of order $p^{s+1} > p$. Denote by k the maximal Jordan block size of the element x^{p^s} in the standard realization of G. Set $N = N(r, p, k) = (r-k)^2/8p$,*

$$\Omega = \{0; a\omega_1, a \leq 4; \omega_i, 2 \leq i \leq 4; \omega_1+\omega_r; 2\omega_1+\omega_r; \omega_1+\omega_2; 2\omega_1+\omega_2; \omega_1+\omega_3; \omega_1+\omega_{r-1}; 2\omega_2\}.$$

Assume that $r - k \geq \max\{7, p^s\}$, the weights $\omega(\varphi)$ and $\omega(\varphi^*) \notin \Omega$ and that $\omega(\varphi) \neq \omega_5$ if $r = 9$ or 10 and $k = 2$. Then $\varphi(x)$ has $> (s(\varphi)+1)N$ Jordan blocks of size $> p^s$. If $\omega(\varphi)$ or $\omega(\varphi^*) \in \{4\omega_1, \omega_4, 2\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2\}$ or $r = 9$ or 10, $k = 2$, and $\omega(\varphi) = \omega_5$, then $\varphi(x)$ has $> N$ blocks of size $> p^s$.

Corollary 1. *For $r-p \geq \max\{7, p^s\}$ the estimates of Theorem 2 hold for every element of order p^{s+1} if one sets $N = N(r, p, p)$.*

This research has been supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, projects F14-043 (Theorem 1) and F14R-109 (Theorem 2 and Corollary 1).

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk (Belarus)
E-mail: suprunenko@im.bas-net.by

Finite groups with arithmetical restrictions to their maximal subgroups

N. V. Maslova

In the group theory, "arithmetical" properties of a group G are the properties which are defined by some arithmetical parameters of G.

Such invariants of a group G as sets of composition and chief factors of G with details of action of G on its chief factors are called the "normal structure" of G.

In the present talk we will discuss the normal structure of a finite group with respect to some arithmetical restrictions to its maximal subgroups.

IMM UB RAS, UrFU, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: butterson@mail.ru

Metabelian varieties of groups and wreath products of abelian groups

V. H. Mikaelian

We obtain full classification of all cases, when for the given sets of abelian groups $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ their (direct or Cartesian) wreath product $\mathcal{X}\mathrm{wr}\mathcal{Y}$ generates the product $var(\mathcal{X})var(\mathcal{Y})$ of varieties, generated by those sets. In particular, when each set consists of one group only: $\mathcal{X} = \{G\}$, $\mathcal{Y} = \{H\}$, we get the classification of all cases when $var(G\mathrm{wr}H) = var(G)var(H)$. Since wreath products are one of the main tools in theory of varieties of groups, in literature there are many cases when particular cases of the above mentioned equalities are used to study varieties of groups, especially, to study products of varieties of groups. In particular, Higman has studied the cases when $G = Z_p$ and $H = Z_n$ (finite cyclic groups of orders p and n, where p is any prime number) [**2**]. Houghton generalized this for the case of arbitrary cyclic groups [**5**]. Further, as it is proved by Baumslag and Neumanns, if H is any discriminating group, then $var(G)var(H)$ always is equal to $var(G\mathrm{wr}H)$ [**1**]. Our classification [**3, 4**] not only generalizes these and some other results, but it can also be used to obtain other results. For example, we show that in the case of abelian groups the above mentioned condition of Baumslag and Neumanns in fact also is a sufficient condition.

References

[1] Baumslag G., Neumann B. H., Neumann H., Neumann P. M. *On varieties generated by finitely generated group*, Math. Z. 86 (1964) 93–122.

[2] Higman G. *Some remarks on varieties of groups*, Q. J. Math. Oxford (2) 10 (1959) 165–178.

[3] Mikaelian V. H. *Metabelian varieties of groups and wreath products of abelian groups*, Journal of Algebra 01/2007; 313(2), 455-485.

[4] Mikaelian V. H. *Varieties Generated by Wreath Products of Abelian Groups*, J. Math. Sci. (Springer), 195 (2013), no. 4, 523–528.

[5] Neumann H. *Varieties of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

Yerevan State University, Yerevan
E-mail: v.mikaelian@gmail.com

II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Ансамбль алгоритмов кластеризации: коллективы логических правил и индексы качества группировки

В. Б. Бериков

Пусть требуется разбить множество объектов, информация о которых имеет форму таблицы "объект-свойство", на некоторое число групп в соответствии с некоторым критерием однородности. Задачи такого рода возникают, например, в биоинформатике, анализе изображений или обработке медицинских данных. Часто переменные, описывающие объекты, являются разнотипными: вещественными, порядковыми, булевыми или измеренными в шкале наименований. В работе [**1**] был предложен алгоритм, основанный на коллективе логических правил (таксономических решающих деревьях). Коллективный (ансамблевый) подход позволяет снижать зависимость результатов группировки от выбора параметров алгоритма, получать более устойчивые решения в условиях зашумленных данных, при наличии в них пропусков. Логическое правило классификации представляет собой утверждение вида "Если $X_{j_1}(a) \in E_{j_1}$ И ... И $X_{j_m}(a) \in E_{j_m}$, То объект a относится к k-му кластеру", где $X_j(a)$ означает значение переменной X_j для объекта a.

В докладе предлагается модифицированный метод построения ансамбля коллективных решений с учетом весов алгоритмов [**2**], при вычислении которых дополнительно учитываются индексы качества группировки. Доказывается, что при выполнении определенных условий качество коллективного решения улучшается с ростом числа элементов ансамбля и увеличением ожидаемого значения индекса качества.

Список литературы

[1] Бериков В. Б. Построение ансамбля деревьев решений в кластерном анализе // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. - С. 40-52.

[2] Berikov V. Weighted ensemble of algorithms for complex data clustering // Pattern Recognition Letters. 2014. Vol. 38. P. 99-106.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: berikov@math.nsc.ru

Предметно-ориентированные языки с заданной формальной семантикой на основе лямбда-исчисления с зависимыми типами

В. А. Васенин, М. А. Кривчиков

Рассматривается подход к формальной верификации, при котором верифицируемый программный комплекс описывается с помощью набора предметно-ориентированных языков, имеющих при этом заданную формальную семантику. Использование таких ограниченных высокоуровневых языков, адекватно отражающих специфику предметной области, позволяет применять при формальной верификации, в том числе, процедуры частичного разрешения утверждений для вывода типов и автоматизации доказательств.

В качестве базовой формальной модели используется Исчисление Конструкций [**1**] — разновидность типизированного λ-исчисления с поддержкой полиморфизма, конструкторов типов и зависимых типов. В рамках исследования, результаты которого представлены в докладе, была реализована разновидность Исчисления Конструкций с поддержкой аксиомы унивалентности [**2**] с помощью предложенного авторами набора дополнительных правил редукции типов идентичности (на настоящий момент не полного).

Предметно-ориентированные языки строятся с использованием типизированных LISP-подобных синтаксических макросов с поддержкой типизированных процедур частичного разрешения утверждений. Такая комбинация средств метапрограммирования в языках на базе Исчисления Конструкций ранее не была описана в литературе. Формальная семантика программ и языков программирования описывается с применением известного подхода на основе монад [**3**].

На основе предлагаемого средства были построены следующие новые модели: модель статической семантики промежуточного кода стандарта ECMA-335 [**4**] и модель динамического параллельного исполнения программ [**5**]. Подход был применён на практике для описания формальной семантики фрагмента программного комплекса математического моделирования теплогидравлических процессов в АЭС на основе реакторов серии ВВЭР.

Список литературы

[1] Coquand T., Huet G. The calculus of constructions // Inf. Comput. 1988. Vol. 76, № 2-3. P. 95–120.
[2] Univalent Foundations Program T. Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study: http://homotopytypetheory.org/book, 2013.
[3] Moggi E. Notions of computation and monads // Inf. Comput. 1991. Vol. 93, № 1. P. 55–92.
[4] Васенин В.А., Кривчиков М.А. Статическая семантика стандарта ECMA-335 // Программирование. 2012. № 4. с. 3–16.
[5] Васенин В.А., Кривчиков М.А. Модель динамического параллельного исполнения программ // Программирование. 2013. № 1. с. 45–59.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: maxim.krivchikov@gmail.com

Построение транзитивных полиномов над кольцом $\mathbb{Z}_{p^2}$

А. О. Ковалевская

Рассматриваются рекуррентные последовательности вида

$$a \bmod p^n, \quad f(a) \bmod p^n, \quad f(f(a)) \bmod p^n, \quad \ldots,$$

где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, p — простое число. В связи с их использованием в криптографии возникает проблема построения транзитивных полиномов $f(x)$ — для которых указанная последовательность имеет период p^n.

Транзитивные полиномиальные преобразования колец вычетов рассматриваются в [**1**]. В соответствии с этой работой, если $p \notin \{2, 3\}$, то полином, транзитивный по модулю p^2, транзитивен по модулю p^n для любого натурального n. Транзитивные полиномы по модулю p^n могут быть получены из транзитивных по модулю p^2 путём добавления тождества. Таким образом, важным является случай $n = 2$.

Разработан метод построения полиномов для представления всех транзитивных полиномиальных преобразований по модулю p^2, в предположении, что заранее известны полиномы, задающие все транзитивные функции по модулю p. Для полиномиальных функций над $\mathbb{Z}_{p^2}$ используется следующее представление:

$$f(x) = f_0(x) + pf_1(x) + (x^p - x)(f_0^{'}(x) - f^{'}(x)),$$

где $f(x)$ "— полином над кольцом $\mathbb{Z}_{p^2}$ $f_0(x)$, $f_1(x)$ "— полиномы над кольцом $\mathbb{Z}_p$ степени меньшей p, $f^{'}(x)$ и $f_0^{'}(x)$ "— производные для $f(x)$ и $f_0(x)$ с коэффициентами, приведёнными по модулю p.

Для того чтобы с помощью этого метода получить все транзитивные по модулю p^2 полиномы, потребуется перебор $(p-2)!(p-1)^p p^p$ полиномов $f(x)$, из которых в соответствии с [**1**] транзитивными являются $(p-2)!(p-1)^{p+1}p^{p-1}$. Таким образом, доля нетранзитивных составляет $1/p$. При больших значениях p эта доля очень мала, что обеспечивает хорошую работу метода. При реализации алгоритма в системе компьютерной алгебры `Sage` все 15360000 транзитивных по модулю 25 полиномов были построены за 32 мин. Эксперименты проводились на компьютере с процессором Intel Core i7-3770 и оперативной памятью 15,4 Гб.

Если рассматривать задачу нахождения не всех, а какого-либо одного или нескольких транзитивных полиномов, то возможно улучшение этого метода, при котором перебор не требуется.

Список литературы

[1] Ларин М. В., Транзитивные полиномиальные преобразования колец вычетов. Дискретная математика, 2002. 14(2). С. 20–32.

Кафедра защиты информации и криптографии, Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск
E-mail: aokovalevskaya@gmail.com

О способе индукции действия на множестве булевых функций, эквивалентной индукции действия группы Джевонса

А. М. Кукарцев

Постановка задачи. Группа Джевонса индуцирует действие на множестве булевых функций (далее БФ) и разбивает его на орбиты [1]. Группа имеет структуру $E_n \leftthreetimes S_n$, где E_n и S_n – группы инвертирования переменных БФ (группа сдвигов) и перестановок переменных БФ (симметрическая группа) соответственно [1]. В прикладных задачах нужно работать не с целой группой, а с конкретными её элементами. Вычисление каждого действия элемента группы Джевонса на БФ представляет собой технически трудную задачу. Во-первых, автоморфизм полупрямого произведения можно задать как минимум пятью способами (и как следствие минимум пять вариантов результата). Во-вторых, это внешнее полупрямое произведение. Образующие его группы не единообразны, поэтому сложны правила вывода и итоговые соотношения. В-третьих, в подобных задачах БФ, как правило, задана в виде набора её значений во всех точках аргумента. Для формирования результата действия элемента группы Джевонса на БФ, нужно вычислить все 2^n значения аргументов. В прикладных задачах это приводит к перерасходу ресурсов ЭВМ.

Предлагаемое решение. Обозначим множество группы E_n как E^n. Если задать отношение строгого порядка на множестве значений аргумента БФ, то сама БФ биективно отобразится в элемент из E^{2^n}. На множестве E^{2^n} можно индуцировать действие группой S_{2^n}, эквивалентное индукции действия D_n на E_n. Сама группа Джевонса (и её множители) изоморфно вкладывается в S_{2^n}. Изоморфные образы групп E_n и S_n единообразны, поэтому автоморфизм уже внутреннего полупрямого произведения определяется однозначно. В результате можно перейти от действия группы Джевонса на множестве БФ к действию её вложения в S_{2^n} на множестве биекций БФ в E^{2^n}. Такой переход позволит единожды рассчитывать значения аргумента при вычислении действия эквивалентного элемента группы Джевонса на БФ и снизить расход ресурсов ЭВМ в прикладных задачах.

Список литературы

[1] Логачёв О. А., Сальников А. А., Ященко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии, МЦМНО, Москва, 2004.

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнёва, Красноярск
E-mail: amkukarcev@mail.ru

Анализ поведения пользователя социальной сети на основе прецедентного подхода

Е. А. Леуцкий

Рассматривается подход, основанный на выделении фактических данных, которые имели место быть в нашем мире [**1, 2, 3, 4**]. Данный подход носит название прецедентного подхода. Суть его заключается в том, что при наблюдении некоторого факта в рассматриваемой предметной области, этот факт заносится в базу знаний, то есть фиксируется, а затем на основе накопленной информации происходит вывод новых фактов.

На основе методологии прецедентного подхода была решена задача, связанная с анализом поведения пользователя в социальной сети. При рассмотрении поведения пользователя и с точки зрения активного, и с точки зрения пассивного участника ситуации, можно выделить определенные закономерности. Эти закономерности могут носить характер и как повседневного явления в жизни пользователя или пользователей, так и периодический. Таким образом, имея информацию о свойственных пользователю или пользователям действиях, делается попытка установить факт некоторого действия в будущем.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е. Решение задач поиска информации на основе онтологий // Бизнес-информатика. 2008. № 1. С. 3-13.

[2] Пальчунов Д. Е. Теоретико-модельная формализация онтологии и рефлексии // Философия науки. 2006. № 4. С. 86-114.

[3] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э., Хамутская А. А. Программная система управления информационными рисками RiskPanel // Программная инженерия. 2011. № 7. С. 29-36

[4] Леуцкий Е. А. Методы управления рисками при обеспечении информационной безопасности // Альманах современной науки и образования. 2013. № 11. С. 96-98.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: statusqwr@gmail.com

Литерные деревья и поиск опровержения резолюционного типа

А. В. Лялецкий

При помощи так называемого исчисления литерных деревьев проводится изучение и модификация резолюционных методов поиска опровержения в классической логике первого порядка, таких, как SLD-резолюция, "резолюция + факторизация" и элиминация моделей Лавленда, с распространением полученных результатов на случай классической логики с равенством.

Литерное дерево представляет собой дерево, в узлах которого находятся литеры, т.е. атомарные формулы или их отрицания. Строится исчисление литерных деревьев, базирующиеся на древовидной модификации бинарного правила резолюции и специальном, так называемом правиле контрарного закрытия ветви. Это исчисление является корректным и полным для классической логики без равенства. Для случая логики с равенством формулируются аналоги правила парамодуляции, ведущие к полному парамодуляционному расширению исчисления литерных деревьев при использовании аксиом функциональной рефлексивности.

Устанавливается связь исчисления литерных деревьев с SLD-резолюцией, являющейся полным методом для хорновых дизъюнктов и используемой в логическом программировании [**1**],что ведет к построению полного в общем случае расширения SLD-резолюции для классической логики как без равенства, так и с равенством при использовании аксиом функциональной рефлексивности.

Сравнение этого расширения с системой поиска опровержения "резолюция + факторизация" [**2**] позволяет заменить, с сохранением полноты, обычное правило факторизации его разновидностью, налагающей достаточно жесткие ограничения на литеры, которые могут быть "склеены" в одну литеру при применении подстановки. Такая модификация является корректной и полной для логики с равенством при встраивании в нее определенных парамодуляционных правил.

Специальный обход литерных деревьев позволяет связать получаемую при этом стратегию исчисления литерных деревьев с методом элиминации моделей [**3**], что дает подход к встраиванию в метод элиминации моделей парамодуляционных правил специального вида с сохранением полноты для логики с равенством при использовании аксиом функциональной рефлексивности.

Список литературы

[1] Lloyd J. V. Foundations of logic programming. Springer, 1987. 476 p.
[2] Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983. 360 с.
[3] Loveland D. W. Mechanical theorem-proving by model elimination // Journal of the ACM. 1968, 15. P. 236–251.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев
E-mail: lav@unicyb.kiev.ua

Сложность задач комбинаторной оптимизации в терминах решетки граней ассоциированных многогранников

А. Н. Максименко

Пусть X — конечное множество в $\mathbb{R}^d$. *Задачей* X, следуя [**1**], будем называть задачу оптимизации линейной функции $f(x) = c^T x$ на X, где $c \in \mathbb{R}^d$ — вектор входных данных задачи. Во многих задачах комбинаторной оптимизации (коммивояжер, рюкзак, задача о паросочетаниях и т. п.) множество допустимых решений X представляют в виде подмножества вершин единичного куба. Интерес к такой постановке задачи обусловлен тем, что она тесно связана с задачей линейного программирования $\max\limits_{x \in P} f(x)$, где $P = \operatorname{conv} X$.

Вполне естественно попытаться оценить вычислительную сложность задачи X в терминах каких"=нибудь комбинаторных характеристик многогранника P. В частности, очевидно, что размерность $\dim P$ является нижней оценкой сложности задачи X, тогда как числа вершин и фасет многогранника P могут служить верхними оценками. Более интересными примерами являются диаметр графа многогранника P (нижняя оценка числа шагов симплекс метода), кликовое число графа многогранника [**1**], а также число прямоугольного покрытия (rectangle covering number) матрицы инциденций вершин"=гиперграней многогранника. Последняя (из упомянутых) характеристика была введена М. Яннакакисом [**4**], а интерес к ней в последнее время возрос благодаря работам [**2**] и [**3**].

Теорема. *Предположим, что сложность некоторого алгоритма решения задачи X определяется исключительно в терминах решетки граней многогранника $P = \operatorname{conv} X$. Тогда существует полиномиально (по $\dim P$ и по $\log|X|$) разрешимая задача Y такая, что для её решения данному алгоритму требуется экспоненциальное (по $\dim P$ и $\log|X|$) число операций.*

Отметим, что этот результат безусловен (в частности, не зависит от решения проблемы P versus NP).

Работа выполнена при поддержке проекта № 477 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Список литературы

[1] Бондаренко В.А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. Ярославль: ЯрГУ, 1995.

[2] Fiorini S., Kaibel V., Pashkovich K., Theis D.O. Combinatorial Bounds on Nonnegative Rank and Extended Formulations // Discrete Math. 2013. V. 313, No 1. P. 67–83.

[3] Rothvoss T. The matching polytope has exponential extension complexity // STOC. 2014. P. 263–272.

[4] Yannakakis M. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // J. Comput. System Sci. 1991. V. 43, No 3. P. 441–466.

ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль
E-mail: maximenko.a.n@gmail.com

О приближенных решениях продукционно-логического уравнения в LP-структуре нулевого порядка

С. Д. Махортов, И. Ю. Иванов

Алгебраический подход предоставляет мощные и универсальные средства для построения и исследования логических систем. Основы алгебраической логики были заложены в работах А. Линденбаума, А. Тарского. Согласно их теории, множество формул пропозиционального языка рассматривается как алгебраическая система, операции которой соответствуют логическим связкам этого языка. Однако существует ряд задач, для решения которых общая алгебраическая логика оказывается недостаточно эффективной в силу своей универсальности. К ним относятся задачи, возникающие в логических системах продукционного типа, широко распространённых в информатике. Такие системы основываются на правилах, или продукциях, вида «A порождает B», где A и B - элементы некоторой иерархии. Семантика продукций обычно имеет импликативный характер: «если справедливо A, то справедливо B», но возможны и другие интерпретации.

Известно, что естественной и эффективной формой представления знаний служат математические решётки. В монографии С.Д. Махортова было введено понятие LP-структуры — алгебраической системы, представляющей собой решётку, на которой задано дополнительное отношение, соответствующее множеству продукций. Также был введён и исследован класс продукционно-логических уравнений в LP-структуре, позволяющих оптимизировать процесс обратного вывода в системах, логика которых основывается лишь на двух логических связках: импликации и конъюнкции.

Позднее в работах И.Ю. Иванова был предложен и исследован расширенный класс продукционно-логических уравнений в LP-структуре нулевого порядка, семантика которых основывается на полном наборе логических связок пропозиционального языка. Эти уравнения могут применяться для оптимизации обратного логического вывода в интеллектуальных продукционных системах, правила которых содержат не только конъюнкции, но также дизъюнкции и отрицания.

В настоящем докладе рассматривается метод поиска приближённых решений продукционно-логического уравнения в конечной LP-структуре нулевого порядка. Вводится понятие канонического отношения, позволяющее представить вторичное отношение на булевой решётке в виде совокупности ориентированных графов. Доказывается, что задача нахождения приближённого решения произвольного уравнения эквивалентна нахождению совокупности приближённых решений множества простейших уравнений, правые части которых представлены коатомами решётки. Поиск решения уравнения с правой частью в виде коатома в слое канонического отношения сводится к известным алгоритмам обхода вершин ориентированного графа.

Воронежский госуниверситет, Воронеж
E-mail: sd@expert.vrn.ru, hour1scorp@gmail.com

Распознавание рекуррентных последовательностей над классом консервативных функций

О. Е. Сергеева

В статье [**1**] для построения рекуррентных последовательностей было предложено использовать консервативные функции над кольцом, так как они имеют эффективную программную и аппаратную реализацию. В связи с этим в работе рассматриваются функции, сохраняющие систему эквивалентностей, частным случаем которых являются консервативные.

Задача распознавания последовательностей состоит в том, чтобы по заданной последовательности сказать, возможно ли ее построить рекуррентно при помощи функции из определенного класса.

Пусть R — конечное k-элементное множество; P_R — класс всех функций вида $f : R^n \to R$ при $n = 1, 2, 3, \cdots$. Последовательность $x_1 x_2 ... x_N \in R^N$ называется *рекуррентной над классом* $K \subseteq P_R$, если для некоторого n существует функция f от n аргументов в классе K такая, что $f(x_i, ..., x_{n+i-1}) = x_{n+i}$ при $1 \leqslant i \leqslant N - n$.

Обозначим через $S(K, N)$ множество рекуррентных последовательностей над классом K. Рассматривается задача распознавания свойства ¡ ¡ $x \in S(K, N)$¿ ¿ для $x \in R^N$ и определяется верхняя оценка сложности алгоритма, решающего данную задачу, как функция растущего N. Назовём $S(K, N)$-*схемой* схему из функциональных элементов в произвольном фиксированном базисе, которая распознает названное выше свойство. Предполагается, что буквы алфавита R кодируются двоичными наборами фиксированной длины c и последовательности подаются на вход схемы в закодированном виде — наборами длины Nc.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$ — система эквивалентностей на множестве R такая, что $\varepsilon_1 \supseteq \varepsilon_2 \supseteq ... \supseteq \varepsilon_m$. Важной является следующая

Лемма 1. *Частичная функция $f : A \to R$, где $A \subseteq R^n$, сохраняющая все эквивалентности из ε, может быть продолжена до функции $F : R^n \to R$ также сохраняющей все эквивалентности из ε.*

Пусть R — кольцо классов вычетов по модулю p^m и ε_i —отношение сравнимости по модулю p^i. Обозначим через $K^{(n)}$ класс функций от n аргументов, сохраняющих эквивалентности из ε. Имеет место теорема:

Теорема 1. *Для любого n существует последовательность $S\left(K^{(n)}, N\right)$-схем сложности $O\left(N \log^2 N\right)$.*

Список литературы

[1] Анашин В. С. Равномерно распределенные последовательности целых p-адических чисел // Математические заметки. 1994. Т. 55. № 2. С. 3 – 46.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: sergeevaoe@gmail.com

Определение речевых действий «Побуждение» при помощи лингвистических шаблонов

П. А. Степанов

В последнее время особую актуальность получили задачи, связанные с анализом социальных сетей. Социальные сети, после их широкого и повсеместного распространения, представляют собой уникальный массив данных о пользователях. Информация, содержащаяся в них, безусловно интересна как предмет для изучения и анализа. Значительный объем информации, находящейся в социальных сетях, представляют собой тексты различного типа: личные данные, диалоги, заметки, комментарии и т. д. Кроме того, именно текстовая информация является наиболее простой для обработки, в сравнении с другими данными социальных сетей, а именно изображениями и видеозаписями. Именно поэтому особую актуальность приобрели задачи, находящиеся на стыке анализа социальных сетей и анализа текстов естественного языка.

Задачей, в рамках которой была проведена данная работа, был поиск диалогов в социальных сетях, в которых собеседники договариваются о чем-то, строят планы. Была выдвинута гипотеза, согласно которой подобные диалоги будут в большом количестве содержать речевые действия «Побуждение» [**1**], [**2**], [**3**], имеющие своей целью изменить намерения и планы собеседника. Именно на поиске в тексте таких речевых действий было решено сосредоточиться в данной работе.

Для осуществления поиска речевых действий был применён язык описания лингвистических шаблонов [**4**]. Был создан набор лингвистических шаблонов, с помощью которых можно осуществлять поиск речевых действий «Побуждение». Точность составила 81%, полнота 88%. Далее экспериментально был определён порог речевых действий в диалоге планирования — 15%.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. О логическом анализе естественного языка, Теория вычислений и языки спецификаций, Новосибирск, 1995 - Вып. 152: Вычислительные системы, стр. 61-75.

[2] Пальчунов Д.Е. Алгебраическое описание смысла высказываний естественного языка, Модели когнитивных процессов. Новосибирск, 1997 - Вып. 158: Вычислительные системы, стр. 127-148.

[3] Pal?chunov D.E. Algebraische Beschreibung der Bedeutung von Aeusserungen der natuerlichen Sprache. In: Zelger, Josef/Maier, Martin (1999, Hrsg.): GABEK. Verarbeitung und Darstellung von Wissen. Innsbruck-Wien: STUDIENVerlag, 310-326.

[4] Степанов П.А. Язык описания лингвистических шаблонов // Материалы Всероссийской конференции с международным участием "Знания-Онтологии-Теории". - 2013. - Том 2. - С. 136-145

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: stefan.nsk@gmail.com

Математическое моделирование ряда научных процессов в различных областях знаний

Д. А. Тарновский

Предлагаемая работа относится к области математической логики, математического моделирования, а также тесным образом связана с вопросами философии математики.

Структурно работа состоит из двух частей. В первой части нами рассматривается категория пространства, вводится система координат, предлагается взгляд на вопрос о соотношение нуля и бесконечности.

Во второй части работы, на основе вводимой модели пространства, рассмотрены процессы в области электродинамики, физиологии, в частности описана сердечнососудистая система человека в контексте с элементами предложенного пространства. Предпринята попытка смоделировать процесс мышления, рассмотрены вопросы, относящиеся к физиологии головного мозга человека.

При написании данной работы преследовалась основная цель, это выявление и описание общих закономерностей в различных областях знаний. Это в свою очередь, позволяет рассматривать научные вопросы на качественно новом уровне, синтезировать выявленные принципы в одно целое. Сделать это предлагается на основе модели рассматриваемого нами пространства S.

Работа имеет следующую структуру:

Часть 1. Параметры, структура и координаты пространства S.

1.1. Определение пространства S.

1.2. Структура пространства S.

1.3. Система координат в пространстве S.

Часть 2. Моделирование в пространстве S.

2.1. Векторные и числовые параметры.

2.2. Моделирование процессов электродинамики;

2.3. Система кровообращения человека в контексте с моделью S.

2.4. Моделирование процесса мышления человека.

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары
E-mail: denis-tarnovskij@yandex.ru

О теоретико-модельной классификации вопросных шаблонов вероятностной вопросно-ответной системы

Г. Э. Яхъяева, А. А. Карманова

Вопросно-ответная система — информационная система, способная принимать вопросы и отвечать на них на естественном языке. Другими словами, это система с естественно-языковым интерфейсом. В самом определении скрывается противоречие. С одной стороны, для того, чтобы дать корректный и релевантный ответ, системе необходимо, чтобы вопрос однозначно переводился в машинный запрос к базе знаний. С другой стороны, формальный язык запросов не интуитивен и не удобен в использовании для человека. Одной из задач разработки вопросно-ответных систем является нахождение компромисса.

В работе мы описываем вопросно-ответную систему, разработанную в рамках программного комплекса «RiskPanel» [**1**] для предметной области информационной безопасности. Данная система основана на прецедентном подходе к моделированию предметных областей, база знаний при данном подходе моделироваться в виде обобщенной нечеткой модели [**2**].

В рамках данной работы была разработана классификация вопросных шаблонов с учетом вероятностных характеристик базы знаний. По отношению к семантике базы знаний все вопросы можно разделить на аналитические и эмпирические вопросы. По типу запрашиваемой информации все вопросы можно разделить на ли-вопросы, какой-вопросы и вероятностные вопросы. Так же вероятностные вопросы можно разделить на условные и безусловные вопросы.

Был разработан конструктор шаблонов вопросных типов, позволяющий пользователю формулировать вопросы, переводимые в однозначное формальное машинное представление для последующего извлечения ответов из базы знаний. Для каждого из типов реализован интерфейс конструктора. Разработанный интерфейс конструктора шаблонов позволяет пользователю формулировать вопросы на языке, имитирующем естественный, и получать ответы с учетом вероятностных характеристик базы знаний. С точки зрения системы, запросы формальны и однозначны, что позволяет извлекать из базы релевантные ответы.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Хамутская А.А. Программная система управления информационными рисками RiskPanel. Программная инженерия. 2011. № 7. С. 29-36.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечеткие алгебраические системы. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т.10, вып. 3. С. 75-92.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: gulnara@mail.ru, anast.karmy.aa@gmail.com

Алгоритмы вычисления интервальных значений истинности суждений в предметной области компьютерной безопасности

Г. Э. Яхъяева, О. В. Ясинская

В классической, Аристотелевской силлогистике логическая структура суждения состоит из четырех элементов: субъекта, предиката, связки и кванторного слова. Если соединить вместе все четыре элемента, то получится следующая формула суждения:

$$\text{Все (некоторые) } S \text{ есть (не есть)} H,$$

где S — субъект суждения и H — предикат суждения.

Традиционно все суждения делятся на истинные и ложные на заданной модели предметной области. С теоретико-модельной точки зрения это подразумевает, что суждения рассматриваются на классических моделях предметных областей. В нашем подходе вместо классических моделей рассматриваются обобщенные нечеткие модели [**1**], [**2**]. Значения истинности на таких моделях являются интервалами рациональных чисел из отрезка [0,1]. Данные интервалы отражают объективную вероятность событий в рассматриваемой предметной области. В связи с этим мы будем рассматривать суждение в более широком смысле: мы будем рассматривать пятый компонент суждения — его вероятность (будем обозначать буквой P). Таким образом, под формулой суждения будем понимать следующее выражение:

$$\text{Все (некоторые) } S \text{ есть (не есть)} H \text{ с вероятностью } P.$$

Используя методологию прецедентного подхода в НГУ была разработана программная система RiskPanel. В разработанной системе сигнатура предметной области компьютерной безопасности описывается одним эмпирическим понятием H: «имело место в данной атаке» и множеством аналитических понятий, которое на сегодняшний день насчитывает более 50 понятий и может пополняться по мере появления новых видов компьютерных атак. Ядром системы RiskPanel является база прецедентов компьютерных атак, которая моделируется в виде нечеткой обобщенной модели.

В рамках данной работы были разработаны алгоритмы подсчета интервальных значений истинности на нечеткой обобщенной модели для различных типов атомарных суждений, а так же алгоритм подсчета интервального значения истинности сложных суждений, являющихся булевой комбинацией атомарных суждений. Данные алгоритмы используют методологию семантики открытого мира, широко применяемую в системах логики описаний (Description Logic).

Список литературы

[1] Palchunov D.E., Yakhyaeva G.E. Interval fuzzy algebraic systems. Proceedings of the Asian Logic Conference 2005. World Scientific Publishers. 2006, pp. 23-37.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Хамутская А.А. Программная система управления информационными рисками RiskPanel. Программная инженерия. 2011. № 7. С. 29-36.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: gulnara@mail.ru, yasinskaya.olga@gmail.com

Alias calculus for a simple imperative language with decidable pointer arithmetic

N. V. Shilov

In programming th aliasing problem is to predict, detect and/or trace pointers to the same addresses in dynamic memory. Importance of the problem is due to mistakes and errors that may happen in program run-time due to improper alias handling. Below are two simple examples of errors of this type:

- `x = malloc(sizeof(int)); x = malloc(sizeof(int));`
- `y = x; free x; free y;`

The first example shows a loss of a link to a piece of memory allocated first (which can result in run out of memory, if iterated); the second example shows an attempt to free a deleted piece of memory (which can result in an abnormal program termination immediately).

Alias calculus was proposed by Bertrand Meyer in 2011 for a toy programming language with single data type for abstract pointers. The original calculus is set-based formalism insensitive to control flow; it is a set of syntax-driven rules to compute an upper approximation aft(S,P) for aliasing after execution of a program P for a given initial aliasing S; this calculus guarantees partial correctness of the assertion $\{S\}P\{aft(S,P)\}$.

The primary purpose of the present research is to present a variant of alias calculus for more realistic (but still a toy) programming language MoRe with static and dynamic memory, with types for regular data as well as for decidable pointer arithmetic. Context-free syntax of the language under study is given below:

$$P ::= \ skip \mid varV = C \mid V := T \mid \\ V := cons(T*) \mid [V] := T \mid V := [V] \mid dispose(V) \mid \\ (P;P) | (ifFthenPelseP) | (whileFdoP)$$

where V is metavariable for program variables, C is metavariable for integer constants, and T is metavariable for arithmetic expressions.

The variant is insensitive to control flow (as the original calculus by B. Meyer), but (in contrast to the original calculus) this calculus is equation-based. It is safe in the following sense.

Theorem. *Let D be any alias distribution, α be any MoRe-program and s be any state such that $s \models D$. If s' is a state such that $s\langle\alpha\rangle s'$ then $s' \models aft(D,\alpha)$. If α started in s has memory leak invalid and/or memory access then memory-leak and/or invalid-access warning(s) will be casted in $aft(D,\alpha)$.*

Acknowledgement: This is a join research with Aizhan Satekbayeva and Aleksandr P. Vorontsov. It has been supported by Nazarbayev University Seed Grant KF-14/16 тАЬResearch of Formal Models for analysis of programs with Dynamic MemoryтАЭ.

Nazarbayev University, Astana (Kazakhstan)
E-mail: nikolay.shilov@nu.edu.kz

III. Секция «Теория вычислимости»

Вычислимые линейные порядки и естественные отношения на них

Р. И. Бикмухаметов

Работа посвящена изучению алгоритмической сложности естественных отношений на вычислимых линейных порядках, а именно, отношений соседства S, отношения блока F, отношения плотности dn, отношения предельности слева P^- и отношения предельности справа P^+, определения которых можно найти, например, в работе [**1**].

Дж. Реммелом и С. Гончаровым и, позднее, Л. Фейнером [**2**] было установлено, что существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ такой, что в любой его вычислимой копии отношение соседства S_L невычислимо. С другой стороны, М. Мозес [**3**] показал, что вычислимость отношения блока $F_\mathcal{A}$ в некоторой вычислимой копии $\mathcal{A}$ произвольного порядка $\mathcal{L}$ влечет существование такого его вычислимого представления $\mathcal{B}$, что отношение соседства $S_\mathcal{B}$ вычислимо.

В работе изучены возможные варианты алгоритмической зависимости естественных отношений на классе вычислимых представлений вычислимого линейного порядка. В частности, доказано, что нет других зависимостей, кроме той, которую установил М. Мозес.

