Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

21–25 ноября 2016 г.

Тезисы докладов

РФФИ

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 16-01-20630)

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
*Настоящая наука

Международный математический центр
Новосибирского государственного университета

Новосибирск • 2016

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

November 21–25, 2016

Collection of Abstracts

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 16-01-20630)

International Mathematical Center
of Novosibirsk State University

Novosibirsk • 2016

Содержание

I. Пленарные доклады

Автоморфизмы дистанционно регулярных графов

И. Н. Белоусов

В докладе предполагается изложить некоторые достижения последних лет в области изучения автоморфизмов дистанционно регулярных графов. В частности, будут рассмотрены результаты по обобщенным многоугольникам и дистанционно регулярным графам на «малом» числе вершин.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: i_belousov@mail.ru

От локальной к глобальной сопряженности в относительно гиперболических группах

О. В. Богопольский

Относительно гиперболические группы были введены Громовым (1987). Известно (Хрушка, 2010), что существенно разные определения, данные Громовым, Бовдичем и Осиным, совпадают в случае, когда группа счетна и ее переферические подгруппы бесконечны. В первой части моего доклада будет представлено комбинаторное определение Осина и перечислены некоторые полезные утверждения, позволяющие работать в этой области. Во второй части будут представлены новые результаты о сопряженности подгрупп в относительно гиперболических группах. В частности, мы доказываем следующую теорему:

Теорема. *Предположим, что конечно порожденная группа G гиперболична относительно набора подгрупп $\mathbb{P}$. Пусть H_1, H_2 подгруппы группы G, такие что H_1 квазивыпукла относительно $\mathbb{P}$ и H_2 обладает непараболическим элементом бесконечного порядка. Предположим, что H_2 поэлементно сопрягается в H_1. Тогда существует подгруппа конечного индекса в H_2, которая целиком сопрягается внутрь H_1.*

Дана оценка длины сопрягающего элемента.

Известно, что предельные группы (см. работы Зелы, Ремесленникова, Мясникова и Харлампович) гиперболичны относительно представителей классов сопряженностей максимальных нециклических абелевых подгрупп.

Следствие 1. *Пусть G предельная группа. Пусть H_1 и H_2 подгруппы группы G, где H_1 конечно порождена. Предположим, что H_2 поэлементно сопрягается в H_1. Тогда существует подгруппа конечного индекса в H_2, которая целиком сопрягается внутрь H_1. Индекс зависит только от H_1.*

Дана оценка длины сопрягающего элемента.

Следствие 2. *Пусть G предельная группа. Для любых двух несопряженных конечнопорожденных подгрупп H_1 и H_2 группы G существует конечный гомоморфный образ G, где образы этих подгрупп не сопряжены. В частности, проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в предельных группах разрешима.*

Последнее следствие доказано также Залесским и Чагасом другими методами.

Будут сформулированы и другие теоремы, касающиеся гиперболических почти компактных специальных групп (этот класс групп возник при решении виртуальной проблемы Хакена о 3-многообразиях).

Это совместная работа с Кай-Уве Буксом.

Университет Дюссельдорфа (Германия) и ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия)
E-mail: Oleg.Bogopolski@uni-duesseldorf.de

Строение редкутивных групп над кольцами

Н. А. Вавилов

В докладе будет дан обзор state of the art и недавних замечательных результатов Петербургской школы по структурной теории и алгебраической K-теории групп Шевалле и изотропных редуктивных групп над произвольными коммутативными кольцами. После необходимых напоминаний будут даны формулировки и описаны методы, позволяющие доказать результаты о нормальном и субнормальном строении таких групп, стандартных коммутационных формулах, нильпотентности K_1 и т. д.

Одной из несомненных вершин этого направления на уровне K_1 являются результаты Алексея Степанова об ограниченности ширины коммутаторов в элементарных образующих. Для доказательства этих результатов он развил новый вариант локализационных методов, служащий дальнейшим развитием локально-глобального принципа Квиллена — Суслина и метода локализации пополнения Бака.

В самое последнее время Андрей Лавренов и Сергей Синчук частично обобщили эти методы на уровень K_2. В частности, им получить почти полное решение одной из важнейших проблем алгебраической K-теории, проблемы центральности K_2. До их работ этот выдающийся результат был известен только в линейном случае, где он был получен в 1978 году Вильбердом ван дер Калленом и Маратом Туленбаевым. Решение в общем случае потребовало несколько замечательных новых идей. Общий случай оставался открытым почти 40 лет.

В конце доклада планируется рассказать об аналогичных результатах для групп точек достаточно изотропных редуктивных групп, над чем в настоящее время работают Анастасия Ставрова, Виктор Петров, Александр Лузгарев и другие. Эта теория была бы обобщением теории Бореля — Титса редуктивных групп над полями, в ситуацию групп над произвольной базой. Планируется упомянуть также возможные бесконечномерные обобщения.

Санкт-Петербургский госуниверситет, Санкт-Петербург
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Алгоритмические проблемы для обобщенных групп Баумслага–Солитера

Ф. А. Дудкин

Конечно порожденная группа G, которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы – бесконечные циклические группы, называется *обобщенной группой Баумслага–Солитера* (GBS группа). По теореме Басса-Серра группа G представляется в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы графа групп $\mathbb{A}$, вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические.

Всякой GBS группе G можно сопоставить граф с метками $\mathbb{A}$. Такой граф с метками соответствует действию группы G на дереве и задает копредставление группы G. Всякая GBS группа может быть получена из бесконечных циклических групп с помощью конструкций свободного произведения групп с объединенной подгруппой и HNN-расширения групп.

Как заметил Д.Робинсон, GBS группы занимают центральные позиции в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам: нециклические GBS группы – в точности такие конечно порожденные группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу; GBS группы когерентны (всякая конечно порожденная подгруппа допускает конечное копредставление).

В докладе будут обсуждаться две актуальные алгоритмические проблемы для GBS групп. Проблема изоморфизма: для двух данных графов с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ определить, когда соответствующие фундаментальные группы изоморфны. Доказана

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ графы с метками. Предположим, что $\mathbb{A}$ имеет не более одного мобильного ребра. Тогда существует алгоритм, решающий изоморфны группы $\pi_1(\mathbb{A})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$ или нет. Если ответ положительный, то изоморфизм может быть построен алгоритмически.*

Проблема вложения: для двух данных графов с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ определить, когда фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{A})$ изоморфно вкладывается в фундаментальную группу $\pi_1(\mathbb{B})$. Доказана

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ графы с метками. Если число редуцированных графов с метками представляющих группу $\pi_1(\mathbb{A})$ конечно, то проблема вложения $\pi_1(\mathbb{A}) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{B})$ разрешима. Если вложение существует, то его можно построить алгоритмически.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00065).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

Вычислимые представления проективных плоскостей

Н. Т. Когабаев

В докладе рассматриваются проективные плоскости на основе алгебраического подхода, предложенного А.И. Ширшовым. *Проективной плоскостью* мы называем частичную алгебраическую систему $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и частичной бинарной коммутативной операцией "$\cdot$", удовлетворяющей естественным аксиомам.

Исследуются алгоритмические свойства счётных структур из следующих классов проективных плоскостей: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, папповы плоскости, дезарговы плоскости.

Для каждого из указанных выше классов мы описываем естественные конструкции, позволяющие доказывать существование вычислимых представлений структур. В каждом из классов полностью решена задача о существовании автоматных представлений структур.

Исследуя вопросы равномерной вычислимости, мы доказываем, что ни один из рассматриваемых классов, включая класс всех проективных плоскостей, не имеет вычислимой нумерации типов вычислимого изоморфизма.

Получено описание вычислимых размерностей свободных проективных плоскостей. Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости может принимать лишь два значения: 1 или ω. Свободная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она имеет конечный ранг.

Мы доказываем, что класс свободно порождённых плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. В частности, для любого $1 < n < \omega$ существует свободно порождённая плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n. Доказана наследственная неразрешимость теории класса свободно порождённых плоскостей.

Мы также показываем, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Следствием данного результата является существование папповых проективных плоскостей любой вычислимой размерности n, где $1 < n < \omega$.

Получены точные оценки сложности некоторых естественных алгоритмических проблем. В классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблемы изоморфизма и вложимости являются m-полными Σ^1_1-множествами, а проблема вычислимой категоричности — m-полным Π^1_1-множеством. Если же K — это класс свободных проективных плоскостей конечного ранга, то проблема вложимости вычислима внутри K, а проблема изоморфизма является m-полным Δ^0_3-множеством внутри K.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: kogabaev@math.nsc.ru

Узнаваемые логики и многообразия

Л. Л. Максимова

Рассматриваются модальные логики и многообразия модальных алгебр, а также логики, содержащие минимальную логику J Йохансона, и многообразия алгебр Йохансона (J-алгебр).

Каждая логика имеет бесконечно много аксиоматизаций. Конечно аксиоматизируемая логика L, содержащая известную модальную логику S4, называется *узнаваемой над* S4, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом распознает, совпадает ли логика $S4+Ax$ с L. Сильная узнаваемость логики L над $S4$ означает существование алгоритма, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода определяет, совпадает ли с L множество теорем исчисления $S4 + Rul$. Ясно, что вместо S4 можно взять любую другую логику.

Алгебраическая семантика логики S4 строится с помощью алгебр замыкания (топобулевых алгебр), которые образуют многообразие. Конечно базируемое подмногообразие V многообразия топобулевых алгебр (ТБА) называется *узнаваемым* (в решетке многообразий ТБА), если для любой конечной системы тождеств Ax можно эффективно распознать, аксиоматизирует ли Ax многообразие V.

Конечно аксиоматизируемая логика L, содержащая логику S4, называется *различимой над* S4, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом распознает, содержит ли логика $S4 + Ax$ логику L. Сильная различимость логики L над $S4$ означает существование алгоритма, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода проверяет, содержится ли L в множестве теорем исчисления $S4 + Rul$.

Доказано, что наиболее важные расширения логики S4 узнаваемы, сильно узнаваемы, различимы или сильно различимы над S4, а наиболее важные J-логики узнаваемы, сильно узнаваемы, различимы или сильно различимы над J.

Это позволяет установить разрешимость или даже сильную разрешимость ряда важнейших свойств логик и многообразий, построить их эффективные классификации. Например, разрешимыми являются свойства табличности и предтабличности над S4 и над J, основные варианты интерполяционного свойства и свойства определимости по Бету над S4 и в стройных J-логиках, амальгамируемость и ограниченная амальгамируемость многообразий ТБА и стройных алгебр. Краткий обзор результатов о разрешимости будет приведен в докладе.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru

Асимптотические инварианты вложений: относительный рост подгрупп и их искажение

А. Ю. Ольшанский

Выбор конечной системы порождающих A в конечно порожденной группе определяет на ней левоинвариантную (словарную) метрику, что позволяет определять различные асимптотические инварианты, не зависящие от выбора системы A. Например, функция роста подгруппы (рассматриваемая с точностью до подходящей эквивалентности) является инвариантом вложения этой подгруппы. Если подгруппа также конечно порождена, то она имеет свою словарную метрику; и другим асимптотическим инвариантом вложения является искажение этой метрики по сравнению с метрикой всей группы, ограниченной на подгруппу. В докладе будут представлены результаты об асимптотике роста подгрупп и их искажений в различных группах.

Университет Вандербилта (США) и МГУ им. Ломоносова (Россия)
E-mail: alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

О транзитивных модальных логиках, требующих больших шкал

Ф. Н. Пахомов

Для каждой полной по Крипке логики L её индексом Кузнецова мы называем наименьший кардинал κ такой, что всякая опровержимая формула данной логики опровергается на L-шкале мощности меньше κ. А. В. Кузнецовым была поставлена проблема характеризации всех индексов Кузнецова для суперинтуиционистских пропозициональных логик и для расширений модальной логики S4. М. Крахт доказал теорему о том, что при некоторых дополнительных условиях на κ кардинал κ является индексом Кузнецова некоторой полной по Крипке модальной логики, если и только если он является (аналогично определенным) индексом некоторой Π^1_1-теории со счетной сигнатурой. Доклад будет посвящен случаю логик с транзитивными шкалами. Установлена возможность симуляции произвольных Π^1_1-теорий со счетной сигнатурой в расширениях логики S4 с номиналами, то есть с пропозициональными переменными, соответствующими отдельным мирам шкалы Крипке. Из этого результата следует аналог теоремы Крахта (без дополнительных условий на кардиналы) для расширений логики S4 с номиналами.

МИАН, Москва
E-mail: pakhfn@gmail.com

О неприводимых координатных группах для свободных про-p групп

В. Н. Ремесленников

В 1960 году Линдон изучая уравнения от одной переменной над свободными группами, ввел понятие степенной группы $F^{Z[t]}$ и показал, что эта группа дискриминируется свободными группами. В 1996 году Мясников и Ремесленников дали описание степенной группы с помощью понятия итерированного расширения централизаторов. Этот подход открыл очень удобное описание для алгебраической структуры конечнопорожденных подгрупп степенной группы: они получаются из свободных абелевых групп конечного ранга с помощью операций свободного произведения, амальгамированных произведений и HNN расширений. Авторы выдвинули гипотезу, что степенная группа $F^{Z[t]}$ содержит в себе все предельные группы для свободных групп. Эта гипотеза была доказана Харлампович и Мясниковым в 1998 г. и позднее другим способом Sela и Charmpetier-Guirardel. Есть большие основания предполагать, что соответствующие результаты будут верны и для свободных про-p групп. В докладе будут представлены несколько результатов подобного рода для свободных про-p групп.

ИМ СО РАН, Омск
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Теория моделей разрешимых групп

Н. С. Романовский

Будет рассказано о теоретико-модельных аспектах теории жёстких разрешимых групп. Результаты получены в совместных работах с А. Г. Мясниковым.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: rmnvski@math.nsc.ru

Нестандартные изоморфизмы кристаллографических групп и доля матриц с вещественным спектром в некоторых вещественных алгебрах Ли

В. А. Чуркин

Абстрактный изоморфизм кристаллографических групп движений псевдоевклидовых пространств назовем стандартным, если он индуцирует изоморфизм решеток трансляций. Р.М. Гарипов (см., например, [1]) предложил эффективный алгебраический метод классификации кристаллографических групп в евклидовых пространствах, опираясь на стандартность изоморфизмов в этом случае. Он доказал стандартность изоморфизмов в случае псевдоевклидовых пространств типа $(n-1,1)$ и сформулировал вопрос о существовании нестандартных изоморфизмов в общем случае. Ответ был найден в [2]: если максимальная размерность изотропного подпространства меньше трех, то все изоморфизмы стандартны, в противном случае существуют группы с нестандартными автоморфизмами. Другая конструкция таких групп была предложена позднее в работе [3]. Естественный вопрос о количестве классов нестандартных автоморфизмов по модулю стандартных для данной кристаллографической группы остается в общем случае нерешенным. Исследован только случай размерности 6, точнее, показано, что в случае псевдоевклидовых пространств типа (3,3) кристаллографическая группа может содержать максимум три класса нестандартных автоморфизмов и эта возможность реализуется.

Множество матриц с некратным вещественным спектром образует открытый конус в пространстве вещественных матриц порядка n и потому имеет ненулевой объем. Его доля в объеме шара с центром в вершине конуса может трактоваться как вероятность случайного выбора матрицы с вещественным спектром. А. Эйдельман [4] нашел эту вероятность для алгебры всех вещественных матриц порядка n. В работах [5, 6] совместно с А.С. Кривоноговым была вычислена доля матриц с вещественным спектром для всех конечномерных вещественных симплектических и псевдоортогональных алгебр Ли. Вместе с результатом Эйдельмана это означает, что задача о случайном выборе матрицы с вещественным спектром решена для всех классических конечномерных простых вещественных алгебр Ли. Общий ответ — для расщепимых алгебр вероятность равна степени половины корня из двух с показателем, совпадающим с числом положительных корней в системе корней алгебры Ли, а для нерасщепимых равна нулю. Задача остается нерешенной для исключительных алгебр Ли. Неизвестен ответ и для других естественных конусов в матричных алгебрах Ли.

Совместно с А.И. Ильиным [7] найдена относительная вероятность выбора матриц в евклидовом шаре с центром в нуле для вещественной алгебры Ли $so(1,n)$, экспоненты которых представляют эллиптические или, сответственно, гиперболические повороты лоренцева пространства $\mathbb{R}^{1,n}$ с подпространством неподвижных векторов коразмерности 2. Оказалось, что она равна $(\sqrt{2})^{n-1}-1$. В частности, доля гиперболических поворотов убывает экспоненциально, а выбор равновероятен только в случае пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ специальной теории относительности. Остался неизвестным общий случай с меньшим подпространством неподвижных векторов.

Список литер туры

[1] Гарипов Р.М. Алгебраический метод вычисления кристаллографических групп и рентгеноструктурный анализ кристаллов, Новосибирск, НГУ, 1-е изд. 2003; 2-е изд. 2016.

[2] Чуркин В.А. Ослабленная теорема Бибербаха для кристаллографических групп псевдоевклидовых пространств, Сибирский математический журнал, 2010, Т. 51, 3, С. 700–714.

[3] Чуркин В.А. Кристаллографические группы с двумя решетками и метрические алгебры Ли, Алгебра и логика, 2013, Т. 52, С. 772–777.

[4] Edelman A. The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions and the circular law, J. Multivariate Anal., 1997, vol. 60, pp. 203–232.

[5] Кривоногов А.С., Чуркин В.А. Доля матриц с вещественным спектром в алгебре Ли вещественной симплектической группы, Сибирский математический журнал, 2014, Т. 55, 6, С. 1297–1314.

[6] Кривоногов А.С., Чуркин В.А. Доля матриц с вещественным спектром в вещественной ортогональной алгебре Ли, Сибирский математический журнал, 2016, Т. 57, 2, С. 388–409.

[7] Чуркин В.А., Ильин А.И. О случайном выборе эллиптических и гиперболических поворотов лоренцевых пространств, сдана в журнал Сибирские электронные математические известия.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Условия компактности в универсальной алгебраической геометрии

А. Н. Шевляков

В докладе будет затронута важность некоторых видов компактности по уравнениям, обобщающих понятие нетеровости по уравнениям.

ИМ СО РАН, Омск
E-mail: a_shevl@mail.ru

О группах, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1

А. А. Шлепкин

Доклад посвящен частичному решению вопроса 14.101 из Коуровской тетради. Установлено строение периодических групп и групп Шункова, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1. А именно: периодические группы с данным условием насыщенности оказываются простыми группами лиева типа ранга 1 над подходящим локально-конечным полем. Для групп Шункова с данным условием насыщенности доказано существование периодической части, изоморфной простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально-конечным полем.

Институт космических и информационных технологий СФУ, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru

On orders of elements of finite almost simple groups

M. A. Grechkoseeva

We will discuss the problem of calculating the orders of elements in the coset αS, where S is a nonabelian simple group of Lie type and α is an outer automorphism of S. This work was inspired by the recent progress in solving the recognition-by-spectrum problem: it was proved that any finite group G that has the same orders of elements as a nonabelian simple group S of Lie type of sufficiently large Lie rank is very close to S, namely, $S \leq G \leq \operatorname{Aut} S$. On the other hand, it is clear that not all groups G with $S < G \leq \operatorname{Aut} S$ have the same orders of elements as S, and one of our goals is to determine those G that have.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: gma@math.nsc.ru

On solvability of equations in the classes of solvable groups and Lie algebras

V. A. Roman′kov

Following [**1**], we present a survey on solvability of group equations in the class of nilpotent groups. In particular, we give some results on solvability of the commutator equation of the form $[x, y] = g$, where g is an element of the group and x, y are variables, in the class of nilpotent groups. The most important of these results is the following

Theorem. [**2**] *There exists a finitely generated nilpotent group G of class 2 with undecidable the commutator problem. Hence the Diophantine problem for quadratic equations is undecidable in G too.*

Further we present results about commutator width of some relatively free Lie algebras and nilpotent groups, derived in [**3**].

We will discuss results about solvability of equations with endomorphisms in the class of finitely generated nilpotent groups [**4**] in connection with [**5**], [**6**], [**7**].

At last we discuss some new not published yet results on solvability of equations over solvable groups.

Acknowledgements. This research was supported by Russian Science Foundation (project 16-11-0002).

References

[1] Roman′kov V. A. Equations over groups. Groups, Complexity, Cryptology. 2012. 4. No. 2. 191-239.
[2] Roman′kov V. A. Diophantine questions in the class of finitely generated nilpotent groups. Journal of Group Theory. 2016. 19. No. 3. 497-514.
[3] Романьков В. А. Коммутаторная ширина некоторых относительно свободных алгебр Ли и нильпотентных групп. Сибирский математический журнал. 2016. 57, 4. 866-888.
[4] Романьков В. А. О разрешимости уравнений с эндоморфизмами в нильпотентных группах. Сибирские электронные математические известия. 2016. 13. 716-725. http://semr.math.nsc.ru.
[5] Roman′kov V. A. Twisted conjugacy classes in nilpotent groups. J. Pure Appl. Algebra. 215, 4. 664-671.
[6] Roman′kov V. A. The twisted conjugacy problem for endomorphisms of polycyclic groups. J. Group Theory. 13, 3. 355-364.
[7] Вентура Э., Романьков В. А. Проблема скрученной сопряженности для эндоморфизмов метабелевых групп. Алгебра и логика. 2009. 48, 2. 157-173.

Dostoevsky Omsk State University, Omsk (Russia)
E-mail: romankov48@mail.ru

Monadic second-order definability in some weak arithmetical structures

S. O. Speranski

This talk surveys some results on monadic second-order definability in (relatively) weak arithmetical structures. Perhaps the most important of these structures are

$$\langle \mathbb{N}; \leqslant \rangle, \quad \langle \mathbb{N}; +, = \rangle, \quad \langle \mathbb{N}; \times, = \rangle, \quad \langle \mathbb{N}; \,|\, \rangle \quad \text{and} \quad \langle \mathbb{N}; \perp \rangle$$

where $|$ and $\perp$ denote the divisibility relation and the coprimeness relation, respectively — i.e., for any $\{n, k\} \subseteq \mathbb{N}$, we have

$$n \,|\, m \quad \Longleftrightarrow \quad n \text{ divides } m, \quad \text{and}$$

$$n \perp m \quad \Longleftrightarrow \quad n \text{ and } m \text{ have no common prime divisor.}$$

I shall pay special attention to them in my talk. Also, I shall mention some related results on first-order definability (in particular, those by A. Bès, P. Cegielski, Yu. V. Matiyasevich, D. Richard, J. Robinson and A. R. Woods). See the references to this abstract for further details.

This work was supported in part by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-6848.2016.1).

References

[1] Bès A., Richard D. Undecidable extensions of Skolem arithmetic. Journal of Symbolic Logic **63** (1998) (2) 379–401.

[2] Cegielski P., Matiyasevich Yu., Richard R. Definability and decidability issues in extensions of the integers with the divisibility predicate. Journal of Symbolic Logic **61** (1996) (2) 515–540.

[3] Robinson J. Definability and decision problems in arithmetic. Journal of Symbolic Logic **14** (1949) (2) 98–114.

[4] Speranski S. O. A note on definability in fragments of arithmetic with free unary predicates. Archive for Mathematical Logic **52** (2013) (5–6) 507–516.

[5] Speranski S. O. Some new results in monadic second-order arithmetic. Computability **4** (2015) (2) 159–174.

[6] Woods, A. R. Some Problems in Logic and Number Theory, and Their Connections (Ph.D. thesis), University of Manchester, 1981.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia); Saint Petersburg State University, Saint Petersburg (Russia)

E-mail: katze.tail@gmail.com

Self-similarity for τ-groups

O. Mathieu

Let Γ be a group, let Θ be a subgroup and let $f:\Theta\to\Gamma$ be a morphism. The f*-core* of Θ is the biggest subgroup $C\subset\Theta$ such that C is normal in Γ and $f(C)\subset C$. The pair (f,Θ) is called a *similar data* for Γ if Θ and $f(\Theta)$ have finite index, if $\operatorname{Ker} f$ is finite and if the f-core of Θ is trivial. The group Γ is called *self-similar* if it admits a similar data $(f;\Theta)$. A self similar group acts faithfully on a tree. S. Sidki raised the question if any τ-group Γ is self-similar (a τ*-group* is a finitely generated torsion-free nilpotent group).

Let Γ be a τ-group. There is a unique simply connected connected nilpotent Lie group N such that Γ embeds in N as a cocompact lattice. Let $\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}$ be the Lie algebra of N, let $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}$ and let $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ be the center of $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$. In the talk, we will explain the following result:

Theorem. *The group Γ is self-similar iff the Lie algebra $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ admits a $\mathbb{Z}$-grading: $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^i$ such that $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^0\cap\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}=0$.*

Transfer of classical theorems on groups and geometries to association schemes

P.-H. Zieschang

Let X be a set, and let S be a partition of the cartesian product $X \times X$. Assume that $1_X \in S$ and that, for each element s in S, $s^* := \{(y, z) \mid (z, y) \in s\} \in S$. The set S is called a scheme if, for any three elements p, q, and r in S, there exists a cardinal number a_{pqr} such that, for any two elements y and z in X, $(y, z) \in r$ implies that $|yp \cap zq^*| = a_{pqr}$.

The concept of an association scheme generalizes not only the notion of a group but also the one of a building (in the sense of Jacques Tits) along with quite a few other mathematical concepts (distance regular graphs, block designs with $\lambda = 1$, Moore geometries, etc.). Various basic results on finite groups have been generalized to association schemes, among them Lagrange's Theorem, the Homomorphism Theorem and the Isomorphism Theorems, the Jordan-H́older Theorem, Sylow's Theorems, and recently part of the Schur—Zassenhaus Theorem. In my talk, I will review some of these theorems.

The buildings come into the game if one generalizes the notion of an involution.

For any two elements p and q of a scheme S, we define pq to be the set of all elements s in S such that $1 \leq a_{pqs}$. A non-empty subset T of a scheme S is called closed if $p^*q \subseteq T$ for any two elements p and q in T.

