

Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их обобщения: идеалы и автоморфизмы

В.М. Левчук

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K , ассоциированную с системой корней Φ , характеризуют базой Шевалле; ее дают подходящие база подалгебры Картана и элементы e_r ($r \in \Phi$) [1, § 4.4]. Подалгебру с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ обозначим через $N\Phi(K)$, называя *нильтреугольной*. Для типа A_{n-1} ($n \geq 2$) ее отождествляют с ассоциированной алгеброй Ли алгебры $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K с базой из матричных единиц e_{ij} , $1 \leq j < i \leq n$. В [2] алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_n , C_n и D_n представлены специальными Φ^+ -матрицами с базисом из "матричных" единиц e_{iv} с условиями на индексы, соответственно,

$$-i < v < i \leq n, \quad -i \leq v < i \leq n, \quad v \neq 0, \quad 1 \leq |v| < i \leq n.$$

Структурные константы дает [2, Лемма 1.1] теорема Шевалле о базисе.

Канонический базис лиева идеала алгебры $NT(n, K)$ находит Ходюня Н.Д.; это решает для одного лиева типа комбинаторную задачу о числе идеалов алгебры Ли $N\Phi(K)$ классических типов над конечным полем K [3, Problem 2].

Унипотентный радикал $U = U\Phi(K)$ подгруппы Бореля группы Шевалле типа Φ над K представлен в [2] присоединенной группой $N\Phi(K)$. Ее нормальные подгруппы тесно связаны с идеалами кольца Ли $N\Phi(K)$ и при $\text{char } K \neq 2, 3$ образуют даже совпадающие множества. Используя эти связи, автор и Г.С. Сулейманова ранее перечислили большие нормальные абелевы подгруппы в U для всех конечных групп G лиева типа и доказали, что их $(\text{Aut } G)$ -образы в U дают все большие абелевы подгруппы в U , за некоторыми исключениями. Аналогично изучаются абелевы подалгебры наивысшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ над произвольным полем K ; случай $K = \mathbb{C}$ изучил ранее А.И. Мальцев [4].

Отметим связь вопросов описания автоморфизмов и вопросов элементарной эквивалентности алгебраических систем. Аналогично решению проблемы описания $\text{Aut } U$ в [2], А.В. Литаврин изучает $\text{Aut } N\Phi(K)$. Если Γ – произвольная цепь с отношением порядка $>$, то нильтреугольные Γ -матрицы $\|a_{ij}\|_{i,j \in \Gamma}$ образуют финитарную алгебру $NT(\Gamma, K)$ над K с базой из матричных единиц e_{ij} ($x \in K$, $i, j \in \Gamma$, $i > j$). В [5] взаимосвязано описаны максимальные абелевы идеалы и автоморфизмы кольца $R = NT(\Gamma, K)$ над кольцом K без делителей нуля и ассоциированного кольца Ли, и автоморфизмы присоединенной группы.

Автоморфизмы финитарных обобщений групп U классических (включая скрученные) типов изучены в [6]. Там же построены финитарные обобщения колец Ли $N\Phi(K)$ классических типов B_Γ , C_Γ и D_Γ . На них удастся распространить методы [5] и [6].

Пусть $Z^{(+)}$ – цепь натуральных чисел. Кольцо $GNT(Z^{(+)}, K)$ всех(нижних) нильтреугольных $Z^{(+)}$ -матриц также оказывается радикальным. На него удастся перенести методы [5] описания автоморфизмов для случая кольца K без делителей нуля (для присоединенной группы в [7] изучен случай поля $|K| > 2$). В. В. Цыганков перенес описание максимальных абелевых идеалов из [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Carter, Simple groups of Lie type, Wiley and Sons, New York, 1972.
- [2] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика, т. 29 (1990), № 3, с. 315-338.

- [3] G. P. Egorychev, V. M. Levchuk, Enumeration in the Chevalley algebras. - ACM SIGSAM Bulletin, Vol 35, No. 2, 2001, p. 439-452.
- [4] A.I. Mal'cev, Commutative subalgebras in semisimple Lie algebras, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 8 (1945) 291-300.
- [5] Левчук В.М. Некоторые локально нильтреугольные кольца и их присоединенные группы // Математические заметки. 1987. Т.42. №5. С. 631-641
- [6] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле // Труды ИММ УрО РАН, т. 15 (2009), № 2, с. 133-142.
- [7] Roksana Slowik. Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators // Linear and Multilinear Algebra. 2013. Vol. 61. №8. P. 1028-1040.

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, КРАСНОЯРСК
E-mail address: vlevchuk@sfu-kras.ru