Другим направлением исследования является вопрос о конструктивизируемости начального сегмента вычислимого линейного порядка с добавленными отношениями плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-. М. Зубков [**4**] исследовал отношения соседства S и блока F на начальных сегментах вычислимых линейных порядков, что позволило ему получить более простое доказательство результата Коулза-Доуни-Хусаинова [**5**] о существование вычислимого линейного порядка с неконструктивизируемым Π^0_2-начальным сегментом. Для этого им были построены вычислимые структуры $\langle L, <_\mathcal{L}, S_\mathcal{L}\rangle$ и $\langle L, <_\mathcal{L}, F_\mathcal{L}\rangle$, содержащие неконструктивизируемые Π^0_1-начальные сегменты.

В работе рассмотрены случаи для оставшихся естественных отношений на линейных порядках, а именно, отношений плотности dn, предельности справа P^+ и предельности слева P^-. Доказано существование вычислимых структур $\langle L, <_\mathcal{L}, dn_\mathcal{L}\rangle$, $\langle L, <_\mathcal{L}, P^+_\mathcal{L}\rangle$ и $\langle L, <_\mathcal{L}, P^-_\mathcal{L}\rangle$, содержащих неконструктивизируемые Π^0_1-начальные сегменты.

Список литературы

[1] Бикмухаметов Р. И. *Алгоритмическая независимость естественных отношений на вычислимых линейных порядках,* Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ-матем. науки **155** (3), 80–90 (2013).

[2] Downey R. G. *Computability theory and linear orderings,* Handbook of recursive mathematics **2**, 823–976 (1998).

[3] Moses M. *Recursive Properties of Isomophism Types: Ph.D. Thesis.* Monash Univ., Clayton, Victoria, Australia, (1983).

[4] Зубков М. В. *О начальных сегментах вычислимых линейных порядков с дополнительными вычислимыми предикатами,* Алгебра и логика **48** (5), 564–579 (2009).

[5] Coles R. J., Downey R. G., Khoussainov B. *On Initial Segments of Computable Linear Orders,* Order **14** (2), 107–124 (1997).

Казанский университет, Казань
E-mail: ravil.bkm@gmail.com

О Δ_2^0 и Δ_3^0-вычислимости классов проективных плоскостей

А. К. Войтов

Пусть L — вычислимый язык. *Вычислимый индекс* вычислимой модели $\mathfrak{A}$ языка L — это число e такое, что характеристическая функция $\chi_{D(\mathfrak{A})}$ атомной диаграммы модели $\mathfrak{A}$ совпадает с φ_e.

Пусть α — ненулевой вычислимый ординал. Последовательность $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ вычислимых моделей языка L будем называть Δ_n^0-*вычислимой*, если существует Δ_n^0-вычислимая функция g такая, что для каждого n $g(n)$ является вычислимым индексом модели $\mathfrak{A}_n$.

В [**1**] и [**2**] доказано, что у классов дезарговых, папповых, свободно порожденных, произвольных проективных плоскостей не существует Δ_1^0-вычислимых нумераций с точностью до вычислимого изоморфизма. Поэтому естественно возникает вопрос о существовании Δ_n^0-вычислимых нумерации при $n > 1$.

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Индексное множество $I(K) = \{n \mid \mathfrak{M}_n \in K\}$, где K — класс вычислимых папповых, дезарговых или всех проективных плоскостей, является Π_2^0-множеством и для K существует Δ_3^0-вычислимая нумерация.*

Теорема 2. *Не существует Δ_2^0-вычислимой нумерации класса K всех вычислимых папповых(дезарговых) плоскостей с точностью до вычислимого изоморфизма.*

Список литературы

[1] Когабаев Н. Т. Класс проективных плоскостей невычислим // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, №4. С. 428–455.

[2] Когабаев Н. Т. Невычислимость классов папповых и дезарговых проективных плоскостей // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, №2. С. 325–335.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: boutob.ahgpeu@gmail.com

Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей

Н. Т. Когабаев

Изучение вопросов реализуемости различных видов спектров степеней и эффективных размерностей в счетных структурах является одним из основных направлений исследований в теории вычислимых моделей. Подобные вопросы рассматриваются как в общем случае, так и в конкретных классах алгебраических систем. В работе [**1**] было доказано, что теория ориентированных графов полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, т.е. спектры степеней и эффективные размерности, которые удается реализовать в каких-либо структурах, можно также реализовать и в классе ориентированных графов.

В [**1**] было также установлено, что полными относительно спектров степеней нетривиальных структур, **d**-вычислимых размерностей, вычислимых размерностей константных расширений и спектров степеней отношений являются теории следующих классов: симметричные иррефлексивные графы, частичные порядки, решетки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы, 2-ступенно нильпотентные группы. В недавней работе [**2**] доказано, что теория полей полна относительно спектров степеней нетривиальных структур, **d**-вычислимых размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней нетривиальных структур,* **d***-вычислимых размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.*

Одним из следствий данного результата является существование проективных плоскостей вычислимой размерности n, где $1 < n < \omega$.

Список литературы

[1] Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M. Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures, Ann. Pure Appl. Logic, 115, №1-3, 2002, 71–113.

[2] Miller R., Park J., Poonen B., Schoutens H., Shlapentokh A. Coding graphs into fields, Logic Colloquium 2014 and LATD 2014, Abstract Booklet, p.80.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: kogabaev@math.nsc.ru

О вычислимости нильпотентного произведения групп

И. В. Латкин

Хорошо известно, что при всяком $n \geqslant 1$ из существования Δ^0_n-вычислимых нумераций у сомножителей G и H прямого $G \times H$ или свободного $G * H$ произведения групп следует наличие такой же нумерации всего произведения. Причём в обоих случаях нужная нумерация $\alpha \times \beta$ или $\alpha * \beta$, соответственно, строится по Δ^0_n-нумерациям α и β сомножителей естественным образом, но, разумеется, в каждом случае по-своему. Кроме того, оба сомножителя имеют Δ^0_n-вычислимые номерные подмножества при этих естественных нумерациях. Напомним, что нильпотентное ступени k произведение $G *_k H$ групп G и H можно определить как фактор-группу свободного произведения $G * H$ по нормальной подгруппе $\Gamma_k \rightleftharpoons [G,H] \cap \gamma_{k+1}(G * H)$ [1], где $[G,H]$ — декартова подгруппа свободного произведения, а $\gamma_{k+1}L$ — (k+1)-й член нижнего центрального ряда группы L ((k+1)-й централ). По нумерации $\alpha * \beta$ каноническим образом строится нумерация $\alpha *_k \beta$ нильпотентного произведения, как фактор-нумерация нумерации $\alpha * \beta$ по номерному множеству нормальной подгруппы Γ_k. Если $\alpha * \beta$ — Δ^0_n-вычислимая нумерация, то Γ_k — Σ^0_n-вычислимая подгруппа, поэтому $\alpha *_k \beta$ — Σ^0_n-вычислимая нумерация в этом случае. В [2] доказано, что нильпотентное произведение конечно порождённых групп с разрешимой проблемой равенства имеет разрешимую проблему равенства,

Теорема 1. *Пусть N — такая нормальная подгруппа в H, что H/N — бесконечная циклическая группа. Тогда для того, чтобы нумерация $\alpha *_k \beta$ была Δ^0_n-вычислимой, необходимо, чтобы проблема вхождения во все централы группы G при нумерации α была бы Δ^0_n-сложной, т.е. α-номера элементов каждого централа были Δ^0_n-вычислимыми множествами.*

Теорема 2. *Если H — бесконечная циклическая группа, то для Δ^0_n-вычислимости нумерации $\alpha *_k \beta$ необходимо и достаточно, чтобы проблема вхождения во все централы группы G в нумерации α была бы Δ^0_n-сложной.*

Теорема 3. *Пусть H — свободная нильпотентная группа ступени d или свободная группа, тогда для существования Δ^0_n-вычислимой нумерации нильпотентного произведения $G *_k H$ достаточно, чтобы имелась Δ^0_n-вычислимая нумерация α группы G такая, при которой проблема вхождения во все централы группы была бы Δ^0_n-сложной.*

Теорема 4. *Существует Δ^0_n-вычислимая нильпотентная группа ступени два, у которой нильпотентное произведение той же ступени с циклической группой не имеет Δ^0_n-вычислимой нумерации.*

Теорема 5. *Существуют Δ^0_n-вычислимые абелевы группы, у которых тензорное и нильпотентное ступени два не имеют Δ^0_n-вычислимых нумераций.*

Список литературы

[1] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

[2] Фаермарк Д.С. Алгоритм для установления тождества слов в нильпотентном произведении групп, заданных конечным числом образующих и определяющих соотношений // ДАН СССР. 1961. Т. 137. С. 291-294.

[3] Мальцев А. И. Алгебраические системы. - М.: Наука, 1970.

[4] Мальцев А. И. Два замечания о нильпотентных группах // Матем. сб. 1955. Т. 37, № 3. С. 567–572.

[5] Холл Ф. Нильпотентные группы // Математика.: сб. перевод иностр. статей. 1982. Т. 12, № 1. С. 3-86.

[6] MacHenry T. The tensor product and the 2-nd nilpotent product of groups // Math. J. 1960. Vol. 73, № 1. P. 134–145.

[7] Латкин И. В. Конструктивизируемые группы, нильпотентное произведение которых не конструктивизируемо // 8-я Всесоюзн. конф. по матем. Логике. М., 1986. С. 101.

[8] Латкин И. В. Алгоритмическая сложность проблемы вхождения в коммутанты и члены нижнего центрального ряда // Сиб. Матем. Ж. 1987. Т. 28, № 5. С. 102–110.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан
E-mail: lativan@yandex.ru

Элементарное доказательство теоремы о $\beta\eta$-нормальной форме

А. А. Лялецкий

Рассматривается бестиповый вариант λ-исчисления.

Теорема о $\beta\eta$-нормальной форме. *Произвольный λ-терм имеет $\beta\eta$-нормальную форму тогда и только тогда, когда он имеет β-нормальную форму.*

В части достаточности утверждение теоремы очевидно: действительно, если t имеет β-нормальную форму, скажем t', то любое применение η-редукции к t' не создает новых β-редексов, откуда доказываемое утверждение следует из свойства сильной нормализуемости понятия η-редукции. Что касается необходимости, она впервые была доказана Х.Карри в 1972 г. и еще одно доказательство было построено Х.Барендрегтом и др. в 1976 г. Отметим, что оба доказательства технически довольно сложны и используют специальные расширения языка Λ всех λ-термов.

Предлагается новое простое доказательство теоремы о $\beta\eta$-нормальной форме, не использующее расширений языка Λ. Оно основано на теореме об откладывании η-редукции, утверждающей, что любую $\beta\eta$-редукционную цепочку $\sigma\colon t \twoheadrightarrow_{\beta\eta} t'$ можно перестроить в цепочку вида $t \twoheadrightarrow_{\beta} u \twoheadrightarrow_{\eta} t'$ для некоторого терма u (и которую можно получить почти непосредственно из определений).

Новое доказательство теоремы о $\beta\eta$-нормальной форме в части необходимости основано на двух следующих простых наблюдениях:

(a) Если β-редекс имеет вид $(\lambda x.px)q$, где $x \notin p$, то его можно свернуть двумя различными способами: $(\lambda x.px)q \xrightarrow{(\lambda x.px)q}{}_{\beta}\, pq$ и $(\lambda x.px)q \xrightarrow{\lambda x.px}{}_{\eta}\, pq$, причем в обоих случаях результирующий терм pq один и тот же.

В связи с этим, вхождение η-редекса $\lambda x.px$ в терм t называется *β-заменимым*, если оно является ре-частью какого-то вхождения β-редекса в t, т.е. $(\lambda x.px)q$ является вхождением β-редекса в t для некоторого подтерма q терма t.

(b) Пусть дана одношаговая η-редукционная цепочка $s \xrightarrow{\Delta}_{\eta} s'$, где Δ не является β-заменимым. Тогда если s' является β-нормальной формой, то s – тоже.

Теперь можем закончить доказательство. Предположим, что терм t имеет β-нормальную форму t'. Тогда $t \twoheadrightarrow_{\beta\eta} t'$ по теореме Черча-Россера для $\beta\eta$-редукции. По теореме об откладывании η-редукции имеется $\beta\eta$-редукционная цепочка вида $\sigma\colon t \twoheadrightarrow_{\beta} u \twoheadrightarrow_{\eta} t'$, т.е. $\sigma = \sigma_\beta + \sigma_\eta$, где σ_β и σ_η являются β- и η-сегментами цепочки σ соответственно. Пусть

$$\sigma_\eta\colon u \equiv u_1 \xrightarrow{\Delta_1}_{\eta} u_2 \xrightarrow{\Delta_2}_{\eta} \ldots \xrightarrow{\Delta_{n-1}}_{\eta} u_n \equiv t'.$$

В силу (a) мы можем без умаления общности считать, что ни один из сворачиваемых η-редексов Δ_i не является β-заменимым. Итеративно применяя (b), получаем, что все термы $u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1$ являются β-нормальными формами, причем $t \twoheadrightarrow_{\beta} u$, что и требовалось.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев
E-mail: foraal@mail.ru

Автоустойчивость булевых алгебр с выделенными идеалами относительно сильных конструктивизаций

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов, А. И. Турко

Настоящая работа посвящена описанию I-алгебр, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций. Доказательства основаны на результатах, изложенных в работах [1-3].

Определение. I-алгебра $\mathfrak{A}$ называется *неисчезающей, если из* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ *следует* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$ *или* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$. *Обозначим* $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, *если найдется* $\mathfrak{C}$ *такая, что* $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$. I*-алгебра* $\mathfrak{A}$ *называется локальной, если существует не более конечного числа элементарно неэквивалентных неисчезающих* I*-алгебр* $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$.

Предложение 1. *Теория* $Th(\mathfrak{A}, \bar{a})$ *произвольной локальной* I*-алгебры* $\mathfrak{A}$ *с выделенными константами* $a_1, \ldots, a_l$ *имеет простую модель.*

Предложение 2. *Простая модель теории* $Th(\mathfrak{A}, \bar{a})$, *где* $\mathfrak{A}$ *– локальная* I*-алгебра, является сильно конструктивизируемой.*

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *– локальная* I*-алгебра. Тогда множества*

$\{\phi(x_1, \ldots, x_n) | \phi(x_1, \ldots, x_n)$ *– полная формула теории* $Th(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_l)\}$ *вычислимы равномерно по* $n \in \omega$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *– счетная локальная* I*-алгебра.* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Следствие 1.*Если* $Th(\mathfrak{A})$ *счетно-категорична или конечно-аксиоматизируема, то счетная* I*-алгебра* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{A}$ *– счетная суператомная булева алгебра с одним выделенным идеалом, то* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *– счетная булева алгебра. Тогда* $\mathfrak{A}$ *автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *разлагается в прямое произведение конечного числа простых моделей.*

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е. "Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами", *Алгебра и Логика*, **26**:4 (1987), 435–455.

[2] Pal'chunov D. E. "Countable categorical boolean algebras with distinguished ideals", *Studia Logica*, V, XLVi, N2, (1987), 121–135.

[3] Goncharov S., Khoussainov B. *Open problems in the theory of constructive algebraic systems*, *Contemporary Mathematics*, **257**, (2000), 145–170.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Новосибирский государственный университет
E-mail: palch@math.nsc.ru, tr0f@mail.ru

Definable linear orderings over negative and positive equivalences

N. Kh. Kasymov, A. S. Morozov

We study positive and negative linear orderings definable over positive and negative equivalences.

Proposition. *Let η be an arbitrary equivalence and assume that a negative (positive) linear ordering $\langle\omega/\eta;\leqslant\rangle$ is definable over it. Then η is computable if and only if $\leqslant$ is computable.*

It follows that each negative (positive) linear ordering on ω is computable

For $\alpha \subseteq \omega$, we let $\eta(\alpha) = \alpha^2 \cup \mathtt{id}_\omega$ and we let $\eta^*(\alpha)$ to be an equivalence whose classes are $[a_i, a_{i+1}) = \{x \in \omega \mid a_i \leqslant x < a_{i+1}\}$, $i \in \omega$.

Proposition. *If a negative (positive) equivalence $\eta(\alpha)$ admits a negative (positive) discrete linear ordering over it then α is computable.*

We also study similar questions over equivalences different from $\eta(\alpha)$ and show the general situation to be different.

Theorem. *Let α be a co–enumerable but not computable set and $\mathcal{L}$ be an arbitrary linear ordering. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathcal{L}$ has a negative presentation over $\eta(\alpha)$;*
(2) *$\mathcal{L}$ has a computable copy and contains at least one limit point.*

Proposition. *Let α be a computably enumerable noncomputable set. Then*

(1) *if $\overline{\alpha}$ is not immune then positive orderings of types $\omega+1$ and $1+\omega^*$ cannot be defined over $\eta(\alpha)$;*
(2) *if $\overline{\alpha}$ is regressive then positive orderings of types $\omega+1$ and $1+\omega^*$ are definable over $\eta(\alpha)$.*

A limit point of a negative (positive) linear order is called *effectively limit* if it is a limit of a strictly monotonic computable sequence.

Theorem. *There exists a positive linear ordering isomorphic to the ordering on the rational numbers without effectively limit elements.*

We also give some examples of computable automorphisms of negative orderings whose inverses are not computable.

Uzbek national M.Ulugbek university, Dept. of mechanics and mathematics, Tashkent (Uzbekistan)
E-mail: nadim59@mail.ru
Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: morozov@math.nsc.ru

IV. Секция «Теория групп»

Круговые единицы в кольцах вычетов колец целых круговых полей

Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, В. Н. Пузач

При изучении единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп возникает задача исследования свойств единиц колец целых $\mathbf{Z}[\zeta_{2^n}]$ круговых полей $\mathbf{Q}(\zeta_{2^n})$, где ζ_{2^n} — первообразный корень степени $2^n > 4$ из 1. Проблема Вебера о числе классов [**1**] в совокупности с [**2**] утверждает, что все единицы кольца $\mathbf{Z}[\zeta_{2^n}]$ будут круговыми. Ранее в [**3**] было показано, что группа круговых единиц равна для случая $\mathbf{Z}[\zeta_{2^n}]$

$$\langle\zeta_{2^n}\rangle \times \prod_{k=0}^{2^{n-2}-2} \left\langle \frac{1-\zeta_{2^n}^{5^{k+1}}}{1-\zeta_{2^n}^{5^k}} \right\rangle$$

Всякий порождающий $\frac{1-\zeta_{2^n}^{5^{k+1}}}{1-\zeta_{2^n}^{5^k}}$ бесконечного порядка имеет вид $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$ для подходящего первообразного корня α из 1 степени 2^n. Удобно рассматривать вместо них порождающие вида $1+(\alpha+\alpha^{-1})+(\alpha^2+\alpha^{-2})$.

Теорема. *Пусть для натурального s*

$$\left(1+(\alpha+\alpha^{-1})+(\alpha^2+\alpha^{-2})\right)^{2^{n-3+s}} = a_0 + \sum_{j=1}^{2^{n-2}-1} a_j(\alpha^j+\alpha^{-j}).$$

Тогда $a_0 \equiv 1 \pmod{2^s}$, $a_j \equiv 0 \pmod{2^s}$ для всех $j \in \{1,\dots,2^{n-2}-1\}$. Кроме того, существует такое $j \in \{1,\dots,2^{n-2}-1\}$, что $a_j \not\equiv 0 \pmod{2^{s+1}}$. Также $n-2$ — наименьшее неотрицательное целое, для которого a_0 нечётно, а все остальные a_j чётны.

Согласно [**4**] получаем в качестве следствия, что образы круговых единиц в кольце вычетов $\mathbf{Z}[\zeta_{2^n}]/2^s\mathbf{Z}[\zeta_{2^n}]$ имеют наибольший порядок.

Список литературы

[1] Miller J. C. Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem. Acta Arithmetica 164, №. 4 (2014), pp. 381-397.

[2] Sinnott W. On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field. Ann. of Math., Vol. 108, №. 1 (1978), pp. 107–134.

[3] Алеев Р. Ж., Такшеева В.С. Порождающие.группы круговых единиц., Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. Выпуск 10. №6 (107), 2008, с. 121–129.

[4] Алеев Р. Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп., Матем. труды, 3, № 1(2000), с. 3–37.

Южно-Уральский ГУ (НИУ), Челябинск; Челябинский ГУ, Челябинск; Костанайский филиал ЧелГУ, Костанай (Казахстан)

E-mail: aleev@csu.ru, ovm@csu.ru, puzach1984@mail.ru

Группы единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп

Р. Ж. Алеев, В. Н. Пузач

Пусть $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка $2^n \geqslant 16$ (для порядков 2 и 4 тривиально, а для 8 хорошо известно). Пусть $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ — нормализованная группа единиц целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ группы G. Пусть ζ — первообразный корень степени 2^n из 1. Пусть $\chi_0 = 1_G$, $\chi_1, \ldots, \chi_{2^n-1}$ — неприводимые комплексные характеры группы G, где $\chi_j(x^k) = \zeta^{jk}$ для любых j и k. Для любого $j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ пусть e_j — минимальный центральный идемпотент комплексной групповой алгебры $\mathbf{C}G$, соответствующий характеру χ_j. Для каждого $j = 0, \ldots, n-1$ возникает групповой гомоморфизм $\varphi_j : \mathrm{V}(\mathbf{Z}G) \to \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta^{2^j}])$, где $\varphi_j\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \beta_k e_k\right) = \beta_{2^j}$ и $\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta^{2^j}])$ — группа единиц кольца $\mathbf{Z}[\zeta^{2^j}]$.

Для $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ положим $\bigcap_{l \neq j} \ker \varphi_l = K_j$ и для любого t через σ_t обозначим автоморфизм кругового поля $\mathbf{Q}(\zeta^{2^j})$, продолжающий отображение $\zeta^{2^j} \mapsto \zeta^{(2t+1)2^j}$. Тогда

$$L_j = \left\{1 + \sum_{t=0}^{2^{n-1-j}-1} (\sigma_t(\lambda) - 1) e_{(2t+1)2^j} \,\middle|\, \lambda \in \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta^{2^j}])\right\}$$

— подгруппа группы единиц кольца целых рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$.

Теорема. *При введённых ранее обозначениях имеем:*

1) $K_{n-1} = K_{n-2} = \{1\}$;

2) $K_{n-3} = \left\langle t_{\chi_{2^{n-3}}}\left((1+\sqrt{2})^{2^{n-2}}\right)\right\rangle$ *(здесь* $t_{\chi_{2^{n-3}}}\left((1+\sqrt{2})^{2^{n-2}}\right)$ *определяется согласно* [**1**]*);*

3) $L_0 \times L_1 \times \cdots \times L_{n-1} \geqslant \mathrm{V}(\mathbf{Z}G) \geqslant K_0 \times K_1 \times \cdots \times K_{n-1}$, *причём индекс*

$$|L_0 \times L_1 \times \cdots \times L_{n-1} : K_0 \times K_1 \times \cdots \times K_{n-1}| < \infty.$$

Замечания.

1. На самом деле получены более точные свойства элементов из K_j для любого j, но они весьма громоздки;
2. При условии положительного решения проблемы Вебера о числе классов [**2**] можно:

а) указать точное строение K_j для любого j;

б) найти точное значение индекса из утверждения 3) теоремы.

Список литературы

[1] Алеев Р. Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп., Матем. труды, 3, № 1 (2000), с. 3–37.

[2] Miller J. C. Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem. Acta Arithmetica 164, №. 4 (2014), 381–397.

Южно-Уральский ГУ (НИУ), Челябинск; Костанайский филиал ЧелГУ, Костанай (Казахстан)
E-mail: aleev@csu.ru; puzach1984@mail.ru

Конечные почти простые группы, графы Грюнберга — Кегеля которых не содержат треугольников

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев

Графом простых чисел (или *графом Грюнберга—Кегеля*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq.

Лючидо [**5**] описала конечные простые группы G такие, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями, т. е. связными графами, не содержащими циклы. В данной работе получен более общий результат: определены конечные почти простые группы (т. е. группы с простым неабелевым цоколем), графы Грюнберга—Кегеля которых не содержат треугольников.

В качестве следствия этого результата получается, что если граф простых чисел конечной почти простой группы не имеет треугольников, то каждая его связная компонента является деревом. При этом существенно уточняется приведенный в [**5**] список конечных простых групп с таким свойством.

В доказательстве используется описание конечных почти простых n-примарных групп и их графов Грюнберга—Кегеля для $n \leq 6$ (см. [**2, 3, 4, 1**]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

Список литературы

[1] Колпакова В. А., Кондратьев А. С. Конечные почти простые 6-примарные группы и их графы Грюнберга-Кегеля // Алгебра и приложения: Труды межд. конф. по алгебре школы-конф., посвященной 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина. Нальчик: КБГУ, 2014. С. 63-66.

[2] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150-158.

[3] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142-159.

[4] Kondrat'ev A. S. Finite almost simple 5–primary groups и their Gruenberg-Kegel graphs // Сиб. эл. мат. изв.. 2014. Т. 11. С. 634-674.

[5] Lucido M. C. Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8), 2002. V. 5-B, № 1. P. 131–148.

Русско-Британский институт управления, Челябинск;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: Alekseeva.O.A@rbiu.ru, a.s.kondratiev@imm.uran.ru

О доминионах разрешимых групп

А. И. Будкин

Доминион $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H группы G в квазимногообразии $\mathcal{M}$ — это множество всех элементов $a \in G$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из G в каждую группу из $\mathcal{M}$, т.е.

$$\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in G \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : G \to M,\ \text{если}\ f\mid_H = g\mid_H,\ \text{то}\ a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : G \to M$ обозначены гомоморфизмы группы G в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы G, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). В результате возникает понятие замкнутой подгруппы.

Подгруппа H группы G ($G \in \mathcal{M}$) называется замкнутой в группе G (относительно класса $\mathcal{M}$), если $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = H$.

Группа H называется абсолютно замкнутой в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы G из $\mathcal{M}$ из каждого включения $H \le G$ следует, что $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = H$.

В данной работе исследуются доминионы абелевых подгрупп в группах из многообразия $\mathcal{AN}_c$.

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathcal{AN}_c$ и $H \le G$. Если $H \cap G' = (1)$, то подгруппа H замкнута в G относительно многообразия $\mathcal{AN}_c$.*

Теорема 2. *Неединичная абелева группа без кручения не является абсолютно замкнутой в классе $\mathcal{AN}_c (c \ge 1)$.*

Ранее [**1**] аналогичные результаты были получен автором для класса метабелевых групп.

Список литературы

[1] Будкин А. И. Об абсолютной замкнутости абелевых групп без кручения в классе метабелевых групп. Алгебра и логика. 2014. Т. 53, №1. С. 15–25.

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

О представлении свободных m-произведений m-групп автоморфизмами линейно упорядоченных множеств

С. В. Вараксин

Напомним, что *m-группой* (G,φ) называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e,^{-1}, \vee, \wedge, \varphi\rangle$, которая является ℓ-группой и операция φ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e,^{-1}\rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge\rangle$. Пусть G — группа с частичным P и автоморфизмом второго порядка φ. Порядок P реверсируется φ, если из $x \leqslant_P y$ следует $\varphi(y) \leqslant_P \varphi(x)$. Назовем φ реверсией, а пару (G,φ) ч. у. группой с реверсией.

Назовем также m-группу (F,φ) свободной над ч.у. группой с реверсией (G,φ), если (G,φ) вложима в (F,φ) и любой o-гомоморфизм $\alpha_0 : G \to H$, устойчивый относительно φ, продолжается до m-гомоморфизма $\alpha : F \to H$.

Теорема 1. *Пусть (G,φ) — ч.у. группа с реверсией . Тогда условия эквивалентны:*

1) существует свободная m-группа (F,φ) над (G,φ);

2) существует порядковый m-изоморфизм τ (G,φ) в некоторую m-группу (T,φ);

3) G^+ — это пересечение правых порядков.

Пусть теперь $\{(G_i,\varphi_i)\}$ — множество ч.у. групп с реверсиями, $G = \underset{i}{*} G_i$ — их свободное произведение в классе групп, автоморфизм φ — продолжение φ_i на G, а частичный порядок P на G порожден порядками G_i^+, $P = \langle g_i^g | g_i \in G_i^+, g \in G\rangle$.

Теорема 2. *Ч.у. группа (G,φ) с порядком P и реверсией φ является свободным произведением групп (G_i,φ_i) в классе ч.у. групп с реверсиями.*

Пусть теперь $\{(G_i,\varphi_i)\}$ — множество m-групп, $G = \underset{i}{*} G_i$ — их свободное произведение в классе групп, φ — продолжение φ_i на G, а частичный порядок P на G порожден порядками на G_i. Пусть H — свободная m-группа над (G,φ). Тогда m-группы (G_i,φ) допускают o-вложения α_i в m-группу (H,φ), перестановочные с φ (но не ℓ-вложения). Обозначим через $J = \langle (\alpha_i(g)^-)^{-1} \wedge \alpha_i(g)^+ | g \in G_i\rangle$ m-идеал m-группы (H,φ), а через F фактор-группу H/J по этому m-идеалу.

Теорема 3. *m-группа (F,φ) является свободным произведением m-групп (G_i,φ_i) в классе m-групп.*

Список литературы

[1] Conrad P. Free Lattice-Ordered Groups // J. of Algebra, 1970 (16), p. 191–203.

[2] Giraudet M., Rachůnek J. Varieties of half lattice ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J.1999, 49(124), p.743-766.

[3] Holland C., Scrimger E. Free products of lattice-ordered groups // Algebra Univ. 1972, v.2, p. 247–254.

[4] Вараксин С. В. О свободных m-группах и свободных m-произведениях // Изв. Алт.ГУ, N 1-1 (2013), 16–18.

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: varaksins@yandex.ru

О размере минимального 1-совершенного битрейда в q-значном n-кубе

К. В. Воробьёв

Будем называть q-значным n-кубом H_q^n граф, вершинами которого являются все векторы длины n с элементами из множества $\{0, 1, \dots q-1\}$. Расстоянием Хэмминга между вершинами $x, y \in H_q^n$ называется число позиций, в которых x и y различны. Множество $S(f) = \{x \in H_q^n | f(x) \neq 0\}$ называется носителем функции f.

Функция $f : H_q^n \to \{-1, 0, 1\}$ называется 1-совершенным битрейдом, если в каждом шаре радиуса 1 все её значения равны 0 за исключением, возможно, двух вершин, в которых она равна -1 и 1 соответственно. Примером 1-совершенного битрейда в H_q^n служит функция, являющаяся разностью характеристических функций двух различных 1-совершенных кодов в графе H_q^n, где под 1-совершенным кодом в графе понимается такое множество C вершин графа, что любой шар радиуса 1 в этом графе содержит ровно одну верщину из C. Ранее также изучался похожий класс собственных функций в латинских квадратах и гиперкубах – латинские битрейды [**1**], [**2**]. Известные нижние оценки на мощность носителя 1-совершенного битрейда можно найти в работе [**3**].

В данной работе найдена новая нижняя оценка на размер носителя 1-совершенного битрейда в q-значном n-кубе.

Теорема. *Пусть f - 1-совершенный битрейд в H_q^n, $q \geq 3$ и $f \not\equiv 0$. Тогда*

$$|S(f)| \geq \begin{cases} 2^{n-\frac{n-1}{q}}(q-2)^{\frac{n-1}{q}}, \text{если } q \geq 4, \\ 3^{\frac{n}{2}}(1-\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}(1+\frac{3}{2(n-1)})^{\frac{2n+1}{6}}, \text{если } q = 3. \end{cases}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (№ 14-11-00555).

Список литературы

[1] Cavenagh N. J. The theory and application of latin bitrades: A survey // Mathematica Slovaca. — 2008. — V. 58, N. 6 — P. 691–718.

[2] Potapov V. N. Multidimensional Latin bitrades // Siberian Mathematical Journal. — 2013. — V. 52, N. 2. — P. 317–324.

[3] Potapov V. N. On perfect 2-colorings of the q-ary n-cube // Discrete Mathematics. — 2012. — V. 312, N. 8. — P. 1269–1272.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: konstantin.vorobev@gmail.com

О группах с множеством размеров классов сопряженности как у знакопеременных групп

И. Б. Горшков

Пусть G — конечная группа, $N(G)$ — множество размеров классов сопряженности группы G. В восьмидесятых годах прошлого столетия Томпсоном была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза Томпсона. *Пусть L — конечная неабелева простая группа, G — конечная группа с тривиальным центром и $N(G) = N(L)$. Тогда $G \simeq L$.*

Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. Пусть $GK(G)$ — граф простых чисел группы G с множество вершин $\pi(G)$, где два различных простых числа p и q из $\pi(G)$ соединены ребром, если в G найдется элемент порядка pq. В настоящий момент справедливость гипотезы Томпсона доказана почти для всех конечных простых групп с несвязным графом простых чисел. В частности, Алави и Данешкхах в [**1**] доказали ее для знакопеременных групп степени p, $p+1$ и $p+2$, где p — простое число, большее 13. В [**2**] – [**4**] была доказана справедливость гипотезы для знакопеременных групп степени 10, 16 и 22, имеющих связный граф простых чисел. Однако вопрос о справедливости гипотезы для знакопеременных групп остается открытым. На пути решения этого вопроса удалось показать неразрешимость групп с тем же множеством размеров классов сопряженности, что и некоторая простая неабелева знакопеременная группа.

Теорема. *Пусть L — конечная неабелева простая знакопеременная группа, G — конечная группа с тривиальным центром и $N(G) = N(L)$. Тогда G неразрешима.*

Список литературы

[1] Alavi S. H. and Daneshkhah A. A new characterization of alternating and symmetric groups, Journal of Applied Mathematics and Computing, vol. 17, no. 1-2, pp. 245–258, 2005.

[2] Vasil′ev A. V. On Thompson's conjecture, Sib. Elektron. Mat. Izv., vol. 6, pp. 457–464, 2009.

[3] Gorshkov I. B. Thompson's conjecture for simple groups with a connected prime graph, Algebra and Logic, vol. 51, no. 2, pp. 111–127, 2012.

[4] Xu M. Thompson's conjecture for alternating group of degree 22, Frontiers of Mathematics in China, vol. 8, no. 5, pp. 1227–1236, 2013.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия),
Instituto de Matematica e Estatistica, Universidade de Sao Paulo (Brazil)
E-mail: Ilygor@math.nsc.ru

Локально разрешимые подгруппы финитарной линейной группы над коммутативным кольцом

О. Ю. Дашкова

В [**1**], [**2**] было начато изучение финитарной линейной группы $FL_\nu(K)$, где K – кольцо с единицей, ν – линейно упорядоченное множество.

В [**3**] исследовались локально разрешимые подгруппы финитарной линейной группы над коммутативным нетеровым кольцом с единицей.

В настоящей работе изучаются локально разрешимые подгруппы финитарной линейной группы над произвольным коммутативным кольцом с единицей.

Основным результатом работы является теорема.

Теорема. *Пусть G – локально разрешимая подгруппа $FL_\nu(K)$, K – коммутативное кольцо с единицей. Тогда каждая конечно порожденная подгруппа H группы G обладает рядом нормальных подгрупп $A \le M \le H$, таким, что подгруппа A – абелева, фактор-группа M/A – метанильпотентна, а фактор-группа H/M – полициклическая.*

References

[1] Левчук В. М. Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы // Мат. заметки. – 1987. – Т. 42. – № 5. – С. 631–641.

[2] Мерзляков Ю. И. Эквиподгруппы унитреугольных групп: критерий самонормализуемости // ДАН. – 1994. – Т. 339. – № 6. – С. 732–735.

[3] Dashkova O. Yu. On locally soluble subgroups of the finitary linear group // Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" – Казань, 2014. — С. 50.

Филиал МГУ в г. Севастополе, Севастополь
E-mail: odashkova@yandex.ru

Проблема изоморфизма невозрастающих GBS групп разрешима

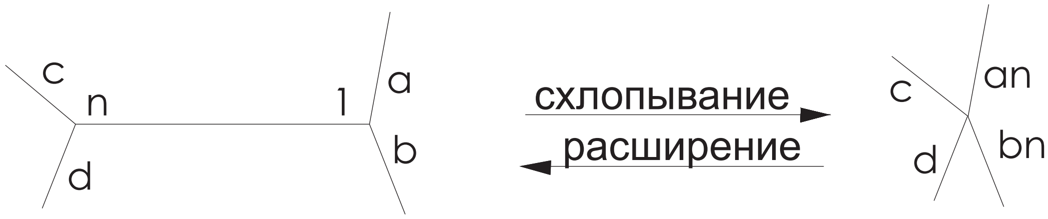
Ф. А. Дудкин

Будем называть конечно порожденную группу G *обобщенной группой Баумслага–Солитера (GBS группой)*, если группа G может действовать на дереве так, что стабилизаторы вершин и ребер – бесконечные циклические группы. По теореме Басса-Серра группа G представима в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы некоторого графа групп $\mathbb{A}$ [**1**], вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические группы.