For each subset R of a scheme S, we define $\langle R\rangle$ to be the intersection of all closed subsets of S which contain R as a subset. An element s in a scheme S is called an involution if $|\langle\{s\}\rangle| = 2$.

Let S be an association scheme, let L be a set of involutions of S, and assume that $\langle L\rangle = S$. The scheme S is called a Coxeter scheme with respect to L if it is constrained with respect to L and if L satisfies the exchange condition (a word by word translation of the group theoretic exchange condition to scheme theory).

It has been shown in [2; Sections 6.3, 6.4, 6.5] that Coxeter schemes can be identified with buildings (in the sense of Jacques Tits). In [1; Theorem 12.3.4] it was shown that finite Coxeter schemes are quotients of thin schemes if they do not contain nontrivial thin elements and if the underlying set of involutions has at least three elements. This result is equivalent to Tits' theorem on spherical buildings.

References

[1] Zieschang P.-H. Theory of Association Schemes. Springer Monographs in Mathematics, Berlin Heidelberg New York (2005).

[2] Zieschang P.-H. Hypergroups. Preprint (Max-Planck-Institut f́ur Mathematik Preprint Series 2010 (97)).

University of Texas Rio Grande Valley, Edinburg (U.S.A.)
E-mail: paulhermann.zieschang@utrgv.edu

II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Теоретико-модельная формализация онтологической модели фонда оценочных средств факультета

А. Р. Абсайдульева

В связи с переходом на стандарты нового поколения, появляются задачи, связанные с планированием и организацией учебного процесса, формированием структуры основной образовательной программы [**1**]. Фонд оценочных средств (ФОС) является составной частью нормативно-методического обеспечения системы оценки качества освоения основной образовательной программы высшего образования и входит в ее состав.

В работе предлагается теоретико-модельная формализация ФОС и программная система построенной формализации, позволяющая формировать и управлять ФОС в рамках одной основной образовательной программы. В данной формализации ФОС строится из оценочных модулей, которые имеют определенную связь (через соответствующую дисциплину) с основной образовательной программой.

Каждый оценочный модуль формализуется в виде алгебраической системы $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$, заданной предикатной сигнатуры σ. Основным множеством модели $\mathfrak{A}$ является множество заданий по данной дисциплине, каждое из которых в разработанной системе представляется в виде строки, состоящей из конечного набора символов. ФОС формализуется в виде конечного класса $\mathbb{K}$ моделей сигнатуры σ.

В раках оценочного модуля реализована возможность формирования различных оценочных документов (комплект экзаменационных билетов, варианты контрольных работ и т.д.). Шаблон оценочного документа представляется в виде формулы $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ, где $FV(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Каждый оценочный документ представляется в виде множества $B \subseteq \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}$.

В ходе работы была разработана и реализована в редакторе Protege онтология ФОС. На базе этой онтологии была построена сигнатура σ и аналитическая теория [**2**] класса $\mathbb{K}$. Разработаны и программно реализованы алгоритм построения шаблона оценочного документа $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и алгоритм формирования оценочного документа B, отвечающего требованиям пользователя.

Список литературы

[1] Бахвалов С.В., Берестнева О.Г., Марухина О.В. Применение онтологического моделирования в задача организации учебного процесса ВУЗа // Онтология проектирования, том 5, 4(18), 2015, с. 387-398.

[2] Пальчунов Д.Е. Моделирование мышления и формализация рефлексии. Ч.2. Онтологии и формализация понятий // Философия науки (ISSN 1560-7488), том 37, 2, 2008. с. 62-99.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: aliuysha-abs@mail.ru

Эвристический метод поиска неподвижной точки в детерминированной игре с полной информацией

А. Е. Афанасьева, С. А. Афонин

Теоретико-игровые модели широко используются для описания различных практических задач, в частности, в области экономики. Для детерминированных игр с полной информацией теоретически возможно построение оптимальной стратегии каждого участника игры, но при достаточно большом числе альтернатив, которые имеются у участников, построение полного дерева игры является практически невозможным. Классическим примером игры, для которой оптимальная стратегия неизвестна, являются шахматы.

В данной работе предпринимается попытка формализации подхода, предложенного М.М. Ботвинником для построения плана игры в заданной позиции и отражающего, в некотором смысле, особенности мышления человека. Основным объектом этого метода является цепочка, которая порождается последовательностью ходов (траекторией движения фигуры), направленной на достижение какой-либо цели. Для реализации цепочки могут потребоваться вспомогательные действия, связанные с некоторыми полями основной траектории, например, защита поля на траектории. Аналогично описываются действия соперника, направленные на предотвращение достижения цели цепочки, что приводит к рекурсивному определению цепочки. Каждая цепочка описывает возможное развитие игры в случае выбора игроком данной цели. Заметим, что оценка цепочки зависит от стоимости фигур, которые участвуют при реализации данной цепочки. В то же время стоимость фигуры зависит от оценки цепочек, в которых она задействована. Изменение стоимости фигуры может повлечь за собой изменение структуры цепочек или даже их исчезновение. Представление позиции — это набор взаимозависимых цепочек, изменение которого невыгодно ни одной из сторон.

В докладе предлагается формализация понятия цепочки и представления позиции. Доказывается существование представления позиции и рассматриваются возможные эвристические методы его нахождения.

Московский государственный университет, Москва
E-mail: serg@msu.ru

О возможности автоматического анализа атрибутивных политик информационной безопасности

С. А. Афонин

В области информационной безопасности значительную популярность в последнее время получили методы управления доступом семейства ABAC, позволяющие учитывать при принятии решения о возможности выполнения операции с объектом не толко принадлежность пользователя определенной группе, но и значения атрибутов объектов и субъектов доступа. Политика безопасности представляет собой набор разрешающих правил, причем условия, которые должны выполняться для «срабатывания» правил, во многих системах задаются на алгоритмически полном языке, что позволяет реализовать широкий класс политик безопасности, но делает невозможным их автоматический анализ.

В данной работе предлагается модель разграничения доступа, предполагающая использование реляционной базы данных для хранения объектов, и рассматривается возможные постановки задач проверки корректности политики безопасности. Пусть L — конечное множество имен атрибутов, а $\mathcal{D}$ — множество допустимых значений с заданным набором бинарных отношений $B_1, \ldots, B_m$. Базу данных можно представить конечным помеченным ориентированным графом $G = \langle V, E, \mu, \rho\rangle$, где $\rho : E \to L$, а $\mu : V \to \mathcal{D}$. Слово w в алфавите L определяет отношение R_w на V: $(x, y) \in R_w$ означает, что вершина y «достижима из x по слову w». Возможность выполнения операции с объектом x на практике задается логическим выражением над значениями атрибутов x или связанных с ним объектов, например, $x.child.att_1 = 1$ and $x.att_2 \leqslant 7$. Если правила доступа фиксированы, то условие определяется формулой первого порядка $A(x)$ в сигнатуре $\langle \mathcal{D}, B_1, \ldots, B_m, R_{w_1}, \ldots, R_{w_k}\rangle$. В приведенном примере имеем $\exists y, z\ R_{w_1}(x, y) \wedge {=}(1, y) \wedge R_{w_2}(x, z) \wedge {\leqslant}(z, 7)$.

Практический интерес имеет задача проверки невозможности получения доступа к заданному объекту путем выполнения последовательности разрешенных операций. Для ее формализации необходимо определить результат выполнения операции с объектом. Будем считать, что операция (или правило политики) задается предусловием $A(x)$ (когда операцию можно выполнять), набором слов в L (какие атрибуты объекта x могут быть изменены при выполнении операции) и, возможно, постусловием на новые значения. В общем случае задача сводится к проверке достижимости в бесконечном графе, вершинами которого являются состояния объектов. В работе приводятся примеры, когда задача проверки невозможности получения доступа является разрешимой.

МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
E-mail: serg@msu.ru

К системе типов языков семейства Рефал для промежуточного представления программ

В. А. Васенин, М. А. Кривчиков

Системы типов для λ-исчисления (например, простые типы или исчисление конструкций) используются для того, чтобы ограничить определяемые функции некоторым подмножеством полных функций. Условия типизации исключают из рассмотрения термы, соответствующие парадоксам, что, в свою очередь, позволяет использовать промежуточные представления на основе таких систем для верификации функциональных свойств программ. Расширения системы типов, такие как индуктивные и коиндуктивные типы или типы идентичности, призваны расширить множество определяемых функций путём введения дополнительных правил редукции, которые имеют более сложную структуру по сравнению с β-редукцией. Для подобных расширений встаёт вопрос исследования правил редукции на предмет сохранения свойств нормализации в расширенном исчислении [**1**]. В таких задачах естественным математическим аппаратом являются алгорифмы Маркова. На настоящее время алгорифмы Маркова реализуются на ЭВМ семейством языков программирования Рефал. Доклад посвящён вопросам, связанным с построением системы типов для языка Рефал-7 [**2**]. Система типов описывается в терминах языка сборки [**3**], модифицированного одним из авторов доклада. Построение кода функций высшего порядка использует понятие уровня цитирования, который соответствует глубине функциональных скобок. В инструкцию подстановки значения переменной добавлен уровень выхода из цитаты. Блоки, условия и замыкания описываются в терминах новой инструкции `PUSH`, которая выполняет вычисление выходного выражения в контексте активной функции, добавляет результат в качестве значения новой переменной и очищает выходное выражение. Используемый способ введения системы типов для динамически типизированного языка программирования известен как постепенная (gradual) типизация, при которой для некоторых фрагментов программы указываются фиксированные типы, а для оставшихся продолжает использоваться динамическая типизация. Это позволяет сочетать актуальную на ранних стадиях разработки гибкость динамических типов предметно-ориентированных языков с постепенной спецификацией участков кода, поведение которых стабилизировано.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-07-01178.

Список литературы

[1] Васенин В. А., Кривчиков М. А. Предметно-ориентированные языки с заданной формальной семантикой на основе лямбда-исчисления с зависимыми типами // Международная конференция «Мальцевские чтения». Новосибирск: Изд-во НГУ, 2014. С. 25–25.

[2] Скоробогатов С.Ю., Чеповский А.М. Разработка нового диалекта языка Refal // Информационные технологии. 2006. 9. P. 31–38.

[3] Романенко С.А. Машинно независимый компилятор с языка рекурсивных функций: Диссертация на соискание уч. степени к.ф.-м.н. Москва: ИПМ АН СССР, 1978. 148 с.

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: maxim.krivchikov@gmail.com

Вычислимая $\Sigma-$ спецификация семантики параллельных программ

В. Н. Глушкова

Для спецификации параллельных программ используются Δ_0- формулы многосортного языка ИП [1] с иерархическим префиксом вида:

$$(1)\quad (\forall x_1 \dot{\in} t_1)\ldots(\forall x_m \dot{\in} t_m)(y_1 \prec z_1)\ldots(y_k \prec z_k)\Phi(\bar{x}, t_1)$$

$m \geq 1$, $k \geq 0$, $y_j, z_j \in <\bar{x}, \bar{t}>$; $\dot{\in}$ отношение принадлежности элемента списку или его транзитивное замыкание, $\prec$ – отношение «левее». Сорта переменных определяются символами множества V грамматики $G = (V, P)$, префикс иерархизирован в соответствии с правилами P. Деревья G представляются списками так, что отношению $\dot{\in}$ соответствует отношение подчинения на узлах дерева, а $\prec$ – отношение «левее». Рассмотрим асинхронные параллельные программы (pr) с чередующимся исполнением, взаимодействующие посредством разделяемых переменных. Динамическое поведение pr описывается теорией ($Spec$) из формул (1) с неограниченным квантором $\forall n$ по шагам вычислений pr, где $\Phi(\bar{x}, t_1)-$ квазитождество, в правой части которого допускается разделительная дизъюнкция по $k-$переменным ($\bigvee\limits_{i=1}^{k} Act(pc_i, n, Tp(pc_i, n))$), выделяющая единственный активный процесс (pc_i) на $n-$шаге вычисления; $Tp(pc_i, n)-$ функция равная списку из завершенных процессов до активации pc_i. Область интерпретации состоит из списков, сопоставляемых узлам дерева разбора pr. Интерпретатор построения модели $\mathfrak{M}$ реализует прямой логический вывод, формируя таблицы функций и предикатов, определенных на узлах дерева разбора pr. Если спецификация обладает свойством нетеровости и конфлюентности, то $\mathfrak{M}$ — конечная константная модель. Алгоритм интерпретации имеет сложность $O(C(k)n^m)$, $C(k) = k^{O(n)}$, k — количество процессов, n — «мощность» дерева. На модели $\mathfrak{M}$ можно проверить такие свойства программ как частичную корректность, безопасность, живость; они выразимы формулами (1). Однако вычисления в реагирующих системах бесконечны и $Spec$ определяет счетную модель. Для таких систем при другой интерпретации можно извлечь граф взаимосвязи активизируемых операторов различных процессов pr. Интерпретацию проведем на носителе из термов с привлечением идеи смешанных вычислений. В вершинах графа фиксируем активные операторы с метками и результаты вычислений, входящие в левую и правую часть квазитождеств, представляя импликацию дугой графа. Абстрагируясь от значений тех переменных, которые ведут к бесконечным вычислениям, получаем циклы в графе при генерации вершин, совпадающих с ранее полученными.

Список литературы

[1] Goncharov S.S., Ershov Yu.L., Sviridenko D.I., Semantic programming // Information processing. – 1986. – V. 11. – 10. – p. 1093–1100.

ДГТУ, Ростов-на- Дону
E-mail: lar@aaanet.ru

Построение модели поведения пользователя для генерации искусственных логов USSD-меню

Е. В. Долгушева

Целью данной работы является решение проблемы порождения множества искусственных логов на основе моделей поведения пользователей USSD-меню.

В основу разработанной нами модели поведения пользователя USSD-меню были положены три потребностных шаблона поведения: "Повторяющиеся действия", "Действия от скуки" и "Срочная необходимость". Для описания поведения пользователя в соответствии с определенным шаблоном были проанализированы имеющиеся в наличие тестовые данные: логи реальных пользователей. Были выделены статистические параметры и величины, значения которых различаются для каждого шаблона поведения. Формальным описание шаблонов поведения пользователя является совокупность значений выделенных параметров.

Для процесса генерации искусственных логов были разработаны и применены два вида моделей поведения пользователя: простейшая и гибридная. Основным свойством простейшей модели пользователя является то, что пользователь всегда придерживается только одного шаблона поведения при взаимодействии с USSD-меню. Гибридная модель содержит в себе набор интересов пользователя, все три шаблона поведения и значения вероятностей, с которыми пользователь ведет себя в соответствии с тем или иным шаблоном поведения.

Для получения множества искусственных логов были разработаны варианты алгоритма генерации логов для каждого типа модели поведения пользователей. Алгоритмы учитывают интересы пользователей, значения статистических параметров, характеризующих потребностные шаблоны поведения, а также позволяет выбирать тип переходов между страницами меню и генерировать шумовые сеансы взаимодействия пользователей с меню.

В итоге разработанная система позволяет не только генерировать искусственные логи, максимально имитирующие логи реальных пользователей, но также варьируя уровень генерации шумов и характеристики USSD-меню, создавать интересные для маркетинговых исследований модели поведения пользователей или получать логи, описывающие события, которые могут случиться в будущем.

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
E-mail: katerina.v.shadrina@gmail.com

Теоретико-модельные методы извлечения определений понятий из текстов естественного языка

И. А. Корсун, Д. Е. Пальчунов

В настоящей работе решается задача извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка.Исследована проблема полноты определений понятий относительно фиксированного контекста, который задаётся либо объемлющей онтологией, либо фиксацией специального множества интересующих предложений, либо набором прецедентов предметной области. Разработаны алгоритмы извлечения относительно полных определений понятий. Извлечённые из текстов знания представляются в виде фрагментов атомарных диаграмм алгебраических систем, далее используются алгоритмы отображения бескванторных предложений в логики предикатов первого порядка, в частности, фрагментов атомарных диаграмм, в логику описаний (DL). Для извлечения из текстов естественного языка знаний о смысле ключевых понятий предметной области, то есть извлечении онтологических знаний мы используем результаты наших предыдущих исследований [**1**]. В работе предложен теоретико-модельный подход к извлечению определений понятий, основанный на представлении знаний при помощи конечных фрагментов атомарных диаграмм моделей. Он основан на использовании методов автоматического построения фагментов атомарных диаграмм по текстам естественного языка. В настоящей работе представлена теоретико-модельная формализация относительной полноты определений понятий, формулируемых при помощи предложений логики предикатов и логики описаний (DL). Исследованы свойства сильной и абсолютной полноты определений понятий относительно онтологии, а также относительно заданного набора прецедентов предметной области. Отображение извлеченных понятий в логику описаний (DL), а также в язык представления онтологий OWL дает возможность порождения новых знаний исходя из знаний, уже содержащихся в онтологии, при помощи автоматических средств логического вывода. В качестве логики описаний используется фрагмент логики SROIQ — логика ALCI, не содержащая символов импликации, иерархии ролей и ограничений мощности. Для работы с многоместными предикатами используется техника представления многоместных предикатов через двухместные. Алгоритмы порождения онтологических знаний из фрагментов атомарных диаграмм алгебраических систем, а также алгоритмы трансляции бескванторных предложений логики предикатов в логику описаний (DL) и в OWL разработаны и реализованы в виде программной системы. Эта система является модулем разрабатываемой информационной системы, осуществляющей извлечение из текстов естественного языка определений понятий, используемых онтологии; пополнение онтологии знаниями о смысле понятий, формализованных в виде фрагментов атомарных диаграмм; порождение новых онтологических знаний с помощью машины логического вывода.

Список литературы

[1] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. Т. 12, вып. 2. С. 64–73, 2014.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: irina.korsun.nsu@gmail.com

О спектральном анализе булевых функций

А. М. Кукарцев, А. А. Кузнецов

Пусть $E = \{0, 1\}$ – булево множество и n – целое неотрицательное число. Булевой функцией (далее – БФ) n аргументов будем называть отображение $f\colon E \to E^n$. Всё множество БФ обозначим как $B(n)$. Группы инвертирования переменных БФ и перестановок переменных БФ обозначим как E_n и S_n соответственно, и группу Джевонса – $D_n = E_n \rtimes S_n$ [**1**]. Пусть $f, g \in B(n), (z\pi) \in D_n, z \in E_n, \pi \in S_n$. Рассмотрим следующее уравнение относительно неизвестного $(z\pi)$:

$$f^{(z\pi)} = g. \tag{1}$$

Данное уравнение допускает решение тривиальным алгоритмом (полный перебор) с временной сложностью $O(2^n \cdot n!)$. В работе [**2**] предложен алгоритм решения (1), основывающийся на каноническом представлении элемента D_n [**3**] и последующем вычислении его множителей. Он имеет предположительно полиномиальную временную сложность $O\big(n^2 + n\big)$. Интерес для практического применения представляет оценка его сложности по отношению к тривиальному алгоритму хотя бы для $n = 4, 5$. Это требует анализа $\big(2^{2^n}\big)^2$ уравнений (например, для $n = 5$ будет 2^{64} уравнений), что вычислительно сложно.

Представляется метод [**2**], который позволяет рассчитать число шагов алгоритма с временной сложностью $O\big(2^{2^n}\big)$. Метод основывается на анализе спектров БФ, которые формируются при вычислении множителей канонического представления элемента D_n. Далее приведена оценка числа шагов для всех уравнений при $n = 4, 5$, включающих БФ с тривиальной подгруппой инерции J_{D_n} в группе D_n (см. табл.).

Результаты спектрального анализа всех БВ для $n = 4, 5$ с тривиальной J_{D_n}

n	4		5	
Характеристика	Сложность	Эффект-ть	Сложность	Эффект-ть
Лучший случай	20	94,791 7%	42	99,218 8%
Средний случай	27,898 3	92,734 8%	42,273 0	98,899 1%
Худший случай	42	89,062 5%	184	95,208 3%
Тривиальный алгоритм	384	–	3 840	–

Список литературы

[1] Логачёв О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., Булевы функции в теории кодирования и криптологии, МЦМНО, М., 2004, 470 с.

[2] Кукарцев А. М., Кузнецов А. А., О применении частотного анализа для решения некоторых групповых уравнений индукции действия группы Джевонса и её подгрупп на множестве булевых функций // Дискретные модели в теории управляющих систем: IX Международная конференция, Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015г.: Труды, М., 2015, с. 136–138.

[3] Кукарцев А. М., О частотных свойствах действий группы Джевонса на булевых функциях // Программная инженерия, М., Том 7, 11, 2016. С. 515–521.

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнва, Красноярск

E-mail: amkukarcev@mail.ru, alex_kuznetsov80@mail.ru

Об оптимизации работы с кванторами при машинном поиске логического вывода в секвенциальных исчислениях

А. В. Лялецкий

Рассматривается вопрос повышения эффективности машинного поиска логического вывода в первопорядковых секвенциальных исчислениях, касающийся проблемы оптимизации работы с кванторами. С этой целью вместо генценовского [**1**] и кангеровского [**2**] понятий допустимой подстановки термов вместо переменных, дающих низкую эффективность машинного поиска, предлагается использовать *введенное автором в* [**3**] *понятие допустимой подстановки*, которое легко встраивается в обычные секвенциальные исчисления, в частности, в генценовские исчисления LK и LJ из [**1**], а также в кангеровское исчисление K из [**2**], *сохраняя корректность и полноту поиска логического вывода* для случая классической логики. В случае же интуиционистской логики *для обеспечения корректности поиска вывода* (с новым понятием допустимости) *необходимо дополнительно привлекать понятие так называемой совместимости* выбранной подстановки термов вместо переменных с порожденным к текущем моменту времени деревом поиска вывода.

Предлагаемый подход к эффективизации поиска вывода в LK и LJ может быть легко перенесен на модальные расширения как LK и LJ, так и их разнообразных модификаций, включая модификации кангеровского исчисления K.

Список литературы

[1] Gentzen G. Untersuchungen uber das logische Schliessen. Math. Zeit. (1934), 39, pp. 176–210.

[2] Kanger S. A simplified proof method for elementary logic. In book: Computer Programming and Formal Systems. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North-Holland, Publ. Co., 1963, pp. 87–93.

[3] Lyaletski A. Gentzen calculi and admissible substitutions. Actes Preliminaieres, du Symposium Franco-Sovietique “Informatika-91”, Grenoble, France, pp. 99-111, October 16-19, 1991.

КНТЭУ, кафедра информационных технологий, Киев
E-mail: forlav@mail.ru

О дереве бинарных бескубных слов

Е. А. Петрова

Бесповторные языки состоят из слов, не содержащих внутри себя повторяющихся фрагментов. Это один из важнейших объектов исследований в теории формальных языков и комбинаторике слов. Любой бесповторный язык является *факториальным*, то есть замкнутым относительно операции взятия подслова. На множестве слов такого языка можно ввести три естественных отношения: «быть префиксом», «быть суффиксом», «быть подсловом», относительно которых это множество частично упорядочено, и диаграммы этих ч.у.м. в первых двух случаях представляют собой деревья, в третьем — ациклический граф более общего вида. Изучение структуры таких ч.у.м. — очень интересная тема в исследовании бесповторных языков, проливающая свет на их внутреннее устройство. В [**3, 4**] изучалась структура префиксного дерева языка тернарных бесквадратных слов. В частности, была получена верхняя субполиномиальная оценка на глубину конечного поддерева, порождённого узлом в этом дереве. Естественно выдвинуть гипотезу о логарифмической оценке, в пользу которой говорит, например, экспоненциальная сложность языка. Пусть слово w принадлежит языку L. Слово u такое, что $wu \in L$, называется *правым контекстом* w в L. В случае, когда L — факториальный язык, *фиксированным правым контекстом* слова w называется такое слово u, что поддерево, порождённое узлом с меткой w в дереве префиксного порядка языка L, содержит узел wu и на пути от w к wu все узлы имеют ровно одного потомка. Фиксированный левый контекст определяется симметрично. В [**2**] доказана логарифмическая оценка на длину фиксированного контекста тернарных бесквадратных слов. В данной работе доказано аналогичное утверждение для бинарного бескубного языка.

Теорема. *Любой фиксированный контекст слова w в языке бинарных бескубных слов имеет длину $O(\log |w|)$.*

Эта оценка асимптотически неулучшаема, поскольку в [**1**] построена серия бинарных бескубных слов с логарифмической длиной фиксированного контекста.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-31-00212.

Список литературы

[1] Petrova E. A., Shur A. M., Constructing premaximal binary cube-free words of any level, Internat. J. Found. Comp. Sci., vol. 23, no. 8, 2012, pp. 1595–1609.

[2] Petrova E. A., Shur A. M., On the tree of ternary square-free words, Proc. 10th Internat. Conf. Words (WORDS 2015), LNCS, vol. 9304, 2015, pp. 223–236.

[3] Shelton R., Aperiodic words on three symbols. II, J. Reine Angew. Math. 327 (1981), 1–11.

[4] Shelton R. O., Soni R. P., Aperiodic words on three symbols. III, J. Reine Angew. Math. 330 (1982), 44–52.

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург
E-mail: Elena.Petrova@urfu.ru

Обзор теории алгебраических моделей программ

Н. В. Шилов

Памяти Риммы Ивановны Подловченко (17.02.1931 — 17.08.2016)

В обзорном докладе будет представлена история развития и современное состояние исследований по теории алгебраических моделей программ, области теоретического программирования, которая изучает свойства пишущих автоматов или автоматов-преобразователей (схем Янова в частности), выходной алфавит которых образует алгебраическую систему типа (полу)группы с дополнительными алгебраическими свойствами (например, левосократимую полугруппу).

Первые результаты этой теории были получены М.А. Тайцлиным [**1**] (учеником А.И. Мальцева и в то время — сотрудником ИМ СО АН СССР). Его интерес к данной теории был привлечен А.А. Летичевским, который несколько позже внес вклад в теорию алгебраических моделей программ (см., например, [**2**]).

