# ПОЛУГРУППЫ БЛИЗКИЕ К ГРУППАМ: УРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА, ПРОБЛЕМЫ СОВМЕСТНОСТИ

А. Н. Шевляков

В докладе будут представлены результаты по алгебраической геометрии над некоторыми классами полугрупп. Будут рассмотрены свойства алгебраических множеств и некоторые виды компактности систем уравнений.

Поскольку теория полугрупп возникла позднее теории групп, то многие понятия первой появились из ослабления аксиом теории групп. Так, например, возникли классы инверсных, клиффордовых и вполне простых полугрупп: данные полугруппы (как и группы) допускают операцию обращения, но данная операция может уже не обладать всеми свойствами операции обращения в теории групп.

В работах [1, 2] была развита алгебраическая геометрия над группами, то есть изучены общие свойства уравнений над группами. Целью моего доклада будет изучение некоторых проблем алгебраической геометрии в классах полугрупп близких к группам. Помимо указанных выше работ, в своих исследованиях мы существенно опираемся на серию работ Э.Ю. Данияровой, А.Г. Мясникова, В.Н. Ремесленникова [3, 4, 5, 6], в которой даются основы алгебраической геометрии над произвольной алгебраической системой в языке без предикатов.

Следуя [3], уравнение над полугруппой $S$ — это равенство вида $t(X) = s(X)$, где $t(X), s(X)$ — конечные произведения переменных множества $X$ и элементов полугруппы $S$. Например, следующие выражения являются уравнениями над полугруппой $S$: $x_1x_2 = x_2x_1$, $x_1s_1x_1 = s_2x_2^3s_3$ $(s_i \in S)$. В случае, если полугруппа допускает операцию обращения, некоторые части уравнения могут иметь отрицательные степени: $(xy)^{-1} = (y(x)^{-1}z)^{-1}$.

Алгебраическое множество над полугруппой $S$ — это решение некоторой системы уравнений над $S$.

Доклад будет состоять из двух больших частей.

(1) Какие полугруппы $S$ обладают следующим свойством: объединение любого конечного числа алгебраических множеств над $S$ снова является алгебраическим? Следуя [6] такие полугруппы будем называть эквациональными областями.

Рассмотрим, как решается аналогичная проблема в классической алгебраической геометрии над полем. Здесь решение тривиальное: когда рассматриваются полиномиальные уравнения над полем $F$, то любое конечное объединение алгебраических множеств над $F$ снова выразимо в виде решения системы уравнений, то есть является алгебраическим. Например, объединение решений систем уравнений $\{f(X) = 0\}$, $\{g(X) = 0\}$ над $F$ является решение системы $\{f(X)g(X) = 0\}$. Таки образом, любое поле является эквациональной областью.

Ситуация усложняется при переходе от полей к другим классам алгебраических систем.

Полное описание эквациональных областей среди ассоциативных колец, алгебр Ли и групп была произведена в [6]. В отличие от этих классов алгебраических систем, получить единый критерий для всех полугрупп не представляется мне возможным. Поэтому в докладе будут рассмотрены лишь важнейшие классы полугрупп (вполне простые, клиффордовы, инверсные, конечные полугруппы) и в каждом из классов будет сформулирован критерий, когда полугруппа $S$ из данного класса является эквациональной областью. Отметим, что наши результаты для вполне простых полугрупп схожи с результатами [6] для групп. Например, было получено, что свободная вполне простая полугруппа ранга $r > 1$ (как и свободная группа ранга $r > 1$) является эквациональной областью.

(2) Наиболее простое описание алгебраических множеств над алгебраической системой $A$ может быть получено в случае нетеровости по уравнения системы $A$, то есть когда любая бесконечная система уравнений над $A$ эквивалентная своей конечной подсистеме. Однако существуют полугруппы, которые не являются нетеровыми по уравнениям.

В докладе будут рассмотрены бесконечные несовместные системы уравнений над различными полугруппами. Оказывается, что существуют примеры, когда все конечные подсистемы таких систем уравнений совместны. Более того, можно построить пример полурешетки $S$, в которой все совместные системы уравнений эквивалентны своим конечным подсистемам, но над $S$ существует бесконечная несовместная система уравнений, каждая конечная подсистема которой совместна.

Существование такой полурешетки $S$ позволяет ввести еще одно обобщение понятия нетеровости по уравнениям: нетеровость по совестным системам. А именно: полугруппа $S$ нетерова по совестным системам, если любая совестная система уравнений над $S$ эквивалентная своей конечной подсистеме.

В некоторых случаях новое определение совпадает с понятием нетеровости по уравнениям. Например, семейство нетеровых по совместным системам булевых алгебр совпадает с семейством нетеровых по уравнения булевых алгебр. Однако в классе полурешеток понятия нетеровости по уравнениям и нетеровости по совестным системам различны. В докладе будет показано, что свободная полурешетка бесконечного ранга (а также любая ее бесконечная подполурешетка) нетерова по совместным системам, но не является нетеровой по уравнениям. Напротив, свободная леворегулярная идемпотентная полугруппа (или бициклическая полугрупп) не является нетеровой по совестным системам уравнений.

## Список литературы

[1] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and Ideal Theory // J. Algebra, 219, pp. 16–79, 1999.

[2] A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups II: logical foundations // J. Algebra, 234, pp. 225–276, 2000.

[3] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Unification theorems in algebraic geometry, Algebra and Discrete Mathematics, 1, 2008, 80–111.

[4] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания, Фундамент. и прикл. матем., 17:1, 2012, 65–106.
[5] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures III: Equationally Noetherian property and compactness, South. Asian Bull. Math., 35:1, 2011, 35-–68
[6] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. IV. Эквациональные области и ко-области, Алгебра и логика, 49:6, 2010, 715–756

ОФИМ СО РАН, Омск
*E-mail address*: a_shevl@mail.ru