Всякой GBS группе G можно сопоставить граф с метками (Γ, λ), где Γ – конечный граф, а $\lambda\colon E(\Gamma) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах Γ.

Отметим, что GBS группы довольно активно исследовались в последнее время [**4**], [**2**], [**3**]. В частности, активно обсуждалась проблема изоморфизма GBS групп: определить алгоритмически когда два данных графа с метками задают изоморфные GBS группы. Несмотря на то, что в некоторых частных случаях проблема изоморфизма была решена [**5**], [**6**], [**7**], в общем случае существование алгоритма не установлено.

Рассмотрим некоторые преобразования графа с метками, которые не меняют его фундаментальную группу, а именно, схлопывания и расширения:



Если две GBS группы изоморфны, то соответствующие графы с метками связаны конечной последовательностью схлопываний и расширений [**5**].

Граф с метками называется *редуцированным*, если преобразования схлопывания для него невозможно, множество редуцированных графов, представляющих данную GBS группу G обозначается $R(G)$. Будем называть GBS группу G *возрастающей*, если среди графов с метками $R(G)$ есть содержащие петлю, одна из меток которой равна 1 или -1. Тогда *невозрастающая* GBS группа определяется тем, что никакой граф с метками из $R(G)$ не содержит ребро с меткой 1 или -1. Основным результатом данной работы является

Теорема. *Проблема изоморфизма невозрастающих GBS групп алгоритмически разрешима.*

Этот результат охватывает много новых, не рассмотренных ранее, GBS групп. Тем не менее, в общем случае проблема изоморфизма GBS групп остается нерешенной.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект No14-21-00065).

Список литературы

[1] Serre J.-P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.
[2] Forester M. On uniquenes of JSJ decomposition of finitely generated groups, Comm. Math. Helv., 78, 2003, 740–751.
[3] Clay M. Deformation spaces of G-trees and automorphisms of Baumslag-Solitar groups, Groups Geom. Dyn., 3, 2009, 39–69.
[4] Clay M., Forester M. Whitehead moves for G-trees, Bull. London Math. Soc., 41, №2 (2009), 205–212.
[5] Forester M. Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups, Geometriae Dedicata, 121, №1 (2006), 43–59.
[6] Clay M., Forester M. On the isomorphism problem for generalized Baumslag-Solitar groups, Algebraic & Geometric Topology, 8 (2008), 2289–2322.

[7] Levitt G. On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups, Geometry & Topology, 11 (2007) 473–515.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: DudkinF@ngs.ru

Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{99, 84, 30; 1, 6, 54\}$

К. С. Ефимов, А. А. Махнев

А.А. Махневым предложена программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 3. В работе [**1**] доказано, что дистанционно регулярный граф, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (99,14,1,2), имеет массив пересечений $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$, $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ или $\{99, 84, 30; 1, 6, 54\}$. В работе [**2**] найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$. В работе [**3**] найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (99,14,1,2).

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{99, 84, 30; 1, 6, 54\}$. Доказано, что группа автоморфизмов G такого графа действует интранзитивно на множестве его вершин и $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

Теорема. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{99, 84, 30; 1, 6, 54\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(99, 14, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3\}$ *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф,* $p = 2$, $\alpha_2(g) = 1128 + 3\alpha_1(g) - 3948l$, $\alpha_3(g) = 3948l + 1128 - 2\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g)/2 + l - 3$ *делится на* 11*;*

(2) Ω *состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии* 3 *в* Γ, $p = 3$ *и* $|\Omega| \in \{3, 6, ..., 21\}$*;*

(3) $p = 2$, Ω *является объединением* n *изолированных ребер, расстояние в* Γ *между вершинами из разных ребер равно* 3, *и* $n \leq 12$*;*

(4) $p = 3$, Ω *является объединением* m *изолированных* 4*-клик, расстояние в* Γ *между вершинами из разных клик равно* 3, *и* $m \in \{1, 3, 6, 9, 12\}$.

Работа выполнена при поддержке соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

Список литературы

[1] Махнев А. А. О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(99, 14, 1, 2)$ // Доклады академии наук. 2011. Т. 439, №4. С. 443–447.

[2] Агеев П. С., Махнев А. А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$ // Доклады академии наук. 2014. Т. 458, №1. С. 7–11.

[3] Махнев А. А., Минакова И. М. Об автоморфизмах графов с $\lambda = 1$, $\mu = 2$ // Дискрет. матем. 2004. Т. 16, №1. С. 95–104.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург;
Уральский государственный экономический университет
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, kysulya_ne@mail.ru

О решетке конгруэнций m-групп

А. В. Зенков

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e,^{-1}, \vee, \wedge, \,_* \rangle$, где $\langle G, \cdot, e,^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция $_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e,^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения $(xy)_* = x_* y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*$. В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом $_*$ записываем *как пару* $(G,_*)$. Будем говорить [**1**], что m-группа $(G, \,_*)$ допускает (точное) представление порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω, если $G \subseteq Aut(\Omega)$ и $(g)_* = aga$ для любого $g \in G$, где a– реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a). Представление (G, Ω, a) назовем *m-транзитивным*, если для всех $w, w' \in \Omega$, быть может за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = gr.(G, a)$, что $(w)x = w'$.

Стандартно, отношение эквивалентности Θ, определенное на Ω, будем называть отношением *m-эквивалентности*, если оно является выпуклым и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$.

В работе изучается строение решетки конгруэнций произвольного m-транзитивного представления.

Список литературы

[1] Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J., 1999, V.49 ,№124, p.743–766.

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул
E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

О пересечениях примарных подгрупп в конечных группах с цоколем, изоморфным $F_4(2)$

В. И. Зенков, Я. Н. Нужин

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Пусть M — множество всех минимальных по включению пересечений вида $A \cap B^g$, $g \in G$, а m — подмножество элементов минимального порядка из M. Положим $\mathrm{Min}_G(A, B) = \langle M \rangle$ и $\min_G(A, B) = \langle m \rangle$. Очевидно, следующие три условия равносильны: а) $A \cap B^g \neq 1$ для всех $g \in G$, б) $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$, в) $\min_G(A, B) \neq 1$.

Для формулировки основного результата нам потребуется информация о некоторых подгруппах группы Шевалле $F_4(2)$. Пусть r_2 и r_3 — фундаментальные корни системы корней типа F_4, порождающие подсистему корней типа B_2 (срединные корни в графе Кокстера типа F_4). Обозначим через $P_{2,3}$ параболическую подгруппу, порожденную мономиальными элементами n_{r_2}, n_{r_3} и унипотентной подгруппой U, соответствующей положительным корням. Подгруппа $P_{2,3}$ инвариантна относительно графового автоморфизма τ порядка 2, ее подгруппа Леви L изоморфна группе Шевалле $B_2(2)$ и $L\langle\tau\rangle \simeq Aut(A_6)$.

В [**1**, теорема B1] доказано, что $\min_G(S, S) \neq 1$ для силовской 2-подгруппы S группы $G = Aut(F_4(2))$. Следующая теорема уточняет этот результат.

Теорема. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $F_4(2)$, и S — силовская 2-подгруппа G. Если $\min_G(S, S) \neq 1$, то $G \simeq Aut(F_4(2))$ и*

$$\min_G(S, S) = O_2(P_{2,3})\min_{L\langle\tau\rangle}(S_1, S_1),$$

где S_1 — силовская 2-подгруппа группы $L\langle\tau\rangle$ и $\min_{L\langle\tau\rangle}(S_1, S_1) \simeq D_{16}$.

Работа первого автора поддержана РФФИ (проект 13-01-00476), Программой Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), Программой совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018), с НАН Беларуси (проект 12-с-1-1009), Программой поддержки ведущих университетов России (соглашение №02.A03.210006 от 27.08.2913). Работа второго автора поддержана РФФИ (проект 12–01–00968).

Список литературы

[1] Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд.и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, СФУ, Красноярск
E-mail: v1i9z52@mail.ru, nuzhin2008@rambler.ru

О группах, в которых централизаторы всех инволюций слойно конечны

М. Н. Ивко

В работе [**1**] Н. М. Сучковым с помощью одного из результатов о бесконечных группах Цассенхауза (т.е. о дважды транзитивных группах с тривиальным стабилизатором трёх точек) было получено описание периодических групп с абелевыми централизаторами инволюций. В настоящей работе рассматривается некоторый аналог этого результата в более обширном классе групп. А именно, также опираясь на свойства групп Цассенхауза (см., например, теорему 5.20 из [**2**]), получена следующая

Теорема. *Пусть G — группа с конечной инволюцией и централизаторы всех инволюций из G слойно конечны. Если в группе G некоторые две инволюции перестановочны, то она почти слойно конечна и содержит лишь конечное множество инволюций.*

Список литературы

[1] Сучков Н. М. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций, Матем. сб., 193, №2 (2002), 153–160.

[2] Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. Бесконечные группы с инволюциями, Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011.

филиал ОмГПУ, г. Тара
E-mail: ivkom@mail.ru

О конечных неразрешимых 5-примарных группах G с несвязным графом Грюнберга — Кегеля таких, что $|\pi(G/F(G))| \leq 4$

В. А. Колпакова, А. С. Кондратьев

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G. *Граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq. Группа G с простым неабелевым цоколем называется *почти простой*. Группа G называется *n-примарной*, если $|\pi(G)| = n$.

Наше внимание привлекает задача подробного изучения класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. В рамках этой задачи А. С. Кондратьев и И. В. Храмцов [**2, 3, 4, 5**] изучали конечные группы, имеющие несвязный граф простых чисел с числом вершин, не превосходящим 4.

В недавней работе А. С. Кондратьева [**1**] были определены почти простые 5-примарные группы вместе с их графами простых чисел.

Мы продолжаем эти исследования, имея целью описать главные факторы конечных неразрешимых не почти простых 5-примарных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля.

В данной работе получено описание главных факторов коммутантов конечных неразрешимых 5-примарных групп G с несвязным графом $\Gamma(G)$ в случае, когда $G/F(G)$ — почти простая n-примарная группа для $n \leq 4$.

В доказательстве используются результаты работ [**2, 3**] и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-11-00061).

Список литературы

[1] Kondrat'ev A. S. Finite almost simple 5–primary groups и their Gruenberg-Kegel graphs // Сиб. эл. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 634-674.

[2] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150-158.

[3] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142-159.

[4] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных непростых трипримарных группах с несвязным графом простых чисел // Сиб. эл. матем. изв. – 2012. – Т. 9. – С. 472–477.

[5] Храмцов И. В. О конечных непростых 4-примарных группах // Сиб. эл. матем. изв. – 2014. – Т. 11. – С. 695–708.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: leralid@mail.ru, a.s.kondratiev@imm.uran.ru

О модулярных представлениях группы $L_3(17)$

А. С. Кондратьев, И. Д. Супруненко, И. В. Храмцов

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G. *Граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq.

Наше внимание привлекает задача подробного изучения класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. В рамках этой задачи А. С. Кондратьев и И. В. Храмцов [**1**] описали в большинстве случаев нормальное строение конечных четырепримарных групп G с несвязным графом простых чисел. К сожалению, в таблице 1 и теореме 7 из этой статьи был пропущен случай, когда G имеет композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$ порядка $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 17^3 \cdot 307$. Восполняя этот пробел, в [**2**] они рассмотрели этот случай и, в частности, показали, что p-главный фактор группы G, входящий в $F(G)$, может быть изоморфен 306-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)(G/F(G))$-модулю для каждого $p \in \{2, 3, 17\}$.

В данной работе описаны все абсолютно неприводимые $L_3(17)$-модули над полем характеристики $p \in \{2, 3, 17\}$, на которые элемент порядка 307 действует свободно. Как следствие, определены все возможности для главных факторов конечных групп, которые имеют несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), гранта Уро РАН для молодых ученых (проект 14-1-НП-27) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, грант № 02.A03.21.0006).

Список литературы

[1] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.

[2] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных группах, которые имеют несвязный граф простых чисел и композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$ // Материалы конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014, С. 81–82.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург;
Институт математики НАН Беларуси
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, suprunenko@im.bas-net.by, ihramtsov@gmail.com

О главных факторах параболических максимальных подгрупп скрученных классических групп

В. В. Кораблева

Одной из фундаментальных задач теории групп является изучение подгруппового строения данной группы. Группы лиева типа составляют основной массив конечных простых групп. Изучение унипотентных подгрупп группы лиева типа является ключом в понимании ее строения и свойств. В работах автора [**1**], [**2**] было получено уточненное описание главных факторов параболических максимальных подгрупп, входящих в унипотентный радикал, для всех групп нормального лиева типа, за исключением групп типов B_l, C_l, F_4, G_2 над полем четной характеристики и типа G_2 над полем характеристики 3, и для группы ${}^2E_6(q^2)$. В данной работе продолжаются исследования в этом направлении.

Пусть G — конечная простая группа ${}^2A_l(q^2)$ или ${}^2D_l(q^2)$ и $P = UL$ — параболическая максимальная подгруппа в G, где U — унипотентный радикал и L — дополнение Леви в P. Из [**3**] следует, что факторы нижнего центрального ряда группы U являются главными факторами группы P и являются неприводимыми $GF(q)L$-модулями или $GF(q^2)L$-модулями. Число этих факторов не зависит от поля $GF(q^2)$, а зависит только от лиева типа группы G.

Если A и B — нормальные подгруппы группы P, B — подгруппа A и фактор-группа A/B является минимальной нормальной подгруппой в P/B, то A/B называется *главным фактором* группы P.

В настоящей работе автором для конечных простых групп ${}^2A_l(q^2)$ и ${}^2D_l(q^2)$ уточняется описание главных факторов каждой ее параболической максимальной подгруппы, входящих в унипотентный радикал. Приводятся таблицы, в которых указываются размерности и порождающие элементы соответствующих модулей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469) и Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Список литературы

[1] Кораблева В. В. О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Сиб. мат. журн., 2014. Т. 55, № 4. С. 764–782.

[2] Кораблева В. В. О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^2E_6(q^2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2014. Т. 20, № 2. С. 230–237.

[3] Azad H., Barry M., Seitz G. On the structure of parabolic subgroup // Comm. Algebra, 1990. V. 18, – № 2. P. 551–562.

Челябинский госуниверситет, Челябинск,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: vvk@csu.ru

О применении частотного анализа для решения проблемы расстояний в группе Джевонса, индуцирующей действие на множестве булевых функций

А. М. Кукарцев, А. А. Кузнецов

Постановка задачи. Пусть $E = \{0, 1\}$ – булево множество и n – целое неотрицательное число. Булевой функцией, далее БФ, местности n будем называть $f\colon E^n \to E$. Всё множество таких отображений обозначим как $B(n)$. Группы инвертирования переменных БФ (группу сдвигов) и перестановок переменных БФ (симметрическую группу) обозначим как E_n и S_n соответственно [**1**]. Группу Джевонса (полупрямое произведение $E_n \leftthreetimes S_n$) обозначим как D_n [**1**]. Тогда пусть $f, g \in B(n)$ и $(z\pi) \in D_n, z \in E_n, \pi \in S_n$ и имеет место уравнение $f^{(z\pi)} = g$ относительно $(z\pi)$. Решение такого уравнения является классической алгебраической задачей, т. н. проблемой расстояний. В общем случае (произвольные группа и множество) на сегодняшний день она не разрешима. Для множества БФ и группы Джевонса, в силу конечности обеих, данная проблема тривиально разрешима. Но это требует перебор всех значений группы D_n при её порядке $|D_n| = 2^n n!$ и, как следствие, экспоненциальное время получения решения.

Поиск решения связан с понятием инварианта группы, действующей на множестве [**1**]. Инвариант группы показывает, что множество решений пусто/не пусто и косвенно помогает в отыскании решений. С. В. Голомб показал, что для группы Джевонса существует полный инвариант [**2**]. К сожалению, для расчёта такого инварианта требуется экспоненциальное время. Э. А. Якубайтис также предложил инвариант группы Джевонса, но в отличие от инварианта С. В. Голомба, он не полон.

Предлагаемое решение. Для подавляющего большинства случаев, когда подгруппа инерции $J_{D_n}(f)$ тривиальна [**1**], авторами предлагается алгоритм, позволяющий решить задачу за полиномиальное время. Авторами доказано, что частотные характеристики булевых функций, рассматриваемые как информационные сообщения, специфичны, при действии порождающих элементов группы Джевонса. За счёт этого допустимо вычислить $(z\pi)$ за полиномиальное время в виде упорядоченного произведения таких порождающих элементов.

Список литературы

[1] Логачёв О. А., Сальников А. А., Ященко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии, МЦМНО, Москва, 2004.

[2] Глухов М. М., Ремизов А. В., Шапошников В. А. Обзор по теории k-значных функций. Часть 1. Справочное пособие, Типография в/ч 33965, Москва, 1988.

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнёва, Красноярск

E-mail: amkukarcev@mail.ru,alex_kuznetsov80@mail.ru

О наследуемости холлова свойства $\mathcal{D}_\pi$ надгруппами π-холловых подгрупп

Н. Ч. Манзаева

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная группа G называется π-группой, если множество простых делителей её порядка лежит в π. Подгруппа H конечной группы G называется π-холловой, если H является π-группой и все простые делители её индекса не лежат в π. Следуя Ф.Холлу [**1**], будем говорить, что группа G обладает свойством $\mathcal{D}_\pi$ (или, короче, $G \in \mathcal{D}_\pi$), если все её максимальные π-подгруппы сопряжены. Группу со свойством $\mathcal{D}_\pi$ будем также называть $\mathcal{D}_\pi$-группой.

В «Коуровской тетради» [**2**] под номером 17.44(б) записана следующая

Проблема. *Всегда ли в $\mathcal{D}_\pi$-группе надгруппа π-холловой подгруппы является $\mathcal{D}_\pi$-группой?*

Обозначим через $\mathcal{U}_\pi$ класс всех конечных $\mathcal{D}_\pi$-групп, в которых всякая надгруппа π-холловой подгруппы обладает свойством $\mathcal{D}_\pi$. Тогда проблему 17.44(б) можно переформулировать эквивалентным образом:*верно ли, что $\mathcal{U}_\pi = \mathcal{D}_\pi$?*

С помощью классификации конечных простых групп доказана следующая

Теорема. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и группа G обладает свойством $\mathcal{D}_\pi$. Предположим, что H — π-холлова подгруппа группы G. Тогда любая подгруппа M группы G, содержащая H, является $\mathcal{D}_\pi$-группой. Другими словами $\mathcal{D}_\pi = \mathcal{U}_\pi$.*

Таким образом, для любого множества π простых чисел свойство $\mathcal{D}_\pi$ наследуется надгруппами π-холловых подгрупп.

Список литературы

[1] Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. Ser. 3., 6, № 22 (1956), 286–304.

[2] Mazurov V. D., Khukhro E. I. (editors) The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory // RAS Siberian Division, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 17 (2010).

НГУ, Новосибирск
E-mail: manzaeva@mail.ru

О совпадении классов E_π и D_π конечных групп для некоторых множеств π нечетных простых чисел

Н. В. Маслова

Пусть π - некоторое множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется π-холловой подгруппой, если порядок H делится только на числа из π, а индекс $|G:H|$ взаимно прост с порядком H. Через E_π обозначим класс групп, обладающих π-холловой подгруппой. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены в группе, то будем говорить, что группа принадлежит классу C_π. Если, к тому же, любая π-подгруппа группы содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что группа принадлежит классу D_π.

В 1956 г. Ф. Холл высказал гипотезу о том, что для любого множества нечетных простых чисел π классы E_π и D_π совпадают. Ф. Гросс опроверг гипотезу Ф. Холла, доказав, что для любого конечного множества нечетных простых чисел π, содержащего более одного элемента, существует конечная группа, принадлежащая классу $E_\pi \setminus D_\pi$. Естественным образом возникает следующая проблема: для каких множеств простых чисел π выполняется равенство $E_\pi = C_\pi = D_\pi$?

Пусть x — действительное число и

$$\pi_x = \{p \mid p - \text{простое число и } p < x\}.$$

З. Арад и М. Уорд [**1**, теорема 4.9] доказали, что $E_{\pi_x} = D_{\pi_x}$ для $x < 3$. Д.О. Ревиным [**2**, теорема 1] было показано, что для $x \geq 7$ также выполнено равенство $E_{\pi_x} = D_{\pi_x}$, и была сформулирована проблема [**2**, проблема 8]: верно ли, что для любого действительного числа x выполняется равенство $E_{\pi_x} = D_{\pi_x}$? В настоящей работе доказана

Теорема. *Для любого действительного числа x выполняется равенство*

$$E_{\pi_x} = D_{\pi_x}.$$

Список литературы

[1] **Arad Z., Ward M. B.** New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. Vol. 77, no. 1. P. 234–246.

[2] **Ревин Д. О.** Вокруг гипотезы Ф. Холла // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т.6. С. 366–380.

ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург
E-mail: butterson@mail.ru

О дистанционно регулярных накрытиях клик с сильно регулярными окрестностями вершин

А. А. Махнев, Д. В. Падучих, М. С. Самойленко

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Допустим, что Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\lambda = \mu$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ'). Тогда (см. [**1**]) Γ имеет массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, и спектр k^1, $\sqrt{k}^f$, -1^k, $-\sqrt{k}^f$, где $f = (k+1)(r-1)/2$. В случае $r = 2$ получим граф Тэйлора, в котором $k' = 2\mu'$. Обратно, для любого сильно регулярного графа с параметрами $(v', 2\mu', \lambda', \mu')$ найдется граф Тэйлора, в котором окрестности вершин сильно регулярны с соответствующими параметрами.

Теорема. *Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\lambda = \mu$ и $r > 2$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с не более чем 1000 вершинами. Если Γ — реберно симметричный граф, то $k = q = p^e$, p — простое число,* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *содержит нормальную подгруппу, изоморфную $L_2(q)$, Γ имеет массив пересечений $\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\}$ и для подграфа $\Delta = [u]$ верно одно из утверждений:*

(1) Δ *имеет параметры* $(16, 5, 0, 2)$, $(64, 21, 8, 6)$, $(81, 16, 7, 2)$, $(81, 20, 1, 6)$, $(243, 22, 1, 2)$, $(625, 48, 23, 2)$, $(625, 208, 63, 72)$, $(729, 52, 25, 2)$, $(729, 104, 31, 12)$ *или* $(729, 182, 55, 42)$;

(2) Δ *имеет параметры* $(25, 8, 3, 2)$, $(49, 12, 5, 2)$, $(121, 20, 9, 2)$, $(121, 30, 11, 6)$, $(121, 40, 15, 12)$, $(169, 24, 11, 2)$, $(289, 32, 15, 2)$, $(289, 48, 17, 6)$, $(289, 96, 35, 30)$, $(361, 36, 17, 2)$, $(361, 72, 23, 12)$, $(361, 90, 29, 20)$;

(3) Δ *имеет параметры* $(529, 44, 21, 2)$, $(529, 66, 23, 6)$, $(529, 88, 27, 12)$, $(529, 132, 41, 30)$, $(529, 176, 63, 56)$, $(837, 76, 15, 6)$, $(841, 56, 27, 2)$, $(841, 84, 29, 6)$, $(841, 140, 39, 20)$, $(841, 168, 47, 30)$, $(841, 280, 99, 90)$, $(901, 60, 3, 4)$, $(961, 60, 29, 2)$, $(961, 120, 35, 12)$, $(961, 240, 71, 56)$.

Работа выполнена при поддержке соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006.

Список литературы

[1] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1989.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com, ghost1212@mail.ru

Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован.

В работе продолжается программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением r, $3 < r \leq 4$. В статье [**1**] получена редукция к локально исключительным графам. А.А. Махнев, и Д.В. Падучих нашли параметры исключительных графов со вторым собственным значением 4. Оказалось, что имеется 515 наборов параметров, из них 164 отвечают псевдогеометрическим графам. Случай исключительных псевдогеометрических графов рассмотрен А.К. Гутновой и А.А. Махневым.

Теорема. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — исключительные непсевдогеометрические графы со вторым собственным значением 4. Если* u *— вершина графа* Γ, *то верно одно из утверждений:*

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(27, 16, 10, 8)$, $(63, 32, 16, 16)$, $(135, 64, 28, 32)$, $(189, 88, 37, 44)$, $(243, 112, 46, 56)$, $(279, 128, 52, 64)$ *или* $(351, 160, 64, 80)$ *и* Γ *является графом Тэйлора;*

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(85, 14, 3, 2)$ *и либо* Γ *имеет массив пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, *либо* $\mu \in \{5, 7, 10\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(169, 56, 15, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$*;*

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(204, 28, 2, 4)$, $(232, 33, 2, 5)$, $(243, 22, 1, 2)$, $(325, 54, 3, 10)$, $(352, 26, 0, 2)$, $(352, 36, 0, 4)$, $(378, 52, 1, 8)$, $(676, 108, 2, 20)$ *или* $(729, 112, 1, 20)$*;*

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(289, 72, 11, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$ *или* $[u]$ *имеет параметры* $(441, 88, 7, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$*;*

(5) $[u]$ *имеет параметры* $(505, 84, 3, 16)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$, *или* $[u]$ *имеет параметры* $(625, 104, 3, 20)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$.

Список литературы

[1] Махнев А. А. Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения // Известия Гомельского госуниверситета. 2014. Т. 84, №3. С. 84–85.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com

Антиподальные дистанционно регулярные накрытия графов эрмитовых форм $Herm(2, q^2)$

А. А. Махнев, Д. В. Падучих, Л. Ю. Циовкина

В [**1**] получено описание примитивных антиподальных накрытий графов ранга 3. К сожалению, в [**1**] при описании накрытий диаметра 4 некорректно рассмотрен случай графов эрмитовых форм. В данной работе исследуются антиподальные дистанционно регулярные накрытия графов эрмитовых форм $Herm(2, q^2)$, для которых группа автоморфизмов индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном. Граф $Herm(2, q^2)$ сильно регулярен с параметрами $(q^4, (q-1)(q^2+1), q-2, (q-1)q)$ и спектром $k^1, (q-1)^{(q^2-q)(q^2+1)}, -(q^2-q+1)^{(q-1)(q^2+1)}$.

Теорема. *Пусть* Γ *— антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4, являющийся накрытием графа эрмитовых форм* $Herm(2, q^2)$. *Если* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном графа* Γ, *то* Γ *— граф Уэлса или граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея.*

Следствие. *Пусть* Γ *— антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4, являющийся накрытием примитивного графа ранга 3. Тогда* Γ *— один из следующих графов:*

(1) *4-куб (2-накрытие свернутого 4-куба) или граф Уэлса (2-накрытие графа свернутого 5-куба с параметрами* $(16, 5, 0, 2)$*);*

(2) *8-клетка Татта с массивом пересечений* $\{6, 4, 2, 1; 1, 1, 4, 6\}$ *(3-накрытие обобщенного четырехугольника* $GQ(2, 2)$*) или граф Джонсона* $J(8, 4)$ *(2-накрытие свернутого графа Джонсона* $\bar{J}(8, 4)$*);*

(3) *половинный 8-куб (2-накрытие свернутого половинного 8-куба) или граф с массивом пересечений* $\{20, 19, 6(r-1)/r, 1; 1, 6/r, 19, 20\}$ *(r-накрытие графа эрмитовых форм* $Herm(2, 3^2)$, $r \in \{2, 3, 6\}$*);*

(4) *граф Конвея-Смита (3-накрытие графа* $\bar{T}(7)$*) или граф с массивом пересечений* $\{22, 21, 6(r-1)/r, 1; 1, 6/r, 21, 22\}$ *(r-накрытие графа Хигмена-Симса,* $r \in \{2, 3, 6\}$*);*

(5) *первый или второй граф Сойчера (3-накрытие графа с параметрами* $(162, 56, 10, 24)$*) или 3-накрытие графа Судзуки с параметрами* $(1782, 416, 100, 96)$*);*

(6) $3.Fi_{24}^{-}$*-граф (3-накрытие графа 3-транспозиций с параметрами* $(306936, 31671, 3510, 3240)$.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00061)

Список литературы

[1] Alfuraidan M. R. Antipodal distance transitive covers with primitive quotient diameter two // Discrete Math. 2013. V. 313. P. 2409–2422.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com, l.tsiovkina@gmail.com

Разрешимость регулярных уравнений в классе нильпотентных групп

А. В. Меньшов, В. А. Романьков

Под *уравнением* от одной неизвестной над группой G понимается выражение вида $u(x) = 1$, где $u(x)$ — групповое слово от неизвестной x и элементов группы G, которые называются *коэффициентами*. Если H — большая группа, т. е. группа содержащая G в качестве фиксированной подгруппы, то исходное уравнение также рассматривается как уравнение над H. Уравнение называется *разрешимым в группе* G, если существует элемент $g \in G$, для которого $u(g) = 1$. Уравнение называется *разрешимым над группой* G, если существует большая группа H, в которой это уравнение разрешимо. Уравнение называется *регулярным*, если сумма показателей степеней неизвестной x в слове $u(x)$ (*экспонента*) не равна нулю.

Следующая гипотеза хорошо известна в теории групп:

Гипотеза 1 (Кервера — Лауденбаха). *Произвольное регулярное уравнение от одной неизвестной разрешимо над любой группой.*

Гипотеза остается открытой до настоящего времени. Имеется лишь ряд частных результатов, относительно которых см., например, [**1**].

Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп. Уравнение над группой $G \in \mathcal{C}$, называется *разрешимым в* $\mathcal{C}$, если существует группа $H \in \mathcal{C}$, содержащая G, в которой оно имеет решение. В работе устанавливается разрешимость регулярных уравнений от одной неизвестной в различных классах нильпотентных групп.

Приведем основные результаты.

Теорема 2 ([**2**]). *Любое регулярное уравнение от одной неизвестной над нильпотентной группой без кручения имеет решение в ее мальцевском пополнении.*

Теорема 3. *Любое регулярное уравнение от одной неизвестной над конечной* p*-группой (*p *— простое) имеет решение в большей конечной* p*-группе.*

Следствие 4. *Любое регулярное уравнение от одной неизвестной над конечной нильпотентной группой имеет решение в большей конечной нильпотентной группе.*

Из этих результатов следует положительный ответ на вопрос 2.15 из [**1**]:

Теорема 5. *Любое регулярное уравнение от одной неизвестной над конечно порожденной нильпотентной группой имеет решение в большей конечно порожденной нильпотентной группе.*

Список литературы

[1] Roman'kov V. Equations over groups, Groups-Complexity-Cryptology, 4, №2 (2012), 191–239.
[2] Шмелькин А. Л. О полных нильпотентных группах, Алгебра и логика, 6, №2 (1967), 111–114.

Омский гос. ун-т им. Ф. М. Достоевского, Омск
E-mail: menshov.a.v@gmail.com, romankov48@mail.ru

Об одном обобщении схем отношений и связанных с ними дистанционно регулярных графах диаметра 3

И. Т. Мухаметьянов

Пусть X — конечное множество, R_i $(i = 0, 1, :, d)$ — бинарные отношения на X, которые удовлетворяют условиям *симметричной коммутативной ассоциативной схемы отношений на d классах* (определение см. в [**1**]), кроме условия постоянства чисел пересечений p^1_{ij}. Пару $(X, \{R_i\}_{0\leqslant i\leqslant d})=\mathcal{X}(X)$ назовём *схемой*, $\Gamma^{(i)} = (X, R_i)$ – *графом i-го отношения*. Схему $\mathcal{X}(X)$ назовём *кликовой*, если:

1. Граф $\Gamma^{(1)}$ 1-го отношения является несвязным с $n + 1$ компонентами связности — кликами K_1, K_2, :, K_{n+1} из $d - 1$ точек каждая.

2. Если x — фиксированная точка клики K_s, $K_t \neq K_s$, y пробегает точки из K_t, то в $(x, y) \in R_i$ индекс i пробегает индексы из $\{2, 3, :, d\}$.

3. Если i, j, k и s, t, l — два произвольных набора попарно различных индексов из $\{2, 3, :, d\}$, то $p^k_{ij}=p^l_{st}$, $p^k_{ii}=p^l_{ss}$, $p^i_{ii}=p^s_{ss}$, и $p^1_{ij} \in \{0, r\}$, $r \neq 0$.

Теорема. *Для любого $i \in \{2, :, d\}$ граф $\Gamma^{(i)}$ i-го отношения кликовой схемы на d классах является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{n, n - p^i_{ii} - 1, 1; 1, p^k_{ii}, n\}$, $k \neq i$, где $p^i_{ii}=p^k_{ii}=(n-1)/(d-1)$. При этом кликовая схема существует: в качестве X можно взять некоторый класс сопряжённых элементов простого порядка p в группе $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$ (при чётном $q \geqslant 3$ в последнем случае) при $q = p^m$, определив R_i определённым образом, $d = (q + 1)/2$ при нечётном q, $d = q$ при чётном q, а значения n, p^i_{ii}, p^k_{ii} — следующие:*

1) *Если $G \simeq L_2(q)$, то $n = q$, $p^i_{ii} = q - \mu$, $p^k_{ii} = \mu$, где $\mu = 1$ при чётном $q \geqslant 4$, и $\mu = 2$ при нечётном $q \geqslant 5$;*

2) *Если $G \simeq Sz(q)$, то $n = q^2$, $p^i_{ii} = (q - 2)(q + 1)$, $p^k_{ii} = q + 1$, где $q = 2^{2n+1} \geqslant 8$.*

3) *Если $G \simeq U_3(q)$ (q — чётно), то $n = q^3$, $p^i_{ii} = (q - 2)(q^2 + q + 1)$, $p^k_{ii} = q^2 + q + 1$.*

Отметим, что первая из перечисленных серий графов хорошо известна, вторая и третья серии — это подсерии новых серий дистанционно регулярных графов, которые анонсировались в [**2**] и [**3**]

Список литературы

[1] Баннаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 375 с.

[2] Махнев А. А., Падучих Д. В., Циовкина Л. Ю. Рёберно симметричные дистанционно регулярные графы накрытия клик с $\lambda = \mu$ // Теория групп и её приложения: Тезисы IX Международной школы-конференции по теории групп, посвящённой 90-летию со дня рождения З.И.Боревича. Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2012, 137 стр.

[3] Махнев А. А., Падучих Д. В., Циовкина Л. Ю. Рёберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda = \mu$, Доклады Академии Наук 2012. Т.446, №6, С.512–515.

Лысьвенский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, Лысьва (Пермский край)
E-mail: muiltal@yandex.ru

О графах на множестве неединичных p-элементов группы $SL_2(p^m)$

И. Т. Мухаметьянов

Обобщены результаты из [**1**] и [**2**] для $G = SL_2(p^m)$ и $p \neq 2$: описан граф с множеством вершин B неединичных p-элементов из G ($p^m \geq 5$) и множеством рёбер $\{\{x, y\}|xy^{-1} \in C\}$, C – некоторый класс сопряжённых p'-элементов из G.

Пусть $o(x)$ – порядок $x \in G$, $a \equiv b(c)$ – это $a \equiv b \pmod c$. Понятие *почти дистанционно регулярного графа* (ПДРГ) и обозначения, связанные с ним, см. в [**2**]. В группе G при $p \neq 2$ имеются следующие классы сопряжённости: 1) $C_{i+} = (x^i)^G$, $o(x) = q-1$, $1 \leqslant i \leqslant (q-1)/4$ при $q \equiv 1(4)$ и $1 \leqslant i \leqslant (q-3)/4$ при $q \equiv -1(4)$, $C_{i-} = -C_{i+}$; 2) $C_{j+} = (y^j)^G$, $o(x) = q+1$, $1 \leqslant j \leqslant (q-1)/4$ при $q \equiv 1(4)$ и $1 \leqslant j \leqslant (q+1)/4$ при $q \equiv -1(4)$, $C_{j-} = -C_{j+}$. Имеем, что при $q \equiv 1(4)$ $C_{(q-1)/4+} = C_{(q-1)/4-}$, а при $q \equiv -1(4)$ – $C_{(q+1)/4+} = C_{(q+1)/4-}$. I_+, I_-, J_+ и J_- – множества индексов соответсвенно C_{i+}, C_{i-}, C_{j+} и C_{j-}. $\Gamma^{(\iota)}$ – граф с множеством вершин B и множеством рёбер $R_\iota = \{\{x, y\}|yx^{-1} \in C_\iota\}$, $\iota \in I_+ \cup I_- \cup J_+ \cup J_-$.