Интерес к алгебраической теории моделей программ долгое время подогревался стремлением решить проблему эквивалентности детерминированных многоленточных автоматов. Заметим, что эта проблема в конечном счете была решена T. Harju и J. Karhumäki в следующей формулировке [**3**]: проблема эквивалентности для пишущих автоматов, работающих над консервативной полугруппой, разрешима, если эта полугруппа вложима в тотально-упорядоченную группу.

Однако, значение теории алгебраических моделей программ не ограничивается только решением многоленточной проблемы. Распознание эквивалентности пишущих автоматов, работающих над алгебраическими системами типа (полу)групп применимо, например, к защите от компьютерных вирусов [**4**].

В последние годы исследование по алгебраических моделей программ продолжали развиваться в работах Риммы Ивановны Подловченко и ее учеников (см., например, [**4, 5**]).

Список литературы

[1] Тайцлин М.А. Эквивалентность автоматов относительно коммутативной полугруппы // Алгебра и логика, 8(5), 1969. С.553–600.

[2] Летичевский А.А. Эквивалентность автоматов относительно полугрупп // Теор. кибернетика. Вып. 6, 1970. С.3-71.

[3] Harju T., Karhumäki J. The equivalence problem of multitape finite automata // Theor. Comput. Sci. 78(2), 1991. P.347-355.

[4] Подловченко Р.И., Кузюрин Н.Н., Щербина В.С., Захаров В.А. Использование алгебраических моделей программ для обнаружения метаморфного вредоносного кода // Фундаментальная и прикладная математика. 15(5), 2009. С.181-198.

[5] Захаров В.А., Темербекова Г.Г. О минимизации конечных автоматов-преобразователей над полугруппами // Моделирование и анализ информационных систем, 23(6), 2016. (Принята к публикации.)

Университет Иннополис, г. Иннополис
E-mail: n.shilov@innopolis.ru

Шаблоны динамического программирования

Н. В. Шилов

Конструирование и анализ алгоритмов являются обязательной составляющей образовательного цикла по компьтерным наукам и программной инженерии. В частности, в этом курсе изучают такие методы конструирования (проектирования) алгоритмов, как *жадные алгоримты*, *разделяй и властвуй*, *динамическое программирование*, *метод отката* и *метод ветвей и границ*.

Обычно эти методы изучают на характерных для того или иного метода классических примерах алгоритмов. На наш взгляд, такой подход приемлем для знакомства с методами конструирования алгоритмов, но не соответствует значению слова "изучение". Однако перечисленные методы конструирования алгоритмов могут быть формализованы в виде *шаблонов*, строго специфицированы и математически верифицированы.

Метод жадных алгоритмов был единственным методом конструирования алгоритмов, математически исследованным в 80-е и начале 90-х годов прошлого века. В период 2010-2012 автор настоящей статьи формализовал унифицированный шаблон для метода отката и ветвей и границ, полуформально специфицировал и верифицировал этот шаблон. Затем в 2012-2015 годах автор предложил два шаблона для *нисходящего* и *восходящего* вариантов динамического программирования и дал набросок доказательства их функциональной эквивалентности.

В докладе будет уточнён шаблон для нисходящего динамического программирования и улучшен, спефицирован и верифицирован (в стиле Флойда-Хоара) шаблон для восходящего динамического программирования. Кроме того, в докладе обсуждаются разные аспекты шаблонов нисходящего и восходящего динамического программирования: используемые генерические структуры данных, задача трансляции рекурсивных программ в итеративные, их связи с теоремой о неподвижной точке Кнастера-Тарского, с теорией схем программ, со смешанными и частичными вычислениями, со специализацией программ. Использование специфицированных и верифицированных шаблонов конструирования алгоритмов позволяет автоматически получать (путем специализации) специфицированные и *корректные по построению* алгоритмы для решения конкретных алгоритмических задач.

Подробно материал доклада (с формальными определениями, утверждениями и доказательствами) представлен в рукописи [**1**].

Список литературы

[1] Шилов Н.В., Шилова С.О. Шаблоны динамического программирования // Рукопись представлена для рецензирования в журнал "Программирование". 2016, 17 стр.

Университет Иннополис, г. Иннополис
E-mail: n.shilov@innopolis.ru

Теоретико-модельная формализации субъективных знаний эксперта о предметной области

Г. Э. Яхъяева

При формализации предметных областей мы часто сталкиваемся с необходимостью представления и обработки вероятностных знаний в условиях неполноты информации о предметной области. Формализация базы знаний в виде обобщенной нечеткой модели позволяет производить анализ предметной области с учетом объективной (частотной) вероятности событий. Однако, зачастую, приходится оперировать с субъективными вероятностями (т.е. со степенью уверенности эксперта в наступлении того или иного события). Для формализации субъективных знаний эксперта в данной работе рассматривается понятие сужения обобщенной нечеткой модели.

Рассмотрим базу знаний $KB_\Delta = \langle TBox, ABox\rangle$ предметной области Δ. Пусть $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ — конечное множество прецедентов, которые были использованы для описания $ABox$ и σ_Δ — множество предикатов, используемых для описания $TBox$. Класс моделей $I_E = \{\mathfrak{A}_E = \langle E, \sigma_\Delta\rangle \mid \mathfrak{A}_E \models ABox\}$ называется *классом интерпретаций* базы знаний KB_Δ. Одноэлементная обобщенная нечеткая модель $Fuz(E) = \langle\{a\}, \sigma_\Delta, \xi_E\rangle$ называется *порожденной классом* I_E, если для любой формулы $\varphi(x)$ сигнатуры σ_Δ с одной свободной переменной выполняется условие $\xi_E(\varphi(a)) = \{\frac{\|\{e\in E \mid \mathfrak{A}_E\models\varphi(e)\|}{\|E\|} \mid \mathfrak{A}_E \in I_E\}$.

Пусть $E_1 \subseteq E$ $(E_1 \neq \emptyset)$. Класс моделей $I_{E_1} = \{\mathfrak{A}_{E_1} = \langle E_1, \sigma_\Delta\rangle \mid \exists\mathfrak{A}_E \in I_E :$ $\mathfrak{A}_{E_1}$ *подмодель модели* $\mathfrak{A}_E\}$ называется *сужением* класса интерпретаций I_E на множество E_1. Обобщенная нечеткая модель $Fuz(E_1)$, порожденная классом I_{E_1}, называется *сужением модели* $Fuz(E)$.

Пусть $\varphi(x)$ — формула сигнатуры σ_Δ с одной свободной переменной и $\alpha \in [0, 1]$. Сужение $Fuz(E_1)$ будем называть $(\varphi \geq \alpha)$-*оптимальным* ($(\varphi \leq \alpha)$-*оптимальным*) сужением модели $Fuz(E)$, если выполняются следующие условия:

(1) $\xi_{E_1}(\varphi(a)) \subseteq [\alpha, 1]$ $(\xi_{E_1}(\varphi(a)) \subseteq [0, \alpha])$;

(2) для любой модели $Fuz(E_2)$ такой, что $\xi_{E_2}(\varphi(a)) \subseteq [\alpha, 1]$ $(\xi_{E_2}(\varphi(a)) \subseteq [0, \alpha])$, выполняется условие $\|E_2\| \leq \|E_1\|$;

(3) для любой модели $Fuz(E_2)$ такой, что $\xi_{E_2}(\varphi(a)) \subseteq [\alpha, 1]$ $(\xi_{E_2}(\varphi(a)) \subseteq [0, \alpha])$ и $\|E_2\| = \|E_1\|$, выполняется условие $\xi_{E_2}(\varphi(a)) \subseteq \xi_{E_1}(\varphi(a))$.

В работе найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы сужение обобщенной нечеткой модели обладало свойством оптимальности, разработан алгоритм построения множества всех $(\varphi \geq \alpha)$-оптимальных ($(\varphi \leq \alpha)$-оптимальных) сужений модели $Fuz(E)$ для заданных $\varphi(x)$ и α.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: gul_nara@mail.ru

Задачи аппроксимации в алгебрах дискретных вероятностных распределений

А. Д. Яшунский

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые в совокупности случайные величины, принимающие значения в конечном множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Пусть P_k — функции k-значной логики и $f \in P_k$, $f : E_k^n \to E_k$. Тогда $X = f(X_1, \ldots, X_n)$ также является случайной величиной со значениями в E_k. Каждой функции $f \in P_k$ сопоставим отображение f^* распределений величин $X_1, \ldots, X_n$ в распределение величины X. Всевозможные распределения случайных величин над E_k образуют $(k-1)$-мерный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^k$, обозначим его $T^{(k)}$, тогда $f^* : (T^{(k)})^n \to T^{(k)}$.

Пусть $G \subset T^{(k)}$, $B = \{f_1, \ldots, f_s, \ldots\} \subseteq P_k$. Алгебра вероятностных распределений с носителем $\mathcal{P} \subseteq T^{(k)}$ и системой операций $\{f_1^*, \ldots, f_s^*, \ldots\}$ называется *алгеброй аппроксимируемых распределений* для начальных распределений G и операций B, если $\mathcal{P}$ — наименьшее по включению топологически замкнутое множество, содержащее G. Будем обозначать такое множество $\mathcal{P}$ через $W_B(G)$. Рассматривается задача нахождения $W_B(G)$ по заданным B и G.

Для распределений над E_2 Р. Л. Схиртладзе установил [1], что для любого невырожденного (т. е. не содержащего нулевых компонент) распределения $\mathbf{p}$ выполнено $W_{\{\&,\vee,^-\}}(\{\mathbf{p}\}) = T^{(2)}$. В работе автора [2] получено описание $W_B(G)$ для всех B, являющихся замкнутыми классами булевых функций, и произвольных конечных множеств G.

В случае $k > 2$ имеющиеся результаты относятся к системам операций, обладающих специальными свойствами. В работах автора [3, 4] изучались множества $W_B(\{\mathbf{p}\})$ для невырожденного $\mathbf{p}$ и множества B, состоящего из операций с квазигрупповыми и близкими к ним свойствами. Полученные результаты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема. *Существует такое конечное множество $B \subset P_k$, что для любого невырожденного распределения $\mathbf{p} \in T^{(k)}$ выполнено $W_B(\{\mathbf{p}\}) = T^{(k)}$.*

Список литературы

[1] Схиртладзе Р.Л. О методе построения булевой величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. Вып. 7. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. С. 71–80.

[2] Яшунский А.Д. Преобразования бернуллиевских распределений булевыми функциями из замкнутых классов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. 38. 23 с.

[3] Яшунский А.Д. О преобразованиях распределений вероятностей бесповторными квазигрупповыми формулами // Дискретная математика. 2013. Т. 25, 2. С. 149–159.

[4] Яшунский А.Д. О бесповторных преобразованиях случайных величин над конечными полями // Дискретная математика. 2015. Т. 27, 3. С. 145–157.

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва
E-mail: yashunsky@keldysh.ru

On disctretisation of one phase portrait

N. B. Ayupova, V. P. Golubyatnikov, M. V. Kazantsev

We assume below that all parameters and variables are positive, $j = 1, 2, 3$ and that $j - 1 = 3$ if $j = 1$. Consider nonlinear 6-dimensional dynamical system

$$\frac{dm_j}{dt} = -k_j m_j + f_j(p_{j-1}); \qquad \frac{dp_j}{dt} = \mu_j(m_j - p_j). \tag{1}$$

which is a model of functioning of one simple molecular repressilator. Here $f_j(p)$ are smooth monotonically decreasing functions, they describe negative feedbacks. The variables in the system (1) denote concentrations of interacting components. We show that the system (1) has exactly one equilibrium point S_0. Let M_0 be matrix of its linearization at S_0, and $(m_1^0, p_1^0, m_2^0, p_2^0, m_3^0, p_3^0)$ be coordinates of S_0. The positive octant $\mathbb{R}^6_+$ is decomposed by 6 hyperplanes $m_j = m_j^0$, $p_j = p_j^0$ to 64 parallelepipeds (blocks) which we enumerate by binary indices $\{\varepsilon_1\delta_1\varepsilon_2\delta_2\varepsilon_3\delta_3\}$ where $\varepsilon_j = 0$, if $m_j \le m_j^0$; $\varepsilon_j = 1$, if $m_j \ge m_j^0$; $\delta_j = 0$, if $p_j \le p_j^0$; $\delta_j = 1$, if $p_j \ge p_j^0$.

Theorem. *If the characteristic polynomial of M_0 has two roots with positive real parts and four roots with negavive real parts, then the system* (1) *has at least one cycle which travels from block to block according to the diagram* (2).

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow \{110011\} \to \{010011\} \to \{000011\} \to \{001011\} \to \{001111\} \to \{001101\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{001100\} \to \{101100\} \to \{111100\} \to \{110100\} \to \{110000\} \to \{110010\} \hookrightarrow \end{aligned} \tag{2}$$

Here $\Rightarrow$ is transition to the next line, and $\hookrightarrow$ is transition to the previous one.

In one particular symmetric dimensionless case $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; $k_1 = k_2 = k_3 = 1$; $f_1(p) = f_2(p) = f_3(p) \equiv \alpha(1 + p^\gamma)^{-1} + \alpha_0$ this system was introduced in [**1**] and later was studied from different viewpoints in numerous publications, see for example [**2**]. In this case the roots of that polynomial satisfy the conditions of this theorem. The proof of our theorem follows the scheme described in [**3**] for the case of similar 5-dimensional dynamical system. Numerical experiments with this cycle and other trajectories of the system (1) were realized with the help of the package *deSolve*
https://cran.r-project.org/web/packages/deSolve/index.html.

The work was supported by RFBR, grant 15-01-00745.

References

[1] Elowitz M.B., Leibler S. Synthetic oscillatory network of transcriptional regulators. Nature. 2000. V. 403. P. 335 – 338.

[2] Kolesov A. Yu., Rozov, N.Kh., Sadovnichii V.A. Periodic solutions of travelling-wave type in circular gene networks.Izvestiya: Mathematics. 2016. V.80, N3, P.523 – 548.

[3] Golubyatnikov V.P., Golubyatnikov I.V., Likhoshvai V.A. On the existence and stability of cycles in five-dimensional models of gene networks. Numerical analysis and applications. 2010. V. 3, N 4, p. 329 – 335.

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org
Novosibirsk state university, Polzunov Altai state technical university, Barnaul (Russia)
E-mail: markynaz.astu@gmail.com

Supervised learning with cluster ensemble

V. B. Berikov

An actual problem in intellectual data analysis is the increasing of efficiency of the processing under noise conditions and limited sample size. This work presents a new method of supervised learning with a combination of ensemble clustering [**1**] and kernel based learning [**2**]. The main idea consists in the division of data analysis process on two stages. On the first stage, L variants of dataset $X = \{x_1 \ldots, x_N\}$ partition are obtained with arbitrary algorithms of cluster analysis. Using the found variants, the averaged co-association matrix H is calculated. The matrix elements, $h_{i,j} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} w_l h_{i,j}^{(l)}$, are the frequencies of assigning pairs (x_i, x_j) to the same clusters over all variants of partition, where $h_{i,j}^{(l)} = 0$ if a pair is assigned to the same cluster in lth variant of partition, otherwise $h_{i,j}^{(l)} = 1$. The weights w_l, $l = 1, \ldots, L$, $(\sum_l w_l = 1)$ are non-negative values proportional to certain evaluation functions (cluster validity indices, diversity measures, etc.). In a sense, the matrix defines similarity between objects in a new feature space which is obtained by means of a certain implicit transformation.

Proposition. *Matrix H satisfies Mercer condition, i.e., it defines symmetric non-negative definite kernel.*

Thus the coassociation matrix may be considered as kernel matrix. On the second stage of analysis, a decision function is constructed with the obtained kernel matrix as input. To this end, a) Support Vector Machine (SVM) and b) Kernel Fisher Discriminant (KFD) were applied in our experiments. We additionally filter out data points with unstable clusterings (for which $|h_{i,j} - 0.5| < \delta$, where δ is a parameter), analogously to [**3**]. Cluster ensemble was generated using standard k-means algorithm with random initializations.

Monte-Carlo experiments have shown that there exist examples of data distributions (in particular, under large feature space dimensionality, presence of noise and small data size) for which the proposed method gives significantly more accurate predictions (close to the optimal Bayes classifier) than original SVM or KFD.

The work is partly supported with RFBR, project 14-07-00249a.

References

[1] Berikov V. Weighted ensemble of algorithms for complex data clustering // Pattern Recognition Letters. 2014. Vol. 38. P. 99–106.

[2] Shawe-Taylor J., Cristianini N. Kernel Methods for Pattern Analysis. Cambridge University Press, 2004.

[3] Demidova L., Sokolova Y. Training Set Forming for SVM Algorithm with Use of the Fuzzy Clustering Algorithms Ensemble on Base of Cluster Tags Vectors Similarity Matrices // Int. Conf. "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov. Saint-Petersburg. 2015. P. 619–622.

Sobolev Institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
E-mail: berikov@math.nsc.ru

Polynomially complete quasigroups of prime orders

A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, S. B. Rodin

Quasigroups are algebraic structures whose multiplication tables are exactly Latin squares. As was noticed by C. Shannon [**1**], cyphers based on Latin squares possess the so-called property of perfect secrecy. Quasigroups also find many other applications in cryptography [**2**] including their use in the design of stream cyphers (see [**3**] and references therein).

Given a finite set A we denote by $\mathcal{O}_n(A)$ the ensemble of all n-ary operations on A ($n \geqslant 0$) and let $\mathcal{O}(A) = \bigcup\limits_n \mathcal{O}_n(A)$. For an arbitrary subset $F \subseteq \mathcal{O}(A)$ we denote by $[F]$ the closure of F under superposition.

Definition. A quasigroup Q is said to be *polynomially (functionally) complete* if $[\{f_Q\} \cup \mathcal{O}_0(Q)] = \mathcal{O}(Q)$.

Polynomially complete quasigroups are of particular interest in cryptography because of the fact that in a polynomially complete quasigroup the problem of satisfiability of a system of equations is NP-complete [**4**]. Some results concerning polynomially complete quasigroups can be formulated in terms of the permutation group $\mathrm{Mult}(Q)$ generated by all rows and all columns of the multiplication table of Q (see [**5**]).

Theorem 1. *Let Q be a quasigroup of a prime order p. The following conditions are equivalent:*

1. Q is not polynomially complete;

2. there exists a one-to-one correspondence between the set $\{q_1, \ldots, q_p\}$ and the set $\mathbb{Z}_p$ under which the quasigroup operation goes to a linear function on $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$;

3. there exists a one-to-one correspondence between the set $\{q_1, \ldots, q_p\}$ and the set $\mathbb{Z}_p$ under which all rows and all columns of the multiplication table of Q become linear permutations on $\mathbb{Z}_p$.

Theorem 2. *The problem of deciding whether a quasigroup of a prime order p is polynomially complete can be solved in polynomial time.*

References

[1] Shannon C., Communication theory of secrecy systems, Bell System Techn. J., 28, no. 4 (1949), 656–715.

[2] Glukhov M.M., Some applications of quasigroups in cryptography, Prikl. Diskr. Mat., no. 2 (2008), 28–32.

[3] Shcherbacov V., Quasigroup based crypto-algorithms, arXiv:1201.3016v1.

[4] Horváth G., Nehaniv Gh. L., Szabó Cs., An assertion concerning functionally complete algebras and NP-completeness, Acta Sci. Math. 4 (Szeged), **76** (2010), 35–48.

[5] Artamonov V.A., Chakrabarti S., Pal S.K., Characterization of Polynomially Complete Quasigroups Based on Latin Squares For Cryptographic Transformations, Discret Appl. Math., **200** (2016), 5–17.

Lomonosov Moscow State University, Moscow (Russia)
E-mail: anton.pankratiev@gmail.com

New construction of Deza graphs from Paley and Peisert graphs

S. V. Goryainov, V. V. Kabanov, N. V. Maslova, L. V. Shalaginov

A graph Γ on n vertices is a *Deza graph* with parameters (n, k, b, a), where $v > k \geq b \geq a \geq 0$, if it is regular of degree k and the number of common neighbors of two distinct vertices takes on one of two values a or b, not necessarily depending on the adjacency of the vertices. The only difference between the definition of strongly regular graphs and Deza graphs is that the number of common neighbors of two distinct vertices does not necessarily depend on the adjacency. A strictly Deza graph is a Deza graph which is not strongly regular and has diameter 2. Let Γ be a strongly regular graph with parameters (n, k, λ, μ), where the number of common neighbors of two adjacent (non-adjacent) vertices is equal to λ (μ). It's known (see, for example, [**1**, Theorem 1.3.1]) that (1) if $k = \mu$ then Γ is a complete multipartite graph; (2) if $k = \lambda + 1$ then Γ is an union of cliques. In [**2**] it was obtained a result analogue to (1) for strictly Deza graphs. Our aim is to obtain results analogue to (2) for strictly Deza graphs. To formulate results we need the following definitions.

Let Θ and Δ be graphs. Δ *extension of* Θ is the graph obtained by replacing vertices of Θ by copies of Δ and joining all edges between vertices from distinct copies of Δ whenever the correspondent vertices of Θ were adjacent. There exist some elementary constraints on the parameters of Deza graphs (see Proposition 1.1 [**2**]). The neighborhood of a vertex x of a graph Γ is denoted by $\Gamma(x)$. Let Γ be a strictly Deza graph with parameters (n, k, b, a) and x be a vertex of Γ. Define the following values $\alpha(x) = |\{y \in \Gamma :| \Gamma(x) \cap \Gamma(y) |= a\}|$; $\beta(x) = |\{y \in \Gamma :| \Gamma(x) \cap \Gamma(y) |= b\}|$. Then $\alpha = \alpha(x)$ and $\beta = \beta(x)$ do not, in fact, depend on x, and $\alpha := \alpha(x) = \frac{b(n-1)-k(k-1)}{b-a}$, $\beta := \beta(x) = \frac{a(n-1)-k(k-1)}{a-b}$. We prove the following theorem.

Theorem. *(V.K., N. Maslova and L. Shalaginov) Let Γ be a strictly Deza graph with parameters (n, k, b, a) and $\beta > 1$. Equality $k = b + 1$ holds if and only if Γ is isomorphic to 2-clique extension of a complete multipartite graph with size of parts equal to $\frac{n-k}{2}$.*

A strictly Deza graphs with parameters $(n, k, k-1, a)$ and $\beta = 1$ are described by using a new construction from Paley and Peisert graphs (V.K., S. Goryainov and L. Shalaginov).

Aknowledgement. The work is supported by RFBR (grant no. 16-31-00316).

References

[1] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., Distance–regular graphs, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

[2] Erickson M., Fernando S., Haemers W. H., Hardy D., Hemmeter J., Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs. J. Comb. Designs, 1999 P. 359–405.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg (Russia))
E-mail: vvk@imm.uran.ru

III. Секция «Теория вычислимости»

Вычислимые по Тьюрингу вложения для классов линейных порядков

Н. А. Баженов

Пусть K_1 и K_2 — классы счётных структур, замкнутые относительно изоморфизма. Предположим, что E_i — это отношение эквивалентности на классе K_i. *Вычислимым по Тьюрингу вложением* (*tc-вложением*) из (K_1, E_1) в (K_2, E_2) называют оператор $\Phi = \varphi_e$ со следующими свойствами:

(1) Для любой структуры $\mathcal{A}$ из K_1 существует структура $\mathcal{B} \in K_2$, такая что $\chi_{D(\mathcal{B})} = \varphi_e^{D(\mathcal{A})}$ (эта структура $\mathcal{B}$ обозначается через $\Phi(\mathcal{A})$).

(2) Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in K_1$ выполнено: $\mathcal{A} E_1 \mathcal{A}'$ в том и только том случае, когда $\Phi(\mathcal{A}) E_2 \Phi(\mathcal{A}')$.

Запись $(K_1, E_1) \leq_{tc} (K_2, E_2)$ означает, что существует tc-вложение (K_1, E_1) в (K_2, E_2).

Исследование tc-вложений начато в работе [**1**], посвященной сравнению сложности различных классов конечных структур. Подробные сведения о tc-вложениях можно найти в [**2**]. Данная работа посвящена исследованию tc-вложений для различных классов линейных порядков с отношениями изоморфизма и Σ^c_α-эквивалентности, $\alpha < \omega_1^{CK}$. В частности, в работе доказана следующая теорема, обобщающая результат из [**2**] о классе $\mathbb{K}^1$ всех конечных линейных порядков. Для вычислимого ординала β определим следующие классы:

$$\mathbb{K}^{2\beta+1} = \{\mathcal{L} : \mathcal{L} \cong \omega^\beta \cdot (t+1) \text{ для некоторого } t \in \omega\},$$
$$\mathbb{K}^{2\beta+2} = \{\mathcal{L} : \mathcal{L} \cong \omega^{\beta+1} + \omega^\beta \cdot (t+1) \text{ для некоторого } t \in \omega\}.$$

Теорема. *Пусть α — вычислимый ординал-последователь, K — класс структур вычислимого языка L. Соотношение $(K, \cong) \leq_{tc} (\mathbb{K}^\alpha, \cong)$ истинно в том и только том случае, когда существует вычислимая последовательность $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ Σ^c_α-предложений языка L со следующими свойствами:*

(1) *для любых $\mathcal{A} \in K$ и $m < n$ выполнено: если $\mathcal{A} \models \psi_n$, то $\mathcal{A} \models \psi_m$,*

(2) *для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K$ выполнено: если $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$, то существует n, такое что ψ_n истинно в точности в одной из структур $\mathcal{A}, \mathcal{B}$,*

(3) *для каждой $\mathcal{A} \in K$ существует n, такое что $\mathcal{A} \not\models \psi_n$.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 16-31-60058 мол_а_дк.

Список литературы

[1] Калверт У., Камминс Д., Найт Дж. Ф., Миллер С., Сравнение классов конечных структур // Алгебра и логика, 43, 6 (2004), 666–701.

[2] Knight J. F., Miller S., Vanden Boom M., Turing computable embeddings // J. Symb. Log., 72, No. 3 (2007), 901–918.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

О гипотезе Кирстеда для η-схожих линеных порядков

М. В. Зубков

Кирстед [**1**] выдвинул гипотезу, что вычислимый линейный порядок имеет вычислимую копию без строго нетривиальных Π^0_1 автоморфизмов тогда и только тогда, когда порядок не содержит плотных подинтервалов. Доуни и Мозес [**2**] доказали эту гипотезу для дискретных линейных порядков. Харрис, Ли, Купер [**3**] доказали справедливость гипотезы для линейных порядков вида $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, где F — $0'$-предельно монотонная функция. Напомним, что блоком в линейном порядке называется максимальное по включению подмножество такое, что в линенйом порядке между любвми двумя элементами из этого помножества существует лишь конечное число элементов. Не трудно видеть, что в дискретном линейном порядке все блоки бесконечны, а в порядке вида вида $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ все блоки конечны.

Определение. Функция $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup \{\zeta\}$ (здесь мы используем ζ как формальный символ и предполагаем, что $\zeta > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$) называется *расширеной X-предельно монотонной функцией* если существует X-вычислимая функция a : $\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\zeta\}$ такая, что: 1) $\lim\limits_{s\to\infty} f(q, s) = F(q)$; 2) $f(q, s) \leq f(q, s + 1)$; 3) если $\lim\limits_{s\to\infty} f(q, s) = \zeta$, то существует s_0 такое, что $f(q, s) = \zeta$ для всех $s \geq s_0$.

Теорема 1 (Ву, Зубков). *Гипотеза Кирстеда верна для линейных порядков вида $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, где F расширенная $0'$-предельно монотонная функция.* Таким образом, справедливость гипотезы Кирстеда показана для широкого класса линейных порядков, в том числе содержащего порядки одновременно имеющие и конечны и бесконечные блоки.

Следующая теорема показывает, что гипотеза Кирестеда не верна в общем случае.

Теорема 2 (Зубков, Нг). *Существует вычислимый линейный порядок вида $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, где для функции F выполняются условия 1,2 определения, не имеющий плотных подинтервалов такой, что любая вычислимая копия этого линейного порядка имеет строго нетривиальный Π^0_1 автоморфизм.*

Список литературы

[1] Kierstead H. A. On Π^0_1-Automorphisms of Recursive Linear Orders // Journal of Symbolic Logic, 52 (1987), 681–688.

[2] Downey R. G., Moses M. F. On Choice Sets and Strongly Non-Trivial Self-Embeddings of Recursive Linear Orders // Mathematical Logic Quarterly, 35 (1989), 237–246.

[3] Harris C., Lee K., Cooper S. B. Automorphisms of η-Like Computable Linear Orderings and Kierstead's Conjecture // to appear (2016).

Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru

О числе типов вычислимых изоморфизмов в степенях позитивных предпорядков

Д. К. Кабылжанова

В последние годы активизировались исследования вычислимой сводимости позитивных эквивалентностей (см., например, работы [**1**], [**2**]).

Мы рассматриваем позитивные эквивалентности, снабжённые дополнительной структурой частичного порядка между классами эквивалентности, причем сводимость сохраняет отношение порядка.

Классом эквивалентности числа x отношения предпорядка P на ω называется множество $[x]_P = \{y : \ xPy \ \& \ yPx\}$. Если P , Q – вычислимо перечислимые отношения предпорядка, то говорим, что P сводится к Q ($P \leq Q$), если существует вычислимая функция f такая, что $\forall x \forall y \ (xPy \Leftrightarrow f(x)Qf(y))$. P и Q называются эквивалентными ($P \equiv Q$), если $P \leq Q$ и $Q \leq P$, степенью предпорядка P, как обычно, называется совокупность всех предпорядков, эквивалентных P. Если P сводится к Q посредством вычислимой функции f сюръективно, т.е. для любого y существует x такое, что $f(x) \in [y]_Q$, то будем обозначать это как $P \leq_s Q$.

Предложение 1. *Если P и Q – позитивные предпорядки и $P \leq_s Q$, то $P \equiv Q$.*

Предложение 2. *Если P и Q – позитивные предпорядки, $P \leq_s Q$ и каждый класс эквивалентности в P и Q бесконечен, то P вычислимо изоморфно Q.*

Теорема. *Для любого позитивного предпорядка P число типов вычислимых изоморфизмов внутри степени P либо равно 1, либо является бесконечным.*

Список литературы

[1] Andrews U., Lempp S., Miller J, San Mauro L., Sorbi A. Universal computably enumerable equivalence relations // The Journal of Symbolic Logic, 79(1): 60–88, 2014.

[2] Badaev S., Sorbi A. Weakly precomplete computably enumerable equivalence relations // Mathematical Logic Quarterly, 62(1–2): 111–127, 2016.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, проспект аль-Фараби 71, Алматы 050040 (Казахстан)

E-mail: botakan2007@mail.ru

Проблема вхождения в изоляторы членов нижнего центрального ряда

И. В. Латкин

В [1–3] изучалась проблема вхождения в члены нижнего и верхнего центральных рядов для вычислимых групп и вопросы о вычислимости факторов по этим подгруппам. В общем случае сложность проблемы вхождения в любой нетривиальный член такого ряда может быть независимой от сложности этой проблемы для других членов этих рядов даже для нильпотентных групп без кручения [1,2]. В случае нильпотентных групп, имеющих кручение, эта сложность может не зависеть также и от вычислимой нумерации всей группы [1,3]. Кроме того, подобная независимость наблюдается и в вопросе о вычислимости факторов по членам этих крайних центральных рядов [1,3].

Напомним, что изолятором подгруппы H называется множество всех таких элементов группы, подходящая степень которых попадает в H. Известно, что в нильпотентной группе G для любого члена $\gamma_j G$ нижнего центрального ряда его изолятор $I(\gamma_j G)$ — нормальная подгруппа.

Если $\langle G, \mu\rangle$ — позитивно нумерованная нильпотентная группа без кручения, то все фактор группы $\gamma_j G/(I(\gamma_{j+1}G) \cap \gamma_j G)$ и $I(\gamma_j G)/I(\gamma_{j+1}G)$ — позитивно нумеруемые абелевы группы без кручения, а потому и вычислимые [4], здесь $I(\gamma_1 G) = \gamma_1 G = G$; в частности, фактор группа $G/I(\gamma_2 G)$ вычислимая для вычислимой группы G.

Теорема. *Для любого набора $e_2, \ldots, e_n$ вычислимо перечислимых тьюринговых степеней найдётся нильпотентная ступени n группа без кручения G, у которой при некоторой вычислимой нумерации β сложность проблемы вхождения в изолятор j-го члена нижнего центрального ряда равна e_j для $2 \leqslant j \leqslant n$, а фактор группа всей группы по такому изолятору $G/I(\gamma_j G)$ вычислима при $3 \leqslant j \leqslant n$ тогда и только тогда, когда $e_j = 0$.*

Как следствие, отсюда получается известный результат: существуют не вычислимые позитивно нумерованные нильпотентные группы без кручения.

Список литературы

[1] Латкин И. В., Алгоритмическая сложность проблемы вхождения в коммутанты и члены нижнего центрального ряда // Сиб. Матем. Ж. – 1987. Т. 28, 5. – С. 102–110.

[2] Csima B. F., Solomon R., The complexity of central series in nilpotent computable groups // Annals of Pure and Applied Logic – 2011. – No 162. – P. 667–778.

[3] Латкин И. В., Сложность проблемы вхождения в члены верхнего центрального ряда вычислимых групп // Тез. докл. междунар. научн. конф. Мальцевские чтения, Новосибирск, Россия – 2015. – С. 65.

[4] Хисамиев Н. Г., Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика, – Т. 25, 2, – 1986. – С. 205–226.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан
E-mail: lativan@yandex.ru

Об одной процедуре решения параметризованной задачи с нечеткими данными

А. А. Лялецкий

Рассматривается (конечно) параметризованная задача с известной n-арной частичной операцией f над некоторым множеством, которая каждой последовательности $p_1 \ldots, p_n$ точных значений всех параметров рассматриваемой задачи сопоставляет ее решение в виде точного значения $f(p_1, \ldots, p_n)$, если последнее существует, и которая неопределена в противном случае. Предположим, что значения параметров $p_1, \ldots, p_n$ заданы нечетко, с некоторой долей уверенности, и что эти значения описываются подходящими нечеткими множествами, причем никакие ограничения на нечеткие данные не налагаются. Решается проблема нахождения значения f в случае нечетких значений параметров $p_1, \ldots, p_n$.

Из-за дефицита места описание разработанной математической процедуры, вычисляющей f в нечетном случае, и схема обоснования корректности проводимых ею вычислений опускаются. Просто заметим, что структуру входных данных процедуры составляют: (1) множество-универсум A; (2) частичная операция f над A; (3) конечная последовательность частичных нечетких множеств $c_1, \ldots, c_n$, количество элементов в которой совпадает с арностью f; (4) отношение частичного порядка $\leq$ над $\{c_1, \ldots, c_n\}$; (5) отображение φ, которое каждому $\leq$-неминимальному нечеткому множеству c_i приписывает функцию φ_{c_i}: $\mathrm{Bool}(A) \times \ldots \times \mathrm{Bool}(A) \times [0,1]^A \to [0,1]^A$, арность которой совпадает с количеством непосредственных $\leq$-предшественников c_i и которая описывает изменения нечеткого множества c_i в зависимости от того, какие события случились в нечетких множествах, непосредственно $\leq$-предшествующих c_i ($\mathrm{Bool}(A)$ есть булеан A, а $[0,1]^A$ – множество всех частичных функций, отображающих A в $[0,1]$).

Эта процедура может быть использована при решении нечетко поставленных задач в следующих областях: проблема классификации (медицинская диагностика и т.п.); исследование рисковых и критических ситуаций; финансовый анализ (рынки ценных бумаг); исследование данных (корпоративные хранилища); совершенствование стратегий управления и координации действий.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев
E-mail: foraal@mail.ru

Вычислимые линейные порядки и иерархия Ершова

Я. А. Михайловская, А. Н. Фролов

Данная работа посвящена изучению вычислимых линейных порядков, в сигнатуру которых добавляются дополнительные отношения $S^n_{\mathcal{L}}$ и $F_{\mathcal{L}}$, заданные следующим образом (здесь $(x,y)_{\mathcal{L}} = \{z \mid x <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} y\}$)

$$S^{2k}_{\mathcal{L}}(x,y) \leftrightharpoons |(x,y)_{\mathcal{L}}| = 0 \vee = 2 \vee \ldots \vee = 2k$$

$$S^{2k+1}_{\mathcal{L}}(x,y) \leftrightharpoons |(x,y)_{\mathcal{L}}| = 1 \vee = 3 \vee \ldots \vee = 2k+1$$

$$F_{\mathcal{L}}(x,y) \leftrightarrow \exists n \in \omega\, (|(x,y)_{\mathcal{L}}| = n)$$

Были получены следующие результаты.

Предложение 1. *Для любого $(n+1)$-в.п. множества A существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, упорядоченный по типу ω, такой, что $S^n_{\mathcal{L}} \equiv_T A$.*

Следствие 1. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ такой, что спектр отношения $S^n_{\mathcal{L}}$ состоит в точности из всех $(n+1)$-в.п. степеней.*

Предложение 2. *Для любого вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ из выислимости $S^0_{\mathcal{L}}$ следует вычислимость $S^n_{\mathcal{L}}$ для любого n.*

Предложение 3. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, в котором отношения $S^k_{\mathcal{L}}$ для всех $k > n$ вычислимы, но отношение $S^n_{\mathcal{L}}$ не вычислимо.*

Предложение 4. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, в котором отношения $S^n_{\mathcal{L}}$ для всех n вычислимы, но отношение блока $F_{\mathcal{L}}$ не вычислимо.*

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{L}$ – вычислимый линейный порядок, содержащий лишь конечное число блоков длины $\leq (n+1)$. Тогда из вычислимости $S^n_{\mathcal{L}}$ следует вычислимость $S^0_{\mathcal{L}}$.*

Также была доказана следующая

Теорема 1. *Пусть вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ имеет бесконечно много блоков длины 2 и отношение $S^1_{\mathcal{L}}$ вычислимо. Тогда существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{R}$ такой, что $\mathcal{R} \cong \mathcal{L}$, $S^1_{\mathcal{R}}$ вычислимо, но $S^0_{\mathcal{R}}$ не вычислимо.*

Список литературы

[1] Downey R. G, Lempp S., Wu G., On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings // Journal of Mathematical Logic. – 2010. – V. 10. – No 1–2. – P. 83–99.

[2] Hirschfeldt D. R., Degree spectra of intrinsically c.e. relations // Journal of Symbolic Logic. – 2001. – V. 66. – P. 441–469.

[3] Moses M., Recursive linear orders with recursive successivities // Annals of Pure and Applied Logic. – 1984. – V. 27. – P. 253–264.

[4] Remmel J. B. Recursively categorical linear orderings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 83. – P. 387–391.

[5] Фролов А. Н. Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка. // Известия ВУЗов. Математика. – 2010. – 7. – С. 73–85.

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: yana.michailovskaya@yandex.ru, a.frolov.kpfu@gmail.com

О тьюринговых степенях в утончениях арифметической иерархии

В. Л. Селиванов, М. М. Ямалеев

В.Л. Селивановым [**1**] в 1983 г. была введена тонкая иерархия арифметических множеств, каждый уровень Σ_α которой однозначно определяется ординалом $\alpha < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \lim\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$. Некоторые уровни тонкой иерархии совпадают с хорошо изученными уровнями известных иерархий множеств (разностная иерархия Ершова [**2**]-[**4**], аримфметическая иерархия). Например, $\Sigma_n = \Sigma_n^{-1}$, $\Sigma_{\omega^n} = \Sigma_n^{-1,\emptyset'}$, $\Sigma_\omega = \Sigma_2^0$, $\Sigma_{\omega^\omega} = \Sigma_3^0$. Б. Купером в 1971 было показано, что в иерархии Ершова уже второй уровень является собственным (т.е. не содержит элементов из меньших уровней) для тьюринговых степеней. Для общего случая К. Джокушем/Р. Шором [**5**] и В.Л. Селивановым [**6**] независимо было показано, что каждый уровень иерархии Ершова уровень будет собственным для тьюринговых степеней.

Аналогичные вопросы возникают и для тонкой иерархии. Нетрудно показать, что классы Σ_ω и Σ_λ, где $\omega < \lambda < \omega^\omega$, неразличимы относительно тьюринговой эквивалентности, для множеств $\geq_T \emptyset'$. При этом $\Sigma_{\omega^2} \not\approx_T \Sigma_\omega$ согласно релятивизованной теореме Купера. В данной работе показано, что наименьший "новый" собственный уровень тонкой иерархии — это уровень $\Sigma_{\omega+2}$, т.е. $\Sigma_{\omega+2} \not\approx_T \Sigma_\omega$ и $\Sigma_{\omega+1} \approx_T \Sigma_\omega$. Другими словами, основным результатом является

Теорема. *Существует в.п. множество E, существуют непересекающиеся в.п. множества $E_0, E_1 \subset E$, существует Σ_2^0 множество $A \subset E_0$, существует Π_2^0 множество $B \subset E_1$ такие, что множество $A \cup B \cup C$, где $C = E - (E_0 \cup E_1)$, не эквивалентно по Тьюрингу никакому Σ_2^0-множеству.*

Как следствие получаем, что собственные тьюринговые степени уровня $\Sigma_{\omega+2}$ не сравнимы с $\mathbf{0}'$. Кроме того, приведенная в теореме конструкция является одной из первых, которая строит вычислимые приближения множеств, работая в оракулах функционалов с Σ_2^0 и Π_2^0 множествами.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Ямалеев М.М. поддержан грантами РФФИ 15-01-08252, 16-31-50048, Госзаданием 1.2045.2014.

Список литературы

[1] Селиванов В. Л. Иерархии гиперарифметических множеств и функций. // Алгебра и логика, Т.22, 6 (1983), 666–692.

[2] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств. // Алгебра и логика, Т.7, 1 (1968), 47–74.

[3] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств II. // Алгебра и логика, Т.7, 4 (1968), 15–47.

[4] Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств III. // Алгебра и логика, Т.9, 1 (1970), 34–51.

[5] Josckush C. G., Shore R. Pseudo jump operators II: Transfinite iterations, hierarchies and minimal covers. Journal of SYmbolic Logic, V. 49, 4 (1984), 1205–1236.

[6] Селиванов В. Л. Об иерархии Ершова, // Сибирский математический журнал, Т. 26 (1985), 134–149.

Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск
E-mail: vseliv@iis.nsk.su
Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru, marsiam@yandex.ru

Primitive recursive and polynomial-time categoricity for Boolean algebras

P. E. Alaev

A structure $\mathfrak{A}$ for a finite language is *primitive recursive* if its universe A is a primitive recursive (p.r.) subset of ω, and its predicates and functions are p.r. over A.

Let $\mathbb{K}$ be a class of p.r. structures. We say that a structure $\mathfrak{A}$ is *primitive recursively categorical w.r.t.* $\mathbb{K}$ if
1) there is $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{B} \in \mathbb{K}$;
2) if $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathbb{K}$ and $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$, then there exists an isomorphism $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ such that f and f^{-1} are p.r. functions.

Let $\langle \bar{x} \rangle$ denote a number of a tuple $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ from ω in a standard numbering.

Let $\mathfrak{A}$ be a p.r. structure, and $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ be a quantifier-free formula. We say that the formula $\exists \bar{y}\, \Phi(\bar{x}, \bar{y})$ *is decidable in* $\mathfrak{A}$ *with primitive recursive witnesses* if there is a p.r.f. $g(z)$ such that if $\bar{x}$ is a tuple from $\mathfrak{A}$ then $g(\langle \bar{x} \rangle) = \langle \bar{b} \rangle$ with the following property:

$$\mathfrak{A} \models \exists \bar{y}\, \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Phi(\bar{x}, \bar{b}).$$

We say that the $\exists$-*diagram of* $\mathfrak{A}$ *is decidable with primitive recursive witnesses* if the above definition holds uniformly for all $\exists$-formulas, i.e., there is a p.r.f. $g(n, z)$ that finds the specified tuple $\bar{b}$ from a number n of a formula and $z = \langle \bar{x} \rangle$.

We define a class $\mathbb{K}_\Sigma$ as $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ is a p.r. structure and its $\exists$-diagram is decidable with primitive recursive witnesses$\}$.

Proposition 1. Let $\mathfrak{A}$ be a p.r. Boolean algebra. Then $\mathfrak{A} \in \mathbb{K}_\Sigma \Leftrightarrow$ the formula $\exists y\, (0 < y < x)$ is decidable in $\mathfrak{A}$ with p.r. witnesses.

Theorem 1. Let $\mathfrak{A}$ be a Boolean algebra. Then
a) $\mathfrak{A}$ has a presentation in $\mathbb{K}_\Sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ has a computable presentation with computable set of atoms;
b) if this holds then $\mathfrak{A}$ is p.r. categorical w.r.t. $\mathbb{K}_\Sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ has finitely many atoms.

These results can be transferred to the context of polynomial computability. A structure $\mathfrak{A}$ for a finite language is *computable in polynomial time* (*p-computable*) if its universe A is a p-computable subset of the set of all words in a finite alphabet, and its predicates and functions are p-computable over A. P-computable structures can be considered as a subclass of primitive recursive structures (with an appropriate numbering of words).

We say that the formula $\exists \bar{y}\, \Phi(\bar{x}, \bar{y})$ *is decidable in* $\mathfrak{A}$ *with p-computable witnesses* if there is a p-computable function $g(z)$ with the above property. Let $\mathbb{K}' = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ is a p-computable Boolean algebra and the formula $\exists y\, (0 < y < x)$ is decidable in $\mathfrak{A}$ with p-computable witnesses $\}$.

Theorem 2. Let $\mathfrak{A}$ be a Boolean algebra. Then
a) $\mathfrak{A}$ has a presentation in $\mathbb{K}' \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ has a computable presentation with computable set of atoms;
b) if this holds then $\mathfrak{A}$ is p.r. categorical w.r.t. $\mathbb{K}' \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ has finitely many atoms.

Proposition 2. Let $\mathfrak{A}$ be a countable Boolean algebra with finitely many atoms. If $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}' \in \mathbb{K}'$ and $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$, then there is an isomorphism $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ such that $f(x)$ and $f^{-1}(x)$ can be computed in $2^{2^{2^{c\|x\|}}}$ steps.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: alaev@math.nsc.ru

On global and local distribution of weakly precomplete CEERs

S. A. Badaev

We consider some problems of a distribution of the computable isomorphism types of weakly precomplete ceers (computably enumerable equivalence relations) within a degree as well as in the structure of all degrees of ceers relative to the reduction induced by monomorphism of numbered sets. More precisely, a ceer E is reducible to a ceer Q if there is a computable function f so that, for all x, y, $xEy \iff f(x)Qf(y)$.

The notion of weakly precomplete equivalence relation was introduced by the author in [**1**]. In the case of ceers, it means that E is weakly precomplete iff every computable function f has a fixed point relative to E, i.e. there exists x so that $xEf(x)$.

Theorem 1. *There exist infinite chains and infinite anti-chains of degrees of weakly precomplete ceers.*

The following results on a distribution of the isomorphic types of weakly precomplete ceers within their degrees were obtained together with Uri Andrews and Kuanysh Abeshev on summer 2016 in a joint research over the grant project 3952/GF4 of the Science Committee of the Republic of Kazakhstan.

Theorem 2. *There exist infinitely many non-universal weakly precomplete ceers that are equivalent and pairwise non-isomorphic.*

Theorem 3. *For every $n \in \omega$, there exists a ceer whose degree contains exactly n isomorphic types of weakly precomplete ceers.*

References

[1] Badaev S. A. On weakly precomplete positive equivalences // Siberian Math. J., 32 (1991), pp. 532–534.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: Serikzhan.Badaev@kaznu.kz

A finite family of n-c.e. sets without universal numbering

B. S. Kalmurzaev, K. Sh. Abeshev

One of the finest results on universal numberings for the classical case is the Lachlan's theorem (see [**1**]) that every finite family of c.e. sets has universal numbering, but Abeshev's result shows that Lachlan's theorem fails for some finite family of d.c.e. sets:

Theorem ([2]). *There are nonempty disjoint d-c.e. sets A, B such that the finite family $S = \{A, B\}$ has no universal numbering.*

We generalized the Abeshev's result to an arbitrary finite level of the hierarchy of Ershov.

Theorem. *For every $n \geq 2$ there are disjoint, nonempty n-c.e. sets A, B such that family $S = \{A, B\}$ has no universal numbering.*

For infinite levels of the hierarchy of Ershov this question is open.

References

[1] Lachlan A. H. Standard classes of recusively enumerable sets // Z. Math. Log. Grundl. Math., 10 (2-3), pp. 23–42, 1964.

[2] Abeshev K. On the existence of universal numberings for finite families of d.c.e. sets // Math. Log. Quart., 60, No. 3, pp. 161–167, 2014.

Department of Mathematics of Al-Farabi Kazakh National University, 71 Al-Farabi ave., Almaty 050040 (Kazakhstan)

E-mail: birzhan_mm@mail.ru, kuanqk@gmail.com

Retracts of computable solvable torsion-free groups

A. A Konyrkhanova, M. K. Nurizinov, R. K. Tyulyubergenev, N. G. Khisamiev

A retract of a group G is a subgroup H , for which there exists an endomorphism $\varphi : G \to H$, which is the identity on H. This notion comes from topology and it is realated with equation in groups.

Theorem 1. *Let (G, v) – be a constructive solvable torsion-free group of finite dimension such that the isolator of the commutant $I(G')$ equals G'. Then any retract H of group G is a computably enumerable subgroup in (G, v).*

Proof. Let us use induction on the dimension $dim(G) = n$ of the group G. If $n = 1$, then G is a subgroup of the group of rational numbers. From this $H = 1$, or $H = G$, but therefore H is computably enumerable subgroup in (G, v).

Let the dimension of the group G be equal to $m + 1$ and assume that the theorem is true for all smaller dimensions. Further, let us use induction on the length of solvability $dec(G) = r$. If $r = 1$, then G is an Abelian group. Since H – is a pure subgroup of G, it follows that H is a computably enumerable subgroup in (G, v) .Let $dec(G) = r + 1$ and let us assume that for smaller solvability lengths the theorem is true. Since, the commutant G' is a subgroup of the group obtainable as homomorphic image, the subgroup G, obtainable as homomorphic image, the subgroup $H \cap G'$ is retract of the group G'. Since, the solvability length of the subgroup G' is less than $r + 1$, that means that by the inductive assumption the subgroup $H \cap G'$ is computably enumerable in (G', v'), where v' – is the restriction of v to $I(G') = G'$. From the last equality and purity of retract H in G it follows that $I(H \cap G') = H \cap G'$. Therefore, $H/H \cap G'$ – is Abelian torsion-free group of finite dimension. From this and from purity of the subgroup H in G we obtain that the subgroup H is computably enumerable in (G, v). The theorem is proved.

Corollary 1. *Let $T_n^+(\mathbb{Q})$ be group of triangular matrices of n -dimension over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Then a retract H of the group $T_n^+(\mathbb{Q})$ is a computably enumerable subgroup in $(T_n^+(\mathbb{Q}), v)$, where v – is any effective numbering of group $T_n^+(\mathbb{Q})$, meaning that effectively in n it is possible to find the matrix vn and vice versa.*

Corollary 2 [3]. *For every n any retract of the group of all unitriangular matrices $UT_n(\mathbb{Q})$ of n dimension over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ is computable.*

The authors are grateful to professor V.A. Roman'kov for drawing attention to the given theme and valuable advice.

References

[1] Myasnikov A., Roman'kov V., Verbally closed subgroups of free groups // J.Group Theory.–2014.–17.–P. 29-40.