Теорема. *В следующих случаях $\Gamma^{(\iota)}$ является несвязным с двумя компонентами связности – ПДРГ с одинаковыми массивами пересечений:*

a) $\{q, q-3, 1; 1, 2, q\}$ (*т. е. компоненты связности – дистанционно регулярны*) *при:* 1) $q \equiv 1(4)$ *и* $\iota \in I_+ \cup I_- \setminus \{(q-1)/4\pm\}$ *– чётное или* $\iota \in J_+ \cup J_-$ *– произвольное;* 2) $q \equiv -1(4)$ *и* $\iota \in I_+$ *– нечётное, или* $\iota \in I_-$ *– чётное, или* $\iota \in J_- \setminus \{(q+1)/4\pm\}$ *– произвольное* (*чётность* $\iota = i\pm$ *– это чётность* i)*;*

b) $\{2q, 2q-3, b_2(x, y); 1, c_2(x, y), 2q\}$, *где* $b_2(x, y) = 0$ *при* $y \in C_G(x)$, $b_2(x, y) = 1$ *при* $y \notin C_G(x)$, $c_2(x, y) = q$ *при* $y \in C_G(x)$, $c_2(x, y) = 4$ *при* $y \notin C_G(x)$ *при:* 1) $\iota = (q-1)/4\pm$ *и* $q^2 \equiv 1(16)$; 2) $\iota = (q+1)/4\pm$ *и* $q^2 - 1$ *не делится на 16.*

В следующих случаях $\Gamma^{(\iota)}$ – ПДРГ со следующими массивами пересечений:

a) $\{q, q-1, q-2, b_3(x, y); 1, 2, c_3(x, y), q\}$, *где* $b_3(x, y) = 0$ *при* $y \in C_G(x)$, $b_3(x, y) = 1$ *при* $y \notin C_G(x)$, $c_3(x, y) = q$ *при* $y \in C_G(x)$, $c_3(x, y) = 1$ *при* $y \notin C_G(x)$ *при:* 1) $q \equiv 1(4)$ *и* $\iota \in I_+ \cup I_- \setminus \{(q-1)/4\pm\}$ *– нечётное;* 2) $q \equiv -1(4)$ *и* $\iota \in I_-$ *– нечётное, или* $\iota \in I_+$ *– чётное, или* $\iota \in J_+ \setminus \{(q+1)/4\pm\}$ *– произвольное.*

b) $\{2q, 2q-1, b_2(x, y); 1, c_2(x, y), 2q\}$, *где* $b_2(x, y) = 0$ *при* $y \in C_G(x)$, $b_2(x, y) = 1$ *при* $y \notin C_G(x)$, $c_2(x, y) = 2q$ *при* $y \in C_G(x)$, $c_2(x, y) = 4$ *при* $y \notin C_G(x)$ *при:* 1) $\iota = (q-1)/4\pm$ *и* $q^2 - 1$ *не делится на 16;* 2) $\iota = (q+1)/4\pm$ *и* $q^2 \equiv 1(16)$.

Список литературы

[1] Мухаметьянов И. Т. Графы на на классе сопряжённых инволюций группы $L_2(2^m)$ // Научное обозрение. – 2013. №5, С. 133–141.

[2] Мухаметьянов И. Т. О дистанционно регулярных графах на множестве неединичных p-элементов группы $L_2(p^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т.18, №3, С. 164–178.

Лысьвенский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета, Лысьва (Пермский край)
E-mail: muiltal@yandex.ru

Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах

М. Н. Нестеров

Подгруппа H конечной группы G называется *холловой* подгруппой, если её порядок и индекс взаимно просты.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$.

Конечная группа называется *почти простой*, если её цоколь — неабелева простая группа.

В 2012 году в работе [**1**] была доказана следующая

Теорема 1. *В любой простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

Основным результатом доклада является следующее обобщение этого утверждения.

Теорема 2. *В любой почти простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

Список литературы

[1] Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн., 2012. Т. 53, № 3. С. 527-542.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: mauk00@mail.ru

Пермутационные модули над проконечными группами

К. Н. Пономарев

Для произвольной проконечной группы G и коммутативной области целостности R определено понятие перестановочного RG-модуля, обобщающее известное понятие из теории представлений конечных групп. Установлена теорема о свободе такого модуля в случае проконечной группы со счетной фундаментальной системой окрестностей единицы:

Теорема. *Рассмотрим бесконечную проконечную группу G, которая обладает счетной системой фундаментальных окрестностей единицы, и коммутативную область главных идеалов R.*

Утверждается, что если M пермутационный RG-модуль, а $H \leqslant G$ замкнутая подгруппа G, то R-модуль H-инвариантных элементов ${}^H M$ является свободным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N.12-01-00084, а также Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию N.2014/138, проект 1052

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ponomaryov@ngs.ru

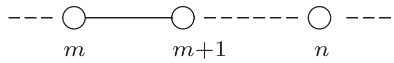
О числе нечетносвязных окрасок двуцветных графов

А. И. Созутов, И. О. Александрова

В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в [**1**]. Мы будем рассматривать неориентированные графы без петель и кратных ребер, окрашивая их вершины в белый и черный цвета. Окраску графа Γ_n с вершинами $\{1, \dots, n\}$ назовем нечетносвязной, если при удалении белых вершин граф Γ_n распадается на нечетное число связных компонент. Обозначим через $t_n = t(\Gamma_n)$ число всех нечетносвязных окрасок графа Γ_n.

Множество $\{\Gamma_n\}$ $(n \geq m)$ вложенных друг в друга графов называем *A-серией*, если их подграфы с вершинами $m, m+1, \dots, n$ являются цепями

$$\Gamma_m \subset \Gamma_{m+1} \subset \dots \subset \Gamma_n \subset \dots, \tag{1}$$



С A-серией (1) связана последовательность $\{t_n\}$ чисел $t_n = t(\Gamma_n)$:

$$t_m,\ t_{m+1},\ \dots,\ t_n,\ \dots\ . \tag{2}$$

Теорема 1. *Для чисел последовательности (2) при любом $n \geq m$ справедливо равенство*

$$t_n = 2^{n-1} + 2^{\frac{n-m}{2}} \left[\left(t_{m+1} - t_m - 2^{m-1}\right) \sin \frac{\pi(n-m)}{4} + \left(t_m - 2^{m-1}\right) \cos \frac{\pi(n-m)}{4} \right]. \tag{3}$$

Последовательность (2) *однозначно определяется числом m и любой четверкой чисел n, k, t_n, t_{n+k}, где $k \not\equiv 0 \,(mod\, 4)$.*

В следующей теореме рассматривается последовательность (2), связанная с группами, порожденными 3-траспозициями. Среди групп с симплектическими 3-транспозициями наиболее интересны группы $O^{\pm}_{2l}(2)$ и $Sp_{2l}(2)$, число 3-транспозиций в которых равно $t_{2l} = 2^{2l-1} \mp 2^{l-1}$ и $t_{2l+1} - 1 = 2^{2l} - 1$ (см. [**1**]).

Теорема 2. *Если $t_r = 2^{r-1}$ и $t_s = 2^{s-1} \pm 2^{\frac{s-2}{2}}$ для некоторых нечетного r и четного s, то для чисел последовательности (2) верна точно одна из следующих формул*

$$(a) \quad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}; \qquad (b) \quad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4};$$

$$(c) \quad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}; \qquad (d) \quad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}.$$

Список литературы

[1] Созутов А. И., Кузнецов А. А., Синицин В. М. О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. матем. электр. изв., Т. 10, С. 285–301.

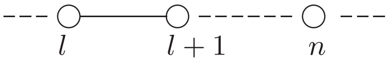
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
E-mail: sozutov_ai@mail.ru, aio40@mail.ru

О графах Коксетера групп с симплектическими 3-транспозициями

А. И. Созутов, В. М. Синицин

В настоящей работе продолжаются исследования из [**1, 2**] по поиску систем порождающих и определяющих соотношений групп с 3-транспозициями, близких к системам порождающих и соотношений групп Коксетера. Все необходимые определения можно найти в [**2**]. Множество $\{\Gamma_n\}$ $(n \geq l)$ вложенных друг в друга графов называем *E-серией*, если они являются деревьями, содержат подграф E_6, их подграфы с вершинами $l, l+1, ..., n$ являются цепями

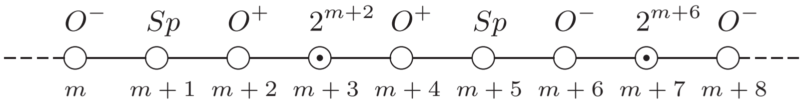
$$\Gamma_l \subset \Gamma_{l+1} \subset ... \subset \Gamma_n \subset ..., \qquad (1)$$



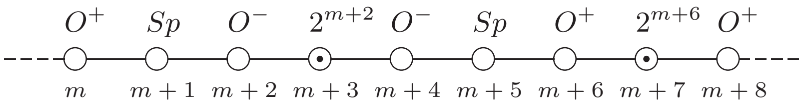
и для некоторого n в пространстве V_n нет ненулевых инвариантных векторов [**2**].

Теорема. *При $m = 4k$ и нечетном k подграфы с вершинами $4k, 4k+1, ...$ графов Γ_n E-серии (1) имеют точно одну из следующих разметок периода 8:*

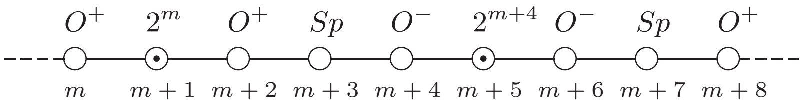
(A): $m = 4k,\ k \neq 2r$:



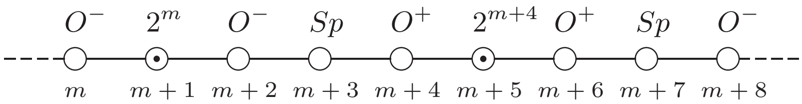
(B): $m = 4k,\ k \neq 2r$:



(C): $m = 4k,\ k \neq 2r$:



(D): $m = 4k,\ k \neq 2r$:



Если в (A)—(D) над вершиной n стоит метка $O^{\pm}$, то графу Γ_n соответствует группа $O_n^{\pm}(2)$, если — метка Sp, то — группа $Sp_{n-1}(2)$, а если метка 2^{n-1}, то расширение элементарной абелевой группы порядка 2^{n-1} с помощью группы, соответствующей графу Γ_{n-1}.

Список литературы

[1] Созутов А. И. О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями // Сиб. матем. ж., Т. 33, №1 (1992), 140–149.

[2] Созутов А. И., Кузнецов А. А., Синицин В .М. О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. матем. электр. изв., Т. 10, С. 285–301.

СФУ, Красноярск
E-mail: sozutov_ai@mail.ru, sinkoro@yandex.ru

О решетках подгрупп конечных разрешимых групп

И. Сяолан, С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые функторы. Используются определения и обозначения, принятые в [**1**]. Напомним, что отображение ω, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему подгрупп $\omega(G)$, называется *подгрупповым функтором*, если выполняется условие $(\omega(G))^{\phi} = \omega(G^{\phi})$ для любого изоморфизма ϕ каждой группы G.

Подгрупповой функтор ω, называется:

1) *регулярным*, если $(\omega(A))^{\phi} \subseteq \omega(B)$ и $(\omega(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \omega(A)$ для любого эпиморфизма $\phi : A \to B$;

2) *наследственным*, если $H \cap S \in \omega(H)$ для любой подгруппы H группы G и любой подгруппы $S \in \omega(G)$;

3) *транзитивным*, если $\omega(H) \subseteq \omega(G)$ для любой подгруппы $H \in \omega(G)$;

4) *включающим*, если всегда из $H \in \omega(G)$ и $H \subseteq U \subseteq G$ следует $H \in \omega(U)$;

5) *решеточным*, если всегда из $H, K \in \omega(G)$ следует, что $H \cap K \in \omega(G)$ и $< H, K > \in \omega(G)$.

Приведенные определения, по сути, аксиоматизируют известные свойства субнормальных подгрупп (инвариантность при гомоморфизмах, наследственность в пересечениях и надгруппах, транзитивность и решеточность).

В работе [**2**] был предложен подход, позволивший описать на классе всех конечных разрешимых групп все регулярные наследственные транзитивные решеточные подгрупповые функторы. Тем самым классифицированы все те подрешетки решетки всех подгрупп конечной разрешимой группы, которые транзитивны и корректно ведут себя при эпиморфизмах и в пересечениях.

В данной работе решается более общая задача: здесь на классе всех конечных разрешимых групп описываются все регулярные включающие транзитивные решеточные подгрупповые функторы. Отметим, что каждый наследственный подгрупповой функтор является включающим, а обратное не верно. Например, если p — простое число и ω — подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе G все ее подгруппы, содержащие хотя бы одну силовскую p-подгруппу из G, является регулярным, включающим и транзитивным, но не является наследственным.

Список литературы

[1] Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорусская наука, 2003.

[2] Васильев А. Ф., Каморников С. Ф. О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 30–40.

Чжецзянский университет науки и технологий, Китай;
Гомельский филиал Международного университета "МИТСО", Беларусь
E-mail: yixiaolan2005@126.com, sfkamornikov@mail.ru

Эндоморфизмы свободных разрешимых групп, сохраняющие примитивность систем элементов

Е. И. Тимошенко

Пусть $G = F_r(\mathfrak{M})$ – свободная группа ранга r, $r \geq 2$, некоторого многообразия групп $\mathfrak{M}$. Система элементов $\{g_1, \ldots, g_m\}$, $1 \leq m \leq r$, группы G называется примитивной, если её можно дополнить до базиса группы.

Пусть φ – некоторый эндоморфизм группы G. Эндоморфизм φ сохраняет примитивность систем элементов, если он отображает любую примитивную систему элементов $\{g_1, \ldots, g_{r-1}\}$ в примитивную систему. Эндоморфизмы группы G называют примитивными, если он отображает примитивные элементы в примитивные.

Теорема 1. *Любой эндоморфизм свободной метабелевой группы ранга r, $r \geq 2$, сохраняющий примитивность систем, является автоморфизмом.*

Теорема 2. *Любой эндоморфизм свободной разрешимой группы ранга 2, сохраняющий примитивность систем элементов, является автоморфизмом.*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: eitim45@gmail.com

О производной длине разрешимых групп с фиттинговыми силовскими подгруппами фиксированного нормального ранга

А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [**1**].

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ (см. [**2**]) p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в том числе и P. Здесь $\Phi(X)$ — подгруппа Фраттини группы X.

Бициклической называют группу $G = AB$, факторизуемую циклическими подгруппами A и B. Бициклическая p-группа имеет нормальный ранг ≤ 2 для каждого нечетного p. Бициклическая 2-группа имеет нормальный ранг ≤ 3.

Инварианты разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в работе [**3**]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6.

В работе [**4**] было установлено, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать силовские подгруппы только ее подгруппы Фиттинга. В частности, производная длина разрешимой группы, у которой подгруппа Фиттинга имеет бициклические силовские подгруппы, не превышает 6.

Поэтому возникает задача получения оценки производной длины разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовских p-подгрупп из подгруппы Фиттинга ≤ 2 для каждого нечетного p и ≤ 3 для $p = 2$. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа и $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G с силовской 2–подгруппой нормального ранга ≤ 3 и силовскими p–подгруппами нормального ранга ≤ 2 для всех $p > 2$. Тогда производная длина группы G по подгруппе Фраттини не превышает 5.*

Список литературы

[1] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов // Минск: Вышэйшая школа, 2006.

[2] Монахов В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2002. Т. 46, № 2. С. 25–28.

[3] Монахов В. С., Грибовская Е. Е. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Математические заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 603–612.

[4] Трофимук А. А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы // Математические заметки. 2010. Т. 87, № 2. — С. 287–293.

БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест
E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых HNN-расширений групп

Е. А. Туманова

В данной работе рассматривается частный случай конструкции HNN-расширения группы с одной проходной буквой, когда связанные подгруппы совпадают и являются ретрактами в базовой группе. Для этой конструкции исследуются условия аппроксимируемости корневыми классами групп.

Напомним, что класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет условию Грюнберга: если X — некоторая группа и $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что X/Y, $Y/Z \in \mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$. Известно, что класс групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений. В частности, класс конечных групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — ретракт в группе B, φ — автоморфизм подгруппы H, G — HNN-расширение группы B с проходной буквой t и подгруппами H и $H\varphi = H$, связанными относительно автоморфизма φ.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и циклическая группа Φ, порожденная автоморфизмом φ, является конечной группой. Если $\Phi \in \mathcal{K}$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Если, кроме того, класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то верно и обратное: из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G следует, что $\Phi \in \mathcal{K}$.*

В сформулированной теореме не рассматривается случай, когда класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, а группа Φ бесконечна. Следующий пример показывает, что в данном случае HNN-расширение G может быть как $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, так и не $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Пусть B — свободная абелева группа ранга 4 с базисом $\{h_1; h_2; h_3; h_4\}$; H — подгруппа группы B, порожденная элементами h_1, h_2, h_3; автоморфизм φ группы H переводит h_1 в h_1h_2, h_2 в h_2, h_3 в h_3^{α}, где $\alpha \in \{-1; 1\}$. Тогда подгруппа H является ретрактом в B и автоморфизм φ имеет бесконечный порядок. При этом можно показать, что если p — простое число, большее 2, то HNN-расширение $G = (B,\ t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$.

Ивановский государственный университет, Ивановский институт ГПС МЧС России, г. Иваново
E-mail: helenfog@bk.ru

Теоретико-групповой анализ обратного интегрального преобразования типа Фурье — Бесселя для обобщённой функции Бесселя

М. Д. Хриптун

Рассматривается основная серия представлений группы треугольных матриц третьего порядка специального вида в пространстве Гибельта $L^2(\varphi)$, таких функций $f(\varphi)$ из $L^2(\varphi)$, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 d\varphi < \infty. \tag{1}$$

Матричные элементы этих представлений выражаются через обобщённые функции Бесселя

$$U_k^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \exp\left[\frac{z}{m}\left(e^{i\varphi} + e^{-i(m-1)\varphi}\right)\right] e^{-ik\varphi} d\varphi, \tag{2}$$

k — целое число, z — комплексная переменная.

На основании теории представлений этих групп получаются основные свойства функции $U_k^{(m)}(z)$.

При рассмотрении квазирегулярного представления этой же группы в пространстве функций $f(x, y)$ таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy < \infty,$$

которые являются приводимыми, и при разложении его на прямую непрерывную сумму неприводимых представлений, используя представление Фурье для $f(x, y)$, получаем прямое и обратное интегральное преобразование типа Фурье–Бесселя для этих функций (2).

Функции (2) находят приложения при решении сложных задач теории массового обслуживания, в теории чисел, в операционном исчислении, в сложных задачах математической физики и других исследований.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: khriptun@math.nsc.ru

Периодические группы, насыщенные $L_4(2^n)$ и $U_4(2^n)$

А. А. Шлепкин

По определению группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [**1**].

В [**2**] доказано, что произвольная периодическая группа, насыщенная группами $L_3(2^n)$, изоморфна $L_3(Q)$, где Q — локально-конечное поле характеристики два. В [**3**] доказано, что произвольная периодическая группа, насыщенная группами $U_3(2^n)$, изоморфна $U_3(Q)$, где Q — локально-конечное поле характеристики два. Пусть $\mathfrak{M} = \{L_4(2^n)\}$ и $\mathfrak{N} = \{U_4(2^n)\}$.

Теорема 1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $L_4(Q)$, где Q — подходящие локально-конечное поле характеристики два.*

Теорема 2. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{N}$, изоморфна $U_4(Q)$, где Q — подходящие локально-конечное поле характеристики два.*

Список литературы

[1] Шлепкин А. К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы, Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, (1993), 363.

[2] Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. Периодические группы насыщенные $L_3(2^n)$, Алгебра и логика, Т. 46, 5(2007), 606–626.

[3] Лыткина Д. В., Тухватулина Л. Р., Филиппов К. А. Периодические группы насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^n)$, Алгебра и логика, Т. 47, 3(2008), 288–306.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru

Finite groups in which all maximal subgroups are π-closed

V. A. Belonogov

Finite non-nilpotent groups in which all maximal subgroups are nilpotent was described by O. Ju. Schmidt in 1924 and are named the Schmidt groups. Let π be a set of primes. A finite group G is called *π-closed* if it has a normal π-Hall subgroup. The author consider the pair (G, π) such that

$(*)$ G is a finite non-π-closed group whose all maximal subgroups are π-closed.

It is proved in [**1**] (see also [**2**, the end of sect. 1]) the following

Proposition. *For G and π with the condition $(*)$ $G/\Phi(G)$ is a simple non-abelian group or G is a Schmidt group.*

This reduce the study of the pair (G, π) with the condition $(*)$ to the case of simple non-abelian groups G.

Theorem. *Let G be a finite simple non-abelian group and π set of primes. Let G be not π-closed group in which all maximal subgroups are π-closed. Then*

(I) $2 \notin \pi$;

(II) G is a one of following groups (everywhere q is a prime power) :

(1) $G \simeq A_r$, *where r is a prime and $r \geq 5$;*
(2) $G \simeq PSL_2(q)$, *where $q > 5$;*
(3) $G \simeq PSL_r(q)$, *where r is odd prime*;
(4) $G \simeq PSU_r(q)$, *where r is odd prime*;
(5) $G \simeq Sz(q)$, *where c $q = 2^{2n+1} \geq 8$;*
(6) $G \simeq {}^2G_2(q)$, *where $q = 3^{2n+1} \geq 27$;*
(7) $G \simeq {}^3D_4(q)$;
(8) $G \simeq {}^2F_4(q)$, *where $q = 2^{2n+1} \geq 8$;*
(9) $G \simeq E_8(q)$;
(10) *G is isomorphic to a one of groups $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi'_{24}$ and F_2.*

The proof of Theorem is based on the results of the author's paper [**3**] about the control of the prime spectrum of the finite simple groups.

This work was supported by RFBR (project no. 13-01-00469), Program DMS of RAS (project no. 12-T-1-1003), Programs of JR of UB RAS with SB RAS (project no. 12-S-1-10018) and Belarussian NAS (project no. 12-S-1-1009).

References

[1] Belonogov V. A. On finite groups whose all maximal subgroups are π-closed // Works of Int. School-Conf. on group theory, ded. to 70 of V. V. Kabanov, Nalchik, 2014, pp. 6–9. (In Russian)

[2] Belonogov V. A. On finite groups saturated with (π, π')-decomposable subgroups // Siberian Math. J., 1969, vol. 10, no. 3, pp. 354–362.

[3] Belonogov V. A. On control of the prime spectrum of finite simple group // Proc. of the Steclov Institute of Mathematics, 2014, Vol. 285, Suppl. 1, pp. S25–S41.

Inst. Math. Mech., Ural Branch of RAS, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

On the behaviour of certain products of long and short root elements in irreducible representations of algebraic groups of type B_r

T. S. Busel

The behaviour of products of commuting long and short root elements in p-restricted irreducible representations of algebraic groups of type B_r is investigated. For such representations with certain local properties of the highest weights it is shown that the images of these elements have Jordan blocks of all a priori possible sizes. Let K be an algebraically closed field of characteristic $p > 2$, $G = B_r(K)$, $r \geq 6$. For $x \in G$ and a representation φ of G denote by $J_\varphi(x)$ the set of Jordan block sizes of the element $\varphi(x)$ (multiplicities are not taken into account). For $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$, put $N_a^b = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leq i \leq b\}$. Throughout the text ω_i and α_i are the fundamental weights and the simple roots of G labeled in the standard way; $\mathfrak{X}_{\pm i}$ and $x_{\pm i}(t)$ are the root subgroup and the root element in G associated with $\pm\alpha_i$ and $t \in K$. The following theorem is proved.

Theorem. *Let φ be a p-restricted representation of G with highest weight $a_1\omega_1 + ... + a_r\omega_r$ and $x = x_1(1)x_r(1)$. Assume that $a_j \neq p-1$ for some $j < r-1$. Set $d = d(\varphi) = 1 + 2a_1 + 3a_2 + 4(a_3 + ... + a_{r-2}) + 2a_r$.*

1) Let $a_r \neq p-1$ and $\sum_{i=1}^{r-2} a_i \geq p$. Then $J_\varphi(x) = N_1^p$.

2) Let $2a_{r-1} + a_r < p$. Assume that $\sum_{i=1}^{r-3} a_i \neq 0$ for $2a_{r-1} + a_r = p-2$ or $p-1$ and that $\sum_{i=1}^{r-3} a_i \neq 0$ or $(r-3)(p-1)$ if $a_r = p-1$. Then $J_\varphi(x) = N_1^{\min(p,d)}$.

Let H be the subgroup in G generated by the subgroups $\mathfrak{X}_{\pm 1}$, ..., $\mathfrak{X}_{\pm(r-2)}$. Then $H \cong A_{r-2}(K)$. As H commutes with the subgroup of type A_1 generated by the subgroups $\mathfrak{X}_{+r}$ and $\mathfrak{X}_{-r}$, all nonidentity root elements of the group H are conjugate and all nonidentity elements $x_{\pm r}(t)$ are conjugate, the statement of the theorem is true for an arbitrary product of a nontrivial root element from H and a nontrivial element $x_{\pm r}(t)$.

In [**1**] a similar question was considered for representations of algebraic groups of type A_r and products of regular unipotent elements from commuting subsystem subgroups of types A_1 and A_2. This research has been supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Belarus in the framework of the State Research Programme "Convergence" (2011-2015).

References

[1] Suprunenko I. D. On the block structure of regular unipotent elements from subgroups of type $A_1 \times A_2$ in representations of the special linear group. — Journal of Mathematical Sciences. 2012. vol. 183. Issue 5. pp. 715–726.

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk (Belarus)
E-mail: tbusel@gmail.com

Algorithmic aspects of recognizability by spectrum

A. A. Buturlakin, A. V. Vasil′ev

The set of element orders of a finite group G is called *the spectrum* and denoted by $\omega(G)$. Groups having the same spectrum are called *isospectral*. The following question seems to be natural: if $\mathcal{M}$ is a set of positive integers, does a group G with $\omega(G) = \mathcal{M}$ exist, and if so, can one describe all such groups? The talk is concerned with algorithmic aspect of this problem in a special case when G is simple.

Note that the spectrum of a group G is always closed under taking divisors, i.e., if $n \in \omega(G)$ and d divides n then $d \in \omega(G)$; in particular, $\omega(G)$ is uniquely determined by its subset $\mu(G)$ of elements maximal w.r.t. divisibility. Let $\omega(\mathcal{M})$ and $\mu(\mathcal{M})$ stand for the set of all divisors of elements of $\mathcal{M}$ and the set of all elements of $\mathcal{M}$ maximal w.r.t. divisibility. If we require $\omega(G) = \omega(\mathcal{M})$ instead of $\omega(G) = \mathcal{M}$, then we get the more natural problem in which trivial situations, when $\mathcal{M}$ is not closed under taking divisors, are omitted.

Given a finite group G, the set $\mathcal{M}$ is called *almost G-spectral* if $\mathcal{M} \subseteq \omega(G)$, $\max \mathcal{M} = \max \omega(G)$ and $\omega(H) \neq \omega(\mathcal{M})$ for every finite simple group H whose spectrum differs from the spectrum of G. Observe that if G and H two non-isomorphic finite simple group, then $\omega(G) \neq \omega(H)$ except the cases $\{G, H\} = \{O_8^+(2), S_6(2)\}$ and $\{G, H\} = \{O_8^+(3), O_7(3)\}$. Therefore, if, given a finite set $\mathcal{M}$, we denote by $\Omega(\mathcal{M})$ the set of all simple groups G such that $\mathcal{M}$ is almost G-spectral, then $\Omega(\mathcal{M})$ is either empty, or a singleton, or is equal to $\{O_8^+(2), S_6(2)\}$ or $\{O_8^+(3), O_7(3)\}$.

Theorem. *Let $\mathcal{M}$ be a finite set of positive integers, $m = |\mathcal{M}|$ and $M = \max \mathcal{M}$. Then $\Omega(\mathcal{M})$ can be constructed from $\mathcal{M}$ in time polynomial in $m \log M$.*

The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru, vasand@math.nsc.ru

On Borovik's conjecture

A. A. Buturlakin, A. V. Vasil′ev

The c-dimension of a group G is the maximal length of a nested chain of centralizers of subsets in G. Groups of finite c-dimension have some interesting properties. For example, a periodic locally soluble group of finite c-dimension k is soluble of k-bounded derived length [**1**]. In the same paper the following conjecture is formulated.

Conjecture (A.V. Borovik). *Let G be a locally finite group of finite c-dimension k. Let S be the full inverse image of the "generalized Fitting subgroup" $F^*(G/F(G))$, which is equal to the product of $F(G/F(G))$ and all the quasi-simple subnormal subgroups of $G/F(G)$. Then*

(1) *the number of non-abelian simple composition factors of G is finite and k-bounded;*

(2) *G/S has an abelian subgroup of finite k-bounded index.*

The first statement of the conjecture is proved in [**2**].

For a finite nonabelian simple group G define $qr(G)$ to be the Lie rank for groups of Lie type, the degree for alternating groups, and 1 for sporadic groups.

We prove a stronger version of (1) for finite groups.

Theorem. *Let G be a finite group of c-dimension k and $\overline{G}$ be its quotient by the soluble radical. Let n be the sum of $qr(S)$ where S runs through all composition factors of the socle $Soc(\overline{G})$. Then n is bounded polynomially in terms of k.*

This theorem implies the following weak version of (2).

Corollary. *Let G be a finite group of c-dimension k and $\overline{G}$ be its quotient by the soluble radical. Then $\overline{G}/Soc(\overline{G})$ has an abelian subgroup of k-bounded index.*

The work is partially supported by RFBR (grant 13-01-00505).

References

[1] Khukhro E. I. On solubility of groups with bounded centralizer chains, Glasgow Math. J., Vol. 51 (2009), P. 49–54.

[2] Buturlakin A. A., Vasil′ev A. V. Locally Finite Groups with Bounded Centralizer Chains, Algebra and Logic, Vol. 52, no. 5 (2013), P. 367–370.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru, vasand@math.nsc.ru

A modular equality for Cameron—Liebler line classes

A. Gavrilyuk, K. Metsch

A *Cameron-Liebler line class* (a CL line class for short) of the finite projective space $PG(3, q)$ is a set of lines that shares a constant number x of lines with every regular spread of $PG(3, q)$. The number x is called the *parameter* of the CL line class. These classes appeared in connection with an attempt [**2**] to classify collineation groups of $PG(n, q)$, $n \geqslant 3$, that have equally many orbits on lines and on points.

An empty set of lines is a CL line class with parameter $x = 0$. An example with $x = 1$ consists of all lines on a point or of all lines in a plane. If the point is not in the plane, then the union of the previous two examples gives a CL line class with $x = 2$. It was conjectured [**2**] that these are the only CL line classes. The first counterexamples were constructed in [**3**] (in $PG(3, 3)$, $x = 5$), in [**1**] (for odd q, in $PG(3, q)$, $x = (q^2 + 1)/2$), and [**5**] in $PG(3, 4)$ with $x = 7$. There is no infinite series known [**7**] with $x \neq 0, 1, 2, \frac{1}{2}(q^2 + 1)$. In this work we show a strong non-existence result for CL line classes (for any space $PG(3, q)$, it rules out roughly at least half of the possible parameters x of a CL line class), which proves a conjecture from [**4**].

Theorem. *Suppose $PG(3, q)$ has a Cameron-Liebler line class with parameter x. Then $\binom{x}{2} + n(n - x) \equiv 0 \pmod{q + 1}$ has a solution for n in the set $\{0, 1, \ldots, q\}$.*

The technique used to prove this result is based on ideas of the papers [**4**], [**6**]. As an application, we also provide a construction for a new Cameron-Liebler line class with parameter 10 in $PG(3, 5)$. Note that the spectra of parameters of Cameron-Liebler line classes in $PG(3, q)$ with $q \leq 4$ were determined earlier, see [**3, 4, 5**].

Part of this work was done while the first author was visiting Tohoku University as a JSPS Postdoctoral Fellow. He was also supported by the grant MK-1719.2013.1.

References

[1] Bruen A. A., Drudge K. The construction of Cameron-Liebler line classes in $PG(3, q)$. Finite Fields Appl., 5(1):35–45, 1999.
[2] Cameron P. J., Liebler R. A. Tactical decompositions and orbits of projective groups., Linear Algebra Appl., 46:91–102, 1982.
[3] Drudge K. On a conjecture of Cameron and Liebler. European J. Combin., 20(4):263–269, 1999.
[4] Gavrilyuk A. L., Mogilnykh I. Yu. Cameron-Liebler line classes in PG$(n, 4)$. Des. Codes Cryptogr., 73(3):969–982, 2014.
[5] Govaerts P., Penttila T. Cameron-Liebler line classes in $PG(3, 4)$. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 12(5):793–804, 2005.
[6] Metsch K. An improved bound on the existence of Cameron–Liebler line classes. J. Combin. Theory Ser. A, 121:89–93, 2014.
[7] Rodgers M. Cameron-Liebler line classes., Des. Codes Cryptogr., 68(1-3):33–37, 2013.

Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg (Russia),
Justus-Liebig-Universität, Mathematisches Institut, Gießen (Germany)
E-mail: alexander.gavriliouk@gmail.com, klaus.metsch@math.uni-giessen.de

On finite simple groups that are not recognizable by spectrum

M. A. Grechkoseeva, A. M. Staroletov

The spectrum $\omega(G)$ of a finite group G is the set of its element orders. Groups with the same spectra are said to be isospectral. If G has a nontrivial normal soluble subgroup then the set of different finite groups isospectral to G is infinite. The set of different groups isospectral to a nonabelian simple group also can be infinite but the general situation is described by the following Mazurov's conjecture: if G is a simple classical group of sufficiently large dimension or a simple non-classical group of sufficiently large order then every finite group isospectral to G is an almost simple group with socle isomorphic to G.

At present Mazurov's conjecture can be considered to be proved: the stated property is satisfied by all simple classical groups of dimension at least 62 and all simple sporadic groups, alternating groups and exceptional groups of Lie type apart from J_2, A_6, A_{10}, and ${}^3D_4(2)$ (see [**1**]). Furthermore, we conjecture that the bound for classical groups can be decreased from 62 to 10 [**1**, Conjecture 1]. Here we prove that the simple nine-dimensional orthogonal groups do not have the stated property, and so the bound cannot be decreased further.

Theorem. *Let $S = \Omega_8^-(q)$, V be the natural eight-dimensional module of S and let $V \rtimes S$ be the semidirect product of V and S. Then $\omega(V \rtimes S) = \omega(\Omega_9(q))$. In particular, there are infinitely many pairwise nonisomorphic finite groups isospectral to $\Omega_9(q)$.*

We note that for even q, the group $\Omega_9(q)$ is isomorphic to $Sp_8(q)$, and the assertion of the theorem for $q = 2$ was established in [**2**].

Acknowledgments. The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

References

[1] Vasil′ev A. V., Grechkoseeva M. A. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups, Preprint (2014), http://arxiv.org/abs/1409.8086.

[2] Mazurov V. D., Moghaddamfar A. R. The recognition of the simple group $S_8(2)$ by its spectrum, Algebra Colloq., 13 (2006), №. 4, 643–646.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: grechkoseeva@gmail.com, astaroletov@gmail.com

Finite geometry and related algebraic systems

A. Grishkov

By definition a finite geometry (a $n-$geometry) is a set (may be infinite!) P and a set L of subsets of P such that any element of L contains n elements from P. Moreover, for every two elements x, y of P there exists exactly one element $l_{x,y} \in L$.

We study the finite geometries using theory of quasi-groups and loops. For example, if P is a $3-$geomery then the corresponding set $L(P) = L\sup\{e\}$ is a loop (Steiner loop) with multiplication $x.e = e.x = x$, $x.y = z$, if $l_{x,y} = \{x, y, z\}$. Using the theory of loops we consruct new examples of finite geometries and prove some important facts about free finite geometries. For example, we prove that the group of automorphisms of free $3-$geometry with three generators is finitely generated, and is infinitely ngenerated in the case of more that three generators.

This talk is based on join work with M. Rasskazova, D. Rasskazova and I. Stulh.

University of São Paulo (Brazil) and Omsk State University, Russia
E-mail: shuragri@gmail.com

On the conjugacy search problem for polynomial permutations modulo p^n

A. V. Karpov

Fix a prime p and an integer n such that $n \geq 1$. We consider the conjugacy search problem in the group of permutations on $\mathbb{Z}_{p^n}$ that are arising from polynomials from $\mathbb{Z}[x]$, i.e. the problem of determining a polynomial a such that the following equation holds for every $x \in \mathbb{Z}_{p^n}$

$$a(g(x)) \equiv f(a(x)) \pmod{p^n}, \tag{1}$$

where polynomials f and g are given and induce permutations that are conjugate. A permutation is said to be *transitive* if it's representation has exactly one cycle of the length p^n. We consider only the case when f and g induce transitive permutations.

Lemma. *Let g_p, $f \in \mathbb{Z}[x]$ induce conjugate transitive permutations on $\mathbb{Z}_{p^n}$, $a_p \in \mathbb{Z}[x]$ be a polynomial such that the equation $a_p(g_p(x)) \equiv f(a_p(x)) \pmod{p^n}$ holds for every $x \in \mathbb{Z}_{p^n}$, $a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ satisfy $a_0(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ and $a_0'(x) \equiv 0 \pmod{p^l}$ for every $x \in \mathbb{Z}_{p^n}$ and k, l be integers such that $\lceil n/2 \rceil \leq k \leq n$, $n - k \leq l$. Then (1) holds for every $x \in \mathbb{Z}_{p^n}$, where $g(x) = g_p(x) + g_0(x)$, $a(x) = a_p(x) + a_0(x) = a_p(x + c_0(x))$, and functions g_0, a_0 and c_0 satisfy the following equations:*

$$a_0(x) \equiv (g_0(x)a_p'(g_p(x)) + a_0(g_p(x)))f'(a_p(x))^{-1} \pmod{p^n}, \tag{2}$$

$$c_0(x) \equiv (g_0(x) + c_0(g_p(x)))g_p'(x)^{-1} \pmod{p^n} \tag{3}$$

for every $x \in \mathbb{Z}_{p^n}$.

Theorem. *Under conditions of lemma equations (2) and (3) define recursion laws for functions a_0 and c_0 respectively, where bases of recursions are*

$$a_0(x \ mod\ p^{n-l} \equiv 0) = ha_p'(0), \ c_0(x \ mod\ p^{n-l} \equiv 0) = h,$$

i.e. depth of both recursions is p^{n-l}. Constant h is equal to $a_0(0)$, and in case $f(x) = x + 1$ is equal to zero.

Thus, if we known the solution of the equation (1), then we can recursively construct the solution for $g(x) + g_0(x)$ in the forms $a(x) + a_0(x)$, $a(x + c_0(x))$, but there is still no known explicit formulas for the functions a_0 and c_0.

Tomsk State University, Tomsk (Russia)
E-mail: karpov@isc.tsu.ru

Finite and locally finite groups with automorphisms of order 2^n

N. Yu. Makarenko

The talk is based on joint works with E. I. Khukhro and P. Shumyatsky.

Suppose that a finite group G admits an automorphism φ of order 2^n such that the fixed-point subgroup $C_G(\alpha)$ of the involution $\alpha \in \langle\varphi\rangle$ is nilpotent of class c. It is proved in [1] that G has a soluble subgroup of derived length bounded in terms of n, c whose index is bounded in terms of n, c and $|C_G(\varphi)|$.

A similar result is also proved for Lie rings [1]. Suppose that a finite Lie ring L admits an automorphism φ of order 2^n such that the fixed-point subring $C_L(\alpha)$ of the involution $\alpha \in \langle\varphi\rangle$ is nilpotent of class c. Let $m = |C_L(\varphi)|$ be the number of fixed points of φ. Then L has ideals $M_1 \geq M_2$ such that M_1 has the index bounded in terms of m and n in the additive group L, the quotient M_1/M_2 is nilpotent of class at most $c+1$, and M_2 is nilpotent of nilpotency class bounded in terms of n and c.

These results are applied to study of a locally finite group G that has a 2-element g with Chernikov centralizer. It is proved in [2] that if the involution in $\langle g\rangle$ has nilpotent centralizer, then G has a soluble subgroup of finite index.

The author was supported by the Russian Science Foundation, project no. 14-21-00065.

References

[1] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu., Shumyatsky P. Finite groups and Lie rings with an automorphism of order 2^n, `arXiv:1409.7807`.

[2] Khukhro E. I., Makarenko N. Yu., Shumyatsky P. Locally finite groups containing a 2-element with Chernikov centralizer, `arXiv:1410.1521`, accepted in Monatshefte für Mathematik.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: natalia_makarenko@yahoo.fr

On minimal switching sets for q-analogs of Steiner triple systems

I. Yu. Mogilnykh

A collection of 3-subspaces of F_q^n, called blocks, such that each 2-subspace of F_q^n is contained in a unique block is called *q-Steiner triple system* (briefly q-STS). Recently, Braun et al. [**1**] constructed the first example for $n = 13$ and $q = 2$, while the smallest nontrivial case for $n = 7$ and $q = 2$ remains to be open.

Consider a collection of 3-subspaces without pairwise intersection of dimension 2. For such set A denote by $O(A)$ the collection of 2-subspaces, contained in subspaces of A. A set A is called *a switching set* for q-STS if there is a collection of 3-subspaces A' (an *alternative* of A), such that $O(A) = O(A')$. Given q-STS D and D' in F_q^n we see that $A = D \setminus D'$ and $A' = D' \setminus D$ are switching sets. Thus we see that studying switching sets is relevant from standpoints of existence and characterization of q-STS.

Switching sets (also known as trades) can be defined for different types of combinatorial objects. In particular, Etzion and Vardy [**2**] suggested weight distribution technique (Lemma 3.1) for evaluating the sizes of switching sets for binary perfect codes. This approach applied to q-STS gives the following.

Lemma. The size of a switching set for q-STS in F_q^n is not less then $(q^4 - 1)/(q - 1)$.

In work [**3**] equidistant codes in Grassman graph are considered. We show that a code from [**3**] is a minimal switching set for q-STS. For a k-subspace U of F_q^l denote by $M(U)$ a matrix whose rows are a basis of U. By $det(M(U)_{i_1,\ldots,i_k})$ denote the matrix minor of $M(U)$, obtained by taking columns of $M(U)$ indexed by $i_1, \ldots, i_k$.

The Plucker image $\mathbf{P}(U)$ of U is the 1-subspace of $F_q^{\binom{l}{k}}$ defined by the vector $P(U)$ with coordinates indexed by the k-subsets of the l positions of F_q^l: $P(U)_{i_1,\ldots,i_k} = det(M(U)_{i_1,\ldots,i_k})$. Following [**3**] given a 1-subspace W of F_q^4 we consider the union

$$P_W = \bigcup_{U: W \text{ is a subspace of } 2-\text{space } U} P(U)$$

of 1-subspaces of F_q^6 which is in fact a 3-subspace of F_q^6 and the set

$$A = \{P_W : W \text{ is a 1-subspace of } F_q^4\}.$$

The alternative of A is obtained using duality of projective space. For a 3-subspace W of F_q^4 denote by P^W the union of the Plucker images of the 2-subspaces, containing in W, $A' = \{P^W : W \text{ is a 3-subspace of } F_q^4\}$.

Theorem. The defined above set A is a switching set for q-STS of minimal size.

Acknowledgements. The author is grateful to D. S. Krotov for problem statement and useful discussions. The work is supported by the Program of Joint Research of the Ural and Siberian Divisions of the RAS (pr. 12-C-1-1018).

References

[1] Braun M., Etzion T., Ostergard P.R.J., Vardy A., Wasserman A. Existence of q-analogs of Steiner systems, http://arxiv.org/pdf/1304.1462.pdf.

[2] Etzion T., Vardy A. Perfect Binary Codes: Constructions Properties, and Enumeration, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-40 (1994), 754–763.

[3] Etzion T., Raviv N. Equidistant codes in Grassmanian, http://arxiv.org/abs/1308.6231.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: ivmog@math.nsc.ru

Confirmation for Wielandt's conjecture

D. O. Revin

In the talk, the results of an joint work in collaboration with Guo Wenbin and Evgeny Vdovin will be presented.

By π, we always denote a set of primes.

Recall that a subgroup H of a finite group G is called a *π-Hall subgroup* if

- every prime divisor of $|H|$ belongs to π (i.e. H is a *π-subgroup*) and
- every prime divisor of $|G : H|$ does not belong to π.

According to P. Hall [**1**], we say that a finite group G *satisfies* $\mathcal{D}_\pi$ if G contains a π-Hall subgroup H and every π-subgroup of G is conjugate in G with some subgroup of H.

Recall that a finite group is nilpotent if and only if it is a direct product of its Sylow subgroups. In [**2**], H. Wielandt proved the following theorem.

Theorem (Wielandt, 1954). *Assume that a finite group G possesses a nilpotent π-Hall subgroup for a set π of primes. Then G satisfies $\mathcal{D}_\pi$.*

This result is regarded to be classical and can be found in well-known textbooks. There are a lot of generalizations and analogs of Wielandt's theorem. One of the earliest such generalizations was obtained by Wielandt himself in [**3**]:

Theorem (Wielandt, 1959). *Suppose that π is a union of disjoint subsets σ and τ. Assume that a finite group G possesses a π-Hall subgroup $H = H_\sigma \times H_\tau$, where H_σ is a nilpotent σ-subgroup and H_τ is a τ-subgroup of H, and let G satisfy $\mathcal{D}_\tau$. Then G satisfies $\mathcal{D}_\pi$.*

In the same paper [**3**], Wielandt asked whether, instead of the nilpotency of H_σ, it is sufficient to assume that G satisfies $\mathcal{D}_\sigma$?

The main result of the talk is the following statement which give an affirmative answer to this question and generalize both Wielandt's theorems of 1954 and 1959.

Theorem. *Let a set π of primes be a union of disjoint subsets σ and τ. Assume that a finite group G possesses a π-Hall subgroup $H = H_\sigma \times H_\tau$, where H_σ and H_τ are σ- and τ-subgroups, respectively. Then G satisfies $\mathcal{D}_\pi$ if and only if G satisfies both $\mathcal{D}_\sigma$ and $\mathcal{D}_\tau$.*

The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

References

[1] Hall P. Theorems like Sylow's, Proc. Lond. Math. Soc., 6:22 (1956), 286–304.

[2] Wielandt H. Zum Satz von Sylow, Math. Z., 60:4, (1954), 407–408.

[3] Wielandt H. Zum Satz von Sylow II, Math. Z., 71:4, (1959), 461–462.

Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: revin@math.nsc.ru

Another two constructions of Klin-Pech distance-regular graphs with intersection arrays $\{35, 24, 1; 1, 12, 35\}$ and $\{44, 24, 1; 1, 12, 44\}$

L. Yu. Tsiovkina

Our notation and terminology follows that found in [**1, 2**]. Let Φ be the Foster graph (the unique distance-regular graph with intersection array $\{3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3\}$) and $G = \mathrm{Aut}(\Phi)$. In [**2**], the authors found two new distance-regular graphs Γ_1 and Γ_2 with intersection arrays $\{35, 24, 1; 1, 12, 35\}$ or $\{44, 24, 1; 1, 12, 44\}$, respectively. The first one is obtained with the use of generalized Hadamard matrix of order 6 over Z_3 by the construction given in [**2**, Theorem 5.6] and the second one is obtained with the use of Godsil-Hensel matrix from $\mathrm{GHM}(Z_3, 45, 3, 12)$, which is constructed in [**2**, Theorem 7.1], and seems to be sporadic. By [**2**, Remark 7.2 ii)], $G \simeq \mathrm{Aut}(\Gamma_1) \simeq \mathrm{Aut}(\Gamma_2)$.

In the present work, we provide another two constructions of these graphs, considering the structure of the group G.

Theorem 1. *Let $\mathcal{V}$ be the class of involutions of G with $|\mathcal{V}| = 108$. Then the graph with vertex set $\mathcal{V}$, whose edges are the pairs $\{u, v\}$, such that $|uv| \in \{2, 4, 5\}$, is distance-regular graph with intersection array $\{35, 24, 1; 1, 12, 35\}$, isomorphic to Γ_1.*

Theorem 2. *Let $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ be the classes of conjugate subgroups of G, isomorphic to Z_2, with $|\mathcal{C}_1| = 90$ and $|\mathcal{C}_2| = 108$, let $\mathcal{C}_3$ be the class of conjugate subgroups of G, isomorphic to E_{2^2} with $|\mathcal{C}_3| = 135$, let $\mathcal{C}_4$ be the class of conjugate subgroups of G, isomorphic to E_{2^3} with $|\mathcal{C}_4| = 90$ and $E = \cup_{i=1}^{4} \mathcal{C}_i$. Let V be the class of conjugate subgroups of G, isomorphic to Z_4, with $|V| = 135$. Then the graph with the vertex set V, whose edges are the pairs $\{u, v\}$, such that $N_G(u) \cap N_G(v) \in E$, is distance-regular graph with intersection array $\{44, 24, 1; 1, 12, 44\}$, isomorphic to Γ_2.*

Acknowledgement. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (research project No. 14-01-31298).

References

[1] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. 1989.

[2] Klin M., Pech Ch. A new construction of antipodal distance-regular covers of complete graphs through the use of Godsil-Hensel matrices, Ars Mathematica Contemporanea 4 (2011), 205–243.

Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg (Russia)
E-mail: l.tsiovkina@gmail.com

Distance regular colorings of the infinite triangular grid

A. Yu. Vasil′eva

A vertex partition $(V_1,\dots,V_k)$ of a graph G is called a perfect coloring (or equitable partition, or regular partition, or partition design) if for every $i,j\in\{1,\dots,k\}$ there is a number a_{ij} such that every vertex from V_i has exactly a_{ij} neighbors from V_j. The matrix $A=(a_{ij})$ is called the parameter matrix of the coloring. A perfect coloring $(V_1,\dots,V_k)$ is distance regular if its parameter matrix is three-diagonal (i.e. $(V_1,\dots,V_k)$ is the distance coloring with respect to V_1). In this case the set V_1 is called a distance regular code and we will write the matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^k$ as the sequence of its nonzero elements: $[a_{11}a_{12}|a_{21}a_{22}a_{23}|a_{32}a_{33}a_{34}|\dots|a_{kk-1}a_{kk}]$.

We study the distance regular colorings of the infinite 6-regular graph of the triangular grid and list all the parameter matrices for this graph.

Theorem. *Up to the central symmetry, the parameter $(k\times k)$-matrices of nontrivial $(k>1)$ distance regular colorings of the infinite triangular grid are following:*
ten matrices with $k=2$:
[06|15]; [06|24]; [06|33]; [15|24]; [15|33]; [24|24]; [24|33]; [24|42]; [33|33]; [42|24];
three classes with $k=3,4,5,\dots$:
[24|222|...|222|24]; [24|222|...|222|42]; [42|222|...|222|42];
four "sporadic" matrices with $k=3$:
[06|123|24]; [06|123|33]; [06|132|60]; [06|141|60].
Each of the matrices [24|24], [24|33] *corresponds to two nonequivalent colorings; each of* [06|24], [24|42], [06|141|60] *corresponds to infinite number of colorings; every other matrix corresponds to one colorings, up to equivalence.*

References

[1] Avgustinovich S. V., Vasil'eva, A. Yu., Sergeeva, I. V. Distance regular colorings of the infinite rectangular grid // Diskretn. Anal. Issled. Oper. 2011. Vol. 18. N 3. P. 3–10.
[2] Puzynina S. A. On periodicity of perfect colorings of the infinite hexagonal and triangular grids // Sib. Math. J. 2011. Vol. 52. N 1. P. 91–104.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vasilan@math.nsc.ru

On spectra of automorphic extensions of Steinberg's triality groups

M. A. Zvezdina

For a finite group G, the set of its element orders is called the spectrum of G and denoted by $\omega(G)$. Let $S < G \leq \mathrm{Aut}(S)$, where S is a finite non-abelian simple group. The problem is to find all S and G such that $\omega(S) = \omega(G)$ (see [**1**, Question 17.36]).

Our work is concerned with Steinberg's triality groups ${}^3D_4(q)$. If $S = {}^3D_4(q)$, G is an automorphic extension of S and $\omega(G) = \omega(S)$ then it follows from [**2**] that G/S is a $\{2, 3\}$-group. We consider the case where G/S is a $\{2\}$-group. The result is the following:

Theorem. *Let $S = {}^3D_4(q)$, $q = p^\alpha$, and $S < G \leq \mathrm{Aut}(S)$. Assume that G/S is a $\{2\}$-group. If $p \in \{2, 3, 5\}$ then $\omega(S) \neq \omega(G)$. If $p > 5$ then $\omega(S) = \omega(G)$.*

We mention that this is the first example of an exceptional simple group which has an automorphic extension with the same spectrum.

Acknowledgments. The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

References

[1] Mazurov V. D., Khukhro E. I. (eds.) The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 17 ed., Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Siberian Div., Novosibirsk, 2010.

[2] Lucido M. S. Prime graph components of finite almost simple groups, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, tome 102 (1999), P. 1–22.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: maria.a.zvezdina@gmail.com

V. Секция «Теория колец»

Метрические алгебры Лейбница

А. Т. Гайнов

Алгебра A над полем K характеристики, не равной 2, называется *алгеброй Лейбница*, если в ней выполняется тождество

$$(\forall x, y, z \in A)\, x(yz) = (xy)z - (xz)y.$$

Алгебру A над полем K характеристики, не равной 2, назовем *метрической алгеброй Лейбница*, если на ней задана невырожденная симметрическая билинейная форма $n(x, y)$ такая, что выполняется скалярное тождество

$$(\forall x, y, z \in A)\, n(x, yz) = n(xy, z) - n(xz, y).$$

Теорема. *Всякая метрическая алгебра Лейбница A является* тривиальной алгеброй*, т.е. алгеброй с нулевым умножением*:

$$(\forall x, y \in A)\, xy = 0.$$

Скалярное тождество любой степени и от любого числа переменных назовем *жестким скалярным тождеством*, если оно выполняется только в тривиальных алгебрах.

Проблема. Найти все жесткие скалярные тождества.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: gainov@math.nsc.ru

Γ-конформные алгебры Ли конечного типа для группы Γ без кручения

В. Ю. Губарев, П. С. Колесников

Пусть $\Bbbk$ — основное поле, Γ — произвольная группа, $\Bbbk\Gamma$ — групповая алгебра группы Γ над $\Bbbk$.

Определение [1]. Левый $\Bbbk\Gamma$-модуль C, снабжённый множеством билинейных операций $(\cdot_{(\gamma)}\cdot) : C \otimes C \to C$, $\gamma \in \Gamma$, называется Γ-конформной алгеброй Ли, если для любых $a, b, c \in C$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ выполнены следующие аксиомы:

(Γ1) $a_{(\delta)}b = 0$ для почти всех $\delta \in \Gamma$;

(Γ2) $\alpha a_{(\gamma)}b = a_{(\gamma\alpha)}b$;

(Γ3) $a_{(\gamma)}\alpha b = \alpha(a_{(\alpha^{-1}\gamma)}b)$;

(Γ4) $a_{(\alpha)}b = -\alpha(b_{(\alpha^{-1})}a)$;

(Γ5) $a_{(\alpha)}(b_{(\beta)}c) = (a_{(\beta^{-1}\alpha)}b)_{(\beta)}c + b_{(\beta)}(a_{(\alpha)}c)$.

Пример [2]. Рассмотрим для произвольной алгебры Ли A пространство $C = \Bbbk\Gamma \otimes A$ с γ-произведениями, заданными по правилу

$$(1 \otimes a)_{(\gamma)}(1 \otimes b) = \begin{cases} 1 \otimes (ab), & \gamma = e, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Распространяя действие $\gamma \in \Gamma$ на пространстве C по аксиомам (Γ2), (Γ3), зададим на нём структуру Γ-конформной алгебры. Полученная алгебра называется алгеброй петель и обозначается как $\mathrm{Cur}(A)$.

В [3] описаны простые и полупростые ассоциативные Γ-конформные алгебры конечного типа для группы Γ без кручения.

Теорема. *Пусть C — Γ-конформная алгебра Ли конечного типа для группы Γ без кручения над полем $\Bbbk$.*

а) Пусть C — простая Γ-конформная алгебра Ли, тогда C изоморфна алгебре петель $\mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$ от простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$;

б) пусть C — полупростая Γ-конформная алгебра Ли и $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$, тогда C изоморфна конечной прямой сумме простых Γ-конформных алгебр Ли.

Список литературы

[1] Golenishcheva-Kutuzova M. I., Kac V. G. Γ-*conformal algebras*, J. Math. Phys, **39**:4 (1998), 2290–2305.

[2] Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G. *Theory of finite pseudoalgebras*, Adv. Math, **162**:1 (2001), 1–140.

[3] Губарев В. Ю. *Простые ассоциативные Γ-конформные алгебры конечного типа для группы Γ без кручения*, Алгебра и Логика, **52**:5 (2013), 559–581.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: wsewolod89@gmail.com, pavelsk77@gmail.com

Пример дифференциально простой алгебры Ли, не являющейся свободным модулем над своим центроидом

В. Н. Желябин, М. Е. Гончаров

В работе [**1**] Р. Блок доказал, что всякая дифференциально простая алгебра с минимальным идеалом является простой в случае характеристики 0, а в случае ненулевой характеристики представляется в виде тензорного произведения ассоциативной коммутативной дифференциально простой алгебры на простую алгебру. В частности, в случае наличия минимального идеала дифференциально простая алгебра будет свободным модулем над своим центроидом. А. Поповым были получены результаты, аналогичные результатам Блока, в случае альтернативных и йордановых алгебр без предположения о существовании минимального идеала (см. [**2**], [**3**]). Более точно, было доказано, что всякая дифференциально простая альтернативная алгебра характеристики 0 является проективным модулем над своим центром.

В связи с этими результатами возникает вопрос: будет ли дифференциально простая альтернативная или йорданова алгебра свободным модулем над своим центром. В работе [**4**] с помощью координатного кольца n-мерной вещественной сферы строятся примеры дифференциально простых алгебр над полем вещественных чисел, являющиеся конечнопорожденными проективными, но несвободными модулями над своим центроидом. В качестве следствия примеры таких алгебр были получены в многообразиях ассоциативных, лиевых, альтернативных, мальцевских и йордановых алгебр.

В данной работе строится пример дифференциально простой алгебры Ли над алгебраически закнутым полем характеристики 0, являющийся конечнопорожденным проективным, но несвободным модулем.

Работа поддержана РФФИ, грант № 14-01-00014 и № No12-01-33031-мол-а-вед.

Список литературы

[1] Block R. E. Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal // Ann. of Math., **90** (1969), №3, 433–459.

[2] Попов А. А. Дифференциально простые альтернативные алгебры // Алгебра и логика **49** (2010), №5, 670–689.

[3] Попов А. А. Дифференциально простые йордановы алгебры // Сиб. матем. ж., принята в печать.

[4] Желябин В. Н., Попов А. А., Шестаков И. П. Координатное кольцо n-мерной сферы и некоторые примеры дифференциально простых алгебр // Алгебра и логика, том 42 (2013), №4, 416–434.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru, gme@math.nsc.ru

Исследование класса дифференцируемых по модулю p^n функций

А. С. Ивачев

В работе [**1**] предложен ряд обобщений для полиномиальных функций над $\mathbb{Z}_{p^n}$, допускающих эффективную программную и аппаратную реализацию. В связи с этим в докладе рассматривается класс D_n дифференцируемых по модулю p^n функций. Найдено число функций в классе, условие биективности, число биективных функций, явное выражение обратной функции, условие транзитивности, число транзитивных функций.

Определение. Любая функция $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ является дифференцируемой по модулю p. Функция $f : \mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^n}$ называется дифференцируемой по модулю p^n $(n > 1)$, если:

(1) функция $f \bmod p^i$ — дифференцируемая по модулю p^i, $i = \overline{1, n-1}$;

(2) существует функция $f' : \mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^n}$, такая, что для любого a из $\mathbb{Z}_{p^n}$ выполняется $f(x + ap^{n-1}) = f(x) + ap^{n-1}f'(x)$. Функция f' называется производной функции f по модулю p^n.

Утверждение. *Число дифференцируемых функций равно* $p^{p+2p\frac{p^{n-1}-1}{p-1}}$.

Определение. Дифференцируемая по модулю p^n функция f называется *биективной*, если существует функция g, такая, что $g(f(x)) = x$. Функция g называется обратной для функции f.

Утверждение. *Функция $f \in D_n$ биективна тогда и только тогда, когда функция $f \bmod p$ обратима и производные функций $f \bmod p^i$, $2 \le i \le n$, не обращаются в 0 при любом значении x.*

Следствие. *Число биективных дифференцируемых функций равно*

$$p\,!((p-1)p)^{p^{\frac{p^{n-1}-1}{p-1}}}.$$

Утверждение. *Пусть f — биективная дифференцируемая функция, и g — обратная к f. Тогда справедлива следующая формула:*

$$g(x) =$$

$$g(x) \bmod p^{n-1} - g'(x)(f(g(x) \bmod p^{n-1}) - f(g(x) \bmod p^{n-1}) \bmod p^{n-1} - x_{n-1}p^{n-1}).$$

Определение. Дифференцируемая по модулю p^n функция называется транзитивной, если она индуцирует одноцикловую подстановку на $\mathbb{Z}_{p^n}$.

Утверждение. *Число транзитивных дифференцируемых функций равно*

$$(p-1)\,!(p-1)^{p^{\frac{p^{n-1}-1}{p-1}}}p^{p^{\frac{p^{n-1}-1}{p-1}}-n+1}.$$

Список литературы

[1] Анашин В. С., Равномерно распределенные последовательности целых p-адических чисел, Дискретная математика, 14:4 (2002), 3-64

студент кафедры защиты информации и криптографии ТГУ, Томск
E-mail: ivachyou@gmail.com

Об одном многообразии метабелевых правоальтернативных алгебр

И. М. Исаев

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие линейных алгебр над полем F, заданное тождествами $(xy)y = xy^2$, $((xy)z)y = x((yz)y)$, $(xy)(zt) = 0$, $((xy)z)t = 0$, $(xy)x = 0$.

В работе [**1**] построена серия конечномерных алгебр P_n, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Напомним, что $P_n = \langle c_i, e_{ij}, d_{ij}, a_{ij}, b_{ij} | i, j = 1, 2, \ldots, n\rangle_F$, ненулевые произведения базисных элементов алгебры P_n задается следующим образом: $a_{ij}c_i = d_{ij}$, $b_{ij}c_i = e_{ij}$, $b_{ij}d_{ij} = -d_{ij}b_{ij} = -a_{ij}e_{ij} = e_{ij}a_{ij} = c_j$. Отметим, что алгебра P_1 представляет пример Дорофеева [**2**] пятимерной правоальтернативной правонильпотентной, но не нильпотентной алгебры. Обозначим через $\mathfrak{M}_n$ многообразие, порожденное алгеброй P_n. Ясно, что многообразия $\mathfrak{M}_n$ образуют возрастающую цепь подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$. В работе [**1**] доказано, что многообразие $\mathfrak{M}_2$ не имеет конечного базиса тождеств.

Теорема. *Имеют место следующие утверждения:*

1. $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n\geq 2} \mathfrak{M}_n$;
2. *Многообразие* $\mathfrak{M}_n$ $(n \geq 2)$ *не имеет конечного базиса тождеств.*

Список литературы

[1] Исаев И. М. Конечномерные правоальтернативные алгебры, порождающие не конечнобазируемые многообразия, Алгебра и логика, 25, № 2 (1986), С. 136–153.

[2] Дорофеев Г. В. О нильпотентности правоальтернативных колец, Алгебра и логика, 9, № 3 (1970), 302–305.

Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул
E-mail: isaev@uni-altai.ru

О сильно бесконечно базируемых векторных пространствах

А. В. Кислицин

Пусть E – векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (в этом случае будем говорить о векторном пространстве E, вложенном в ассоциативную алгебру A). Тождеством векторного пространства E назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E. Естественным образом определяются векторные пространства, имеющие конечный базис тождеств (КБ-пространства) и не имеющие конечного базиса тождеств (НКБ-пространства).

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства E, будем называть L-многообразием, порожденным пространством E и обозначать $\mathrm{Var}_L E$.

Пусть далее $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_t)$ – ассоциативный одночлен, линейный по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и

$$C_n^{(w)} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma w(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}; y_1, y_2, \ldots, y_t)$$

— многочлен Капелли. Через $\mathrm{Cap}(n)$ обозначим L-многообразие векторных пространств, которые удовлетворяют всевозможным тождествам Капелли $C_n^{(w)} = 0$ для фиксированного n.

L-многообразие $\mathfrak{N}$, такое что $\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{Cap}(k)$ при некотором k, будем называть сильно не конечно базируемым (СНКБ-многообразием), если любое L-многообразие $\mathfrak{M}$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Cap}(n)$ для некоторого n, не имеет конечного базиса тождеств. Векторное пространство E назовем СНКБ-пространством, если $\mathrm{Var}_L E$ является СНКБ-многообразием.

В работе [**1**] построены примеры СНКБ-пространств. В частности, доказано, что векторное пространство $T_2(F)$ верхних треугольных матриц второго порядка сильно бесконечно базируемо. В настоящей работе описаны конечномерные СНКБ-пространства, являющиеся ассоциативными алгебрами с единицей над полем нулевой характеристики, а также КБ-пространства указанного класса.

Теорема. *Конечномерное векторное пространство E над полем F нулевой характеристики, являющееся одновременно ассоциативной F-алгеброй с единицей, сильно не конечно базируемо (имеет конечный базис тождеств) тогда и только тогда, когда $T_2(F) \in \mathrm{Var}_L E$ ($T_2(F) \notin \mathrm{Var}_L E$).*

Список литературы

[1] Исаев И. М., Кислицин А. В. Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 4. С. 435–460.

Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул
E-mail: kislitsin@uni-altai.ru

Проектирования конечных моногенных колец

С. С. Коробков

Пусть R и R' — два ассоциативных кольца, а $L(R)$ и $L(R')$ — их решетки подколец соответственно. Если существует изоморфизм φ решетки $L(R)$ на решетку $L(R')$, то будем называть кольца R и R' решеточно изоморфными. Изоморфизм φ будем называть решеточным изоморфизмом или проектированием кольца R на кольцо R'. При этом кольцо R' будем обозначать через R^φ и называть его проективным образом кольца R. Будем говорить, что кольцо R решеточно определяется, если $R \cong R^\varphi$ для любого решеточного изоморфизма φ.

При изучении решеточных изоморфизмов колец важно знать, будет ли кольцо, решеточно изоморфное моногенному кольцу (то есть кольцу, порожденному одним элементом), также моногенным. Для некоторых типов колец (например, для нильпотентных колец, колец Галуа) свойство кольца быть моногенным наследуется проективными образами. Однако существуют примеры, показывающие, что моногенность кольца не всегда сохраняется при решеточных изоморфизмах. Следующая теорема описывает строение произвольного конечного моногенного p-кольца с единицей.

Теорема 1. *Пусть R — конечное моногенное p-кольцо с единицей. Тогда R разложимо в конечную прямую сумму колец вида: $S_i + (r_i)$, где $S_i \cong GR(p^{n_i}, m_i)$, (r_i) — главный идеал, порожденный нильпотентным элементом.*

Проектирования моногенных колец, разложимых в прямые суммы колец Галуа различных типов, рассматривались в работах [**1**] и [**2**]. В данной работе продолжается изучение решеточных изоморфизмов конечных моногенных колец.

Теорема 2. *Пусть конечное моногенное p-кольцо R с единицей разложимо в прямую сумму колец T_i ($i = \overline{1,k}$), удовлетворяющих условиям: $T_i = S_i + (r_i)$, $S_i \cong GR(p^{n_i}, m_i)$, $n_i > 1$, $m_i > 1$, r_i — нильпотентный элемент. Тогда R^φ — моногенное p-кольцо с единицей и при этом $R^\varphi = T_1^\varphi \dotplus \cdots \dotplus T_k^\varphi$, $T_i^\varphi = S_i^\varphi + (r_i')$, $S_i^\varphi \cong S_i$, r_i' — нильпотентный элемент.*

Доказательство теоремы 2 основано на использовании решеточной определяемости колец Галуа, установленной в работе [**3**].

Список литературы

[1] Korobkov S. S. Lattice isomorphisms of the direct sums of Galois rings // Материалы международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", Казань: КФУ, 2014. С. 85-86.

[2] Коробков С. С. Проектирования конечных моногенных колец, не содержащих нильпотентных элементов // Труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина. Нальчик: Издательство КБГУ, 2014 г. С. 66-68.

[3] Коробков С. С. Проектирования колец Галуа // Алгебра и логика (в печати).

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

Строение колец, удовлетворяющих тождеству индекса два

Ю. Н. Мальцев, Е. В. Журавлев

В работах [**1, 2**] доказано, что произвольное конечное ассоциативное кольцо R удовлетворяет тождествам

$$mx = 0, \quad x_1x_2\dots x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где m – натуральное число и $f(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен из свободного ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots\rangle$, являющийся суммой одночленов степени $\geq n+1$. Число n называется индексом конечного кольца R или индексом тождества.

Пусть $J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R, $GR(p^{nr}, p^n)$ – кольцо Галуа, представимое в виде $\mathbb{Z}_{p^n}[x]/(f)$, где p – простое число, f – унитарный многочлен степени r, образ которого при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^n}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ является неприводимым над $\mathbb{Z}_p$ многочленом. В частности, $GR(p^n, p^n) = \mathbb{Z}_{p^n}$ и $GR(p^r, p) = GF(p^r)$.

Теорема 1. *Конечное кольцо R, неразложимое в прямую сумму ненулевых идеалов, удовлетворяет тождеству*

$$xy = f(x, y),$$

где $f(x, y) \in \mathbb{Z}\langle x, y\rangle$ – сумма одночленов степени ≥ 3, тогда и только тогда, когда R изоморфно одному из следующих колец:

(1) $\langle a |\, a^2 = 0, p^m a = 0\rangle$, *$p$ – простое число. В этом случае R удовлетворяет тождеству $xy = 0$;*

(2) $M_2(GF(q))$. *В этом случае R удовлетворяет тождествам*

$$px = 0, \qquad \left(x - x^q\right)\left(y - y^{q^2}\right)\left(1 - [x, y]^{q-1}\right) = 0,$$

где $q = p^k$ и p – простое число;

(3) $R = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} GR(p^{t_i r_i}, p^{t_i}) + J(R)$, *где $J(R)^2 = 0$, $t_i \leq 2$, $i \leq s$. В этом случае R удовлетворяет тождествам*

$$p^2x = 0, \quad (x - x^q)(y - y^q) = 0,$$

где $q = p^{r_1 r_2 \dots r_s}$.

Кольцо R называется регулярным, если уравнение $axa = a$ разрешимо в R для любого элемента $a \in R$.

Теорема 2. *Пусть R – регулярное кольцо ($R \neq 0$), удовлетворяющее тождеству $xy = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – сумма одночленов степени ≥ 3 свободного ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\langle x, y\rangle$. Тогда*

(1) *кольцо R не содержит ненулевых нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда существует конечное множество конечных полей $\mathfrak{M} = \{GF(q_1), \dots, GF(q_s)\}$ такое, что*

$$F \subseteq R \subseteq \prod_{i \in I} F_i,$$

где $\{F, F_i, i \in I\} \subseteq \mathfrak{M}$;

(2) *кольцо R содержит ненулевые нильпотентные элементы тогда и только тогда, когда существует конечное множество конечных полей $\mathfrak{M} = \{GF(q_1), \dots, GF(q_s)\}$ такое, что*

$$M_2(F) \subseteq R \subseteq M_2\left(\prod_{i \in I} F_i\right),$$

где $\{F, F_i, i \in I\} \subseteq \mathfrak{M}$.

Список литературы

[1] Львов И. В. *О многообразиях ассоциативных колец. I*, Алгебра и Логика, **12:3** (1973), 269–297.
[2] Kruse R. *Identities satisfied by a finite ring*, J. Algebra, **26:2** (1973), 298-318.