[2] Roman'kov V.A., Khisamiev N.G., Verbally and existentially closed subgroups of free nilpotent groups // Algebra and logic.–2013.– 4(52), 502-525.

D. Serikbaev East-Kazakhstan state technical university, Ust-Kamenogorsk
E-mail: hisamiev@mail.ru, ErkeshanK@mail.ru

Reducibilities of computable metrics on the real line

R. A. Kornev

In computable model theory, a central problem is to determine for a given computable structure whether its computable representation is effectively unique and, if not, how many non-equivalent representations there are. This question can be studied for structures we meet in analysis, such as normed, metric, or general topological spaces. Several approaches have been developed to define the notion of computability on uncountable topological spaces, we are using Kreitz and Weihrauch's TTE approach [**1**]. The problem we wanted to study is as follows: for the space of real numbers with the standard topology and natural countable dense subset, rationals, how many computably non-equivalent computable metrics do there exist?

More precisely, we define two notions of reducibility for metrics. One of them is induced by reducibility of Cauchy representations. Namely, let ρ and ρ' be complete metrics on a separable space X, let W be a countable dense subset of X, enumerated by integers. We say that the metric ρ is computably reducible to the metric ρ' (and denote this as $\rho \leq_c \rho'$) if Cauchy representation δ_ρ of effective metric space (X, ρ, W) is computably reducible to representation $\delta_{\rho'}$ of the space (X, ρ', W); precise definitions can be found in [**1**].

There is a natural characterization of c-reducibility: $\rho \leq_c \rho'$ iff the identity homeomorphism id_X is $(\delta_\rho, \delta_{\rho'})$-computable. Based on this, we introduce weak reducibility of metrics: we say $\rho \leq_{ch} \rho'$ if there exists a $(\delta_\rho, \delta_{\rho'})$-computable autohomeomorphism of X. Clearly, c-reducibility implies ch-reducibility.

Theorem. *All convex (i.e., admitting midpoints) computable metrics on the reals are c-equivalent.*

Theorem. *Any countable tree T can be isomorphically embedded into the ordering of computable metrics on the reals under c-reducibility.*

Theorem. *There exists a countable sequence of computable metrics on $\mathbb{R}$ which are not ch-reducible to each other. Informally, copies of the real line, equipped with these metrics, are pairwise homeomorphic, but not computably homeomorphic.*

References

[1] Weihrauch K. Computable Analysis. An Introduction, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2000.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: kornevrus@gmail.com

On images of partial computable functions over computable Polish spaces

M. V. Korovina, O. V. Kudinov

We report on the ongoing program on analysing the complexity of various problems in computable analysis in terms of in the effective analytic and Borel hierarchy. In this talk we give an answer to the question by A. Morozov and K. Weihrauch that concerns a characterisation of images of partial computable functions. We refer to [**2**], [**3**] and [**1**] for basic definitions and fundamental concepts.

Definition *Let* $\mathcal{X} = (X, \tau_X, \alpha)$ *be an effectively enumerable topological space and* $\mathcal{Y} = (Y, \tau_Y, \beta)$ *be an effectively enumerable* T_0*–space. A partial function* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *is called* partial computable *if the following properties hold. There exist a computable sequence of effectively open sets* $\{A_n\}_{n\in\omega}$ *and a computable function* $H : \omega^2 \to \omega$ *such that*

(1) $\mathrm{dom}(f) = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ *and*
(2) $f^{-1}(\beta(m)) = \bigcup_{i\in\omega} \alpha(H(m,i)) \cap \mathrm{dom}(f)$.

Main Theorem. *Let* $\mathcal{X}$ *and* $\mathcal{Y}$ *be computable Polish spaces and* $B \subseteq Y$*. Then the following assertions are equivalent.*

(1) *B is the image of a partial computable function* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.
(2) *B is a* Σ^1_1*–subset of* Y.

References

[1] Korovina M. V., Kudinov O. V. Towards Computability over Effectively Enumerable Topological Spaces // Electr. Notes Theor. Comput. Sci., 221 (2008), 115–125.
[2] Moschovakis Y. N. Descriptive set theory, North-Holland, Amsterdam, 2009.
[3] Weihrauch K. Computability on Computable Metric Spaces // Theor. Comput. Sci., 113 (1993), 1, 191–210.

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, SbRAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: rita.korovina@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, SbRAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: kud@math.nsc.ru

IV. Секция «Теория групп»

Линейность автотопий линейных кодов в пространствах над простым полем

С. В. Августинович, Е. В. Горкунов

Кодом C длины n называется произвольное подмножество векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$ размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q = GF(q)$, где $q = p^r$ — степень простого числа. *Линейный* код образует линейное подпространство в $\mathbb{F}_q^n$.

Автотопия — это изометрия $\mathbb{F}_q^n$, представимая набором n перестановок из S_q, каждая из которых действует на элементах поля $\mathbb{F}_q$ и изменяет значение в соответствующей позиции произвольного вектора $x \in \mathbb{F}_q^n$. Группу автотопий $\mathbb{F}_q^n$ обозначим через $\mathrm{Atp}(\mathbb{F}_q^n)$.

Изометрия (автотопия), оставляющая нулевой вектор неподвижным, называется *симметрией (симметричной автотопией)*. При $q \geqslant 4$ пространство $\mathbb{F}_q^n$ имеет симметрии, не являющиеся полулинейными. Иначе говоря, имеет место строгое включение $\Gamma\mathrm{L}_n(q) < \mathrm{Sym}(\mathbb{F}_q^n)$.

Будем называть линейный код *линейно жстким*, если все его симметрии полулинейны. В [**1**] доказано, что код Хэмминга является линейно жёстким. Аналогичное свойство МДР-кодов с кодовым расстоянием 2 в случае простого поля установлено в [**2**]. В настоящей работе исследуются автотопии произвольного линейного кода в пространстве над простым полем.

Тривиально доказывается, что при любом q группа автотопий одномерного кода $C \leqslant \mathbb{F}_q^n$ есть $\mathrm{Atp}(C) \cong S_q$. Следующая лемма имеет также общий характер.

Лемма. *Пусть линейный код $C \leqslant \mathbb{F}_q^n$ имеет порождающую матрицу блочного вида, которая состоит из блоков G_1, G_2. Если G_1, G_2 порождают коды C_1, C_2 соответственно, то $\mathrm{Atp}(C) \cong \mathrm{Atp}(C_1) \times \mathrm{Atp}(C_2)$.*

Множество ненулевых позиций вектора $x \in \mathbb{F}_q^n$ называется *носителем* x и обозначается $\mathrm{supp}(x)$. Кодовое слово $x \in C, x \neq 0$, назовем *минимальным*, если для любого другого ненулевого слова $y \in C$ из отношения $\mathrm{supp}(y) \subseteq \mathrm{supp}(x)$ следует $\mathrm{supp}(y) = \mathrm{supp}(x)$.

На множестве носителей минимальных слов кода C определим граф G. Носители $S_1 \neq S_2$ некоторых минимальных слов C смежны в G, если $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.

Теорема. *Если граф носителей минимальных слов линейного кода $C \leqslant \mathbb{F}_p^n$ невырожден и связен, то все симметричные автотопии C мономиальны.*

Список литературы

[1] Горкунов Е. В., Группа автоморфизмов q-ичного кода Хэмминга // Дискретн. анализ и исслед. опер, Т.17, 6., 2010, 50–55.

[2] Горкунов Е. В., Сотникова Е. В., О линейной жесткости $[n, n-1, 2]$-кодов в пространстве над простым полем // Сиб. электрон. мат. изв., Т.11., 2014, 771–776.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

E-mail: avgust@math.nsc.ru, gorkunov@math.nsc.ru

Об относительно свободных группах бесконечно базируемых многообразий групп С. И. Адяна

С. И. Адян, В. С. Атабекян

Для решения известной проблемы конечного базиса теории групп, которая была поставлена Б.Нейманом в 1937 г., С.И.Адян в [**1**] построил первые примеры бесконечных независимых систем групповых тождеств (статья [**1**] сдана в печать 23.10.1969 г.). В монографии [**2**] доказано, что при любом нечетном $n \geq 1003$ следующее семейство тождеств от двух переменных

$$\{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\}, \tag{1}$$

где параметр p пробегает все простые числа, является неприводимым, т.е. ни одно из тождеств этого семейства не следует из остальных. Следовательно, если для заданного множества простых чисел $\mathcal{P}$ и при фиксированном натуральном $m > 1$ через $\Gamma_m(\mathcal{P})$ обозначить относительно свободную группу ранга m многообразия, определенного всеми тождествами вида (1) при $p \in \mathcal{P}$, то существует континуум неизоморфных групп $\Gamma_m(\mathcal{P})$, соответствующих различным множествам простых чисел $\mathcal{P}$. Недавно авторы доказали следующие две новые теоремы

Теорема 1. *Для любого ранга $m > 1$ и для для любого множества простых чисел $\mathcal{P}$ централизатор любого неединичного элемента относительно свободной группы $\Gamma_m(\mathcal{P})$ есть циклическая группа.*

Из этой теоремы следует, что центр групп $\Gamma_m(\mathcal{P})$ тривиален и что всякая коммутативная подгруппа групп $\Gamma_m(\mathcal{P})$ – циклическая.

Теорема 2. *Любой автоморфизм полугруппы энодоморфизмов $End(\Gamma_m(\mathcal{P}))$ группы $\Gamma_m(\mathcal{P})$ одозначно определяется своим действием на группу внутренних автоморфизмов $Inn(\Gamma_m(\mathcal{P}))$.*

Эта теорема дает ответ для рассматриваемых нами относительно свободных групп на поставленный в статье Б.Плоткина [**3**] вопрос об описании автоморфизмов полугруппы $End(A)$ для свободной в некотором заданном многообразии алгебры A. Аналогичный вопрос для $End(F)$ ранее рассматривался разными авторами для частных случаев, когда F абсолютно свободная группа, свободная бернсайдова группа или свободный моноид.

Список литературы

[1] Адян С. И., Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств // Докл. АН СССР, 190 (1970), 499–501.

[2] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах // Наука, М., 1975.

[3] Plotkin B. I., Seven Lectures on the Universal Algebraic Geometry // preprint, Institute of Mathematics, Hebrew University (2000).

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва
E-mail: sia@mi.ras.ru
Ереванский государственный университет, Ереван
E-mail: avarujan@ysu.am

Сравнимость по модулю 2 в группах круговых единиц

Р. Ж. Алеев, О. В. Митина

Пусть $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка $8m = 2^n \geqslant 16$ (для порядков 2 и 4 тривиально, а для 8 всё известно) и $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ — нормализованная группа единиц целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ группы G. Пусть ζ — примитивный корень степени 2^n из 1; $\chi_0 = 1_G$, $\chi_1, \ldots, \chi_{2^n-1}$ — неприводимые комплексные характеры группы G, где $\chi_j(x^k) = \zeta^{jk}$ для $j, k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$; e_j — минимальный центральный идемпотент комплексной групповой алгебры $\mathbf{C}G$, соответствующий характеру χ_j. Тогда групповым гомоморфизмом является отображение $\varphi : \mathrm{V}(\mathbf{Z}G) \to \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])$, где $\varphi\Big(\sum_{k=0}^{2^n-1} \beta_k e_k\Big) = \beta_1$. Положим $\ker\varphi = V_0$, σ_k — автоморфизм кругового поля $\mathbf{Q}(\zeta)$, продолжающий отображение $\zeta \mapsto \zeta^{2k+1}$. Пусть также

$$V_1 = \Big\{1 + \sum_{k=0}^{4m-1} (\sigma_t(\lambda) - 1)e_{2k+1} \Big| \lambda \in \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])\Big\} \cap \mathrm{V}(\mathbf{Z}G).$$

Тогда $\langle x \rangle \times V_0 \times V_1$ — подгруппа конечного индекса в группе $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ ([**1**]). В работе [**2**] показано, что в силу локального соответствия Хигмана V_1 изоморфна подгруппе

$$U = \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta]) \cap (1 + 2\mathbf{Z}[\zeta]) \leqslant \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta]).$$

Теорема. *Пусть* $t_j = 1 + \zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{2j} + \zeta^{-2j}$ *для любого натурального* j. *При введённых выше обозначениях имеем*

$$U \geqslant \langle t_1^{2m} \rangle \times \prod_{l=1}^{m-1} \langle t_{2l+1}^{2m-1} t_{4m-2l-1} \rangle \times \prod_{k=1}^{n-3} \left(\prod_{l=0}^{2^{k-1}-1} \langle t_{2l+1}^{2m-2^k} t_{2^k-2l-1}^{2^k} \rangle \right).$$

Гипотеза. *Для круговых единиц* [**3**] *вместо знака* $\geqslant$ *в теореме должно быть равенство.*

Тем самым в этой работе строится подгруппа группы $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ значительно меньшего индекса, чем подгруппа, построенная в [**1**].

Список литературы

[1] Алеев Р. Ж., Митина О. В., Пузач В. Н. Индуктивный подход к описанию групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп // Межд. конф. ««Мальцевские чтения»» (3–7 мая 2015 г.). Тезисы докладов. Новосибирск. 2015. С. 81.
URL: `www.math.nsc.ru/conference/malmeet/15/Malmeet2015.pdf`

[2] Алеев Р. Ж., Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды, Т.3, 1, 2000, 3–37.

[3] Sinnott W., On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field // Ann. of Math., V.108, 1, 1978, 107–134.

ФГАОУ ВО Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск; Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: aleev@csu.ru; ovm@csu.ru

Обратимые элементы классовых колец характеров для группы Ru

Р. Ж. Алеев, М. И. Молодорич

Классовые кольца характеров группы были введены и изучены в [**1**]. Классовые кольца характеров спорадических групп описаны в [**3**]. Единицы классовых колец характеров, которые лежат в действительных квадратичных полях, описаны в [**4**]. Единицы классовых колец характеров групп Янко J_1 и О'Нэна $\mathrm{O'N}$, которые не лежат в действительных квадратичных полях, описаны в [**2**]. Поэтому остаётся задача нахождения групп единиц таких классовых колец характеров спорадических групп, которые не содержатся в квадратичных полях.

Лемма. *Группа Рудвалиса* Ru *имеет следующие классовые кольца характеров, которые не содержатся в квадратичных полях:*

$$K_1 = \mathbf{Z} + 2^9 \cdot 13 \cdot 29 A\mathbf{Z} + 2^9 \cdot 13 \cdot 29 B\mathbf{Z},\ K_2 = \mathbf{Z} + 2^9 \cdot 5^3 G\mathbf{Z} + 2^9 \cdot 5^3 H\mathbf{Z},\ \textit{где}$$

$$A = -\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^3 + \zeta_7^4 + \zeta_7^5 - \zeta_7^6,$$

$$B = \zeta_7 - \zeta_7^2 + \zeta_7^3 + \zeta_7^4 - \zeta_7^5 + \zeta_7^6,$$

$$G = \zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 - \zeta_{13}^4 + \zeta_{13}^5 - \zeta_{13}^6 - \zeta_{13}^7 + \zeta_{13}^8 - \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} + \zeta_{13}^{12},$$

$$H = -\zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 + \zeta_{13}^4 - \zeta_{13}^5 + \zeta_{13}^6 + \zeta_{13}^7 - \zeta_{13}^8 + \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} - \zeta_{13}^{12}.$$

Здесь ζ_7 *и* ζ_{13} *— примитивные корни из* 1 *степеней* 7 *и* 13, *соответственно.*

Теорема.

(1) *Группой единиц* K_1 *является:* $U(K_3) = \langle -1 \rangle \times \left\langle A^{512\cdot 21} \right\rangle \times \left\langle A^{512\cdot 17} B^{512} \right\rangle$.

(2) *Группой единиц* K_2 *является:*

$$U(K_4) = \langle -1 \rangle \times \left\langle (s_1 + s_5)^{7\cdot 512\cdot 25} \right\rangle \times \left\langle \left((s_1 + s_5)^5 (s_2 + s_3)\right)^{512\cdot 25} \right\rangle,$$

где $s_i = \zeta_{13} + \zeta_{13}^{-i}$ для $i \in \{1, 2, 3, 5\}$.

Следствие. *Неизвестны группы единиц классовых колец характеров только следующих спорадических групп:*

$$\mathrm{J}_3,\ \mathrm{J}_4,\ \mathrm{Ly}.$$

Список литературы

[1] Алеев Р. Ж., Центральные элементы целочисленных групповых колец // Алгебра и логика, Т.39, 2000, 513–525.

[2] Aleev R. Zh., Molodorich M. I., Class Character Rings of groups J_1 and $O'N$ // Groups and Graphs, Algorithms and Automata, Yekaterinburg, 2015, C.31.

[3] Молодорич М. И., Классовые кольца характеров спорадических групп, СЭМИ, Т.11, 2014, 878–886.

[4] Молодорич М. И., Группы единиц классовых колец характеров спорадических групп. Квадратичный случай // СЭМИ, Т.13, 2016, 38–48.

ФГАОУ ВО Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск; Челябинский государственный университет, Челябинск

E-mail: aleev@csu.ru; molodorich.margarita@gmail.com

Основы теории многообразий нильпотентных MR-групп

М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников

Понятие степенной R-группы (R-произвольное ассоциативное кольцо с единицей) введено Р. Линдоном в [**1**]. В [**2**] А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. В частности, новое понятие степенной MR-группы является непосредственным обобщением понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В [**3**] изложены основы теории многообразий нильпотентных MR-групп и проведено сравнение различных определений нильпотентности в этой категории. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *1) R-коммутант $\gamma_1(G)$ степенной MR-группы G как вербальная MR-подгруппа порождается коммутатором $x^{-1}y^{-1}xy$; 2) если R-поле, то $\gamma_1(G)$ как вербальная MR-подгруппа порождается α-коммутатором $(x,y)_\alpha = y^{-\alpha}x^{-\alpha}(xy)^\alpha$ (если $\alpha = -1$, то α-коммутатор $(x,y)_\alpha$ совпадает с обычным коммутатором $[y^{-1},x^{-1}]$).*

Теорема 2. *Существует взаимно-однозначное соответствие между решеткой двусторонних идеалов кольца R и решеткой вербальных MR-подгрупп свободного R-модуля.*

Список литературы

[1] Lyndon R. C., Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc., 96 (1960), 518–533.

[2] Мясников А. Г., Ремесленников В. Н., Степенные группы. I. Основы теории и тензорные пополнения // Сиб. мат. журн., Т.35, 5, (1994), 1106–1118.

[3] Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н., Основы теории многообразий нильпотентных MR-групп // Сиб. мат. журн. Т.57, 6, (2016), 1107–1207.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Об одном представлении виртуальных кос автоморфизмами

В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим

Одним из обобщений группы кос B_n является группа виртуальных кос VB_n (см. [**3**], [**4**]), играющая ту же роль в теории виртуальных узлов, какую группа B_n играет в теории классических узлов. Представление Артина $B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ в группу автоморфизмов свободной группы $F_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ позволяет решить проблему равенства слов в группе кос, построить линейное представление группы кос (представление Бурау), линейное представление группы крашеных кос (представление Гасснера), найти группу классического зацепления и т. д. (см. [**2**]).

Возникает естественный вопрос о существовании аналогов представления Артина для группы VB_n. В работе [**1**] собраны известные представления такого рода, а также построено представление, обобщающее ранее известные.

На конференции в Даляне (2016) С. Камада сообщил первому автору некоторое представление группы VB_n, которое формально является более общим, чем представление φ_M из [**1**]. Мы доказываем что, на самом деле, оно равносильно представлению $\widetilde{\varphi}_M$, построенному в [**1**]. Под равносильными мы понимаем представления, ядра которых совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 16-11-10073).

Список литературы

[1] Bardakov V. G., Mikhalchishina Yu. A., Neshchadim M. V., Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // arXiv: 1603.01425.

[2] Birman J. S., Braids, Links, and Mapping Class Groups // Annals of Math. Studies V.82, Princeton University Press, 1974.

[3] Kauffman L. H., Virtual knot theory // Eur. J. Comb., V.20, 7, 1999, 663–690.

[4] Vershinin V. V., On homology of virtual braids and Burau representation // J. Knot Theory Raminifications, V.10, 5, 2001, 795–812.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: bardakov@math.nsc.ru, neshch@math.nsc.ru

Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

В работе [**1**] доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин – сильно регулярные графы без треугольников со вторым собственным значением 3 имеют массив пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 59\}$ и выполняется одно из утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и либо $p = 59$, $\alpha_1(g) = 117$ и $\alpha_3(g) = 0$, либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 175 - 14n$ и $\alpha_3(g) = 98n + 14$, либо $p = 3$, $\alpha_1(g) = 177$ и $\alpha_3(g) = 0$;

(2) Ω является t-кликой, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$, либо $p = 3$, $t = 3m$, $m \le 4$, $\alpha_3(g) = 18m$ и $\alpha_1(g) = 177 - 3m$, либо $p = 2$, $t = 2m + 1$, $m = 4, 5$, $\alpha_3(g) = 12m + 6$ и $\alpha_1(g) = 177 - 3m$;

(3) Ω является s-кокликой, $p = 2$, $s = 7$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 176$;

(4) Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах и либо

(*i*) $p = 23$, подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, либо

(*ii*) $p = 11$, Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{22, 18, 1; 1, 3, 22\}$, либо

(*iii*) $p = 5$, $s = 7$ и $t = 2, 7, 12, 17, 22$ или $s = 2$ и $t = 2, 7, ..., 47$, либо

(*iv*) $p = 3$, $s = 7$ и $t = 9, 12, ..., 24$, причем в случае $t = 9$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$ или $s = 4$ и $t = 3, 6, ..., 42$, или $s = 1$ и $t = 3, 6, 9, 12$, либо

(*v*) $p = 2$, $s = 7$ и $t = 9, 11, ..., 25$, причем в случае $t = 9$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$ или $s = 5$ и $t = 3, 5, ..., 35$, или $s = 3$ и $t = 3, 5, ..., 57$, или $s = 1$ и $t = 9, 11$.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$. Тогда группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует интранзитивно на множестве вершин графа Γ.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-11-00061.

Список литературы

[1] Belousov I. N., Makhnev A. A., On extensions of strongly regular graphs without triangles with eigenvalue 3 // Doklady Mathematics, V.1, 2014, 395–398.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$

В. В. Биткина

Дж. Кулен предложил задачу классификации дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим заданного натуральнього числа t. Решение задачи Кулена разбивается на два этапа: перечисление массивов пересечений графов и изучение возможных автоморфизмов графов с полученными массивами пересечений. На данный момент первый этап решения задачи Кулена завершен для $t = 4$. Пусть u — вершина графа Γ и $d(\Gamma) \geq 3$. Тогда

(1) $[u]$ — неисключительный граф и либо Γ — граф Джонсона $J(12, 6)$ или его стандартное частное, либо $[u]$ — дополнение псевдогеометрического графа для $pG_5(10, 4)$ и Γ — граф Тэйлора, либо $[u]$ — граф в половинном случае с параметрами $(4l+1, 2l, l-1, l)$, $l \in \{13, 15, 16, 18, 20\}$ и Γ — граф Тэйлора;

(2) $[u]$ — исключительный псевдогеометрический граф для $pG_{s-4}(s, t)$ и либо $s = 8$ и Γ — граф Тэйлора, либо $s = 6, t = 1$ и Γ — половинный 8-куб, либо $s = 5$, $t = 3$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$;

(3) $[u]$ — исключительный непсевдогеометрический граф и либо $[u]$ имеет параметры $(27, 16, 10, 8)$, $(63, 32, 16, 16)$, $(135, 64, 28, 32)$, $(189, 88, 37, 44)$, $(243, 112, 46, 56)$, $(279, 128, 52, 64)$ или $(351, 160, 64, 80)$ и Γ — граф Тэйлора, либо Γ — граф с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$, $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $\{204, 175, 20; 1, 20, 170\}$, $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$, $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$, $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$, $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$), $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$, $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$.

Второй этап решения задачи Кулена для $t = 4$ только начинается. Найдены автоморфизмы графа с массивами пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ (Ефимов К.С., Махнев А.А.), $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ (Исакова М.М., Махнев А.А., Токбаева А.А.), $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ (Махнев А.А., Нирова М.С., Падучих Д.В.), $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ (Биткина В.В., Гутнова А.К., Махнев А.А.). В данной работе найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 61\}$ и либо Ω — пустой граф, $p = 2, 7, 61$, либо $s = 1$, $p = 5, 11$ или $t = 1$, $p = 3$, либо $s, t > 1$, $p = 2, 3$.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$. Тогда группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует интранзитивно на множестве вершин графа Γ.

Северо-Осетинский госуниверситет, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
E-mail: bviktoriyav@mail.ru

О периодической части группы Шункова, насыщенной прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп и группы $U_3(2^n)$

А. А. Брит, К. А. Филиппов, А. С. Федосенко

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [**1**].

Напомним, что группа G (сопряженно бипримитивно конечная группа в определении В.П. Шункова [**2**]) называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H \leq G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Отметим, что группа Шункова, порожденная элементами конечных порядков, не обязана быть периодической. Примеры таких смешанных групп существуют уже в классе разрешимых групп [**3**].

Пусть I_n — прямое произведение n экземпляров группы порядка 2.

Доказана следующая

Теорема. *Бесконечная группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{U_3(q) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, где $q = 2^k$ – фиксированное число, обладает периодической частью, которая локально конечна и изоморфна $U_3(q) \times I$, где I — бесконечная группа периода 2.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Краевого государственного автономного учреждения «Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности».

Список литературы

[1] Шлепкин А. К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // III международная конференция по алгебре. Сб. тез. Красноярск. 1993. С.369.

[2] Шунков В. П. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика, Т.9, 4, 1970, 484–496.

[3] Череп А. А. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика, Т.26, 4, 1987, 518–521.