Алтайская государственная педагогическая академия, Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: maltsevyn@gmail.com, evzhuravlev@mail.ru

Описание почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий с подэкспоненциальным ростом

С. П. Мищенко, О. В. Шулежко

Основное поле имеет нулевую характеристику. Все неопределяемые понятия можно найти в книгах [1] и [2]. Многообразие называется почти нильпотентным, если оно само не является нильпотентным, но каждое собственное его подмногообразие нильпотентно. Если в многообразии выполнено тождество $(xy)(zt) \equiv 0$, то такое многообразие по аналогии со случаем алгебр Ли назовём метабелевым. Если многообразие имеет полиномиальный или промежуточный рост, то будем говорить, что оно имеет подэкспоненциальный рост.

Так как выполнение тождества ассоциативности не предполагается, то договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, т.е. $abc = (ab)c$. Хорошо известно (см, например, [1], с. 173 – 177), что в классе алгебр Ли само метабелево многообразие, которое обозначается $\mathbf{A}^2$, является почти нильпотентным. Построим ещё один пример почти нильпотентного антикоммутативного метабелева многообразия. Рассмотрим алгебру G с бесконечным числом образующих $e_1, e_2, \ldots$ и следующим множеством определяющих соотношений:

(1) $we_i = -e_i w$, где w – любой моном, $|w| \geq 1$.

(2) $w_1 w_2 = 0$, где мономы $w_1, w_2 \in G^2$, то есть $|w_1| \geq 2, |w_2| \geq 2$.

(3) $e_{i_{p(1)}} e_{i_{p(2)}} \ldots e_{i_{p(m)}} = (-1)^p e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_m}$, где p – перестановка из симметрической группы S_m, $(-1)^p = \pm 1$ в зависимости от чётности перестановки.

Предложение. *Многообразие $\mathbf{V}_{anti} = var(G)$, порождённое алгеброй G, является почти нильпотентным антикоммутативным метабелевым.*

Используя основной результат работы [3], удалось доказать, что других примеров почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий подэкспоненциального роста, кроме двух перечисленных, нет.

Теорема. Пусть $\mathbf{V}$ – антикоммутативное метабелево многообразие подэкспоненциального роста над полем нулевой характеристики. Если $\mathbf{A}^2 \nsubseteq \mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_{anti} \nsubseteq \mathbf{V}$, то $\mathbf{V}$ – нильпотентно.

Список литературы

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука. 1985. 448 с.

[2] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial identities and asymptotic methods. American Mathematical Society Providence, RI. 2005. 352 p.

[3] Giambruno A., Mishchenko S. P., *Irreducible characters of the symmetric group and exponential growth* // arXiv:1406.1653.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск
E-mail: mishchenkosp@mail.ru, ol.shulezhko@gmail.com

Структурное строение квазиполей малых нечетных порядков

С. В. Панов

Квазиполем, в соответствии с [**1**, опр. 5.24], называют систему $(Q, +, \circ)$, где $|Q|$ конечный и выполняются аксиомы:

(1) $(Q, +)$ – абелева группа с нейтральным элементом 0;

(2) $Q^* = Q \setminus \{0\}$ по умножению $\circ$ является квазигруппой с единицей 1, т.е. лупой;

(3) Для любых $x, y, z \in Q$ выполняется односторонний дистрибутивный закон $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$;

(4) $x \circ 0 = 0$ для любого $x \in Q$.

Известно, что построение и классификация конечных квазиполей тесно связаны с классификацией конечных плоскостей трансляций [**1**], [**2**]. В своей работе мы отвечаем на вопросы, поставленные профессором В. М. Левчуком в докладе на научно-исследовательском семинаре кафедры алгебры МГУ в 2013 г. и в [**3**], для некоторых квазиполей нечетных порядков p^2, p^3 (p - простое число).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968).

Список литературы

[1] Jhonson N, Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. – Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 2007, 888 pp.

[2] Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes // Springer - Verlag: New-York Inc. 1973.

[3] Levcuk V. M., Panov S. V., Shtukkert P. K. The structure of finite quasifields and their projective translation planes // Proceed. XII Intern. Conf. on Algebra and Number Theory. Tula. 2014. P. 106–108.

каф. АиМЛ ИМФИ СФУ, Красноярск
E-mail: pansevakrasn@mail.ru

Периоды полиномиальной вектор-функции над конечным коммутативным кольцом

Н. Г. Парватов

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, $L = K^n$ — его n-я декартова степень, $f_1, \ldots, f_n$ — многочлены от n переменных над кольцом K и функция $f : L \to L$ определена соотношением $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ для любого $x \in L$. Для идеала $J \trianglelefteq K$ и набора $x \in L$ рассмотрим последовательность

$$f^0(x) + JL, f^1(x) + JL, f^2(x) + JL, \ldots$$

элементов фактор-кольца L/JL, где $f^0(x) = x$ и $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ при $k > 1$.

Назовём функцию f *периодической* на множестве $X \subseteq L$ по идеалу J, если для некоторого положительного l и любого $x \in X$ выполняется $f^l(x) + JL = x + JL$. Наименьшее l в этом случае назовём *периодом* функции f на множестве X по идеалу J и обозначим через $\tau(f, X, J)$. Очевидно, функция f является подстановкой на L, если она периодична на L по нулевому идеалу; тогда $\tau(f, L, 0)$ — порядок подстановки f.

В докладе рассматриваются периодические свойства функции (в том числе условия периодичности и возможные значения периодов), обусловленные строением кольца K. Подобные свойства изучались в [**1**] для одноместной полиномиальной функции над кольцом Галуа. Сформулируем некоторые результаты.

Пусть $\mathrm{M}_n(K)$ — кольцо матриц размера n над K. Через $J_f(x)$ обозначим матрицу Якоби функции f в точке $x \in L$.

Теорема. *Пусть $x \in L$, J — нильпотентный идеал кольца K степени нильпотентности $r \geq 2$ и функция f периодична на смежном классе $X = x + JL$ по идеалу J с периодом τ. Функция f тогда и только тогда периодична на X по нулевому идеалу, когда смежный класс $J_{f^\tau}(x) + S$ обратим в фактор-кольце $\mathrm{M}_n(K)/S$, где*

$$S = \{A \in \mathrm{M}_n(K) | JL \cdot A \subseteq J^2 L\}.$$

В этом случае

$$\tau(f, X, 0) \,|\, \tau \cdot \kappa \cdot \varepsilon^{r-1},$$

где κ — мультипликативный порядок матрицы $J_{f^\tau}(x)$ в фактор-кольце $\mathrm{M}_n(K)/S$ и ε — характеристика фактор-кольца $\mathrm{M}_n(K)/S$.

В ряде случаев оценку периода, указанную в теореме, удаётся улучшить.

В качестве следствия теоремы получаются условия, при которых функция f является подстановокой на L, а также оценку её порядка $\tau(f, L, 0)$.

Список литературы

[1] Ермилов Д. М., Козлитин О. А. Цикловая структура полиномиального генератора над кольцом Галуа // Математические вопросы криптографии, 2013, 4, N1, 27–57.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: parvatov@mail.tsu.ru

О многообразии, порожденном трехмерной простой алгеброй Ли

Ю. Р. Пестова

Характеристика основного поля предполагается равной нулю, а все неопределяемые понятия можно найти, например, в монографии [**1**].

Если рассматривать матрицы второго порядка со следом 0 над основным полем относительно операции коммутирования, то их множество будет образовывать трехмерную простую алгебру Ли, которую обозначим sl_2. Сохраним принятое в обзоре [**3**] обозначение $\mathbf{V}_0$ для многообразия, порожденного этой алгеброй. Это единственный пример неразрешимого лиева многообразия почти полиномиального роста, то есть его рост не является полиномиальным, но рост любого собственного подмногообразия является полиномиальным.

Многообразие $\mathbf{V}_0$ хорошо исследовано. Так, например, в работах [**4**], [**5**] доказано, что оно является шпехтовым и найден базис тождеств этого многообразия. А в статье [**2**] получена информация о строении его полилинейных частей как модулей симметрических групп и сформулирован следующий результат о кратностях:

$$m_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = (p+q+r, p+q, p), \text{ где } p+q \neq 0 \text{ и } q \text{ или } r \text{ нечетное;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Напомним, что кодлина $l_n(\mathbf{V}_0)$ многообразия $\mathbf{V}_0$ по определению равна сумме кратностей, то есть числу неприводимых модулей в разложении полилинейной части.

Недавно автором была получена формула для вычисления кодлины $l_n(\mathbf{V}_0)$.

Теорема. *Для всех $n \geq 4$ кодлина многообразия $\mathbf{V}_0$ вычисляется по формулам:*

$$l_n(\mathbf{V}_0) = \begin{cases} \frac{n^2+4n}{16}, & \text{если } n = 4k; \\ \frac{n^2+6n-7}{16}, & \text{если } n = 4k+1; \\ \frac{n^2+4n+4}{16}, & \text{если } n = 4k+2; \\ \frac{n^2+6n-11}{16}, & \text{если } n = 4k+3. \end{cases}$$

Список литературы

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука. 1980.

[2] Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. 1980. Т.115, № 1. С. 98–115.

[3] Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. 1990. Т.45, №6(276). С. 25–45.

[4] Размыслов Ю. П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. 1973. Т.12, № 1. С. 83–113.

[5] Размыслов Ю.П. Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1974. Т.13, № 6. С. 685–693.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск
E-mail: fyathut28@rambler.ru

Об инвариантах свободных ограниченных алгебр Ли

В. М. Петроградский, И. А. Субботин

Авторами доказано, что подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена, где $L = L(X)$ — свободная ограниченная алгебра Ли конечного ранга со свободным порождающим множеством X над произвольным полем положительной характеристики и G — нетривиальная конечная группа однородных автоморфизмов $L(X)$.

Также доказано, что последовательность $|Y_n|$, $n \geq 1$, растет экспоненциально с показателем экспоненты k, где $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ — однородное свободное порождающее множество для подалгебры инвариантов L^G, где элементы Y_n имеют степень n относительно X, $n \geq 1$. Получено, что производящая функция $(Y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n| t^n$ имеет радиус сходимости $1/k$ и найдена асимптотика ее роста при $t \to 1/k - 0$.

Список литературы

[1] Бахтурин Ю. А., *Тождества в алгебрах Ли*, Москва, Наука, 1985.

[2] Петроградский В. М., Смирнов А. А., “Об инвариантах модулярных свободных алгебр Ли”, *Фунд. Прикл. Мат.*, **15**:1 (2009) 117–124; English translation in *J. Math. Sci.*, **166**:6 (2010), 767–772.

Department of Mathematics, University of Brasilia, 70910-900 Brasilia DF, Brazil;
Факультет математики и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, ул. Льва Толстого 42, Ульяновск, 432970 Россия
E-mail: petrogradsky@rambler.ru, shelby888@yandex.ru

Алгебры Пуассона – Фаркаса

А. П. Пожидаев

Пусть A — алгебра Пуассона $(A; \{\ ,\ \}, \cdot)$, где $\{\ ,\ \}$ — скобка Ли, $\cdot$ — ассоциативная коммутативная операция. Если на A выполняется тождество

$$\{xy\}\{zu\} + \{zx\}\{yu\} + \{yz\}\{xu\} \quad = \quad 0,$$

то A будем называть алгеброй Пуассона – Фаркаса. Фаркасом впервые было замечено, что такой алгеброй является кольцо многочленов $A = F[x, y, z]$ над полем F, где

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ранее автором было показано, что по каждой алгебре Пуассона – Фаркаса строится тернарная алгебра Филиппова. В данной работе мы приводим новые примеры алгебр Пуассона – Фаркаса: алгебру скобок Пуассона – Ли и простую алгебру Пуассона, связанную с алгеброй Вейля A_1.

Работа частично поддержана фондом РФФИ (гранты 12-01-33031, 14-01-00014).

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: app@math.nsc.ru

Одно необходимое и достаточное условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница

А. В. Половинкина, Т. В. Скорая

Характеристика основного поля Φ равна нулю. Все произведения являются левонормированными, то есть $xyzt = ((xy)z)t$. Все неопределяемые понятия можно найти в монографии [**1**].

Пусть $\mathbf{V}$ — произвольное многообразие алгебр Лейбница. Рассмотрим полилинейную компоненту степени n многообразия $\mathbf{V}$ и ее разложение в прямую сумму неприводимых подмодулей симметрической группы. Кратности этих слагаемых обозначим через $m_\lambda(\mathbf{V})$ и определим кодлину многообразия как их сумму: $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})$. Будем говорить, что кодлина многообразия конечна, если существует такая константа c, не зависящая от n, что для любых n верно неравенство $l_n(\mathbf{V}) \le c$. Следуя работам [**2**] и [**3**], обозначим через $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ многообразие алгебр Лейбница, удовлетворяющее тождеству $(x_1x_2)(x_3x_4)...(x_{2s+1}x_{2s+2}) \equiv 0$.

В работе [**2**] было получено необходимое условие конечности кодлины многообразия $\mathbf{V}$ алгебр Лейбница, которое заключается в существовании натурального числа s, для которого верны включения: $\mathbf{U}_2, \widetilde{\mathbf{U}}_2 \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$, где $\mathbf{U}_2, \widetilde{\mathbf{U}}_2$ — многообразия алгебр Ли и Лейбница соответственно с почти конечной кодлиной, определение и свойства которых можно прочитать в [**2**]. В работе [**3**] было доказано следующее достаточное условие: пусть $\mathbf{V}$ — подмногообразие многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$, в котором для некоторых натуральных $k, m, k \le m$ и $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Phi$ выполняется тождество $xY^kzY^{m-k} \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i xY^{k-i}zY^{m-k+i}$, где Y – линейный оператор умножения справа на y. Тогда многообразие $\mathbf{V}$ имеет конечную кодлину.

Получен следующий критерий конечности кодлины:

Теорема. *Кодлина многообразия $\mathbf{V}$ конечна тогда и только тогда, когда верно включение $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ и в многообразии $\mathbf{V}$ выполняется тождество*

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i xY^izY^{n-i} \equiv 0.$$

Список литературы

[1] Giambruno A., Zaicev M. V. Polynomail identities and Asymptotic Methods // American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs. 2005. V. 122. P. 352

[2] Швецова А.В. Необходимое условие кодлины многообразия алгебр Лейбница // Вестник МГАДА.

[3] Скорая Т. В., Швецова А. В. Новые свойства многообразий алгебр Лейбница // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т.13, Вып. 4. Ч. 2. С. 124–129.

Федеральный научно-производственный центр ОАО ”Научно-производственное объединение ”Марс”, Ульяновск; Ульяновский государственный университет, Ульяновск

E-mail: shvesovaav@rambler.ru, skorayatv@yandex.ru

Коммутаторная ширина элементов свободной метабелевой алгебры Ли

Е. Н. Порошенко

Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, обладающее следующим свойством:

(∗) существует алгоритм, позволяющий для любой конечной системе над $\mathbb{F}$ установить, совместна ли эта система.

Рассмотрим конечное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Обозначим через $M(A)$ свободную метабелеву алгебру с множеством порождающих A над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики 0, обладающим свойством (∗). Через $M'(A)$ обозначим производную алгебры $M(A)$, то есть алгебру $[M(A), M(A)]$.

Определение. *Пусть L — произвольная алгебра Ли.* Коммутаторной шириной *элемента $g \in L'$ называется наименьшее число k, такое что для некоторых $h_1, \dots, h_k$, $h'_1, \dots, h'_k \in L$ выполняется равенство $g = \sum_{s=1}^{k}[h_s, h'_s]$.*

Понятие коммутаторной ширины в алгебрах Ли аналогично понятию коммутаторной ширины в группах, которое, в свою очередь, произошло из понятия ширины, которое было введено Мерзляковым в [**1**].

Целью данной работы является описание алгоритма, позволяющего определять коммутаторную ширину произвольного элемента $g \in M'(A)$. Нетрудно видеть, что задача нахождения коммутаторной ширины сводится к задаче о разрешимости уравнения вида

$$\sum_{s=1}^{k}[x_i, y_i] = g. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, удовлетворяющее свойству (∗) и пусть $M(A)$ — свободная метабелева алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$. Для любого элемента $g \in M'(A)$ задача проверки существования решений уравнения (1) является алгоритмически разрешимой.*

Непосредственным следствием этой теоремы является основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, удовлетворяющее свойству (∗) и пусть $M(A)$ — свободная метабелева алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$. Задача нахождения коммутаторной ширины любого элемента $g \in M'(A)$ является алгоритмически разрешимой.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00084), а также Министерства образования и науки РФ (гос. задание № 214/138, проект 1052).

Список литературы

[1] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы, изд. 2-е, М: Наука, 1987.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: auto_stoper@ngs.ru

Изоморфизмы решеток подалгебр полуполей непрерывных функций с max-сложением

В. В. Сидоров

Пусть X — топологическое пространство, $\mathbb{P}$ — множество положительных действительных чисел, $U^\vee(X)$ — полуполе непрерывных функций из X в $\mathbb{P}$ с поточечными операциями max-сложения и умножения. Непустое множество $A \subseteq U^\vee(X)$ будем называть *подалгеброй*, если оно замкнуто относительно max-сложения, умножения и выдерживает умножение на положительные числа, т. е. $rf \in A$ для всех $r \in \mathbb{P}$, $f \in A$.

Множество всех подалгебр полуполя $U(X)$ с добавленным пустым множеством относительно отношения включения образует решетку $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ всех подалгебр полуполя $U^\vee(X)$.

В 1997 г. Е. М. Вечтомов [**1**] доказал, что для произвольных компактов (компактных хаусдорфовых пространств) X и Y изоморфность решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ подалгебр колец $C(X)$ и $C(Y)$ непрерывных действительнозначных функций равносильна гомеоморфности X и Y. В связи с развитием теории полуполей непрерывных функций возникла

Гипотеза. *Для произвольных компактов X и Y решетки $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}(U^\vee(Y))$ изоморфны тогда и только тогда, когда пространства X и Y гомеоморфны.*

Доклад посвящен современному состоянию данной гипотезы.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки, проект №1.1375.2014/К.

Список литературы

[1] Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 687–693.

Вятский государственный гуманитарный университет, Киров
E-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Почти нильпотентные коммутативные метабелевы многообразия рост которых не выше экспоненциального

Н. Т. К. Чанг, Ю. Ю. Фролова

Характеристика основного поля равна нулю. Все необходимые понятия можно найти в книгах [1] и [2]. Многообразие назовем метабелевым, если в нем выполнено тождество $(xy)(zt) \equiv 0$ и почти нильпотентным, если любое его собственное подмногообразие нильпотентно, а само оно нильпотентным не является. Например, в книге [2] построена следующая йорданова алгебра. Пусть M — векторное пространство с базисом $\{e_1, e_2, ...\}$, $\wedge(M)$ — его внешняя алгебра и $\wedge^0(M)$ — подалгебра алгебры $\wedge(M)$, порожденная множеством M. Рассмотрим пространство $C = \wedge^0(M) \oplus M$ и определим умножение в C правилом $(u+x)(v+y) = u \wedge y + v \wedge x$, где $u, v \in \wedge^0(M)$, $x, y \in M$. Известно, что многообразие $\mathbf{V}_{alt} = var(C)$, порожденное алгеброй C, является метабелевым, коммутативным, почти нильпотентным.

Рассмотрим однопорожденную алгебру $A = < a >$, такую, что $uv = 0$, $ua = au$ где u, v — неассоциативные слова данной алгебры, длины больше единицы.

Предложение. *Многообразие* $\mathbf{V}_{sym} = var(A)$, *порожденное алгеброй* A, *является метабелевым, коммутативным, почти нильпотентным.*

Рассмотрим последовательность $(c_n(\mathbf{V}))$, $n = 1, 2, \ldots, n$ размерностей пространств полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих относительно свободной алгебре многообразия $\mathbf{V}$. Асимптотическое поведение этой последовательности называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Скажем, что рост многообразия $\mathbf{V}$ не выше экспоненциального, если для любого $r > 1$ найдется такое N, что для всех $n \geq N$ выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) < r^n$.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{W}$ *— коммутативное метабелево многообразие, рост которого не выше экспоненциального и* $\mathbf{V}_{sym}, \mathbf{V}_{alt} \not\subseteq \mathbf{W}$, *тогда* $\mathbf{W}$ *— нильпотентное многообразие.*

Таким образом, в классе коммутативных метабелевых алгебр существует ровно два почти нильпотентных многообразия, рост которых не выше экспоненциального.

Список литературы

[1] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial identities and asymptotic methods. American Mathematical Society Providence, RI. 2005. 352 p.

[2] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск
E-mail: trangnguyen.ulsu@gmail.com, yuyufrolova@mail.ru

О слабо транзитивных абелевых группах без кручения

А. Р. Чехлов

Следуя [**1**] группу без кручения G назовем *слабо транзитивной*, если для любых $a, b \in G$ и ее эндоморфизмов φ, ψ из того, что $\varphi a = b$ и $\psi b = a$ следует существование автоморфизма α группы G с условием $\alpha a = b$.

Предложение 1. *Если A — редуцированная группа без кручения с сильно неразложимыми чистыми подгруппами и множество типов всех ее ненулевых элементов удовлетворяет условию максимальности, то A является слабо транзитивной.*

Следствие 2. *Всякая группа без кручения конечного ранга с сильно неразложимыми чистыми подгруппами является слабо транзитивной.*

Если R — группа без кручения ранга 1 (т.е. подгруппа аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$), то через $U(R)$ обозначим подгруппу мультипликативной группы $\mathbb{Q}^*$, порожденную всеми простыми числами p со свойством $pR = R$ (множество всех таких p обозначим через $P(R)$).

Теорема 3 [**1**, теорема 3.17]. *Пусть C — вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Тогда если R — группа без кручения ранга 1, чей тип больше типа каждого ненулевого элемента группы C, то группа $R \oplus C$ слабо транзитивна тогда и только тогда, когда*

i) C слабо транзитивна;

ii) для каждой пары $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $(m, n) = 1$ и $(m, p) = (n, p) = 1$ для всех $p \in P(R)$ найдутся $u \in U(R)$ и $r \in R$ со свойством $um + rn = 1$.

Теорема 4. *Если A — квазиоднородная группа без кручения ранга 2, то A является слабо транзитивной тогда и только тогда, когда A удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) A — сильно неразложимая группа;

2) A — однородная вполне разложимая группа;

3) $A = B \oplus G$, где тип группы G больше типа группы B и группа G удовлетворяет условию ii) теоремы 3;

4) кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A коммутативно.

Список литературы

[1] Goldsmith B., Strüngmann L. Torsion-free weakly transitive Abelian groups // Comm. Algebra. 2005. V. 33 (4) P. 1177–1191.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Semigroup graded algebras and codimension growth of graded polynomial identities

A. S. Gordienko

The notion of a semigroup graded algebra is a natural generalization of the notion of a group graded algebra, however the first notion is much less restricting: e.g. if an algebra is the direct sum of its left ideals or if an algebra is the direct sum of a subalgebra and an ideal, this can be expressed in the language of semigroup gradings.

We show that if T is any of four semigroups of two elements that are not groups, there exists a finite dimensional associative T-graded algebra over a field of characteristic 0 such that the codimensions of its graded polynomial identities have a fractional exponent of growth. However, if T is a left or right zero band and the T-graded algebra is unital, or T is a cancellative semigroup, then the T-graded algebra satisfies the graded analog of Amitsur's conjecture, i.e. there exists an integer graded PI-exponent. Moreover, in the first case it turns out that the ordinary and the graded PI-exponents coincide. In addition, we consider related problems on the structure of semigroup graded algebras.

Supported by Fonds Wetenschappelijk Onderzoek — Vlaanderen Pegasus Marie Curie post doctoral fellowship (Belgium) and RFBR grant 13-01-00234a (Russia).

References

[1] Gordienko A. S. Semigroup graded algebras and codimension growth of graded polynomial identities. `arXiv:1409.0151 [math.RA] 30 Aug 2014`.

Vrije Universiteit Brussel, Belgium
E-mail: alexey.gordienko@vub.ac.be

On zero-divisor graphs of finite nilpotent rings

A. S. Kuzmina

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of a ring R is the graph whose vertices are all nonzero zero-divisors (one-sided and two-sided) of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff either $xy = 0$ or $yx = 0$.

A ring R is called associative on zero if $(ab)c = 0 \Leftrightarrow a(bc) = 0$ for any $a, b, c \in R$.

It is known that the zero-divisor graphs of alternative and associative on zero rings are connected [**2**]. Finite associative rings with planar, Eulerian, regular and complete bipartite zero-divisor graphs are described (for example, see [**1, 5, 3**]). In [**4**], it is proved that any alternative finite nilpotent rings with planar zero-divisor graph is associative. In this thesis, we describe alternative and associative on zero nilpotent finite rings with Eulerian, regular and complete bipartite zero-divisor graphs. Moreover, we prove that associative on zero nilpotent finite rings with planar zero-divisor graphs are associative.

Theorem 1. *Let R be an alternative (associative on zero) finite nilpotent ring. The graph $\Gamma(R)$ is Eulerian iff order of R is even and $x^2 = 0$ for all $x \in R$.*

Theorem 2. *Let R be an alternative (associative on zero) finite nilpotent ring. The graph $\Gamma(R)$ is regular iff $R^2 = (0)$.*

Theorem 3. *If the zero-divisor graph of a finite nilpotent associative on zero ring R is planar, then the ring R is associative.*

Theorem 4. *Let R be an alternative (associative on zero) finite nilpotent ring. If the graph $\Gamma(R)$ is complete bipartite, then the ring R is associative and $\Gamma(R)$ is a star.*

The work is supported by RFFI (grant 12-01-00329) and a grant from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project No. 2014/418 for the implementation of State order in the research field (fundamental component).

References

[1] Akbari S., Maimani H.R., Yassemi S. When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph // Journal of Algebra. 2003. 270. pp. 169–180.

[2] Isaev I.M., Kuzmina A.S. On Connectivity of Zero-Divisor Graphs of Algebras // Vestnik Altai State Pedagogical Academy. Natural sciences. 2011. V. 7. pp. 7–10 (in Russian).

[3] Kuzmina A.S. On finite non-nilpotent rings with planar zero-divisor graphs // Discretnaya Matematika. 2009. 21(4). pp. 60–75 (in Russian).

[4] Kuzmina A.S. On Finite Nilpotent Alternative Rings with Planar Zero-Divisor Graphs // Collection of Abstracts of International Conference "Mal'tsev Meeting", Novosibirsk, November 12-16, 2012. p. 124.

[5] Kuz'mina A.S., Maltsev Yu.N. Nilpotent Finite Rings with Planar Zero-Divisor Graphs // Asian-European Journal of Mathematics. 2008. Vol. 1. N 4. pp. 565–574.

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul (Russia)
E-mail: akuzmina1@yandex.ru

The Coxeter groups and corresponding algebras

M. N. Rasskazova

We study the deformations of group algebra of Coxeter groups. The main result of our joint work (with A. Grishkov (IME-USP) and S. Sidki (UnB-DF)) is description of "general" (in some sence) deformations of maximal dimension. Particularly, in the case of group algebras of dihedral groups we give more detail information about deformations of maximal dimension:

Theorem. *Let D_n be a dihedral group of order $2n$ and B be a deformation of $k[Dn]$ of dimension $2n$ over a field k of characteristic 0. Then we have one of the 22 possible cases. Moreover, B may be semisimple only in the cases 1-16, if the corresponding polynomials $f(x)$ and $g(x)$ are separable, in those cases B is isomorphic to group algebra $k[Dn]$ (cases 1-12), in other cases (13-22) the algebra B is not semisimple.*

Omsk State Service Institut, Russia
E-mail: marinarasskazova@yandex.ru

VI. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

Некоторые вопросы несущественного обогащения теории и число счетных моделей

Б. С. Байжанов, О. А. Умбетбаев

В докладе рассматривается условие, обеспечивающее понижение числа счетных неизоморфных моделей малой теории при несущественном обогащений теории.

Дана полная счетная теория T, $S(T)$ — множество всех полных типов теории T. Для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T обозначим $\mathcal{D}(\mathfrak{M}) = \{p \mid p \in S(T), p$ реализуется в $\mathfrak{M}\}$.

Мы говорим, что тип $p \in S(T)$ — *властный над бесконечным семейством типов* $\Gamma = \{q_1, q_2, ..., q_n, ...\} \subset S(T)$, если $p \not\perp^a q, \forall q \in \Gamma$, что означает, $\exists H(x,y), \exists \mathfrak{M} \models T, \mathfrak{M} \models p, \exists \alpha \in p(\mathfrak{M})$, такой что $\emptyset \neq H(\mathfrak{M}, \alpha) \subset q(\mathfrak{M})$.

Пусть $I(T, \omega)$ — число счетных неизоморфных моделей, $I(T, \omega, p)$ — число счетных неизоморфных моделей, реализующих тип p.

Теорема. *Пусть T — полная малая теория,*

1) *$p \in S(T)$ — властный тип над бесконечным семейством типов Γ,*

2) *для любых моделей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, опускающих тип p, выполняется $\mathcal{D}(\mathfrak{M}_1) \cap \Gamma \neq \mathcal{D}(\mathfrak{M}_2) \cap \Gamma$,*

3) *для любого типа $q \in \Gamma$ существует модель $\mathfrak{M}$, реализующая тип q и опускающая тип p,*

4) *$I(T, \omega, p) < I(T, \omega)$,*

тогда число счетных неизоморфных моделей при константном обогащений теории T меньше чем число счетных неизоморфных моделей теории T, т.е. $I(T \cup p(\bar{c}), \omega) < I(T, \omega)$.

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы
E-mail: olzhas_umbetbayev@mail.ru

О распределении числа счетных моделей теорий локально свободных алгебр

К. А. Байкалова

Определение [**1, 2**]. *Свободная L-алгебра* — это алгебра, изоморфная алгебре всех L-термов. L-алгебра A называется *локально свободной*, если любая конечно порожденная подалгебра алгебры A свободна.

Определение [**3**]. Модель M теории T называется *предельной*, если M не является простой моделью ни над каким кортежом и $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n\in\omega}$ простых моделей теории T над некоторыми кортежами.

Для счетной полной теории T обозначим через $P(T)$, $L(T)$ и $\mathrm{NPL}(T)$ соответственно множество типов изоморфизма простых над кортежами, предельных и остальных счетных моделей этой теории.

Определение [**3, 4**]. Набор $(P(T), L(T), \mathrm{NLP}(T))$ называется *тройкой распределения счетных моделей теории* T и обозначается через $cm_3(T)$.

Теорема [**5**]. *Счетная теория локально свободной алгебры мала тогда и только тогда, когда ее сигнатура содержит не более одного одноместного функционального символа и не содержит функциональных символов местности* $n \geq 2$.

Теорема. *Пусть T — полная счетная теория локально свободной алгебры. Тогда $cm_3(T)$ принимает одно из следующих значений:*

(1) $(1, 0, 0)$, *если теория T мала, ее сигнатура состоит только из конечного числа константных символов;*

(2) $(\omega, 1, 0)$, *если теория T мала и ее сигнатура содержит одноместный функциональный символ или бесконечное число константных символов;*

(3) $(2^\omega, 2^\omega, 0)$, *если T — теория с континуальным числом типов.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052.

Список литературы

[1] *Мальцев А.И.* Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов // Сиб. матем. журн. 1962. Т.3, №5. С.729-743.

[2] *Белеградек О.В.* Теория моделей локально свободных алгебр // Теория моделей и её применения.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— С. 3-25.

[3] *Судоплатов С.В.* Классификация счетных моделей полных теорий. Ч.2. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. — 448 с.

[4] *Popkov R.A., Sudoplatov S.V.* Distributions of countable models of complete theories with continuum many types // arXiv:1210.4043v1 [math.LO]. — 2012. — 30 p.

[5] *Байкалова К. А.* О числе предельных и простых над конечными множествами моделей теорий локально свободных алгебр // Известия вузов. Математика. (в печати)

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: bkristina@bk.ru

B-алгебраические системы теорий

М. И. Бекенов

В статье используется классический метод Воота-Робинсона исследования связей моделей теории по элементарной вложимости моделей. А.И. Мальцев в [3] рассматривает обобщающую идею о неотличимости моделей. На основании этой идеи автором рассматриваются спектральные функции теорий по обоюдному элементарному вложению моделей $B_T(\mu)$ и $B_T(\lambda, \mu)$ [4]. Спектральные функции $I_T(\mu)$, $B_T(\mu)$ и $B_T(\lambda, \mu)$ могут быть различными для одной и той же теории [4]. В связи с отношением подобия между моделями, каждой теории соответствует алгебраическая B-система с отношением порядка и операциями различных произведений B-классов моделей [5], что дает алгебраический контекст установления свойств теорий и структуры моделей теорий [4]. Получение соотношений между этими спектральными функциями для теории, взаимосвязей их со свойствами теорий и структурой моделей, а также взаимосвязей свойств теорий со свойствами соответствующих алгебраических B-систем представляют ожидаемые результаты исследований. Пусть T — полная теория счетного языка первого порядка, имеющая бесконечные модели [1]. Помимо опубликованных в [4], получены следующие результаты:

Теорема 1. *B_ω-алгебраическая система суперстабильной не ω-категоричной теории T не может быть конечной, то есть $B_T(\omega) \geq \omega$.*

Теорема 2. *B_ω-алгебраическая система стабильной теории T не может содержать точно два элемента, то есть $B_T(\omega) \neq 2$.*

Для нестабильных теорий это уже не так. При рассмотрении B-алгебраических систем неполных теорий был выделен класс конечнопорожденных B-алгебраических систем теорий с операциями объединения и пересечения этих систем в терминах B-деревьев [5]. Многие поставленные вопросы и проблемы для $I_T(\omega)$ можно сформулировать для $B_T(\omega)$, но есть особенности их решения, например как в Теореме 2, и новые задачи. Вопросы: - Какие возможности конечного имеются для B-алгебраических систем теорий T, помимо известных примеров конечного для $I_T(\omega)$, и некоторое ослабление проблемы Лахлана о конечной $B_T(\omega)$ для стабильных теорий? -Какие виды графов возможны для бесконечных и конечных B-алгебраических систем теорий и классов теорий?

Список литературы

[1] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика, М.Наука, 1987.

[2] Кейслер Г., Чен Ч.Ч. Теория моделей, М.Мир, 1977.

[3] Мальцев А.И. Алгебраические системы, М.Наука, 1970.

[4] Бекенов М.И. Концепция элементарной вложимости в теории моделей. Мальцевские чтения, Новосибирск, 2012.

[5] Бекенов М.И. Элементарная вложимость в классе моделей счетного языка первого порядка. Современная математика: проблемы и приложения, Кызылорда, 2013.

Евразийский Национальный Университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Республика Казахстан
E-mail: bekenov50@mail.ru

Гауссовы суммы для характеров Дирихле по модулю 3^l и их приложения

А. Болен

Эффективным инструментарием для конструктивного описания абсолютно циклических полей (а.ц.п.) являются суммы Гаусса по характеру Дирихле. Пусть X_{p^l} — множество всех примитивных характеров примарного порядка (п.х.п.п.) p^l, $X_{p^l}/\sim$ — фактор множество множества X_{p^l} всех п.х.п.п. p^l по эквивалентности $\sim$, X_{p^l} — множество всех а.ц.п. примарной степени p^l. Известны из работы [1]:

Предложение 1. *Пусть p^l — степень нечетного простого числа p. Примитивный характер Дирихле $\chi \in X(f)$ по модулю f, порядка $|\chi| = p^l$, существует тогда и только тогда, когда f имеет каноническое разложение вида $f = p_1 p_2 \dots p_s$ или $f = p^{l_0+1} p_1 p_2 \dots p_s$, где $p_i \equiv 1 \left(\mathrm{mod} p^{l_i}\right)$, $l_i \in Z^+$, $l = \max\{l_1, l_2, \dots, l_s\}$ или $l = \max\{l_0, l_1, l_2, \dots, l_s\}$.*

Предложение 2. *Отображение $\psi : X_{p^l}/\sim \to P_{p^l}$, определенное формулой $\psi(\chi) = Q(\theta(\chi))$, $\chi \in X_{p^l}$, $F(\chi) = f$ — примитивный характер Дирихле по модулю f, порядка $|\chi| = p_l$, $\theta(\chi) = \sum_{t \in Ker\chi} \zeta_f^t = \frac{1}{p^l} \sum_{k=0}^{p^l-1} \tau\left(\chi^k\right) \in Q(\zeta_f)$, где $\tau\left(\chi^i\right) = \sum_{t \in U(f)} \chi^i(t) \zeta_f^t$ — суммы Гаусса, является биективным отображением, причем $F(\chi) = F(Q(\theta(\chi)))$, $|Q(\theta(\chi)) : Q| = |\chi|$.*

Для большей эффективности этого универсального конструктивного описания желательно вычислить минимальные многочлены их порождающих элементов.

Предложение 3. *С точностью до эквивалентности по модулю 3^{l+1} существует единственный примитивный характер $\chi \in X\left(3^{l+1}\right)$, порядка $|\chi| = p^l$, и существует единственное циклическое поле $Q(\theta(\chi))$, степени $|Q(\theta(\chi)) : Q| = 3^l$, с дискриминантом $D = 3^{(l+1)3^l - \frac{3^l-1}{2} - 1}$. Для $f_{3^l}(x)$, минимальных многочленов $\theta(\chi) \in Q(\zeta_{3^{l+1}})$ справедливы рекуррентные формулы: $f_{3^l}(x) = f_{3^{l-1}}\left(x^3 - 3x\right)$, $f_3(x) = x^3 - 3x + 1$, $f_{3^2}(x) = f_3\left(x^3 - 3x\right) = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1$, и т.д.*

Предложение 4. *Отображение $\psi : X_3/\sim \to P_3$, определенное формулой $\psi(\chi) = Q(\theta(\chi))$, где $\chi \in X_3$, $F(\chi) = f$ имеет каноническое разложение вида $f = p_1 p_2 \dots p_s$ или $f = 3^2 p_1 p_2 \dots p_s$, $p_i \equiv 1(3)$, $\theta(\chi) = \sum_{t \in Ker\chi} \zeta_f^t \in Q(\zeta_f)$, является биективным отображением, Минимальный многочлен порождающего элемента $\theta(\chi)$ выражается формулой $p(x) = x^3 - \mu(f) x^2 + \frac{\mu(f)^2 - f}{3} x - \frac{f A_1 + (1-3f)\mu(f)}{27}$, где $A_1 = J(\chi, \chi) + J\left(\chi^2, \chi^2\right)$.*

Список литературы

[1] Болен А. Классификация примитивных характеров Дирихле и их приложения // Математический журнал, 2014, том 14, №1 (51).

КазНПУ имени Абая, Алматы, Республика Казахстан
E-mail: amangeldy.Bolen@mail.ru

О свойствах богатых семейств неполных конечных типов в многосортных многозначных системах и кластеризациях типов и формул логических исчислений

А. А. Викентьев

Доклад посвящен *переносу результатов теорем о богатых семействах типов,* доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[1], *на случай богатых семейств неполных типов с параметрами для многосортных и многозначных теорий первого порядка с $\varkappa$-компактными (насыщенными, однородными) измеримыми моделями и свойством $\varkappa$-отделимости новых элементов, реализующих типы (над малыми подмножествами) из этих семейств, от элементов подмодели и наличия реализаций в расширении (с богатым семейством) модели с вполне определимыми (стабильными) типами или неразличимыми элементами.* Изучены предельные модели в классе теорий с покрытиями.

Основными инструментами доказательств являются теоремы типа компактности, развитая техника современной теории моделей и стабильности, логических исчислений и наличия (даже локально) компактных измеримых (подходящих мощностей $\varkappa$) моделей теории со свойствами $\varkappa$–отделимости над реализациями семейств стабильных (определимых) типов. Рассмотрены вопросы определимости систем в наследственно конечных надстройках, и о мощностях типово определимых подмножеств. Интерес к этим вопросам и моделям имеет прикладной характер в поиске наиболее информативных (нетривиальных) типов (формул), закономерностей для кластеризации, для упорядочения таких "знаний" с помощью привлечения упорядоченных или измеримых систем, для введения расстояний (обладающих свойствами метрики) на классах эквивалентных типов с помощью измеримых подклассов измеримых (метрических) моделей теории, которые необходимы для алгоритмов распознавания образов, построения решающих функций, поиска закономерностей, для обнаружения редких событий и кластеризации многозначных "знаний". Аналогичные вопросы рассмотрены для конечнозначных логик Лукасевича и модальных исчислений. Программно реализованы несколько методов кластеризации для множеств формул (типов) от малого числа переменных. Работа выполнена также при поддержке кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

[1]Некоторые из них вошли в диссертацию автора "Теории с покрытием и формульные подмножества", ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, а также опубликованы в сборнике, посвященному 90–летию академика А.Д. Тайманова — "Two cardinal theorems for sets of types in stable theory", Казахстан, Алма-Ата, 2007, с. 67–69, были доложены в Алма-Ате и Новосибирске — на ежегодных Мальцевских чтениях с 2006 г., в том числе к 100-летию акад. А.И. Мальцева, 70-летию акад. Ю.Л. Ершова и 60-летию чл.-к. РАН С.С. Гончарова и др.

Кластеризация логических высказываний с учетом мер нетривиальности

А. А. Викентьев, Р. А. Викентьев

В работе рассматривается одна из актуальных задач — анализ логических высказываний. Мера значений истинности формулы на модели может служить степенью нетривиальности формулы. При анализе требуется найти близкие высказывания, выявить нетривиальные и т.д. Для кластеризации знаний, построения решающих функций на основе формул, надо ввести расстояние между формулами. В работе высказывания записаны в виде формул n–значной логики. С привлечением теории моделей определяются: новое расстояние между формулами, обобщающее следующее

$$\rho(\varphi,\psi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{|k-l|}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right), \qquad (1)$$

где $n^{|S(\Sigma)|}$ - количество всех моделей, $M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right)$ - тех моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а ψ — $\frac{l}{n-1}$; и новая мера нетривиальности

$$I(\varphi) = \rho(\varphi,1) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-1-k}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}\right), \qquad (2)$$

где $M\left(\frac{k}{n-1}\right)$ - количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$. В работе доказаны особые свойства метрики на классах эквивалентных высказываний для введенных расстояний и мер нетривиальности; они учитывают многозначность, схожи со свойствами величин в случае 2, 3–значных логик Лукасевича, отвечают на вопросы Г.С.Лбова и применяются для алгоритмов кластеризации формул. Рассмотрены различные методы кластеризации знаний на основе новых расстояний и мер нетривиальности, а также коллективные решения. Работа выполнена при поддержке кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Список литературы

[1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Изд–во ИМ СО РАН, 1999 г.

[2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[3] Викентьев А.А, Лбов Г.С. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказ. экспертов // Доклады РАН 1998. Т.361, №2 С. 174–176.

[4] Викентьев А.А, Лбов Г.С. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis, 1997, V.7, №2, P. 175–183.

[5] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика– М.: Физматлит, 2011.

[6] Викентьев А.А., Коренева Л.Н., К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты // Математические методы распознавания образов (ММРО-99), РАН ВЦ, Москва, 1999. С.151–154.

ИМ СО РАН и НГУ, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

Условия дистрибутивности 3-порожденных решеток

А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов

Элемент a решетки $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ называется *левомодулярным*, если

$$\forall x, b \in L : x \leq b \to x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b.$$

Элемент b решетки $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ называется *правомодулярным*, если

$$\forall a, x \in L : x \leq b \to x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b.$$

Элемент решётки называется *коправомодулярным*, если в двойственной решётке он правомодулярен.

Эти определения являются «модулярными» аналогами понятий стандартного, дистрибутивного и кодистрибутивного элементов (см. [1, с.185]). При этом легко убедиться, что стандартный элемент является одновременно левомодулярным и коправомодулярным, а дистрибутивный - коправомодулярным.

Согласно Теореме 5 из [2], решётка, порождённая тремя элементами, два из которых стандартны, дистрибутивна. Ввиду сказанного выше, следующая теорема является её обобщением.

Теорема 1. *Если решётка порождена тремя элементами, один из которых левомодулярен и коправомодулярен одновременно, а другой стандартен, то она дистрибутивна.*

В то же время, если условие одновременной левомодулярности и коправомодулярности элемента заменить на левомодулярность и правомодулярность или правомодулярность и коправомодулярность, то решетка может быть немодулярной.

В [1, с. 194] отмечено, что решетка, порожденная тремя дистрибутивными элементами, может оказаться недистрибутивной. В связи с этим представляет интерес

Теорема 2. *Решетка, порожденная тремя элементами, два из которых правомодулярны и левомодулярны одновременно, а третий элемент дистрибутивен, дистрибутивна.*

Существуют примеры, показывающие, что правомодулярность и левомодулярность первого элемента не может быть заменена на правомодулярность и коправомодулярность или коправомодулярность и левомодулярность, а дистрибутивность третьего элемента не может быть ослаблена до коправомодулярности.

Список литературы

[1] Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. —- 456 с.

[2] Gratzer G., Schmidt E. T. Standard ideals in lattices // Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 12 (1961), 17–86.

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург
E-mail: Alexander.Gein@usu.ru
Mikhail.Shushpanov@gmail.com

Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теории одноместных предикатов с подстановкой

Д. Ю. Емельянов

Исследуются алгебры распределений бинарных изолирующих формул [**1**] для теорий одноместных предикатов с подстановкой.

Теорема. *Если T — теория одноместных предикатов с подстановкой, $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул для типа $p \in S^1(\varnothing)$, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ изоморфна либо группе $\mathbb{Z}$, либо группе $\mathbb{Z}_n$, либо алгебре $\mathfrak{A}_n$, полученной расширением группы $\mathbb{Z}_n$ новым символом $\neg$ с операцией $\cdot$, удовлетворяющей соотношениям $\neg \cdot m = m \cdot \neg = \neg$, $m \in \mathbb{Z}_n$, $\neg \cdot \neg = \{0, 1, \ldots, n-1, \neg\}$. Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда подстановка не имеет циклов. Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$ тогда и только тогда, когда подстановка имеет единственный цикл длины n на множестве реализаций типа p (возможно после замены подстановки σ на некоторую ее степень σ^k) или при наличии такого цикла тип p является неглавным.*

Список литературы

[1] *Судоплатов С. В.* Классификация счетных моделей полных теорий. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

О наследственно чистых полугруппах с центральным идемпотентом

О. В. Князев

В [**1**] определяется понятие чистоты для произвольных универсальных алгебр и ставится задача(проблема 17): *описать наследственно чистые алгебры данного многообразия.* Мы изучаем наследственно чистые полугруппы в классе полугрупп с центральным идемпотентом.

Напомним некоторые определения. Полугруппы с центральным идемпотентом рассматриваются здесь как алгебры с бинарной ассоциативной операцией — умножением и нульарной операцией — выделением идемпотента, коммутирующего со всеми элементами алгебры.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с центральным идемнотентом; $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом "полугруппа" понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}-$вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий выделенный идемпотент. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$*вербалом* полугруппы A.

Подполугруппу B полугруппы A называют *чистой* в A, если равенство $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$. Если все подполугруппы полугруппы A являются чистыми, то A называют *наследственно чистой полугруппой.*

Полугруппа называется *вполне регулярной* если она есть объединение групп.

Теорема. *Полугруппа A с нулем является наследственно чистой полугруппой в классе всех полугрупп с центральным идемпотентом тогда и только тогда, когда полугруппа A есть идеальное расширение вполне регулярной полугруппы с нулем с помощью полугруппы с нулевым умножением.*

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, задание №2014/336.

Список литературы

[1] Мартынов Л. М., О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. – Волгоград: Перемена, 2000. – С. 179–190.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev50@rambler.ru

Неконечная базируемость одной числовой системы с константой

А. М. Кунгожин

В данной работе мы изучаем алгебраическую систему $A_1 = \langle \mathbb{R},\ 1,\ \neg,\ \cdot,\ =\rangle$, где основное множество состоит из действительных чисел, выделяется константа 1, имеется одна унарная операция $\neg x = 1 - x$ (*отрицание*), одна бинарная операция $(\cdot)$ – обычное умножение. Отметим, что эти операции фундаментальны в нечеткой логике Заде [**1**], которая за последние 50 лет стала одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математики.

Ранее автором [**2**] изучалась алгебраическая система $A = \langle \mathbb{R},\ \neg,\ \cdot,\ =\rangle$, в которой, в отличие от алгебраической системы A_1, не выделяются константы. В данной работе используются как понятия и обозначения из [**2, 3**], так и вводятся их некоторые обобщения и новые понятия.

Определение. *Базисом* во множестве тождеств называется такое его подмножество, что любое тождество оказывается его логическим следствием.

Хорошо известна теорема Биркгофа [**4**] о полноте эквационального исчисления, согласно которой с помощью правила подстановки из системы тождеств и аксиом равенства можно получить все тождества, являющиеся логическими следствиями этой системы.

Пусть $\{b_i(x_1, x_2, ..., x_{n_i}) = \beta_i(x_1, x_2, ..., x_{n_i}) : i \in I\}$ – базис тождеств. Тогда для всякого тождества $t = \tau$ в алгебре A можно построить цепочку тождественных им термов $t \equiv t_0 = t_1 = ... = t_k \equiv \tau$, таких, что каждый последующий терм получен из предыдущего путем замены в нем какого-то подтерма $b_i(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n_i})$ на подтерм $\beta_i(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n_i})$ (или наоборот), где $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n_i}$ сами являются подтермами.

Тогда оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема. *Система тождеств алгебры A_1 не имеет конечного базиса.*

Хотя сам результат и идея его доказательства имеет много общего с работой автора [**2**], введение в сигнатуру константы значительно усложняет доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Zadeh L. Fuzzy sets // Inform. and Control, 8 (1965), 338–353.

[2] Кунгожин А.М. Неконечная базируемость одной числовой системы // Алгебра и логика, Т. 51, № 1, 2012, с. 82–95.

[3] Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука 1970.

[4] Birkhoff G. On the structure of abstract algebras // Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 31, N 4 (1935), pp. 433–454.

КазНУ имени аль-Фараби, Алматы
E-mail: kungozhin@gmail.com

Элементарно замкнутые структуры

А. Т. Нуртазин

Важное понятие Абрахама Робинсона экзистенциально замкнутой структуры [**1**] может быть определено без привлечения понятия класса, если такими считать все структуры, экзистенциально замкнутых в классе структур элементарно эквивалентных ей.

В [**2**] изучаются свойства счётных экзистенциально замкнутых моделей универсально аксиоматизируемых теорий счётной предикатной сигнатуры. Там же показано, что, в случае существования, простая экзистенцильно замкнутая модель среди других свойств обладает неотмеченным ранее свойством *элементарной замкнутости.* Понятие элементарной замкнутости структуры является усилением понятия экзистенциальной замкнутости. При этом свойства структур этого класса в ряде случаев получаются проще, чем соответствующие свойства экзистенциально замкнутых структур.

Определение. 1) Пусть $\mathbf{C}$ — некоторый класс структур. Данную структуру $\mathbf{A}$ называем *элементарно замкнутой в классе* $\mathbf{C}$, если в этом классе имеются её изоморфные расширения и все они элементарны.

2) Структуру $\mathbf{A}$ называем *элементарно замкнутой в теории* $\mathbf{T}$, если она элементарно замкнута в классе всех её моделей.

3) Структуру $\mathbf{A}$ называем, просто, *элементарно замкнутой*, если она элементарно замкнута в своей полной теории.

Из приведённого определения следует, что элементарно замкнутые структуры редки. Первая часть следующей теоремы предоставляет достаточно удобный критерий элементарной замкнутости. А вторая часть отвечает на вопрос:

- *Когда данная теория является элементарной теорией некоторого класса элементарно замкнутых структур?*

Теорема. 1) *Структура* $\mathbf{A}$ *элементарно замкнута, если и только если для любых: кортежа* $\mathbf{a}$ *и выполнимой на нём формулы найдется также содержащаяся в этой формуле и выполняющаяся на этом кортеже некоторая экзистенциальная формула.*

2) *Данная теория* $\mathbf{T}$ *является элементарной теорией подкласса своих элементарно замкнутых моделей, если и только если в ней каждая выполнимая формула содержит некоторую, также выполнимую, экзистенциальную.*

Список литературы

[1] Robinson A. On the Metamathematics of Algebra. — Amsterdam: North-Holland, 1951.

[2] Нуртазин А.Т. Счётные экзистенциально замкнутые модели универсально аксиоматизируемых теорий // Математические труды, принята в печать.

[3] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. — М., Мир, 1977.

Институт вычислительных и информационных технологий МОН РК, Алматы
E-mail: abyznurtazin@mail.ru

Тотально обобщенно стабильные абелевы группы

Е. А. Палютин

В работе полностью описываются абелевы группы, которые являются P-стабильными во всех бесконечных мощностях для следующих четырех типов подгрупп: произвольные подгруппы, сервантные подгруппы, элементарные подсистемы и алгебраически замкнутые подгруппы. Такие группы будут называться соответственно *тотально* (P, i)*-стабильными* для $i \in \{s, p, e, a\}$. Необходимые определения можно найти в статьях [**1**], [**2**] и книге [**3**].

Теорема 1. *Следующие условия для абелевой группы A равносильны:* (1) *теория группы A является тотально (P, s)-стабильной;* (2) *теория группы A является (P, s)-стабильной;* (3) *группа A представляет собой прямую сумму конечной группы и конечного числа элементарных абелевых групп.*

Теорема 2. *Для того, чтобы теория абелевой группы A была тотально (P, p)-стабильной, необходимо и достаточно существование конечного множества $\sigma(A)$ простых чисел со следующими свойствами:* (1) *любой элемент группы A делится на любое простое число p, не принадлежащее множеству $\sigma(A)$;* (2) *для любого простого числа p, не принадлежащего множеству $\sigma(A)$, p-компонента A_p группы A нулевая;* (3) *для любого простого числа p редуцированная часть p-компоненты A_p группы A ограничена.*

Теорема 3. *Для того, чтобы абелева группа A была тотально (P, e)-стабильной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* (1) *A/A_d — ограниченная группа, где A_d — делимая часть группы A;* (2) *множество $\{p \mid \gamma_p(A) = \omega, p$ — простое число$\}$ конечно, где $\gamma_p(A)$ — шмелевский инвариант группы A (см., например в* [**3**]); (3) *множество $\{p \mid |A[p]| \geqslant \omega, p$ — простое число$\}$ конечно.*

Теорема 4. *Для того, чтобы теория группы A была тотально (P, a)-стабильной, необходимо и достаточно, чтобы для A выполнялись условия* (1), (2), (3) *теоремы 3, а также следующие условия:* (4) *для любого простого числа p подгруппа $(pA)[p]$ группы A конечна;* (5) *для любого простого числа p либо подгруппа $A[p]$ группы A конечна, либо ее шмелевский инвариант $\gamma_p(A)$ конечен;* (6) *множество $W = \{p \mid \gamma_p(A) \neq 0\}$ конечно.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 12-01-00460.

Список литературы

[1] Палютин Е. А. P-стабильные абелевы группы // Алгебра и логика, т. 52, N 5 (2013), с. 606–631.

[2] Палютин Е. А. P-спектры абелевых групп // Алгебра и логика, т. 53, N 2 (2014), с. 216–255.

[3] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика, 6-е издание. — М.: Изд-во “Физматлит”, 2011. — 357 с.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: palyutin@math.nsc.ru

Об алгебрах с идентичными алгебраическими множествами

А. Г. Пинус

Понятие алгебраического множества универсальной алгебры (совокупности решений некоторой, возможно бесконечной, системы термальных уравнений) относится к числу базовых понятий алгебраической геометрии универсальных алгебр. Решетку n-мерных алгебраических множеств универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим как $Alg_n\mathfrak{A}$.

Естественным представляется вопрос о взаимосвязи универсальных алгебр $\mathfrak{A}_0 = \langle A;\sigma_0\rangle, \mathfrak{A}_1 = \langle A;\sigma_1\rangle$ с одним и тем же основным множеством A, имеющих одни и те же алгебраические множества (ситуация когда $Alg_n\mathfrak{A}_0 = Alg_n\mathfrak{A}_1$ для любого $n \in \omega$). Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *эквациональной областью*, если объединение любых двух ее алгебраических n-мерных множеств является алгебраическим.

Имеет место

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}_0 = \langle A;\sigma_0\rangle$ конечная, либо равномерно локально конечная универсальная алгебра конечной сигнатуры, являющаяся эквациональной областью. Тогда для любой алгебры $\mathfrak{A}_1 = \langle A;\sigma_1\rangle$ (конечной сигнатуры в случае бесконечного A) такой, что $Sub\mathfrak{A}_0 = Sub\mathfrak{A}_1$, следующие условия равносильны:*

а) $Alg_n\mathfrak{A}_0 = Alg_n\mathfrak{A}_1$ для любого $n \in \omega$,

б) для $i = 0, 1$ любая σ_i-функция является позитивно условно термальной (*см.* [1]) *для алгебры $\mathfrak{A}_{1-i}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по государственному заданию №2014/138, проект 1052.

Список литературы

[1] Пинус А.Г. Внутренние гомоморфизмы и позитивно условные термы // Алгебра и логика, 2001, т. 40, № 1, с. 158–173.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Распределение счетных моделей теорий одноместных предикатов

Р. А. Попков

В монографии [**1**] поставлена проблема описания распределения простых над конечными множествами, предельных и остальных счётных моделей для различных естественных классов алгебраических систем.

Определение [**1, 2**]. *Тройкой распределения* cm_3 *счётных моделей* теории T называется набор $(P(T), L(T), \mathrm{NPL}(T))$, где $P(T)$, $L(T)$, $\mathrm{NPL}(T)$ — мощности типов изоморфизма простых над конечными множествами, предельных и остальных счётных моделей теории T соответственно.

Предложение. *Если для теории T одноместных предикатов $\mathrm{NPL}(T) > 0$, то $P(T) = 0$, $L(T) = 0$.*

Теорема. *Для счётных теорий одноместных предикатов возможны следующие значения троек распределения:*

- $(1, 0, 0)$ — *для малой теории без неглавных 1-типов;*
- $(\omega, 1, 0)$ — *для малой теории с одним неглавным 1-типом;*
- $(\omega, \omega, 0)$ — *для малой теории с конечным > 1 числом неглавных 1-типов;*
- $(\omega, 2^\omega, 0)$ — *для малой теории со счетным числом неглавных 1-типов;*
- $(2^\omega, 2^\omega, 0)$ *или* $(0, 0, 2^\omega)$ — *для теории с континуальным числом типов.*

Каждое из указанных значений реализуется некоторой теорией одноместных предикатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00460-а.

Список литературы

[1] Судоплатов С. В. Классификация счётных моделей полных теорий : Монография, Ч. 2. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. — 448 с.

[2] Popkov R. A., Sudoplatov S. V. Distributions of countable models of complete theories with continuum many types // arXiv:1210.4043v1 [math.LO], 2012, 30 p.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: r-popkov@yandex.ru

Кодистрибутивные и костандартные элементы решетки многообразий эпигрупп

Д. В. Скоков

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень любого элемента лежит в некоторой подгруппе полугруппы S. На всякой эпигруппе можно некоторым естественным способом ввести унарную операцию, называемую *псевдообращением* (см., например, [**2**]). Это позволяет рассматривать многообразия эпигрупп как алгебр в сигнатуре, состоящей из умножения и псевдообращения.

Мы продолжаем начатое в [**4**] изучение специальных элементов в решетке многообразий эпигрупп. В [**4**] рассматриваются нейтральные, модулярные и верхнемодулярные элементы этой решетки (определения этих типов элементов см. в [**3**] или [**4**]). В данной работе изучаются ее кодистрибутивные и костандартные элементы. Напомним, что элемент x решетки L называется *кодистрибутивным* [*костандартным*], если $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ [соответственно $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$] для любых $y, z \in L$.

Многообразие полугрупп называется *строго перестановочным*, если оно удовлетворяет тождеству вида $x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}$, где π — перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ такая, что $1\pi \neq 1$ и $n\pi \neq n$. В [**1**] полностью описаны костандартные элементы решетки всех многообразий полугрупп и строго перестановочные многообразия, являющиеся кодистрибутивными элементами этой решетки. В данной работе получены эпигрупповые аналоги этих результатов.

Теорема 1. *Строго перестановочное многообразие эпигрупп является кодистрибутивным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{AG} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где $\mathcal{AG}$ — многообразие всех абелевых групп, $\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток, а $\mathcal{ZM}$ — многообразие всех полугрупп с нулевым умножением.*

Теорема 2. *Многообразие эпигрупп является костандартным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

Список литературы

[1] Верников Б. М. Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Матем. 2011. №7. С. 13–21.

[2] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. I, II // Мат. сб. 1994. Т. 185, №8. С. 129–160; №9. С. 153–176.

[3] Grätzer G. Lattice Theory: Foundation, Birkhäuser, Springer Basel AG, 2011.

[4] Shaprynskiĭ V. Yu., Skokov D. V., Vernikov B. M. Special elements of the lattice of epigroup varieties // Algebra Universalis, submitted; available at http://arxiv.org/abs/1408.0356.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: dmitry.skokov@gmail.com

Планарные многообразия полугрупп

Д. В. Соломатин

Изучается свойство планарности графов Кэли для многообразий полугрупп. Пусть $\boldsymbol{V}$— произвольное многообразие полугрупп. Как и прежде [**1**], если существует такое натуральное число r, что все $\boldsymbol{V}$-свободные полугруппы ранга $\le r$ допускают планарный граф Кэли, а $\boldsymbol{V}$-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то *рангом планарности* $\boldsymbol{V}$ называется это число r. Если для многообразия $\boldsymbol{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет бесконечный ранг планарности. Многообразие, каждая полугруппа которого допускает планарный граф Кэли, называется *планарным*. Напомним, что атомы решетки $\mathcal{L}$ всех многообразий полугрупп исчерпываются следующими многообразиями: $\boldsymbol{Z}_l = \mathrm{var}\{xy = x\}$ полугрупп левых нулей, $\boldsymbol{Z}_r = \mathrm{var}\{xy = y\}$ полугрупп правых нулей, $\boldsymbol{C} = \mathrm{var}\{xy = zt\}$ полугрупп с нулевым умножением, $\boldsymbol{A}_{1,1} = \mathrm{var}\{xy = yx; x = x^2\}$ полурешеток и $\boldsymbol{A}_p = \mathrm{var}\{xy = yx; x^p y = y\}$ абелевых групп экспоненты p для всех простых p.

Доказана следующая

Теорема. *Нетривиальные планарные многообразия полугрупп исчерпываются многообразиями* $\boldsymbol{Z}_l$, $\boldsymbol{C}$ *и их покрывающим многообразием* $\mathrm{var}\{xy = xz\}$.

Ключевую роль при доказательстве теоремы сыграли материалы обзора Эванса [**2**], в котором, в частности, приведена решетка ($\mathcal{L}_{16}$) всех шестнадцати подмногообразий многообразия, порожденного негрупповыми атомами $\boldsymbol{Z}_l$, $\boldsymbol{Z}_r$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}_{1,1}$ решетки многообразий полугрупп. Кроме того, используется факт о том, что групповые многообразия $\boldsymbol{A}_p$, не являются планарными [**1**]. Ясно, что приведенные в теореме многообразия имеют бесконечный ранг планарности. Выяснено так же, что все остальные нетривиальные многообразия решетки $\mathcal{L}_{16}$ имеют конечные ранги планарности в пределах от 2 до 4. Приведена классификация многообразий из $\mathcal{L}_{16}$ по рангам планарности.

В качестве следствия теоремы получаем, что единственным планарным нетривиальным многообразием коммутативных полугрупп является многообразие $\boldsymbol{C}$ полугрупп с нулевым умножением.

Список литературы

[1] Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов // Вестник Омского университета. Изд-во: Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского (Омск). — 2012. — Т.4 (66). — С. 41–45.

[2] Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum, — 1971. — Vol. 2. — P. 1–43.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: denis_2001j@bk.ru

Об алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов гиперграфов

Е. В. Хворостухина

Согласно [**1**] гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – это непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство произвольных подмножеств X, называемых ребрами гиперграфа. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа. Пусть p – произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре. Например,эффективный гиперграф с 1-определимыми ребрами - это гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. С другой стороны как проективная, так и аффинная плоскости с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами, вершинами которых являются точки этих плоскостей, а ребрами соответствующие прямые (см., например [**2**]).

Эндоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ называется преобразование φ множества вершин X, которое удовлетворяет условию: $(\forall l \in L)(\exists l' \in L)(\varphi(l) \subset l')$. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End}H$.

Пусть T - элементарная теория некоторой сигнатуры Ω. Согласно [**3**] теория T называется разрешимой, если существует эффективная процедура, позволяющая по любому предложению Ψ сигнатуры Ω определить принадлежит или нет Ψ теории T. Если теория T не является разрешимой, то она называется неразрешимой. Теория T называется наследственно неразрешимой, если любая подтеория теории T той же сигнатуры неразрешима. Одним из важнейших методов доказательства неразрешимости теорий является метод относительно элементарной определимости [**3**].

Для класса $\mathbf{K}$ эффективных гиперграфов с $p-$определимыми ребрами символом $\mathrm{End}\mathbf{K}$ обозначим класс полугрупп эндоморфизмов вида $\mathrm{End}H$, где $H \in \mathbf{K}$.

Теорема. *Если элементарная теория класса $\mathbf{K}$ эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса полугрупп $\mathrm{End}\mathbf{K}$ наследственно неразрешима.*

Список литературы

[1] Зыков А. А. Гиперграфы // УМН, 1974. Т.29, N6. С. 89–154.
[2] Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. – М.: Мир, 1970. – 161 с.
[3] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980. – 320с.

Саратовский социально-экономический институт РЭУ им.Г.В.Плеханова, Саратов
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

О декомпозиции мультиопераций

И. К. Шаранхаев

В работе [**1**] впервые к исследованию функциональных систем стал применяться алгебраический подход.

Пусть $B(A)$ — множество всех подмножеств A, в том числе $\varnothing$. Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A. Для множества всех n-местных мультиопераций на A используем обозначение M_A^n, а для множества всех мультиопераций на A обозначение $M_A = \bigcup_{n \geq 0} M_A^n$.

Пусть $R \subseteq M_A$. Алгебра $\mathfrak{R} =< R; *, \zeta, \tau, \Delta, \varepsilon >$ типа $\langle 2, 1, 1, 1, 0 \rangle$ с операциями, определение которых см. в [**2**], называется *мультиклоном (частичным гиперклоном)* над A. Используя операции мультиклона можно определить частичную операцию суперпозиции и проекции по i–ому аргументу $e_i^n(a_1, \ldots, a_n) = \{a_i\}$. Отметим, что R образует мультиклон $\Longleftrightarrow$ R содержит все e_i^n и замкнуто по суперпозиции. Терминология, используемая в дальнейшем, аналогична терминологии теории булевых функций (см., например, [**3**]). Далее считаем $|A| = 2$.

Естественным является вопрос выразимости произвольной мультиоперации через мультиоперации меньшей размерности. Говорим, что мультиоперация f при разбиении множества переменных на $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ допускает *декомпозицию*, если существуют h и g такие, что $f(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = h(\tilde{u}, \tilde{w}, g(\tilde{u}, \tilde{v}))$. Если $\tilde{u} = \varnothing$, то такая декомпозиция называется *разделительной*.

Для произвольных $f, g \in M_A^n$ определим мультиоперацию $f \cup g$ следующим образом: $(f \cup g)(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}) \cup g(\tilde{\alpha})$ для любого набора $\tilde{\alpha} \in A^n$.

Автором доказана следующая

Теорема. *Мультиоперация f допускает декомпозицию при разбиении множества переменных на $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ $\Longleftrightarrow$ для любого набора $\tilde{\alpha}$ ($|\tilde{\alpha}| = |\tilde{u}|$) среди всех остаточных от $f_{\tilde{u}}^{\tilde{\alpha}}$ по $\tilde{v}$ не более четырех различных, причем каждая из них равна либо $\varnothing$, либо некоторой f_0, либо некоторой f_1, либо $f_0 \cup f_1$.*

Следствие. *Мультиоперация f допускает разделительную декомпозицию при разбиении множества переменных на $\tilde{v}, \tilde{w}$ $\Longleftrightarrow$ среди всех остаточных от f по $\tilde{v}$ не более четырех различных, причем каждая из них равна либо $\varnothing$, либо некоторой f_0, либо некоторой f_1, либо $f_0 \cup f_1$.*

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика, 5. — 1966. "— № 5. "— С. 3–9.

[2] Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Ученые записки Казанского гос. университета. Серия: Физико-мат. науки. — 2009. — Т. 151. Книга 2. — С. 120–125.

[3] Избранные вопросы теории булевых функций / Под ред. С. Ф. Винокурова и Н. А. Перязева / — М.: Физматлит, 2001. — 192 с.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: goran5@mail.ru

Weakly and almost orthogonality of types

B. S. Baizhanov, A. D. Yershigeshova

We study the relations of weakly orthogonality and almost orthogonality of types. In the theorem below we proved that some conditions with these types of orthogonality save the property of non-homogeneity and keep the number of countable, non-isomorphic models. For any model $\mathfrak{M}$ of theory T, $\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ is called to be a *finite diagram* of $\mathfrak{M}$, if it is the set of all types that realized in $\mathfrak{M}$.

Theorem. *Let $\mathfrak{M}$ be a countable, non-homogeneous model of a small theory T and $p(x) \in S(T)$ be a non-isolated type such that $p(x)$ is weakly orthogonal to any non-isolated type $q(y)$ from the finite diagram of $\mathfrak{M}$. Then the following conditions hold:*
1) *There exists a countable elementary extension $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}(\bar{c})$, such that $\mathfrak{M}(\bar{c})$ is also non-homogeneous.*
2) *For any non-homogeneous $\mathfrak{M}' \ncong \mathfrak{M}$, with equal finite diagrams $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}')$ we have $\mathfrak{M}(\bar{c}) \ncong \mathfrak{M}'(\bar{c})$, and $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) = \mathfrak{D}(\mathfrak{M}'(\bar{c}))$.*
3) *For any $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N} \models p(\bar{c})$ we have $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\bar{c})) \subseteq \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$*

This theorem works on the relation of almost orthogonality, if we impose the following condition:

$$p \perp^a q \ , \ \forall q \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M}), \text{ and } \forall q'(\bar{y}, \bar{z}) \supset q(\bar{y}), \text{ where } q'(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{M}),$$
$$\forall \bar{\alpha} \models q, \text{ for } p' \in S(\bar{\alpha}) \text{ such that } p \subset p' \text{ we have } p' \perp^a q'(\bar{\alpha}, \bar{z}).$$

By $I(T, \omega)$ we denote the number of countable, non-isomorphic models of the theory. Notice, that if there exists a small theory T, $I(T, \omega) = \omega_1$, then there is $\mathfrak{D}(T) \subsetneq S(T)$ so that

$$|\{\mathfrak{M}_{/\cong} \mid \mathfrak{M} \models T, \mathfrak{M} - countable, \mathfrak{D}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}(T)\}| = \omega_1.$$

Corollary If there is a small theory T with $I(T, \omega) = \omega_1$, and there is a type $p(x) \in S(T)$ such that for every $q(\bar{y}) \in \mathfrak{D}(T)$, $p(x)$ is weakly orthogonal to $q(\bar{y})$, then $I(T \cup p(\bar{c}), \omega) = \omega_1$.

IMMM, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: baizhanov@hotmail.com, aisha.yershigeshova@gmai.com

On behaviour of binary formulas in $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures

B. Sh. Kulpeshov

The notion of *circular minimality* has been introduced and originally studied by D. Macpherson and C. Steinhorn in [**1**]. Here we continue studying the notion of *weak circular minimality* being its generalisation.

A *circular* order relation is described by a ternary relation K satisfying the following conditions:
(co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \to K(y,z,x))$;
(co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \wedge K(y,x,z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$;
(co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \to \forall t [K(x,y,t) \vee K(t,y,z)])$;
(co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \vee K(y,x,z))$.

A set A of a circularly ordered structure M is said to be *convex* if for any $a, b \in A$ the following holds: for any $c \in M$ with $K(a,c,b)$ we have $c \in A$ or for any $c \in M$ with $K(b,c,a)$ we have $c \in A$. A circularly ordered structure $M = \langle M, K, \ldots \rangle$ is *weakly circularly minimal* if any definable (with parameters) subset of M is a finite union of convex sets [**2**]. Any weakly o-minimal structure is weakly circularly minimal, but the inverse is not true in general. Some of interesting examples of weakly circularly minimal structures that are not weakly o-minimal were studied in [**2, 3, 4**].