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск

О линейности восходящих HNN-расширений почти полициклических групп

О. В. Брюханов

Изучению различных свойств фундаментальных групп 3-многообразий посвящено большое количество исследований, обзор которых приведён в [**4**]. В частности, в [**4**] отмечено, что каждая фундаментальная группа 3-многообразия является почти p-аппроксимируемой для почти всех простых p. Кроме того различные фундаментальные группы многообразий возникают как некоторые HNN-расширения. Так D.T. Wise и T. Hsu [**2**] показали финитную аппроксимируемость восходящих HNN-расширений почти полициклических групп. В свою очередь, в [**3**] исследован вопрос о линейной представимости над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ произвольных (не восходящих) HNN-расширений конечно порождённых абелевых групп и линейность нескольких частных случаев данных HNN-расширений конечно порождённых линейных групп.

В представленной работе показано, что восходящие HNN-расширения почти полициклических групп изоморфно представимы матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, и уже из этого, по известным теоремам А.И. Мальцева [**1**], следует финитная аппроксимируемость данных групп и их почти p -аппроксимируемость для почти всех простых p.

Теорема 1. *Пусть G — почти полициклическая группа, φ — мономорфизм группы G, тогда восходящее HNN-расширение группы G*

$$HNN_{\varphi}(G) = \langle G, t | t^{-1} g t = \varphi(g), g \in G \rangle$$

изоморфно представимо матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Кроме того, если $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(G)$ — группа полученная из группы G последовательным выполнением восходящих HNN-расширений, где мономорфизмы

$$\varphi_1 \in \mathrm{End}(G), \ldots, \varphi_n \in \mathrm{End}(HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}}(G)),$$

то верно утверждение.

Теорема 2. *Пусть G — почти полициклическая группа, тогда голоморф её HNN-расширения $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(G)$ изоморфно представим матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Список литературы

[1] Мальцев А.И., Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем.сб., Т.8(50), 3, 1940, 405–423.

[2] Hsu T., Wise D. T., The residual finiteness of ascending HNN extensions of polycyclic groups // J. Pure Appl. Algebra., V.182, 1, 2003, 65–78.

[3] Metaftsis V., Raptis E., Varsos D., On the linearity of HNN-extensions with abelian base. (2011), http://arxiv.org/abs/0810.2389 v.2.

[4] Aschenbrenner M., Friedl S., Wilton H., 3-manifold groups. (2012), http://arxiv.org/abs/1205.0202 v.2.

ЧОУ Центросоюза РФ СибУПК, Новосибирск
E-mail: bryuoleg@ngs.ru

2-Замкнутость рациональных чисел в квазимногообразиях нильпотентных групп

А. И. Будкин

Настоящая работа посвящена исследованию доминионов в квазимногообразиях нильпотентных групп.

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы G из $\mathcal{M}$ и её подгруппы H доминион $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H в G (в $\mathcal{M}$) определяется так:

$$\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in G \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : G \to M, \text{ если } f\mid_H = g\mid_H, \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : G \to M$ обозначены гомоморфизмы группы G в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Группа H называется n-замкнутой в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы $G = gr(H, a_1, \ldots, a_n)$ из $\mathcal{M}$, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, справедливо равенство: $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = H$. Исследованию n-замкнутых групп в квазимногообразиях нильпотентных групп посвящены статьи [**1, 2, 3**].

Теорема. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех, Q — аддитивная группа рациональных чисел. Тогда группа Q 2-замкнута в $\mathcal{M}$.*

Список литературы

[1] Будкин А. И., Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика, Т.47, 5., 2008, 541–557.

[2] Будкин А. И., О доминионах разрешимых групп // Алгебра и логика, Т.54, 5, 2015, 575–588.

[3] Шахова С. А., Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения // Матем. заметки, Т.97, 6., 2015, 936–941.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

О конечных группах с тремя заданными подгруппами

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, К. Л. Парфенков

Рассматриваются только конечные группы. Пусть группа G имеет три подгруппы A, B и C, чьи индексы попарно взаимно просты в G. Хорошо известно, что если A, B, и C абелевы, то и сама G абелева. Как устновили Виландт и Кегель, группа G сохраняет свойство разрешимости (нильпотентности) в случае разрешимости (соответственно нильпотентности) подгрупп A, B и C. С другой стороны, сверхразрешимость A, B и C уже не влечет в общем случае сверхразрешимость самой группы G. В работах [**1, 2**] был найден ряд достаточных условий сверхразрешимости группы G со сверхразрешимыми подгруппами A, B и C.

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп (формация, класс Фиттинга, класс Шунка). Найти строение группы G, имеющей три $\mathfrak{F}$-подгруппы (сверхразрешимые подгруппы), чьи индексы попарно взаимно просты в G.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В [**3**] был введен класс групп $\mathrm{w}\mathfrak{F} = (G \,|\, \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и всякая силовская подгруппа из G является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G). В [**3, 4**] установлены свойства класса $\mathrm{w}\mathfrak{F}$. В [**5**] исследован класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп.

Теорема. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп и группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то G является $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группой.*

Следствие 1. *Если метанильпотентная группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 2 [**1**]. *Если группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Список литературы

[1] Flowers N., Wakefield T. P., On a group with three supersolvable subgroups of pairwise relatively prime indices // Arch. Math., V.95, 4, 2010, 309–315.

[2] Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Triple factorizations and supersolubility of finite groups // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2015, DOI:10.1017/S0013091515 000231.

[3] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ, выпуск 4(9), 2011, 86–91.

[4] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С., Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн., Т.57, 2, 2016, 259–275.

[5] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н., О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн., Т.51, 6, 2010, 1270–1281.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

E-mail: formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, kirill.parfenkov@gmail.com

Определяемость группы кольцами расщепления

С. В. Вершина

Рассматривается категория p-локальных групп без кручения. Абелева группа называется p-локальной, если она является модулем над кольцом дискретного нормирования $\mathbb{Z}_p$ — локализации целых чисел относительного простого p. Подполе K поля p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ называется полем расщепления для группы A, если $R \otimes A \cong F \oplus D$, где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, F — свободный R-модуль, D — делимый R-модуль, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Кольцо R, в этом случае, называется кольцом расщепления группы A.

Теорема. *Для неразложимой редуцированной p-локальной группы A без кручения с квадратичным полем расщепления следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *группа A определяется своим кольцом расщепления с точностью до изоморфизма;*

(2) *p-ранг группы A равен* 1;

(3) *кольцо эндоморфизмов* $\mathrm{E}(A)$ *группы A изоморфно кольцу расщепления группы A;*

(4) *кольцо* $\mathrm{E}(A)$ *является E-кольцом.*

Теорема является ответом на открытый вопрос номер 3 в статье [**1**] для указанного класса групп.

Список литературы

[1] Glaz S., Vinsonhaler C., Wickless. W., Splitting Rings for p-Local Torsion Free Groups // Lecture Notes in Pure Appl. Math., V.171, 1995, 223–241.

Московский Педагогический Государственный Университет, Москва
E-mail: svetlanavershina@gmail.com

Об определяемости однородных вполне разложимых факторно делимых групп своими группами автоморфизмов

В. К. Вильданов

Будем говорить, что группа A *определяется своей группой автоморфизмов* в классе групп $\mathbf{X}$, если из $Aut(A) \cong Aut(B)$, где $B \in \mathbf{X}$, всякий раз следует, что $A \cong B$.

Вопрос определяемости факторно делимой группы ранга 1 в классе всех таких групп рассмотрен в работе [1]. Получен критерий определяемости факторно делимой группы ее группой автоморфизмов в классе всех факторно делимых групп. Класс всех факторно делимых групп ранга 1 обозначим через $\mathcal{QD}_1$.

Определение. Будем говорить, что конечная циклическая группа A *слабо определяется своей группой автоморфизмов*, если для любой конечной циклической группы $B \ncong A$ из условия $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ следует, что число ненулевых компонент B_p группы B больше, чем число ненулевых компонент A_p группы A.

Теорема 1. [**1**] *Группа $A \in \mathcal{QD}_1$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}_1$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{t}(A)$ — циклическая группа (возможно, нулевая), слабо определяющаяся своей группой автоморфизмов, и $pA \neq A$ для всех $p \in \mathbb{P}$ таких, что $A_p = 0$.*

Назовем группу G однородной вполне разложимой факторно делимой группой, если $G = \bigoplus_n A$, где $A \in \mathcal{QD}_1$. Класс всех таких групп обозначим $\mathcal{QD}^*$.

Теорема 2. *Группа $G = \bigoplus_n A \in \mathcal{QD}^*$, определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathcal{QD}^*$, если группа A определяется в классе $\mathcal{QD}_1$ своей группой автоморфизмов.*

Список литературы

[1] Вильданов В. К., Тимошенко Е. А., Об определяемости факторно делимой абелевой группы ранга 1 своей группой автоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат., 2015 (принята к печати).

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород
E-mail: kadirovi4@gmail.com

О признаках модулярности решеток классов Фиттинга

Н. Н. Воробьев

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [**1**, **2**, **3**].

В теории формаций известен результат А.Н. Скибы [**1**] о том, что решетка всех формаций модулярна. Однако вопрос о модулярности решетки всех классов Фиттинга до настоящего времени остается открытым (см. [**4**, проблема 14.47]).

Найдены условия, при которых достаточно обширные семейства классов Фиттинга удовлетворяют модулярному тождеству.

Список литературы

[1] Скиба А. Н., Алгебра формаций. // Мн.: Беларуская навука, 1997. 240 с.

[2] Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды, Т.2, 2, 1999, 114–147.

[3] Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский матем. журн, Т.52, 6, 2000, 783–797.

[4] *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. Издание 18-е, доп., включающее Архив решенных задач / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН : сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. Новосибирск : изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2014. 253 с.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, (Беларусь)
E-mail: vornic2001@mail.ru

Симметрия конечных кристаллов

Р. М. Гарипов

Чтобы теоретически вычислить экспериментальные картинки Шехтмана, недостаточно задать обобщённый ряд Фурье, инвариантный относительно группы самосовмещений додекаэдра. Надо ещё знать уравнение взаимодействия квазикристалла и электронной волны. Мы добавим в уравнение Клейна—Гордона для квазикристалла слагаемые, содержащие волну де Бройля электронов, а в уравнение Клейна—Гордона электронов включим слагаемые, содержащие волну де Бройля квазикристалла. Получится замкнутая система нелинейных уравнений. Эти дополнительные слагаемые берутся не с потолка, а единственным образом определяются условиями:

1) Если занулить волну де Бройля квазикристалла, то получится уравнение Клейна—Гордона электронов (равенство $0 = 0$ надо отбросить), а если занулить волну де Бройля электронов, то получится уравнение Клейна—Гордона квазикристалла.

2) Полученная система уравнений релятивистски инвариантна.

3) Имеет место закон сохранения энергии.

При выборе волны де Бройля (т. е. решения уравнения Клейна—Гордона) для квазикристалла возникает проблема. Если атомы квазикристалла предположить нейтральными, то волна де Бройля будет вещественной функцией и не получится совпадения с экспериментом. Квазикристалл следует считать состоящим из неподвижных электрически положительно заряженных ионов и примеси малоподвижных отрицательно заряженных ионов. Такой выбор более соответствует физическому смыслу задачи. Тогда расчёты полностью согласуются с экспериментальными результатами Шехтмана.

Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск
E-mail: R.M.Garipov@mail.ru

Об индуцированных структурах на трансверсалях к подгруппе группы и гипергруппах над группой

С. Г. Далалян

Пусть G - произвольная группа, H - ее подгруппа, M - трансверсаль к подгруппе H. Определяются отображения

$$\Phi : M \times H \to M, \quad \Phi(a,\alpha) := a^{\alpha}; \qquad \Psi : M \times H \to H, \quad \Psi(a,\alpha) := {}^{a}\alpha;$$

$$\Xi : M \times M \to M, \quad \Xi(a,b) := [a,b]; \qquad \Lambda : M \times M \to H, \quad \Lambda(a,b) := (a,b)$$

соотношениями

$$a \cdot \alpha = {}^{a}\alpha \cdot a^{\alpha}, \quad a \cdot b = (a,b) \cdot [a,b].$$

Доказывается, что они обладают следующими свойствами.

(P1) *Отображение* Ξ *определяет на* M *структуру правой квазигруппы с левым нейтральным элементом* o.

(P2) *Отображение* Φ *является правым действием группы* H *на множество* M.

(P3) *Отображение* Ψ *переводит подмножество* $\{o\} \times H$ *на* H.

(P4) *Система отображений* $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ *подчиняется соотношениям*:

$$(A1) \qquad {}^{a}(\alpha \cdot \beta) = {}^{a}\alpha \cdot {}^{a^{\alpha}}\beta,$$

$$(A2) \qquad [a,b]^{\alpha} = [a^{{}^{b}\alpha}, b^{\alpha}],$$

$$(A3) \qquad (a,b) \cdot {}^{[a,b]}\alpha = {}^{a}({}^{b}\alpha) \cdot (a^{{}^{b}\alpha}, b^{\alpha}),$$

$$(A4) \qquad [[a,b],c] = [a^{(b,c)}, [b,c]],$$

$$(A5) \qquad (a,b) \cdot ([a,b],c) = {}^{a}(b,c) \cdot (a^{(b,c)}, [b,c]),$$

На основании системы структурных отображений Ω и условий (P1–P4) вводится понятие гипергруппы над группой. Оно объесиняет, в частности, понятия группы, фактор-группы, тела, линейного пространства над телом. Вводится конструкция, так называемого, точного произведения, ассоциированного с гипергруппой над группой, которая обобщает полупрямое произведение групп и общее произведение групп в смысле Б. Неймана. Доказывается, что любая гипергруппа над группой, с точностью до изоморфизма, может быть получена вышептиведенной стандартной кострукцией из некоторой тройки (G, H, M).

Ереванский государственный университет, Ереван

Некоторые свойства 2-упорядоченных групп

А. И. Забарина, А. А. Тоболкин, Е. А. Фомина

Группа G с заданным на ней двумерным порядком ζ [**1**], согласованным с групповой операцией, называется *двумерно упорядоченной группой.*

Пусть $\langle G, \cdot, \zeta \rangle$ — двумерно упорядоченная группа.

Теорема 1. *$Z(G)$ — изолированная подгруппа группы G.*

Следствие 1. *$T(G) \triangleleft G$.*

Следствие 2. *Пусть G — периодическая 2-упорядоченная группа. Тогда G — абелева циклически упорядоченная группа.*

В частности, каждая конечная 2-упорядоченная группа является циклической.

Следствие 3. *Каждая неабелева 2-упорядоченная группа является бесконечной.*

Следствие 4. *В неабелевой 2-упорядоченной группе существует порождающее множество, порядок каждого из элементов которого бесконечен.*

Теорема 2. *Пусть $J = \{x \in G | x^2 = e\}$. Тогда $|J| \leqslant 2$.*

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbf{N}$ и $H = \{x \in G | x^n = e\}$. Если подгруппа H — невырожденная, то $|H| \leqslant n$.*

Приведем примеры 2-упорядоченных групп.

(1) Аддитивная и мультипликативная группы комплексных чисел с естественной ориентацией (со стандартным 2-порядком): $\langle \mathbf{C}, +, \eta \rangle$, $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, \eta \rangle$ и их подгруппы.

(2) Каждая циклически упорядоченная группа является двумерно упорядоченной [**2**]. В частности, линейно упорядоченную группу можно двумерно упорядочить.

(3) Пусть $\langle \Gamma, \cdot, \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченная группа. На группе $T_0 \times \Gamma$ построен 2-порядок, отличный от стандартного порядка η на $T_0 \times \mathbf{R}^+$ [**3**].

(4) Пусть F — вещественно замкнутое поле, F^+ — множество всех его ненулевых квадратов, $G = \langle (F^+)^2, \cdot \rangle$. Используя свойство полноты вещественно замкнутого поля, группу G можно двумерно упорядочить.

Список литературы

[1] Пестов Г. Г., Двумерно упорядоченные поля. // Томск : Издательство ТГУ, 2003. — 128 с.

[2] Забарина А. И., О циклически упорядоченных группах // дис. : канд. физ-мат. наук : 01.01.06. — Томск, 1984. — 84 с.

[3] Тоболкин А. А., К теории n-упорядоченных групп // диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук : 01.01.06. — Томск, 2009. — 71 с.

ТГПУ, Академлицей, Томск

E-mail: aizabarina@gmail.com, tobantal@gmail.com, ef254@mail.ru

Прямые 2-упорядоченной группы

А. И. Забарина, Е. А. Фомина

Пусть x, y, z есть точки плоскости $\mathbf{R}^2$, функция $\eta(x, y, z)$ — естественная ориентация плоскости $\mathbf{R}^2$. Если для множества $A \subset M, |A| \leqslant 5$ существует инъективное отображение $\phi\colon A \to \mathbf{R}^2$, такое, что:

$$\forall x, y, z \in A\ (\zeta(x, y, z) = \eta(\phi(x), \phi(y), \phi(z))),$$

то говорят, что ϕ есть *реализация множества* A в плоскости $\mathbf{R}^2$ или что *множество* A *реализуемо в* $\mathbf{R}^2$.

Если каждое множество $A \subset M, |A| \leqslant 5$ реализуемо в $\mathbf{R}^2$, то пара $\langle M, \zeta\rangle$ называется *двумерно упорядоченным множеством*, функция ζ — *функцией двумерного порядка* на множестве M [**1**].

Группа с заданным на ней двумерным порядком, согласованным с групповой операцией, называется *двумерно упорядоченной группой.*

Пусть $\langle M, \zeta\rangle$ есть 2-упорядоченное множество [**1**], $a, b \in M; a \neq b$. Множество всех таких $x \in M$, что $\zeta(a, b, x) = 0$, называется *прямой*, проходящей через a и b, и обозначается $l_{a,b}$ [**1**].

Теорема 1. *Прямая $l_{e,a}$ является подгруппой 2-упорядоченной группы $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$, тогда и только тогда, когда она замкнута относительно возведения в квадрат своих элементов.*

Следствие 2. *Прямая $l_{e,a}$ является подгруппой 2-упорядоченной группы $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$, тогда и только тогда, когда $a^{-1} \in l_{e,a}$.*

Следствие 3. *Пусть $a \in Z(G)$, $a^{-1} \in l_{e,a}$. Тогда $l_{e,a} \triangleleft G$.*

Следствие 4. *Пусть α — инволюция группы G. Тогда $l_{e,a} \triangleleft G$.*

Следствие 5. *Пусть $x \neq e$, $y \neq e$, $x, y, xy \in l_{e,a}$. Тогда $l_{e,a} < G$.*

Пусть $a \in G$. Рассмотрим прямую $l_{e,a}$. Пусть $c \in G \setminus l_{e,a}$. Положим:

$$\forall x, y \in l_{e,a}(x < y \Leftrightarrow \zeta_c(x, y) = \zeta(c, x, y) = 1).$$

Известно [**1**], что функция ζ_c задаёт на прямой $l_{e,a}$ отношение линейного порядка.

Теорема 6. *Пусть $\langle G, \cdot, \zeta\rangle$ — 2-упорядоченная группа, $o(\alpha) = 2$. Тогда существует такой элемент $c \in G \setminus l_{e,\alpha}$, что если*

$$P = \{x \in l_{e,\alpha} | \zeta_c(e, x) \geqslant 0\}, H = P \cup P^{-1},$$

то $\langle H, \cdot, \zeta_c\rangle$ — линейно упорядоченная группа.

Список литературы

[1] Пестов Г. Г., Двумерно упорядоченные поля // Томск : Издательство ТГУ, 2003, 128с.

ТГПУ, Томск
E-mail: aizabarina@gmail.com, ef254@mail.ru

О вложении центральных расширений в подстановочные сплетения

А. В. Заварницин

Конечная группа $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, q нечётно, естественно действует подстановками на проективной прямой порядка $q+1$. В [**1**] была поставлена проблема вложимости группы $\mathrm{SL}_2(q)$ в соответствующее подстановочное сплетение групп $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и G. В работе [**2**] доказано, что вложение имеет место тогда и только тогда, когда $q \equiv -1 \pmod 4$. Обобщение этой проблемы на произвольные группы $\mathrm{PSL}_n(q)$ и их центральные накрытия с ядром простого порядка изучалось в [**3**].

В настоящей работе исследуется следующая более общая проблема. Пусть G — конечная группа, Ω — конечное множество и $\rho : G \to \mathrm{Sym}(\Omega)$ — подстановочное представление. Для $\omega \in \Omega$ обозначим через $\mathrm{St}(\omega)$ стабилизатор ω в G. Пусть A — коммутативное кольцо простой характеристики p. Рассмотрим (правый) подстановочный AG-модуль V соответствующий ρ с базисом Ω и его подмодуль

$$0 \to I \to V, \tag{1}$$

порождённый элементом $\omega_0 = \sum_{\omega\in\Omega} \omega$. Ясно, что $I \cong A$ — главный AG-модуль, где изоморфизм задаётся отображением $\alpha : \omega_0 \mapsto 1$. Пусть $G \leftthreetimes V$ — естественное полупрямое произведение. Предположим также, что имеется центральное расширение

$$1 \to A \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\pi} G \to 1,$$

т. е. $\mathrm{Im}\,\iota \leqslant \mathrm{Z}(H)$, где мы отождествляем кольцо A с его аддитивной группой A^+. Будем говорить, что подгруппа $S \leqslant G$ *поднимается* в H, если полный прообраз $S\pi^{-1}$ расщепляется над $\mathrm{Im}\,\iota$. Расширение H называется *подрасширением* в $G \leftthreetimes V$, соответствующим вложению (1), если существует вложение $\beta : H \to G \leftthreetimes V$ такое, что коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & H & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & G \leftthreetimes V & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

где мы отождествляем модуль I с его образом в V. Главным результатом является

Теорема. *Если в обозначениях выше центральное расширение H является подрасширением в $G \leftthreetimes V$, соответствующим вложению (1), то $\mathrm{St}(\omega)$ поднимается в H для любого $\omega \in \Omega$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00065).

Список литературы

[1] Маслова Н. В., Ревин Д. О., О неабелевых композиционных факторах конечной группы, минимальной относительно простого спектра // Тр. ИММ УрО РАН Т.19, 4, 2013, 155–166.

[2] Zavarnitsine A. V., Subextensions for a permutation $PSL_2(q)$-module // Sib. Elect. Math. Reports V.10, 2013, 551–557.

[3] Zavarnitsine A. V., Embedding central extensions of simple linear groups into wreath products // Sib. Elect. Math. Reports V.13, 2016, 361–365.

Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: zav@math.nsc.ru

О обобщенных сплетениях m-групп

А. В. Зенков, О. В. Исаева

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \ _*\rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge\rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция $_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1}\rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge\rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$(xy)_* = x_*y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*$.

В дальнейшем m-группу G с отмеченным автоморфизмом $_*$ записываем *как пару* $(G, _*)$. Будем говорить [**1**], что m-группа $(G, _*)$ представима порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω, если $G \subseteq Aut(\Omega)$ и $(g)_* = aga$ для любого $g \in G$, где a-реверсивный автоморфизм Ω. Этот факт будем записывать в виде (G, Ω, a). Пусть $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}, R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$, o-точка Ω, неподвижная относительно действия a. Отметим, что существуют представления не содержащие неподвижной точки.Тогда $\Omega = L\overleftarrow{\bigcup}\{o\}^{\varepsilon}\overleftarrow{\bigcup}R$, где $\varepsilon = 1$, если Ω содержит неподвижную точку и $\varepsilon = 0$ в противном случае. Представление (G, Ω, a) назовем *m-транзитивным*, если для всех $w, w' \in \Omega$, быть может за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = gr.(G, a)$, что $(w)x = w'$. Фраза "‘быть может за исключением точки o” означает, что ее стабилизатор $St_G(o) = G$.

Отношение эквивалентности Θ, определенное на Ω, будем называть отношением *m-эквивалентности (m-конгруэнтности)*, если оно является выпуклым и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$. Следующие m-эквиавалентности назовем тривиальными: A) эквивалентность, когда все классы эквивалентности одноэлементны; B) эквивалентность, когда все классы эквивалентности двухэлементны; C) эквивалентность, имеющая три (либо два) класса эквивалентности L, o, R (L, R); D) эквивалентность, имеющая единственный класс эквивалентности Ω. Представление *m-примитивно*, если оно не допускает нетривиальной m-эквивалентности. Ранее первым автором в [**2**] была предложена конструкция сплетения двух представлений m-групп и доказано, что всякое m-транзитивное представление вложимо в сплетение двух подходящих m-транзитивных представлений, если только на исходном представлении определена некоторая конгруэнция.

В работе предлагается конструкция обобщенного сплетения линейно упорядоченного множества m-групп подстановок и доказывается, что m-транзитивная группа подстановок вложима в обобщенное сплетение своих примитивных компонент.

Список литературы

[1] Giraudet M., Rachunek J., Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech.Math.J, V.49, 124, 1999, 743–766.

[2] Зенков А. В., Сплетения групп монотонных подстановок // Сиб.матем.журнал, Т.52, 6, 2011, 1264–1270.

Алтайский Государственный Аграрный Университет, Барнаул
E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com
Алтайский Государственный Университет, Барнаул
E-mail: isaeva@econ.asu.ru

О пересечениях примарных подгрупп в конечных группах с цоколем $O^{+}(2n,2)$

В. И. Зенков

В работе автора [**1**, теорема B] было доказано, что в конечной группе $Aut(O^{+}(2n,2))$, $n>2$, для любой силовской 2-подгруппы и любой сопряженной с ней их пересечение неединично. В данной работе для групп с цоколем $O^{+}(2n,2)$, $n>2$, приводится описание всех пар примарных подгрупп с этим свойством. Для этого в конечной группе G для подгрупп A и B этой группы определим подгруппу $min_G(A,B)$, порожденную всеми пересечениями вида $A\cap B^g$ для некоторого элемента $g\in G$, порядок которых минимален. Кроме того,согласно [2,c.XIY], группа $O^{+}(2n,2)$ как группа лиева типа обладает графовым автоморфизмом t порядка два, нормализующим параболическую подгруппу P с фактором Леви $L(n-1,2)$, на котором t действует тривиально. Зафиксируем введенные обозначения и используем их для формулировки теорем. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $G=Aut(O^{+}(2n,2)), n>2$ и S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая силовскую подгруппу из P. Тогда $min_G(S,S)=O_2(P)\langle t\rangle$.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа с цоколем $O^{+}(2n,2), n>2$, A и B — примарные подгруппы из G и S — силовская 2-подгруппа из G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $min_G(A,B)>1$;

(2) $G=Aut(O^{+}(2n,2)), n>2$ и, с точностью до сопряжения, каждая из подгрупп A и B является надгруппой $min_G(S,S)$.

Список литературы

[1] Зенков В. И., Пересечение нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. матем., Т.2, 1, 1996, 1–92.

[2] Conway J., Carter R., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A., Atlas of finite groups // Oxford: Clarendon Press, 1985, 252p.

ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: v1i9z52@mail.ru

О ядре системного нормализатора конечной разрешимой группы

С. Ф. Каморников

Рассматриваются только конечные разрешимые группы.

В "Коуровской тетради" под номером 17.39 Л.А. Шеметковым и А.Ф. Васильевым сформулирована следующая задача:

Существует ли натуральное число n такое, что гиперцентр каждой конечной разрешимой группы совпадает с пересечением n системных нормализаторов этой группы? Каково наименьшее число n с этим свойством?

В данной работе эта задача решается в случае, когда группа имеет тривиальную подгруппу Фраттини.

Теорема. *Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G. Если $\Phi(G) = 1$, то найдутся такие элементы $x, y \in G$, что $D \cap D^x \cap D^y = Z_\infty(G)$.*

Напомним, что нормальная подгруппа N группы G называется *гиперцентральной*, если любой главный фактор группы G, расположенный ниже N, является центральным в G. Произведение гиперцентральных нормальных подгрупп группы G является ее гиперцентральной нормальной подгруппой. Поэтому группа G обладает единственной максимальной нормальной гиперцентральной подгруппой, которая называется *гиперцентром* и обозначается $Z_\infty(G)$.

Отметим, что в конечной разрешимой группе G, обладающей единичной подгруппой Фраттини, всегда имеет место равенство $Z_\infty(G) = Z(G)$. Поэтому справедливо

Следствие 1. *Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G. Если $\Phi(G) = 1$, то найдутся такие элементы $x, y \in G$, что $D \cap D^x \cap D^y = Z(G)$.*

Следствие 2. *Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G. Если $\Phi(G) = 1$, то справедливы неравенства $|D| \leq \sqrt[3]{|G|^2 \cdot |Z(G)|}$ и $|D/Z(G)| \leq |G : D|^2$.*

Следствие 3. *Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G. Если $\Phi(G) = 1$ и $Z(G) = 1$, то справедливы неравенства $|D| \leq \sqrt[3]{|G|^2}$ и $|D| \leq |G : D|^2$.*

В случае, когда подгруппа Фраттини конечной разрешимой группы не тривиальна, вопрос 17.39 остается открытым.

Международный университет "МИТСО", Гомель, Беларусь
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Абелевы MT-группы

Е. И. Компанцева

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu : G \otimes G \longrightarrow G$. Группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G. В [**1**] показано, что любое умножение на периодической абелевой группе полностью определяется попарными произведениями образующих элементов ее базисной подгруппы, что дает удобный метод построения колец на периодических группах. В связи с этим при изучении свойств колец на смешанных абелевых группах особый интерес представляют группы, любое умножение на периодической части которых однозначно продолжается до умножения на всей группе. Такие группы называют MT-группами, проблема их изучения была сформулирована в [**2**]. Класс MT-групп достаточно широк, в нем содержатся, например, урегулированные копериодические группы и их вполне характеристические подгруппы, ему принадлежат также так называемые SI-группы [**3**].

В настоящей работе для каждой смешанной абелевой группы G определяется сервантная вполне характеристическая подгруппа G^*_Λ, содержащая подгруппу G^* [**4**] и периодическую часть $T(G)$ группы G. Известно [**1**], что если $\Lambda(G)$ – множество простых чисел p таких, что p-примарная компонента группы G отлична от нуля, то подгруппа $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pT(G)$ – абсолютный ниль-идеал группы G, то есть подгруппа, являющаяся ниль-идеалом в любом кольце на G. При этом существуют абелевы группы G, в которых $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pT(G)$ – наибольший абсолютный ниль-идеал. В MT-группах G наибольший абсолютный ниль-идеал может быть значительно больше подгруппы $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pT(G)$.

Теорема 1. *В любой MT-группе G подгруппа $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda$ является наибольшим абсолютным ниль-идеалом.*

Теорема 2. *Если G является MT-группой, то $G = G^*_\Lambda$ или подгруппа G^*_Λ имеет более чем счетный индекс в группе G.*

Список литературы

[1] Fuchs L., Infinite Abelian groups // Academic Press New York and London, 1973.
[2] Topics in abelian groups // Chicago, III., 1963.
[3] Ivanov A. V., Abelian groups with self-injective rings of endomorphisms and with rings of endomorphisms with the annihilator condition // (Russian) Abelian groups and modules, Tomsk. Gos. Univ., Tomsk, 1981, 93–109.
[4] Kompantseva E. I., Absolute nil-ideals of Abelian groups // Journal of Mathematical Sciences, V.197, 5, 2014, 625–634.

Финансовый университет при Правительстве РФ, МПГУ, Москва, Россия
E-mail: kompantseva@yandex.ru

Усиленная версия гипотезы Симса для групп с простым цоколем классического лиева типа

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

В середине 1960-х годов Ч. Симс выдвинул следующую гипотезу: *порядок стабилизатора точки в конечной примитивной группе подстановок ограничен сверху функцией от длины любой орбиты этого стабилизатора на остальных точках.* До классификации конечных простых групп эта гипотеза была подтверждена только в некоторых частных случаях. С помощью классификации конечных простых групп гипотеза Симса была доказана в [**1**] .

Для конечной группы G, ее подгрупп M_1 и M_2 и любого натурального числа i по индукции определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$, полагая $(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}$, $(M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}$, $(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}$ и $(M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}$. В [**2**] авторы получили следующую усиленную версию гипотезы Симса: *если G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, то подгруппы $(M_1, M_2)^6$ и $(M_2, M_1)^6$ совпадают и нормальны в G.* Представляется интересной задача описания множества Π всех троек (G, M_1, M_2) таких, что G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. При этом тройки (G, M_1, M_2) и (G', M_1', M_2') из Π считаются эквивалентными, если существует изоморфизм G на G', отображающий M_1 на M_1' и M_2 на M_2'. Решение этой задачи существенно усилит результаты из [**2**]. В [**3**] рассмотрен случай, когда группа G не является почти простой группой, и случай, когда группа G имеет простой знакопеременный цоколь. В [**4**] рассмотрен случай, когда группа G имеет простой цоколь $Soc(G)$ исключительного лиева типа и $M_1 \cap Soc(G)$ — непараболическая подгруппа в $Soc(G)$.

В данной работе завершено рассмотрение случая, когда G — группа с простым цоколем лиева типа и $M_1 \cap Soc(G)$ — непараболическая подгруппа в $Soc(G)$.

Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 14-11-00061).

Список литературы

[1] Cameron P. J., Praeger C. E., Saxl J., Seitz G. M., On the Sims conjecture and distance transitive graphs // Bull. London Math. Soc., V.15, 5, 1983, 499–506.

[2] Кондратьев А. С., Трофимов В. И., Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН., Т.364, 6, 1999, 741–743.

[3] Кондратьев А. С., Трофимов В. И., Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, Т.20, 4, 2014, 143–152.

[4] Кондратьев А. С., Трофимов В. И., Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, Т.22, 2, 2016, 177–187.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, trofimov@imm.uran.ru

О главных факторах параболических максимальных подгрупп специальных исключительных групп лиева типа

В. В. Кораблева

Эта работа является продолжением работ [**1**]–[**4**], в которых было получено уточненное описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал, для всех конечных простых групп лиева типа (нормальных и скрученных), за исключением специальных групп. Группа лиева типа над полем характеристики p называется *специальной*, если $p = 2$ для групп типа B_l, C_l, F_4 и $p \leqslant 3$ для групп типа G_2.

Пусть G — группа лиева типа и $P = UL$ — параболическая максимальная подгруппа в ней, где U — унипотентный радикал и L — дополнение Леви в P. Из статьи [**5**] следует, что для неспециальных групп G факторы нижнего центрального ряда группы U являются главными факторами группы P. В исключаемых случаях коммутаторные соотношения, влияющие на структуру унипотентных подгрупп, ведут себя специальным образом и требуют отдельного рассмотрения.

В настоящей работе доказана теорема, в которой для каждой параболической максимальной подгруппы групп $F_4(2^n)$ и $G_2(p^m)$ при $p \leqslant 3$ даются фрагменты главных рядов, входящие в унипотентный радикал этой параболической подгруппы. Приводятся таблицы, в которых указываются порождающие элементы главных факторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ 14.Z50.31.0020).

Список литературы

[1] Кораблева В. В., О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Сиб. мат. журн., 2014, Т.55, 4, 764–782.

[2] Кораблева В. В., О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^2E_6(q^2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 2014, Т.20, 2, 230–237.

[3] Кораблева В. В., О главных факторах параболических максимальных подгрупп скрученных классических групп // Сиб. мат. журн., 2015, Т.56, 5, 1100-1110.

[4] Кораблева В. В., О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы ${}^3D_4(q^3)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Т.21, 3, 2015, 187–191.

[5] Azad H., Barry M., Seitz G., On the structure of parabolic subgroup // Comm. Algebra, V.18, 2, 1990, 551–562.

Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: vvk@csu.ru

О необходимых условиях нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения групп с одной объединенной подгруппой

А. Е. Куваев

Пусть $\mathcal{I}$ — множество, содержащее хотя бы два элемента; F_i $(i \in \mathcal{I})$ — некоторые группы. Пусть также в каждой группе F_i фиксирована подгруппа H_i и существуют изоморфизмы $\varphi_{ij} \colon H_i \to H_j$, удовлетворяющие условиям $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ и $\varphi_{ij}\varphi_{ji} = \varphi_{ii} = \mathrm{id}_{H_i}$ для всех $i, j, k \in \mathcal{I}$. Тогда *обобщенным свободным произведением групп* F_i, $i \in \mathcal{I}$, *с подгруппами* H_i, *объединёнными относительно изоморфизмов* φ_{ij}, называется группа

$$F = \langle *F_i;\ H_i = H_j,\ \varphi_{ij}\ (i, j \in \mathcal{I})\rangle,$$

образующими которой являются образующие групп F_i, $i \in \mathcal{I}$, а определяющими соотношениями — соотношения групп F_i, а также всевозможные соотношения вида $h\varphi_{ij} = h$, где $i, j \in \mathcal{I}$, $h \in H_i$.

Отметим, что в группе F все подгруппы H_i, $i \in \mathcal{I}$, совпадают. Поэтому данную конструкцию называют также *обобщенным свободным произведением семейства групп* $\{F_i, i \in \mathcal{I}\}$ *с одной объединенной подгруппой*.

Группу X будем называть *локально удовлетворяющей нетривиальному тождеству*, если любая конечно порождённая подгруппа группы X удовлетворяет нетривиальному тождеству (не обязательно одному и тому же для всех подгрупп). Напомним также, что подгруппа Y группы X называется p'*-изолированной* в этой группе для некоторого простого числа p, если для каждого простого числа $q \neq p$ и для каждого элемента $x \in X$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Автором доказана следующая **Теорема.** *Пусть все группы* F_i *локально удовлетворяют нетривиальному тождеству, причём хотя бы для двух различных* $j, k \in \mathcal{I}$ *имеют место соотношения* $H_j \neq F_j$ *и* $H_k \neq F_k$. *Если группа* F *аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число* p *такое, что при любом* $i \in \mathcal{I}$ *подгруппа* H_i p'*-изолирована в группе* F_i.

Данная теорема является обобщением результатов работы [**1**].

Список литературы

[1] Азаров Д. Н., Иванова Е. А., К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды ИвГУ, Математика, Т.2, 1999, 5–7.

Ивановский государственный университет, г. Иваново
E-mail: alexander@kuvaev.me

О графах Кэли одного централизатора инволютивного автоморфизма бернсайдовой группы $B_0(2,5)$

А. А. Кузнецов, А. С. Кузнецова

Пусть $B(2,5) = \langle a_1, a_2 \rangle$ — свободная двупорожденная бернсайдова группа периода 5 и $B_0(2,5)$ — соответствующая максимальная конечная группа, порядок которой равен 5^{34}. Рассмотрим отображение φ следующего вида:

$$\varphi : \begin{cases} a_1 \to a_1^{-1} \\ a_2 \to a_2^{-1}. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что φ является инволютивным автоморфизмом в группах $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$.

Пусть $C_{B(2,5)}(\varphi)$ и $C_{B_0(2,5)}(\varphi)$ — централизаторы автоморфизма φ в $B(2,5)$ $B_0(2,5)$ соответственно. Согласно известной теореме В.П. Шункова, если $C_{B(2,5)}(\varphi)$ окажется конечной группой, то группа $B(2,5)$ также будет конечна. Другими словами, если $C_{B(2,5)}(\varphi) = C_{B_0(2,5)}(\varphi)$, то $B(2,5) = B_0(2,5)$. По этой причине исследование функций роста $C_{B_0(2,5)}(\varphi)$ представляет большой интерес. Далее, для краткости, вместо $C_{B_0(2,5)}(\varphi)$ мы будем писать C.

В работе [**1**] было исследовано строение группы C, получены следующие результаты:

(1) $|C| = 5^{16}$,
(2) $C = C_0 \times \langle z \rangle$, где $|C_0| = 5^{15}$ и $|\langle z \rangle| = 5$;
(3) z — центральный элемент группы $B_0(2,5)$,
(4) $C_0 = \langle X_0 \rangle$, где $|X_0| = 4$ — минимальное число порождающих C_0,
(5) вычислено pc–представление подгруппы C_0.

Целью настоящей работы является исследование функций роста группы C относительно минимального порождающего множества $X = X_0 \cup \{z\}$, а также симметричного — $Y = X \cup X^{-1}$. Данные функции роста были получены при помощи компьютерных вычислений, ниже приведены диаметры соответствующих графов Кэли:

$$D_X(C) = 29, \ D_Y(C) = 19.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект МД-3952.2015.9).

Список литературы

[1] Кузнецов А. А., Филиппов К. А., Об одном инволютивном автоморфизме Бернсайдовой группы $B_0(2,5)$, Сибирский журнал индустриальной математики, Т.3, 2010, 68–75.

СибГАУ, Красноярск
E-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru
КрасноярскийГАУ, Красноярск
E-mail: alexakuznetsova85@gmail.com

О неприводимых коврах аддитивных подгрупп над локально конечными полями

С. К. Куклина, А. О. Лихачева, Я. Н. Нужин

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K. Группа $E(\Phi, K)$ порождается корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}, \quad r \in \Phi$. Назовем (*элементарным*) *ковром типа* Φ *ранга* l *над* K всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi, \ i, j > 0, \tag{1}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm1, \pm2, \pm3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$\left[x_s(u), x_r(t)\right] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\left(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\right), \quad r, s, ir + js \in \Phi. \tag{2}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \left\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\right\rangle$ группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством M группы $E(\Phi, K)$. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. $E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$. Назовем ковер $\mathfrak{A}$ *неприводимым*, если все $\mathfrak{A}_r$ ненулевые.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа Φ ранга $l \geq 2$ над локально конечным полем K. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле $G(\Phi, K)$ все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, совпадают с некоторым подполем P поля K, в частности, ковер $\mathfrak{A}$ замкнут.*

Утверждение теоремы отмечается в [1] в качестве следствия из более общего результата, исключая следующие случаи: 1) Φ типа B_l $(l \geq 2)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4 и $charK = 2$; 2) Φ типа G_2 и $charK$ равна 2 или 3. Известная теорема Л. Диксона о порождении специальной линейной группы степени 2 над конечным полем двумя трансвекциями показывает, что ограничение $l \geq 2$ в теореме является существенным.

Список литературы

[1] Левчук В. М., О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика, Т.22, 1983, 504–517.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: svetlya4ok-03@mail.ru, likhacheva.alyona@mail.ru, nuzhin2008@rambler.ru

О группах, изоспектральных группе $U_3(3)$

Ю. В. Лыткин

В работе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков элементов G. Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*. Под секцией группы G будем понимать факторгруппу H/N, где $N, H \leq G$ и $N \trianglelefteq H$.

Скажем, что группа G *распознаваема* (более точно, распознаваема по спектру в классе конечных групп), если любая конечная группа, изоспектральная G, изоморфна G. Группа G *почти распознаваема*, если существует лишь конечное число попарно не изоморфных групп, изоспектральных G. В противном случае она называется *нераспознаваемой*.

Пусть ω — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Следуя [**1**], назовём группу G *критической относительно* ω (или ω*-критической*), если ω совпадает со спектром группы G и не совпадает со спектром любой собственной секции группы G (т. е. секции, отличной от G).

Для решения проблемы распознавания простых групп по спектру актуальной является задача описания групп (в частности, критических), изоспектральных нераспознаваемым простым группам. Ранее автором [**2, 3**] было дано полное описание групп, критических относительно спектров знакопеременных групп A_6 и A_{10}, а также спорадической группы J_2. По модулю уже известных результатов из этого следует, что все группы, критические относительно спектров неабелевых простых знакопеременных и спорадических групп, известны. В частности, количество таких попарно не изоморфных групп не превосходит 3.

В настоящей работе даётся описание групп, изоспектральных нераспознаваемой простой унитарной группе $U_3(3) = PSU(3,3)$. В частности, доказывается, что если G — группа, изоспектральная $U_3(3)$, то G является либо группой Фробениуса, либо удвоенной группой Фробениуса, либо расширением 2-группы N с помощью $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, $U_3(3)$ или $\mathrm{Aut}(U_3(3))$, причём все эти случаи реализуются. Существует по меньшей мере 7 попарно не изоморфных групп, критических относительно множества $\omega(U_3(3))$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 16–31–00147 мол_а.

Список литературы

[1] Мазуров В. Д., Ши В. Дж., Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика, Т.51, 2, 2012, 239–243.

[2] Lytkin Y. V., On groups critical with respect to a set of natural numbers // Siberian electronic mathematical reports, V.10, 2013, 666–675.

[3] Лыткин Ю. В., Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп // Сибирский математический журнал, Т.56, 1, 2015, 122–128.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: jurasicus@gmail.com

О периодических группах с узким спектром

А. С. Мамонтов

В докладе рассматриваются периодические группы, порядки элементов которых не превосходят 7.

Будет представлен результат о том, что группа, порядки элементов которой делят 6 и 7 локально конечна, либо является расширением 2-группы посредством группы без инволюций. Кроме того, будет обсуждаться вопрос о распознаваемости знакопеременной группы A_7 по множеству порядков элементов в классе всех групп.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: andreysmamontov@gmail.com

Графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 4

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Дж. Кулен предложил задачу классификации дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим заданного натуральнього числа t. Ранее эта задача была решена для $t = 3$ ([**1**]). В случае $t = 4$ проведена редукция к исключительным окрестностям вершин ([**2**]) и рассмотрен случай псевдогеометрических окрестностей ([**3**]). В данной работе завершено решение задачи Кулена для $t = 4$.

Теорема. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин являются исключительными непсевдогеометрическими графами со вторым собственным значением* 4. *Если* u *— вершина графа* Γ, *то верно одно из утверждений:*

(1) $[u]$ *имеет параметры* $(27, 16, 10, 8)$, $(63, 32, 16, 16)$, $(135, 64, 28, 32)$, $(189, 88, 37, 44)$, $(243, 112, 46, 56)$, $(279, 128, 52, 64)$ *или* $(351, 160, 64, 80)$ *и* Γ *является графом Тэйлора;*

(2) $[u]$ *имеет параметры* $(85, 14, 3, 2)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$*) или* $[u]$ *имеет параметры* $(169, 56, 15, 20)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{169, 112, 1; 1, 56, 169\}$*), или* $[u]$ *имеет параметры* $(204, 28, 2, 4)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ *или* $\{204, 175, 20; 1, 20, 170\}$*);*

(3) $[u]$ *имеет параметры* $(243, 22, 1, 2)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ *или* $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$*), или* $[u]$ *имеет параметры* $(289, 72, 11, 20)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{289, 216, 1; 1, 72, 289\}$*), или* $[u]$ *имеет параметры* $(325, 54, 3, 10)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$*);*

(4) $[u]$ *имеет параметры* $(441, 88, 7, 20)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{441, 352, 1; 1, 88, 441\}$*), или* $[u]$ *имеет параметры* $(505, 84, 3, 16)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{505, 420, 1; 1, 84, 505\}$*), или* $[u]$ *имеет параметры* $(625, 104, 3, 20)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{625, 520, 1; 1, 104, 625\}$*).*

Список литературы

[1] Махнев А. А., Падучих Д. В., Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Доклады академии наук, Т.464, 4, 2015, 396–400.

[2] Махнев А. А. Сильно регулярные графы со вторым собственным значением 4 и их расширения // Труды Института математики, Минск, Т.23, 2, 2015, 82–87.

[3] Гутнова А. К., Махнев А. А., Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-4}(s,t)$ // Владикавказский матем. журнал, Т.17, 1, 2015, 21–30.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com

Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик: почти простой случай

А. А. Махнев, Л. Ю. Циовкина

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных пар смежных вершин). Пусть Γ — это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$, Σ — множество его антиподальных классов и $\lambda = k-(r-1)\mu-1$. Легко понять, что группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ индуцирует дважды транзитивную группу G^Σ подстановок на Σ.

Целью настоящей работы является описание реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с почти простой группой G^Σ. До недавнего времени этот класс графов оставался малоизученным. В [**1, 2**] были исследованы графы из данного класса, удовлетворяющие условию $\lambda = \mu$. Кроме того, в [**1**] рассмотрен случай, когда индекс антиподальности совпадает со степенью графа или равен 2. В [**4**] найдены антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3, допускающие транзитивную на дугах группу автоморфизмов, изоморфную группе $PSU_3(q)$ или группе $SU_3(q)$. В [**3**] получено описание графов с $\lambda \neq \mu$ при условии, что $(soc(G^\Sigma), k+1) \neq (L_d(q), (q^d-1)/(q-1))$. В данной работе завершается классификация реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с почти простой группой G^Σ в случае $\lambda \neq \mu$ и $r \notin \{2,k\}$. Доказана

Теорема. *Пусть Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$, где $r \notin \{2,k\}$, и $\lambda \neq \mu$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, Σ — множество антиподальных классов графа Γ, $\bar{G}$ группа подстановок, индуцированная G на Σ, и цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ — простая неабелева группа. Тогда $\bar{T} = U_3(q)$, $SU_3(q)$ действует транзитивно на дугах графа Γ, $k = q^3$, $\mu = (q+1)(q^2-1)/r$ и r делит $q+1$.*

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00061).

Список литературы

[1] Makhnev A. A., Paduchikh D. V., Tsiovkina L. Yu., Arc-transitive distance-regular covers of cliques with $\lambda = \mu$ // Proc. Stekl. Inst. Math., V.284, Suppl.1, 2014, 124–134.

[2] Tsiovkina L. Yu., Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$ // J. Algebr. Comb., V.41, 4, 2015, 1079–1087.

[3] Makhnev A. A., Paduchikh D. V., Tsiovkina L. Yu., Arc-transitive distance-regular covers of complete graphs: almost simple case // Abstr. of the Intern. Conf. on Groups and Graphs, Spectra and Symmetries, Novosibirsk, 2016, p.106.

[4] Tsiovkina L. Yu., Arc-transitive antipodal distance-regular covers of complete graphs related to $SU_3(q)$ // Discrete Math., V.340, 2, 2017, 63–71.

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, l.tsiovkina@gmail.com

Упрощение доказательства теоремы Бёрнса о базисном ранге

В. Г. Микаелян

Базисный ранг $l(\mathfrak{V})$ многообразия групп $\mathfrak{V}$ определяется как минимальный (конечный или счетный) ранг l, для которого относительно свободня группа $F_l(\mathfrak{V})$ порождает $\mathfrak{V}$. Одним из первых ключевых фактов о базисном ранге является теорема Р. Бёрнса 1965 года: если $\mathfrak{N}_{c,m} = \mathfrak{N}_c \cap \mathfrak{B}_m$ есть многообразие всех нильпотентных групп класса не более c и экспонент, делящих m, а $\mathfrak{A}_n$ – многообразие всех абелевых групп экспонент, делящих n, то $l(\mathfrak{N}_{c,m}\mathfrak{A}_n)$ равно c для любых взаимно простых m и n [**1**] (за определениями всех специальных понятий ниже мы отсылаем к [**4**]).

В нашей последней заметка мы классифицировали все случаи, когда равенство $\mathrm{var}\,(A \,\mathrm{wr}\, B) = \mathrm{var}\,(A)\,\mathrm{var}\,(B)$ выполняется для заданных конечных групп A а B [**3**, Теорема 1] (см. также [**2**], где мы решили подобную задачу для всех абелевых групп A а B). В [**3**], беря A и B любыми конечными группами, порождающими $\mathfrak{N}_{c,m}$ а $\mathfrak{A}_n$ соответственно, мы получаем заметно более короткое доказельтво к теореме Р. Бёрнса. Опишем те шаги в [**3**], которые приводят к обновленному доказательтву.

Первая оценка $l(\mathfrak{N}_{c,m}\mathfrak{A}_n) \le c$ следует из аргументов несущественно отличающихся от [**1**]: любая неабелева критическая группа в произведении $\mathrm{var}\,(A)\,\mathrm{var}\,(B)$ есть расширение некоторой группы из $\mathrm{var}\,(A)$ с помощью не более чем c-порожденной группы из $\mathrm{var}\,(B)$.