Let $p \in S_1(\emptyset)$ and $F(x,y)$ be an $\emptyset$-definable formula such that $F(M,b)$ is convex infinite co-infinite for each $b \in p(M)$, $F(M,b) \subset p(M)$. Let $F^l(y)$ be the formula saying y is a left endpoint of $F(M,y)$. We say that $F(x,y)$ is *p-stable convex-to-right* if for every $b \in p(M)$ $M \models \forall x [F(x,b) \to F^l(b) \wedge \forall z (K(b,z,x) \to F(z,b))]$.

In [**2**]–[**4**] $\aleph_0$–categorical 1-transitive weakly circularly minimal structures have been studied, and was obtained their description up to binarity. Here we discuss some properties of $\aleph_0$–categorical weakly circularly minimal structures that are not 1-transitive. In particular, we study the behaviour of p-stable convex-to-right formulas in such structures by using some technics from [**5**].

References

[1] Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // Annals of Pure and Applied Logic, 79 (1996), pp. 165–209.

[2] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly, 51 (2005), pp. 377–399.

[3] Kulpeshov B.Sh. On $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures // Mathematical Logic Quarterly, 52 (2006), pp. 555–574.

[4] Kulpeshov B.Sh. Definable functions in the $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures // Siberian Mathematical Journal, 50 (2009), pp. 282–301.

[5] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, Singapore: World Scientific, 2006, pp. 31-40.

International Information Technologies University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: kulpesh@mail.ru

Separability of elements in hypergraphs of models of a theory

S. V. Sudoplatov

In [**1, 2, 3, 4**], the notion of hypergraph of prime models of a theory was introduced and it was clarified that these objects play an important role classifying countable models of complete theories. It was shown in [**1, 5**] that these hypergraphs can be free enough. Now we introduce a series of hypergraphs for arbitrary models.

Let $\mathcal{M}$ be a model of a theory T. Denote by $H(\mathcal{M})$ the set of all subsets N in the universe M of $\mathcal{M}$ such that these subsets are universes of elementary submodels $\mathcal{N}$ of $\mathcal{M}$. The pair $\mathcal{H}(\mathcal{M}) \rightleftharpoons (M, H(\mathcal{M}))$ is called a *hypergraph of all elementary submodels* of $\mathcal{M}$. For a cardinality λ we denote by $H_\lambda(\mathcal{M})$ and $\mathcal{H}_\lambda(\mathcal{M})$ the restrictions of $H(\mathcal{M})$ and $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ respectively to the class of elementary submodels $\mathcal{N}$ of $\mathcal{M}$ such that $|N| < \lambda$. We denote by $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_l(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_{\rm npl}(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_h(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_s(\mathcal{M})$ the restrictions of $\mathcal{H}_{\omega_1}(\mathcal{M})$ to the classes of elementary submodels $\mathcal{N}$ of $\mathcal{M}$ which are prime over a finite set, limit, non-prime and non-limit, homogeneous, saturated, respectively. Similarly, $H_p(\mathcal{M})$, $H_l(\mathcal{M})$, $H_{\rm npl}(\mathcal{M})$, $H_h(\mathcal{M})$, $H_s(\mathcal{M})$ denote corresponding restrictions of $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$.

Let (X, Y) be a hypergraph, x_1, x_2 be distinct elements in X. We say that x_1 is *separated* from x_2, or T_0*-separated*, if there is $y \in Y$ such that $x_1 \in y$ and $x_2 \notin y$. The elements x_1 and x_2 are *separated*, or T_2*-separated*, or *Hausdorff separated*, or x_1 *is separated with* x_2, if there are disjoint $y_1, y_2 \in Y$ such that $x_1 \in y_1$ and $x_2 \in y_2$.

Theorem. *Let $\mathcal{M}$ be an ω-saturated model of a countable complete theory T, a and b be elements in $\mathcal{M}$. The following conditions are equivalent:*

(1) *a is separated from (with) b in $H(\mathcal{M})$;*

(2) *a is separated from (with) b in $H_{\omega_1}(\mathcal{M})$;*

(3) $b \notin \mathrm{acl}(a)$ $(\mathrm{acl}(a) \cap \mathrm{acl}(b) = \varnothing)$.

Theorem admits generalizations for sets in a model (instead of elements) as well as specifications for hypergraphs $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_l(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_{\rm npl}(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_h(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}_s(\mathcal{M})$.

The research is supported by RFBR grant No. 12-01-00460-a.

References

[1] *Sudoplatov S. V.* On acyclic hypergraphs of minimal prime models // Siberian Math. J. — 2001. — Vol. 42, No 6. — P. 1170–1172.

[2] *Sudoplatov S. V.* Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // J. Math. Sciences. — 2010. — Vol. 169, No. 5. — P. 680–695.

[3] *Sudoplatov S. V.* The Lachlan problem. — Novosibirsk : NSTU, 2009.

[4] *Sudoplatov S. V.* Classification of Countable Models of Complete Theories. — Novosibirsk : NSTU, 2014.

[5] *Baikalova K. A.* On some hypergraphs of prime models and generated limit models // Algebra and Model Theory 7. — Novosibirsk : NSTU, 2009. — P. 6–17.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Quasi-neighborhoods and neighborhoods of types

N. S. Tazabekova

Definition [**1**]. Let $p \rightleftharpoons p(\bar{x})$ and $q \rightleftharpoons q(\bar{y})$ be some (may be incomplete) types over the set $A \subseteq M$ in a model $\mathcal{M}$ of a theory T. A formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ with parameters in A is (p,q)*-preserving*, (p,q)*-semi-isolating* or $(p \to q)$*-formula* if for any realization $\bar{a}$ of p, $\varphi(\bar{a}, \bar{y}) \vdash q(\bar{y})$ holds.

A formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ is $(p \leftrightarrow q)$*-formula* if $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ is both a $(p \to q)$-formula and $(p \leftarrow q)$-formula.

If $p = q$ then a (p,q)-preserving formula is called p*-preserving* or $(p \to p)$*-formula*.

Definition [**1**]. Let $p(\bar{x})$ be some (may be incomplete) n-type over a set $A \subseteq M$ in a model $\mathcal{M}$ of a theory T, B be a set in the model $\mathcal{M}$. A *quasi-neighborhood* of B in p is the set $QV_{p,\mathcal{M}}(B)$ of all tuples $\bar{c} \in M$ such that there exists a tuple $\bar{b} \in B$ and a $(tp(\bar{b}/A), p)$-preserving formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ with $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{c})$.

Lemma [**1**]. *Let $\mathcal{M}$ be a model of theory T, $\bar{a}$, $\bar{b}$ be tuples from $\mathcal{M}$, $p, q \in S(A)$.*

1) $\bar{a} \in QV_{tp(\bar{a}),\mathcal{M}}(\bar{a})$.

2) *$\bar{a}$ semi-isolates $\bar{b}$ if only if $\bar{b} \in QV_{tp(\bar{b}),\mathcal{M}}(\bar{a})$.*

3) *If $\bar{b} \in QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{a})$ and $\bar{c} \in QV_{q,\mathcal{M}}(\bar{b})$ then $\bar{c} \in QV_{q,\mathcal{M}}(\bar{a})$.*

4) *If $\bar{b} \in QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{a})$ then $QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{b}) \subseteq QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{a})$.*

Definition [**1**]. Let $p(\bar{x})$ be some (may be incomplete) n-type over a set $A \subseteq M$ in a model $\mathcal{M}$ of theory T, B be a set in the model $\mathcal{M}$. A *neighborhood* of B in p is the set $V_{p,\mathcal{M}}(B)$ of all tuples $\bar{c} \in M$ such that $\mathcal{M} \models p(\bar{c})$ and there exists a tuple $\bar{b} \in B$ and a $(tp(\bar{b}/A) \leftrightarrow tp(\bar{c}/A))$-formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ with $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{c})$.

Proposition. *Let $\mathcal{M}$ be a model of small theory T, $p \in S(T)$, $V_{p,\mathcal{M}}(\bar{a})$ be non-definable. If there are tuples $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ from $p(M)$ such that $\bar{\alpha} \notin V_{p,\mathcal{M}}(\bar{\beta})$, and there exists a formula $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ and $\bar{\gamma} \in p(M)$, $\psi(M, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \subset V_{p,\mathcal{M}}(\bar{\gamma})$, $V_{p,\mathcal{M}}(\bar{\gamma}) \cap V_{p,\mathcal{M}}(\bar{\alpha}) = \emptyset$, $V_{p,\mathcal{M}}(\bar{\gamma}) \cap V_{p,\mathcal{M}}(\bar{\beta}) = 0$ then $I(T, \omega) = 2^{\omega}$.*

Definition. Let $\mathcal{M}$ be a model of theory T, $p, q \in S(T)$. We say that p is *not almost orthogonal to q ($p \not\perp^{a} q$)* if there exists a formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ for some $\bar{a} \in p(M)$ such that $\emptyset \neq \varphi(M, \bar{a}) \subset q(M)$.

Proposition. *Let $\mathcal{M}$ be a model of theory T, $\bar{\alpha}$ be some tuple in $\mathcal{M}$, p and q be types from $S(A)$. If $p \not\perp^{a} q$, $QV_{p,\mathcal{M}}(\bar{\alpha})$ is non-definable then $QV_{q,\mathcal{M}}(\bar{\alpha})$ is non-definable too.*

References

[1] Baizhanov B. S., Sudoplatov S. V., Verbovskiy V. V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2012, Vol. 9, pp. 161–184.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: tazabekova.nargiz@gmail.com

Inconsistent cores in finite logics

D. Vlasov

We work in the context of abstract model theory, considering an abstract model-theoretic language $\mathcal{L}$, equipped with the satisfiability relation $\models$ between sentences of $\mathcal{L}$ and structures of appropriate signature. A set of axioms for abstract model theory may be found in [**1**].

Mappings on the signature symbols, which keep type of symbols and their arity, are called *signature morphisms*. Bijective signature morphisms are called *signature isomorphisms*. For any structure $\mathcal{N}$ of signature τ, and a signature morphism $\rho : \sigma \to \tau$ we define $\rho^*(\mathcal{N})$ — a structure of signature σ with the same domain as $\mathcal{N}$, where for any signature symbol $s \in \sigma$ the interpretation of s in $\rho^*(N)$ is defined as:

$$s^{\rho^*(\mathcal{N})} = \rho(s)^{\mathcal{N}}.$$

We extend this Barwise set of axioms with one extra axiom:

- For any signature morphism $\rho : \sigma \to \tau$, sentence ϕ of signature σ, and structure $\mathcal{N}$ of signature τ, if $\mathcal{N} \models \rho(\phi)$ then $\rho^*(\mathcal{N}) \models \phi$.

This axiom is clearly true for any sane model-theoretic logic. Below we will assume, that considered logics satisfy this axiom.

Finite logic is a logic, which essentially contains only finitely many formulas (modulo signature isomorphisms). One can easily obtain a vast variety of finite logics, taking any finite subset of formulas of any logic, and all their images under signature isomorphisms.

A set of sentences X is called *persistently consistent*, iff for any signature morphism ρ the set $\rho(X)$ is consistent. Obviously, X must be consistent itself.

A set of sentences X is called an *inconsistent core*, iff it is inconsistent, and all its proper subsets are persistently consistent.

Theorem. *If $\mathcal{L}$ is a finite logic, generated by n formulas, then any inconsistent core X has at most n formulas.*

References

[1] Barwise J., Feferman S. Model-theoretic logics. — Springer-Verlag, 1985, 893 pp.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vlasov@math.nsc.ru

Finite diagrams and the number of countable models

T. S. Zambarnaya

We study a connection between finite diagrams of models of a countable complete theory and the number of non-isomorphic models of this theory.

Theorem. *Let $\{p_i \in S(T) | i < \omega\}$ and $\{q_i \in S(T) | i < \omega\}$ be two countable sets of non-principal types of a countable theory T. If for every $n < \omega$ there is a model $\mathfrak{M}_n \models T$, in which p_i are realized and q_i are omitted for all $i \leq n$, then there is a countable model $\mathfrak{M} \models T$, such that all p_i, $i < \omega$ are realized and all q_i, $i < \omega$ are omitted in $\mathfrak{M}$.*

Definition. *For any model $\mathfrak{M} \models T$ denote by $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ the set of all complete types which are realized in $\mathfrak{M}$:*

$$\mathcal{D}(\mathfrak{M}) = \{p \mid p \in S(T), p \text{ is realized in } \mathfrak{M}\}.$$

The set $\mathcal{D}(\mathfrak{M})$ is called the finite diagram of $\mathfrak{M}$.

Corollary. *If there is a countable complete theory T with $I(T, \omega) = \omega_1$, then there is a finite diagram D, such that $D = \mathcal{D}(\mathfrak{M}_i)$, $\mathfrak{M}_i \in Mod(T)$, $i < \omega_1$.*

References

[1] Shelah S. Finite diagrams stable in power // Annals Math. Logic, Volume 2, 1970, P. 69–118.

[2] Baizhanov B. S., Omarov B. On finite diagrams // Teorija reguljarnyh krivyh v razlichnyh geometricheskih prostranstvah, KazGU, Alma-Ata, 1979, P. 11-15.

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: t.zambar@gmail.com

Embedding dimonoids into dimonoids with bar-units

A. V. Zhuchok

A. P. Pozhidaev [1] proved that any dialgebra can be embedded into a dialgebra with a bar-unit. In this situation the question about embedding dimonoids [2] into dimonoids with bar-units is of great importance.

Let S be an arbitrary semigroup and $\varepsilon \notin S$ be an arbitrary symbol. By $U = U_\varepsilon^S$ denote the set of all words $w\varepsilon v$ in the alphabet $S \cup \{\varepsilon\}$, where $w, v \in S \cup \{\omega\}$ (ω is an empty word, $\omega \notin S \cup \{\varepsilon\}$). Consider a monoid $(S \cup \{\omega\}, *)$ obtained from a semigroup S by adjoining a unit ω. Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on U by

$$w_1\varepsilon v_1 \dashv w_2\varepsilon v_2 = w_1\varepsilon(v_1 * w_2 * v_2), \quad w_1\varepsilon v_1 \vdash w_2\varepsilon v_2 = (w_1 * v_1 * w_2)\varepsilon v_2$$

for all $w_1\varepsilon v_1, w_2\varepsilon v_2 \in U$.

Lemma 1. *The algebra $(U, \dashv, \vdash)$ is a dimonoid with the bar-unit ε.*

The obtained dimonoid will be denoted by $S[\varepsilon]$.

Let further $\{S[\varepsilon_i]\}_{i\in I}$ be a family of dimonoids $S[\varepsilon_i]$ with bar-units ε_i, $i \in I$. Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on $\bigcup\limits_{i\in I} S[\varepsilon_i]$ by

$$w_1\varepsilon_i v_1 \dashv w_2\varepsilon_j v_2 = w_1\varepsilon_i(v_1 * w_2 * v_2), \quad w_1\varepsilon_i v_1 \vdash w_2\varepsilon_j v_2 = (w_1 * v_1 * w_2)\varepsilon_j v_2$$

for all $w_1\varepsilon_i v_1, w_2\varepsilon_j v_2 \in \bigcup\limits_{i\in I} S[\varepsilon_i]$.

Lemma 2. *The algebra $(\bigcup\limits_{i\in I} S[\varepsilon_i], \dashv, \vdash)$ is a dimonoid with bar-units ε_i, $i \in I$.*

The obtained dimonoid will be denoted by $S[\varepsilon_i]_{i\in I}$.

Theorem 1. *For any dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ there exists a dimonoid with a set of bar-units containing $(D, \dashv, \vdash)$ as a subdimonoid.*

Let $(D(X), \dashv, \vdash)$ be the free dimonoid over a set X [2], X^+ be the free semigroup on X and $\{X^+[\varepsilon_i]\}_{i\in I}$ be a family of dimonoids $X^+[\varepsilon_i]$ with bar-units ε_i, $i \in I$, at that $\varepsilon_i \neq \breve{x}$ for all $i \in I, x \in X$.

As a consequence of Theorem 1, we establish operations $\dashv'$ and $\vdash'$ on $D(X) \cup X^+[\varepsilon_i]_{i\in I}$ such that the algebra $(D(X) \cup X^+[\varepsilon_i]_{i\in I}, \dashv', \vdash')$ is a dimonoid with the set of bar-units $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ containing the free dimonoid $(D(X), \dashv, \vdash)$ as a subdimonoid.

References

[1] Pozhidaev A. P. 0-dialgebras with bar-unity and nonassociative Rota-Baxter algebras // Sib. Math. J., 50 (6), 2009, 1070–1080.

[2] Zhuchok A. V. Elements of dimonoid theory // Mathematics and its Applications (Proseedings / Institute of Mathematics of NAS of Ukraine; v. 98), Kiev: Institute of Mathematics, 2014, 304 p. (in Ukrainian).

Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk (Ukraine)
E-mail: zhuchok_a@mail.ru

The endomorphism semigroup of a free trioid of rank 1

Yu. V. Zhuchok

Trioids were introduced by J.-L. Loday and M.O. Ronco in [1] for the study of ternary planar trees. An algebraic system $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ with three binary associative operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ is called *a trioid* if for all $x, y, z \in T$,

$$\begin{array}{ll} (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), & (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), & (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \\ (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), & (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \\ (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), & (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). \end{array}$$

Trioids and trialgebras, which are based on the notion of a trioid, have been studied in different papers (see, e.g., [2], [3]). It is well known that the notion of a trialgebra generalizes the notion of a dialgebra [4].

Let X^+ be the free semigroup on $X = \{x, \overline{x}\}$. By $Ft_1(X)$ we denote the subsemigroup of X^+ which consists of words w with the element $\overline{x}$ occuring in w at least one time. For every $w \in Ft_1(X)$ by $\widetilde{w}$ we denote the word obtained from w by replacing each $\overline{x}$ by x. Define three binary operations on $Ft_1(X)$ as follows:

$$u \dashv v = u\widetilde{v}, \;\; u \vdash v = \widetilde{u}v, \;\; u \perp v = uv.$$

Then the algebra $(Ft_1(X), \dashv, \vdash, \perp)$ is *the free trioid* of rank 1 (see [1]).

Let N be the set of all positive integers, $n \in N$ and $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. By $U(I_n)$ we denote the set of all nonempty subsets of I_n. Consider a binary operation $\circ$ on $P = \bigcup_{n \in N}(n \times U(I_n))$ defined by $(n; A) \circ (m; B) = (nm; (A-1)m + B)$, where $(A-1)m + B = \{(a-1)m + b \,|\, a \in A, b \in B\}$. Note that $(P, \circ)$ is a monoid.

Theorem. (i) *For every $(m; B) \in P$ a transformation $\xi_{m,B}$ of the free trioid $(Ft_1(X), \dashv, \vdash, \perp)$ defined by $(n; A)\xi_{m,B} = (nm; (A-1)m + B)$ is a monomorphism, and every endomorphism of $(Ft_1(X), \dashv, \vdash, \perp)$ has the above form.*

(ii) *The monoid of endomorphisms $End(Ft_1(X), \dashv, \vdash, \perp)$ is isomorphic to $(P, \circ)$.*

Besides, we prove that free trioids of rank 1 are determined by their endomorphism monoids and give an abstract characteristic of $End(Ft_1(X), \dashv, \vdash, \perp)$.

References

[1] Loday J.-L., Ronco M. O. Trialgebras and families of polytopes // Contemporary Mathematics, 346, 2004, 369–398.

[2] Zhuchok A. V. Semilattice decompositions of trioids // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat., 1 (71), 2013, 130–134.

[3] Novelli J.-C., Thibon J. Y. Construction of dendriform trialgebras // C. R. Math., Acad. Sci. Paris, 342 (6), 2006, 365–369.

[4] Pozhidaev A. P. Dialgebras and related triple systems // Siberian Mathematical Journal, 49 (4), 2008, 696–708.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv (Ukraine)
E-mail: zhuchok_y@mail.ru

VII. Секция «Неклассические логики»

Генценовское исчисление с правилом индукции для временной логики с оператором until

М. К. Валиев

Среди логик линейного времени особое место занимает пропозициональная логика $PTL(U, S)$ над целочисленной временной шкалой. Эта логика использует двуместные темпоральные операторы U (until) и S (since). Х.Камп [**1**] показал, что в эту логику вкладывается элементарная теория целых чисел с отношением порядка и неинтерпретированными одноместными предикатами. Эта логика разрешима, и для нее известно несколько полных аксиоматизаций гильбертовского типа [**2, 3, 4**]. В [**5**] для некоторого варианта логики процессов, обобщающего $PTL(U, S)$, построена полная аксиоматизация генценовского типа с ограниченными правилами индукции и сечения и отмечено, что эту аксиоматизацию можно сузить до полной аксиоматизации GAx_{US} для $PTL(U,\ S)$.

В [**6**] построена гильбертовская аксиоматизация для фрагмента $PTL(U)$ логики $PTL(U,\ S)$ (над натуральными числами, без оператора S). Можно показать, что сужение системы GAx_{US} на $PTL(U)$ дает полную систему для $PTL(U)$. Однако в этом случае можно доказать и более сильное утверждение. А именно, пусть GAx_U обозначает исчисление, которое получается из вышеупомянутого сужения системы GAx_{US} удалением правила сечения. Тогда имеет место

Теорема. GAx_U *- полная аксиоматизация для* $PTL(U)$*.*

Можно ли получить аналогичный результат для $PTL(U, S)$, остается неизвестным и кажется маловероятным.

Доказательство теоремы использует подход из моей работы [**7**], в которой были построены генценовские системы для некоторых вариантов ПДЛ. К сожалению, при этом сечение все же в некотором виде сохраняется в правиле индукции $X \to r, Y; r \to Tp, Tr; r \to Tq \vdash X \to p\ W\ q, Y$, где r - формула инварианта (Tp сокращение для $false\ U\ p$, $p\ W\ q$ для $\neg(\neg p\ U\ \neg q)$). однако на вид r можно наложить очень сильные ограничения (как и в [**7**]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 13-01-00643 и 13-01-00382.

Литература

[1] Kamp H. W. Tense logic and the theory of linear order. Ph. D. Thesis, Univ. of California, Los Angeles, 1968.
[2] Venema Y. Completeness via completeness. Colloq. on Modal Logic, Univ. of Amsterdam, 1991.
[3] Reynolds M. Axiomatizing U and S over integer time. Lect. Notes in AI, vol. 827, 1994, 117–132.
[4] Валиев М. К. О временных зависимостях в базах данных. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1985, no. 1, 106–115.
[5] Valiev M. K. On axiomatization of process logic. Lect. Notes in Comp. Sci., vol. 148, 1983, 304–313.
[6] Gabbay D., Pnueli A., Shelah S., Stavi R. Temporal analysis of fairness. ACM Symp. Principles Progr. Lang. 1980, 163–173.
[7] Valiev M. K. Decision complexity of variants of propositional dynamic logic. Lect. Notes in Comp. Sci., vol. 88, 1980, 656–664.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва
E-mail: valiev@keldysh.ru

Узнаваемость над минимальной логикой

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Исследуется вопрос узнавания для расширений минимальной логики Йохансона.

Логику L естественно считать узнаваемой, если разрешима проблема ее *узнавания*: "Для любой логики L' определить, совпадает ли она с L". Однако в общем виде эта проблема неразрешима [**1**], [**2**].

Поэтому мы ограничим класс логик и будем рассматривать лишь конечно аксиоматизируемые расширения минимальной логики J Йохансона [**3**].

Пусть L_0 – конечно аксиоматизируемая логика, содержащая минимальную логику J. Конечно аксиоматизируемую логику $L \supseteq L_0$ назовем *узнаваемой над* L_0, если разрешима проблема ее *узнавания* над L_0: Для любого конечного множества формул Ax определить, справедливо ли равенство $L_0 + Ax = L$.

Под J-*логикой* мы понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно *modus ponens* и правила подстановки. Обозначаем

$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p)$, $\mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (p \vee \neg p)$, $\mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot$, $\mathrm{For} = \mathrm{J} + p$, $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p)$,
$\mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to p)$, $\mathrm{JK} = \mathrm{J} + (\neg p \vee \neg\neg p)$, $\mathrm{JX} = \mathrm{J} + ((\bot \to p) \vee (p \to \bot))$,
$\mathrm{JF} = \mathrm{J} + ((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Логики* Int, Neg, For, Gl, Cl, JK, Od *и* JX *узнаваемы над* J.

Теорема 2. *Все стройные логики (т. е. логики, содержащие логику* JX*) с интерполяционным свойством Крейга CIP, ограниченным интерполяционным свойством IPR или проективным свойством Бета PBP узнаваемы над JX и J.*

Говорим, что J-логика $\mathrm{J} + B$ *надежно узнаваема над* J, если она разрешима и существует конечное множество S конечных шкал (или, равносильно, алгебр), такое что для любой формулы A: $\mathrm{J} + A \vdash B \iff A$ опровержима во всех шкалах из S. Ясно, что всякая надежно узнаваемая логика является узнаваемой.

Найден пример логики с CIP, которая не является надежно узнаваемой над J:

Теорема 3. *Логика* JF *не является надежно узнаваемой над* J.

Список литературы

[1] Кузнецов А. В. О неразрешимости общих проблем полноты, разрешения и эквивалентности для исчислений высказываний // Алгебра и логика, Т. 2, № 4, 1963, 47–65.

[2] Чагров А. В. Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики, вып. 5. М., Физматлит, 1994, 62–108.

[3] Johansson I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compositio Mathematica, Vol. 4, 1937, 119–136.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru, veta_v@mail.ru

О выразительной силе регулярной и контекстно-свободной динамической логики

Н. В. Шилов

Памяти Михаила Абрамовича Тайцлина (30.01.1936-20.07.2013)

Во время работы в Казахском Государственном Университете в Алма-Ате Михаил Абрамович Тайцлин вместе со своими учениками уделял много внимания изучению так называемого «ромба логик» — сравнению по выразительной силы вариантов динамической логики первого порядка: детерминированной (D-DL), регулярной (R-DL), детерминированной контекстно-свободной (D-CF-DL) и контекстно-свободной (CF-DL) [**3**]. (См. также список работ в [**1**].)

На сколько известно автору, вопрос о сравнении выразительной силы R-DL и CF-DL остаётся открытым до сих пор: очевидно, что R-DL≤CF-DL, но не известно, верно ли неравенство R-DL<CF-DL.

Теорема. *Бескванторная регулярная динамическая логика без равенства слабее бескванторной контекстно-свободной динамической логики без равенства.*

Доказательство этой теоремы основано на обобщении трансляции пропозициональной динамической логики PDL в недетерминированные схемы Янова [**2**]. В качестве формулы CF-DL, которая неэквивалентна никакой бескванторной формуле R-DL без равенства, используется $\langle\alpha\rangle TRUE$, где α — это известная рекурсивная монадическая схема Гарлэнда — Лакхэма $F = \ if\ p\ then\ f\ else\ gFFh$ из [**4**], а в качестве моделей используются так называемые считающие интерпретации из той же работы.

Исследование выполнено в рамках проекта РФФИ №13-01-00645-а.

Список литературы

[1] Архангельский Д. А., Байжанов Б. С., Белеградек О. В. и др. Михаил Абрамович Тайцлин. Сибирские электронные математические заметки, 2013, т.10, стр. A.54–A.65.

[2] Непомнящий В. А., Шилов Н. В. Недетерминированные схемы программ и их отношение к программным логикам. Кибернетика, 1988, №3, стр.12-18, 28.

[3] Столбоушкин А. П., Тайцлин М. А. Динамические логики. В сб. Кибернетика и вычислительная техника, вып. 2, М.: Наука, стр.180-230.

[4] Garland S. J., Luckham D. C. Program Schemes, Recursion-Schemes and Formal Languages. J. Computer and System Sci., 1973, v.7, № 2, p.119–160. (Русский перевод: Гарлэнд С., Лакхэм Д. Стандартные схемы, рекурсивные схемы и формальные языки. В сб. Кибернетический сборник (новая серия), вып. 13. М.: Мир, 1976. С. 73–119.)

Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, г. Новосибирск, Россия; Назарбаев Университет, г. Астана, Казахстан
E-mail: shilov@iis.nsk.su, nikolay.shilov@nu.edu.kz

Monadic bounded algebras

G. Akishev, R. Goldblatt

The present work[1] is devoted to the study of monadic bounded algebras[2], which are an algebraic version of free first-order monadic logic.

Definition. A *monadic bounded algebra* (shortly, **MBA**) is a triple $(\mathbf{A}, E, \exists)$, where $\mathbf{A}$ is a Boolean algebra, $E \in \mathbf{A}$, and $\exists$ is a mapping from $\mathbf{A}$ to itself such that

(1) $\exists \mathbf{0} = \mathbf{0}$
(2) $p \wedge E \leq \exists p$
(3) $\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$
(4) $\exists p = \exists\exists p$
(5) $\exists(p \vee q) = \exists p \vee \exists q$
(6) $\exists p = \exists(p \wedge E)$ (for all $p, q \in \mathbf{A}$).

Theorem 1. *There are exactly fourteen types of MBA-varieties. The equational characterization of each of them is provided in the table.*

MBA-variety	Sets of characterizing equations
1	$\emptyset$
2	$\{\exists E \approx \mathbf{1}\}$
3	$\{E \vee (\exists E)' \approx \mathbf{1}\}$
4	$\{E \approx \mathbf{1}\}$
5	$\{E \approx \mathbf{0}\}$
6	$\{E \vee (\exists E)' \approx \mathbf{1}, \mathsf{Alt}_n \approx \mathbf{0}\}$
7	$\{E \approx \mathbf{1}, \mathsf{Alt}_n \approx \mathbf{0}\}$
8	$\{E \vee (\mathsf{Alt}_n)' \approx \mathbf{1}\}$
9	$\{\exists E \approx \mathbf{1}, E \vee (\mathsf{Alt}_n)' \approx \mathbf{1}\}$
10	$\{\mathsf{Alt}_n \approx \mathbf{0}\}$
11	$\{\mathsf{Alt}_n \approx \mathbf{0}, E \vee (\mathsf{Alt}_m)' \approx \mathbf{1}\}$
12	$\{\exists E \approx \mathbf{1}, \mathsf{Alt}_n \approx \mathbf{0}\}$
13	$\{\exists E \approx \mathbf{1}, \mathsf{Alt}_n \approx \mathbf{0}, E \vee (\mathsf{Alt}_m)' \approx \mathbf{1}\}$
14	$\{v_0 \approx v_1\}$

Theorem 2. *There are at most $2^{3\cdot 2^r \cdot 2^{2^r - 1}}$ elements in an MBA generated by r elements.*

Theorem 3. *There are exactly $2^{3\cdot 2^r \cdot 2^{2^r - 1}}$ elements in an MBA freely generated by r elements.*

School of Science and Technology, Nazarbayev University (Kazakhstan), School of Mathematics, Statistics and Operations Research, Victoria University of Wellington (New Zealand)
E-mail: GAkishev@nu.edu.kz, Rob.Goldblatt@msor.vuw.ac.nz

[1]This research was supported by the Marsden Fund of the Royal Society of New Zealand.

[2]The present results were published in G. Akishev, R. Goldblatt, "Monadic Bounded Algebras", Studia Logica, Vol. 96, № 1, 2010, pp. 1–40.

A proof system with metavariables for infinite-valued first-order Lukasiewicz logic

A. S. Gerasimov

Infinite-valued first-order Łukasiewicz logic Ł∀ is one of the most important fuzzy logics that formalize reasoning under vagueness [**2**]. Among calculi for Ł∀, there are known only Hilbert-type calculi (see e.g. [**2**]), the Gentzen-type hypersequent calculus GŁ∀ [**1**] (with 5 structural rules, which require searching for premises when applied backward), and the Gentzen-type sequent calculus for the Ł∀ extension (without structural rules) mentioned in [**3**] together with an outline of a unification-based proof search approach. We aim at an efficient proof search system for Ł∀ and develop the approach [**3**] applying it to Ł∀ directly and improving it.

We introduce a calculus $\mathrm{T_m}$Ł∀, which is a (considerable) modification of the hypersequent calculus GŁ∀, and present it as a tableau system. A proof in $\mathrm{T_m}$Ł∀ is a tableau whose nodes are sequents (ordered pairs of finite multisets of formulas). In essence, we obtain $\mathrm{T_m}$Ł∀ from GŁ∀ by eliminating all the structural rules, redefining axioms (i.e., defining what means for a tableau branch to be closed), using an invertible variant of the rule ($\to\Rightarrow$), introducing metavariables in the universal-type quantifier rules, using liberalized existential-type quantifier rules, and adding the substitution rule. We say that a tableau branch $\mathcal{B}$ is *closed* if for any model M and evaluation ν of the variables $\mathcal{B}$ contains a sequent of the form $\Gamma, A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \Delta, A_1, \ldots, A_n$ such that $n \geqslant 0$, $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$, the sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ is atomic, and $\sum_{A\in\Gamma}(|A|_{M,\nu} - 1) \leqslant \sum_{B\in\Delta}(|B|_{M,\nu} - 1)$, where $|A|_{M,\nu}$ is the truth value of A under M and ν. A branch is closed iff a corresponding system of linear inequalities over reals with integer coefficients is infeasible.

Theorem 1. *If an Ł∀-sentence is provable in* $\mathrm{T_m}$Ł∀, *then the sentence is* Ł∀*-valid.*

Theorem 2. *If an Ł∀-sentence is provable in* GŁ∀, *then the sentence is provable in* $\mathrm{T_m}$Ł∀.

We also describe an algorithm, which is based on unification and linear programming, for checking $\mathrm{T_m}$Ł∀-tableau closability, prove its correctness, and give an upper bound on its running time.

Theorem 3. *The problem of checking* $\mathrm{T_m}$Ł∀*-tableau closability is* NP*-complete (even if any input tableau does not contain nonzero-place functional symbols and whatever predicate symbols except for one nonzero-place predicate symbol).*

References

[1] Baaz M., Metcalfe G. Herbrand's theorem, skolemization and proof systems for first-order Łukasiewicz logic. Journal of Logic and Computation, Vol. 20, No. 1, pp. 35–54, 2010.

[2] Cintula P., Hájek P., Noguera C., eds. Handbook of mathematical fuzzy logic, College Publications, 2011.

[3] Gerasimov A. S. A unification-based approach to automatic theorem proving for the extension of infinite-valued first-order Lukasiewicz logic. International Conference "Mal'tsev Meeting 2013": Collection of Abstracts, p. 60, 2013.

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg (Russian Federation)
E-mail: alexander.s.gerasimov@ya.ru

On different approaches to defining a logic over a class of bilattices

S. P. Odintsov

The logic of generalized truth values was suggested by Shramko and Wansing in [**4**] on the base of the three-lattice $SIXTEEN_3$. Despite the fact that $SIXTEEN_3$ has truth, falsity and information ordering, only two of them was used to define truth and falsity consequence relations, $\models_t$ and $\models_f$ of Shramko-Wansing's logic. In [**2**] with the help of the results from [**3**], we axiomatized the relations $\models_t$ and $\models_f$ via a so called bicalculus having two kinds of sequents and demonsrated that Shramko-Wansing's logic is, in fact, determined by the class of commutative distributive bilattices with conflation.

In this talk we show that taking any two of orderings of $SIXTEEN_3$ will produce the same consequence relation up to renaming translation. Moreover, this result remains true if we replace $SIXTEEN_3$ by an arbitrary commutative interlaced trilattice.

Further, we compare the bicalculus of [**2**] with more traditional bilattice based logic of [**1**]. The semantic consequence relation of [**1**] is based on matrix approach, where as the consequence relations $\models_t$ and $\models_f$ are defined via orderings on $SIXTEEN_3$. We show how to define Shramko-Wansing's logic using matrix approach on one hand, and on the other hand we show that the consequence relation of [**1**] admits an order based definition.

Acknowledgement: This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 12-01-00168-a.

References

[1] Arieli O., Avron A., Reasoning logical bilattices. Journal of Logic, Language, and Information, Vol.5, 1996, 25–63.

[2] Odintsov S.P., Wansing H., The Logic of Generalized Truth Values and the Logic of Bilattices. Studia Logica, 2014, to appear.

[3] Rivieccio U., An Algebraic Study of Bilattice-based Logics. Ph.D. Dissertation, University of Barcelona, 2010.

[4] Shramko Y., Wansing H., Some useful 16-valued logics: how a computer network should think. Journal of Philosophical Logic, Vol. 34, 2005, 121–153.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russian Federation)
E-mail: odintsov@math.nsc.ru

VIII. Авторский указатель