Допустим вторая оценка $l(\mathfrak{N}_{c,m}\mathfrak{A}_n) \ge c$ *не* верна для некоторых c, m, n (где m, n взаимно просты). Обозначим $\mathfrak{L} = \mathrm{var}\,(A) \subseteq \mathfrak{N}_{c,m}$, и пусть p – любое простое число, не делящее m. Через $W(A,p)$ обозначим вербальное сплетение $F_c(\mathfrak{L})\,\mathrm{wr}_{\mathfrak{L}}\, C_p^c$. Используя известную формулу оценки индекса пересечений подгрупп через индексы сами́х подгрупп, можно показать, что пересечение нормальных замыканий всех элементов из C_p^c нетривиально в $W(A,p)$. Из [**5**, Лемма 6.1] и [**4**, Теорема 15.4] следует, что $F_{2c}(\mathfrak{L}\mathfrak{A}_p)$ вместе со своей подгруппой $W(A,p)$ вложим в прямую степень $A \,\mathrm{wr}\, B^{\left((A \,\mathrm{wr}\, B)^{2c}\right)}$ группы $A \,\mathrm{wr}\, B$. Сравнение порядков силовских продгрупп показывает, что хотя бы для одного p, делящего n, вложение выше приводит к противоречию.

Хочу выразить большую признательность рецензенту «Алгебры и логики» за высокопрофессиональную работу. Его замечания позволили еще более сократить один из основных шагов в [**3**].

Список литературы

[1] Burns R., Verbal wreath products and certain product varieties of groups // J. Austral. Math. Soc., V.7, 1967, 356–374.

[2] Mikaelian V. H., Metabelian varieties of groups and wreath products of abelian groups // Journal of Algebra, V.313, 2, 2007, 455–485.

[3] Микаелян В. Г., Критерий Шмелькина и многообразия, порожденные сплетениями конечных групп // arXiv.org 1503.08474.

[4] Neumann H., Varieties of Groups // Varieties of groups (Ergebn. Math. Grenzg., 37), Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1967.

[5] Шмелькин А. Л., Сплетения и многообразия групп, Изв. АН СССР. Сер. матем., Т.29, 1965, 149–170.

Ереванский гос. университет, Американский университет Армении, Ереван
E-mail: v.mikaelian@gmail.com

Группы с формационно субнормальными подгруппами

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Естественным обобщением субнормальности является формационное понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности [**1**, 6.1]. Теории $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп посвящена гл. 6 монографии [**1**], в которой изложены результаты по состоянию на 2005 г. В текущем десятилетии группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами изучались в работах [**2**]– [**8**]. Эти исследования получили развитие в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Каждая примарная подгруппа разрешимой группы G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$; либо*

(1) $G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ — самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$; либо

(2) $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$, подгруппой Картера является не $\mathfrak{F}$-субнормальная нециклическая силовская p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$ и каждая собственная подгруппа из P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, $G = G^{\mathfrak{N}}P$ и $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ для всех $G^{\mathfrak{N}} \leq H < G$.

Здесь $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна, $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

Список литературы

[1] Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups // Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

[2] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н, О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн., Т.51, 6, 2010, 1270–1281.

[3] Васильев А. Ф., Васильева Т. И, О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Пробл. физики, математики и техники, Т.4, 9, 2011, 86–91.

[4] Monakhov V. S., Kniahina V. N, Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ric. Mat., V.62, 2, 2013, 307–322.

[5] Мурашко В. И, Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Сиб. мат. журн., Т.55, 6, 2014, 1353–1367.

[6] Монахов В. С, Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн., Т.57, 2., 2016, 447–462.

[7] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С, Конечные группы с обощенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн., Т.57, 2, 2016, 259–275.

[8] Semenchuk V. N., Skiba A. N, On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups // J. Algebra and Its Appl., V.15, 4, 2016, 1650063 [11 pages].

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
E-mail: victor.monakhov@gmail.com, irina.sokhor@gmail.com

Копредставления знакопеременной группы

А. Ю. Овчаренко

Теорема. *Знакопеременная группа A_n имеет следующие копредставления:*

1 [**1**]. $\langle x_1,\dots,x_{n-2} \mid x_1^3 = x_i^2 = (x_i x_{i+1})^3 = (x_i x_j)^2 = 1,$ где $|j-i| \geqslant 2, 2 \leqslant i,j \leqslant n-2\rangle$;

2. $\langle x_1,\dots,x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_{i+1}x_i x_{i-1}\dots x_1 x_{i+1})^2 = \left[(x_2x_1x_3)^2, x_2^{-1}\right] = (x_{i-1}x_{i+1}x_i)^2 = (x_i x_{i-1} x_{i+1})^2 = (x_1 x_{i+1} x_i x_{i-1}\dots x_1)^2 = [x_i, x_j] = 1,$ где $|j-i| > 3,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n-2\rangle$;

3. $\langle x_1,\dots,x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_1x_2\dots x_i^2)^2 = \left(x_i^2 x_{i+1}^2\right)^3 = (x_i^2 x_{i+1}\dots x_j^2)^2 = 1,$ где $|j-i| > 3,$ $1 \leqslant i,j \leqslant n-2\rangle$;

4 [**2**]. $\langle x_1,\dots,x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_i x_j)^2 = 1,$ где $|j-i| > 3,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n-2\rangle$;

5. $\langle x_1,\dots,x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_1x_2\dots x_i)^3 = \left((x_1x_2\dots x_i)^2 (x_{i+1}\dots x_j)\right)^2 = 1,$ где $|j-i| > 3,$ $1 \leqslant i,j \leqslant n-2\rangle$;

6. $\langle x_1,\dots,x_{n-2} \mid x_i^3 = \left(x_1x_2\dots x_i \dots x_2^{-1}x_1^{-1}\right)^3 = \left(x_i x_{i+1}\dots x_j \dots x_{i+1}^{-1}\right)^2 = \left(x_{i-1}x_i x_{i+1} x_i^{-1}\right)^2 = [x_i, x_j] = 1,$ где $|j-i| > 3,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n-2\rangle$.

Мы используем эти представления для поиска целочисленных графов Кэли на знакопеременных группах A_n для различных фиксированных n.

Список литературы

[1] Huppert B., Endliche Gruppen. I // Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1967.

[2] Мазуров В. Д., Характеризация знакопеременных групп II // Алгебра и логика, Т.45, 2, 2006, 203–214.

СибГУТИ, Новосибирск
E-mail: shmatova_www@mail.ru

О группах с конечным множеством классов сопряженных элементов

Ин. И. Павлюк, И. И. Павлюк

В работе [**1**] С.Н. Черникова установлено, что в группе с конечным множеством классов сопряженных элементов найдется нормальный делитель конечного индекса содержащий конечное множество классов сопряженных элементов. Теоремой 1 работы обобщается отмеченный результат С.Н. Черникова. Следствие 2 дает конечность индекса коммутанта группы с конечным множеством классов сопряженных элементов.

Ключевые слова: класс сопряженных элементов, индекс коммутанта в группе.

Лемма [**2**] *Множество элементов произвольного смежного класса gH группы G по подгруппе H тогда и только тогда замкнуто по сопряжению своих элементов, когда подгруппа $H = G'$ — коммутанту группы.*

Лемма *Коммутант G' группы G с конечным множеством классов сопряженных элементов имеет в ней конечный индекс.*

Теорема. *Если группа G имеет конечное множество классов сопряженных элементов, то конечное множество классов сопряженных элементов имеет каждая ее подгруппа конечного индекса.*

Следствие 1. *Если группа имеет конечное множество классов сопряженных элементов, то конечное множество классов сопряженных элементов имеет каждый е нормальный делитель конечного индекса.*

Следствие 2. *Коммутант группы с конечным множеством классов сопряженных элементов содержит конечное множество классов сопряженных элементов.*

Список литературы

[1] Черников С. Н., Условия конечности в общей теории групп // Успехи математических наук, Т.14, 5, 1959, 45–96.

[2] Павлюк Ин. И., Ютовец Е. В., Ляшенко П. П., Об индексной эквивалентности и FC—центре групп // Международная научная конференция студентов магистрантов и молодых ученых "Ломоносов-2009", Тезисы докладов. Часть 1, Астана, 2009, 69–71.

г. Павлодар, г. Новосибирск
E-mail: ivan.pavlyuk@mail.ru

Об автоморфизмах целочисленных групповых колец конечных групп

А. М. Попова, Е. В. Грачев

Пусть $G = \{g_1 = e, g_2, ..., g_n\}$ — конечная группа, ZG — целочисленное групповое кольцо группы G. Известная гипотеза Цассенхауза утверждала, что любой нормализованный автоморфизм кольца ZG есть композиция автоморфизма группы G и сопряжения единицей групповой алгебры QG. Однако к этой гипотезе были построены контрпримеры (K.W.Roggenkamp, L.L.Scott (1988), M.Hertweck (2002)). Мы рассматриваем эту проблему с помощью теории представлений. Если $R(G)$ — правое регулярное представление G, то очевидно, что $ZG \cong Z[R(G)]$, где $Z[R(G)]$ — матричное кольцо, порожденное группой $R(G)$. Пусть $T_1(G), ..., T_s(G)$ — все неприводимые неэквивалентные представления группы G степеней $n_1, ..., n_s$ с характерами $\chi_1, ..., \chi_s$. Существует матрица $t \in GL_n(C)$ такая, что $(R(G))^t$ имеет клеточно-диагональный вид, в который каждое представление $T_i(G)$ входит ровно n_i раз. Пусть K — минимальное поле представления группы G, $\tau \in AutQ(\chi_i)$, τ' — продолжение τ до автоморфизма поля K, $\hat{\tau'}$ — изооморфизм алгебры $Q[(R(G))^t]$, определенный по правилу $\hat{\tau'}(a_{ij}) = (a_{ij}^{\tau'})$. Нетрудно показать, что в этих терминах любой автоморфизм кольца $Z[(R(G))^t]$ есть композиция некоторого $\hat{\tau'}$ и сопряжения φ_s единицей s алгебры $Q[(R(G))^t]$. По сравнению с гипотезой Цассенхауза получается другая факторизация автоморфизмов кольца. И тут возникает вопрос: для любого ли $\tau \in AutQ(\chi_i)$ существует такая единица s алгебры $Q[(R(G))^t]$, что композиция $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$ является автоморфизмом кольца $Z[(R(G))^t]$. Цель работы — сформулировать условия, при выполнении которых такая s существует и найти ее.

Прежде всего отметим, что необходимым условием существования такой s является совпадение Q -алгебр $Q[(R(G))^t]$ и $Q[((R(G))^t)^{\hat{\tau'}}]$. В частности, если индексы Шура всех представлений $T_i(G)$ равны 1, это выполняется, в противном случае этого утверждать нельзя. Будем предполагать, что Q-алгебры совпадают. Тогда, если в некотором базисе модуля Z^n матрицы $(R(G))^t$ имеют левое регулярное представление $R_l(g_i)$, то в этом же базисе матрицы $((R(G))^t)^{\hat{\tau'}}$ имеют вид

$$L(g_i) = \frac{p_1^i}{q_1^i} R_l(g_1) + ... + \frac{p_n^i}{q_n^i} R_l(g_n)$$

Теорема. *Если $Q[(R(G))^t] = Q[((R(G))^t)^{\hat{\tau'}}]$, то для данного $\tau \in AutQ(\chi_i)$ существует единица s алгебры $Q[(R(G))^t]$ такая, что композиция $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$ является автоморфизмом кольца $Z[(R(G))^t]$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия. Существует вектор $u = (u_1, ..., u_n) \in Z^n$ такой, что*

1) $uL(g_i) \in Z^n, i = 1, ..., n;$

2) *векторы $u(R(g_i)), g_i \in G, i = 1, ..., n$ линейно независимы.*

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ampopova@ngs.ru

О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений нильпотентных групп с центральными объединенными подгруппами

А. В. Розов, Е. В. Соколов

Пусть G — свободное произведение нильпотентных групп A и B с объединенными подгруппами H и K, подгруппа H лежит в центре группы A, подгруппа K — в центре группы B, $H \neq A$ и $K \neq B$. Установлено, что вопрос об аппроксимируемости данной свободной конструкции нильпотентными группами имеет следующее простое решение.

Теорема 1. *Группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает (обычное) свободное произведение фактор-групп A/H и B/K.*

Отметим, что критерий нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения нильпотентных групп указан А. И. Мальцевым в [**1**]. С учетом этого критерия теорема 1 допускает следующую равносильную формулировку.

Теорема 1′. *Группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда выполняется одно из приводимых далее утверждений.*

1. *Фактор-группы A/H и B/K не имеют кручения.*

2. *Для некоторого простого числа p группы A/H и B/K не содержат p-полных элементов, отличных от* 1.

Напомним, что элемент x группы X называется p-полным, если для любого целого положительного числа n существует такой элемент $y \in X$, что $y^{p^n} = x$. Легко видеть, что в конечно порожденной нильпотентной группе отличный от 1 элемент является p-полным тогда и только тогда, когда он имеет конечный порядок, взаимно простой с p. Отсюда вытекает

Следствие. *Если свободные множители A и B конечно порождены, то группа G аппроксимируема нильпотентными группами тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p периодические части фактор-групп A/H и B/K являются конечными p-группами.*

Данное следствие обобщает основной результат работы [**2**].

Список литературы

[1] Мальцев А. И., Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб., Т.25, 3, 1949, 347–366.

[2] Иванова Е. А., Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух абелевых групп // Чебышевский сб, Т.3, 1, 2002, 72–77.

Ивановский государственный университет, г. Иваново
E-mail: post-box023@mail.ru, ev-sokolov@yandex.ru

К вопросу Д. Бейдлемана и Ш. Смита

М. В. Селькин, Р. В. Бородич, Е. Н. Бородич

В работе Д.Бейдлемана и Ш.Смита [**1**] был поставлен следующий вопрос: "Если H — субнормальная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?". Эта задача рассматривалась в работах многих авторов (см. монографию [**2**])

Подгрупповым функтором θ называется функция, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$, состоящее из некоторых её подгрупп и самой группы G, при этом $\theta(G^{\alpha}) = (\theta(G))^{\alpha}$ для любого автоморфизма α группы G.

Функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Пусть θ — подгрупповой функтор. Обозначим $\Phi_{\theta}(G, A) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G. Если в G таких подгрупп нет, то положим $\Phi_{\theta}(G, A) = G$.

В случае, когда θ тривиальный (абнормальный) функтор, а группа операторов A единична, то подгруппа $\Phi_{\theta}(G, A)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ (подгруппой Гашюца $\Delta(G)$).

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ — абнормально полный функтор. Если N — субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_{\theta}(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_{\theta}(G, A)$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ — абнормально полный функтор. Если N — субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_{\theta}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

Список литературы

[1] Beidleman J. C., On Frattini-like subgroups // Glasgow Math. J., V.35, 1993, 95–98.

[2] Селькин М. В., Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп // Мн.:Беларуская навука, 1997. — 144 с.

Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины", Гомель
E-mail: Borodich@gsu.by

Метасовершенные группы

Р. В. Скуратовский

В данной работе автор продолжает исследовать введенный им в [**2**] новый класс метасовершенных групп, которые есть обобщением введённых в статье [**1**] метазнакопеременных групп, поскольку знакопеременная группа есть совершенной при $n \geq 5$. *Метасовершенной группой* $D(\overline{k})$, ранга m, метастепени $\overline{k} = (k_1, ..., k_m)$ называется сплетение $(D_1, X_{k_1}) \wr (D_2, X_{k_2}) \wr ... \wr (D_m, X_{k_m})$ совершенных групп подстановок (D_1, X_{k_1}), ... ,(D_m, X_{k_m}). Здесь мы продолжаем исследовать конечные метасовершенные группы и рассматриваем случай бесконечных метасовершенных групп конечного ранга [**2**]. Под совершенной группой понимаем такую, что $G = [G, G]$. Следующая теорема существенно расширяет найденные авторов в [**2**] условия существования двух элементной системы образующих для метасовершенной группы.

Теорема. *Если группы $G = \langle t_0, t_1 \rangle$, $D = \langle s_0, s_1 \rangle$ совершенны а G транзитивно дейтвует на $X = \{1, ..., n\}$ и выполнено одно из условий $(ord(t_0) : \ |x^{\langle t_0 \rangle}| ord(t_1)) = 1$ или $(ord(s_0) : \ |x^{\langle s_0 \rangle}|, \ ord(s_1)) = 1$, то $G \wr D$ имеет двух элементную систему образующих и есть совершенной.*

Теорема. *Если $D = \wr_{i=1}^{m-1} D_i$, $D_i = \langle t_i, \ s_i \rangle$ совершенная группа и $G = \langle t_0, s_0 \rangle$ транзитивно действует на $X = \{1, 2, ..., n\}$ так, что существуют $x_i \in X$ удовлетворяющие $(ord(t_i) : |{x_{i+1}}^{\langle t_i \rangle}|, \ ord(s_{i+1})) = 1, \ \ i \in \{0, 1, ..., m-2\}$, если при этом группа G есть 2 - допустимой [**2**], а каждая D_i, $1 \leq i \leq k$, имеет конечную ширину по коммутанту [**5**], тогда $G \wr D$ имеет 2 образующих.*

Теорема. *Метасовершенная группа D, которая задана посредством ограниченного сплетения совершенных групп есть совершенной.*

Теорема. *Пусть W_∞ – класс бесконечных метасовершенных групп конечного ранга. Тогда в W_∞ существует подкласс групп заданых как неограниченнное сплетение транзитивных совершенных групп содержащих хоть одну пассивную группу с бесконечной шириной по коммутанту* [**3**]*, которые не являются совершенными.*

Примером такой метасовершенной группы не являющейся совершенной есть $W = A \wr B$, где $A = \cup_{i=5}^{\infty} Alt(i)$ – бесконечная знакопеременная группа, B – совершенная группа с бесконечной шириной по коммутанту.

Список литературы

[1] Заводя М. В., Сикора В. С., Сущанский В. И., Системы образующих метазнакопеременных групп конечного ранга // Наук. весн. Черновецкого ун-ту, Черновцы Рута, 2006, 64–72. (На украинском)

[2] Скуратовский Р. В., Минимальные системи образующих и свойства сплетений совершенных групп // Начные вести НТУУ «КПИ», 2014, 93–101. (На украинском)

[3] Muranov A., Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width. arXiv:math/0608688v4.

МАУП, Киев
E-mail: ruslan@imath.kiev.ua

О периодических группах с регулярным автоморфизмом порядка 4

А. И. Созутов, А. Х. Журтов

Известная гипотеза Г. Фробениуса о нильпотентности конечной группы с регулярным автоморфизмом простого порядка, доказанная Д. Г. Томпсоном [**1, 2**], в теории конечных групп играет ключевую роль. Д. Горенстейн и И. Херстейн доказали [**3**], что конечная группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 разрешима, а ее коммутант нильпотентен. Разрешимость конечной группы с регулярным автоморфизмом произвольного порядка явилась одним из важных следствий классификации конечных простых групп [**4**, теор. 1.48]. Для бесконечных групп ситуация совершенно иная. Произвольная группа, допускающая регулярный расщепляющий автоморфизм порядка 2, или 3, абелева, или нильпотентна класса не выше 2 [**5**]. Также известно, что периодическая группа с регулярным автоморфизмом простого порядка p при $p = 2$ абелева, а при $p > 2$ не обязана быть локально конечной (см., например, [**6**]). П. В. Шумяцким в [**7**] был поставлен следующий естественный вопрос

12.100. *Всякая ли периодическая группа с регулярным автоморфизмом порядка* 4 *является локально конечной?*

В докладе пойдет речь о ряде свойств групп из данного вопроса, позволяющих надеяться на его положительно решение.

Список литературы

[1] Thompson J.G., Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., V.45, 1959, 578–581.

[2] Thompson J.G., Normal p-complements for finite groups // Math. Z., V.72, 1960, 32–354.

[3] Gorenstein D., Herstein I. N., Finite Groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4 // American Journal of Mathematics, V.83, 1, Jan., 1961, 71–78.

[4] Горенстейн Д., Конечные простые группы, Введение в их классификацию // М., Мир, 1985.

[5] Журтов А. Х., Мазуров В. Д., О группах Фробениуса, порождённых квадратичными элементами // Алгебра и логика, Т.42, 3, 2003, 271–292.

[6] Созутов А. И., Дураков Е. Б., О двух вопросах из Коуровской тетради // Алгебра и логика, Т.52, 5, 632–637.

[7] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп, 6–17 издания, Новосибирск, 1978–2012 гг.

Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами конечного индекса

Е. В. Соколов

Понятие корневого класса групп было введено К. Грюнбергом в [**1**]. Известно, что класс групп $\mathcal{C}$ является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений [**2**]. Настоящая работа продолжает изучение вопроса об аппроксимируемости замкнутым относительно факторизации (т. е. взятия фактор-групп) корневым классом групп $\mathcal{C}$ HNN-расширения с центральными связанными подгруппами. В [**3**] анонсирован критерий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости такого HNN-расширения при условии, что связанные подгруппы имеют конечные индексы в базовой группе, а класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп. Если же класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу; G — HNN-расширение группы B со связанными подгруппами H и K, лежащими в центре B.*

1. Если существует подгруппа Q, содержащаяся в $H \cap K$, нормальная в G и такая, что $B/Q \in \mathcal{C}$, то HNN-расширение G $\mathcal{C}$-аппроксимируемо.

2. Если подгруппы H и K имеют в группе B конечные индексы, отличные от 1, то верно и обратное: из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости HNN-расширения G следует существование подгруппы Q, содержащейся в $H \cap K$, нормальной в G и такой, что $B/Q \in \mathcal{C}$.

Отметим, что полученные результаты в определенной мере дополняют теоремы 3 и 4 из [**4**], в которых речь идет о финитной аппроксимируемости HNN-расширения, связанные подгруппы которого имеют конечные индексы в базовой группе.

Список литературы

[1] Gruenberg K. W., Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc., V.7, 1957, 29–62.

[2] Sokolov E. V., A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra, V.43, 2, 2015, 856–860.

[3] Соколов Е. В., Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых HNN-расширений с центральными связанными подгруппами // Материалы XIV Международной конференции ««Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»», посвященной 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина, Саратов, 12–15 сентября 2016, 94–96.

[4] Азаров Д. Н., О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн., Т.54, 6, 2013, 1203–1215.

Ивановский государственный университет, г. Иваново
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Абелевы группы с полным по Чеху пространством подгрупп

С. Р. Султанов

Широкое изучение пространства $L_E(G)$ замкнутых подгрупп топологической группы G было начато с работы [**1**], в которой были описаны локально компактные группы с компактным пространством замкнутых подгрупп. Так, вопросы полноты по Дьедонне и псевдокомпактности данного пространства изучались в работе [**2**]. Здесь мы рассмотрим вопрос полноты по Чеху пространства подгрупп для дискретной абелевой группы. Напомним некоторые определения. Пусть G - группа, $L(G)$ - множество всех подгрупп данной группы G. Положим $D_1(U) = \{H \in L(G) | H \subset U\}$, и $D_2(V) = \{H \in L(G) | H \cap V \neq \oslash\}$.

Тогда множества вида $D_1(U) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n)$, где $U, V_1, V_2, \ldots, V_n$ - всевозможные подмножества G, будут образовывать базу E - топологии на $L(G)$. Следуя [**1**] пространство $L(G)$ с определенной в нем E - топологией обозначим $L_E(G)$. Дадим следующее определение.

Определение. Будем говорить, что окрестность $U(H)$ точки H в пространстве $L_E(G)$ группы G удовлетворяет условию минимальности, если в $U(H)$ не найдется бесконечно убывающей цепочки $H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots$ подгрупп группы G. Если каждая подгруппа группы G обладает окрестностью с условием минимальности, то будем говорить, что группа G удовлетворяет условию E - минимальности [**3**].

Получена следующая теорема.

Теорема. Для абелевой группы G следующие условия являются равносильными:

1) пространство $L_E(G)$ полно по Чеху;

2) в группе G найдется конечно порожденная группа H такая, что фактор-группа G/H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп;

3) группа G удовлетворяет условию E - минимальности.

Список литературы

[1] Протасов И. В., Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сибирский математический журнал, Т.20, 2, 1979, 378–385.

[2] Панасюк С. П., Султанов С. Р., К вопросу о полноте по Дьедонне пространств замкнутых подмножеств и подгрупп // Украинский математический журнал, Т.44, 11, 1992, 1525–1529.

[3] Султанов С. Р., Группы с ограничениями на пространство подгрупп // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Рязань, 1999, 78с.

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, Рязань
E-mail: s.sultanov@rsu.edu.ru

Порождаемость групп Шевалле исключительных типов над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны

И. А. Тимофеенко

Теорема. *Присоединенные группы Шевалле типа E_l и G_2 над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Используя метод выбора порождающих троек инволюций в группах лиева типа над конечными полями, разработанный в статьях Я. Н. Нужина [**1, 2, 3**], мы указываем явно порождающие тройки инволюций, две из которых перестановочны, для присоединенных групп Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел. Для группы Шевалле типа G_2 такие порождающие указаны автором в [**4**]. Таким образом, получен положительный ответ для всех исключительных групп Шевалле, кроме типа F_4, на следующий вопрос из Коуровской тетради [**5**, вопрос 15.67]

(A) Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

Для групп Шевалле классических типов по вопросу (A) ранее были получены следующие результаты.

В работе [**6**] М. С. Тамбурини и П. Цукка установлено, что специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ при $n \geq 14$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Следовательно, и проективная специальная линейная группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 14$ обладает такой тройкой порождающих инволюций. Более того, Я. Н. Нужин [**7**] доказал, что для $PSL_n(\mathbb{Z})$ ответ на вопрос (A) положительный тогда и только тогда, когда $n \geq 5$. На самом деле, в [**7**] при $n \neq 4k+2$ порождающие тройки инволюций выбирались из $SL_n(\mathbb{Z})$, поэтому для группы $SL_n(\mathbb{Z})$ ответ на аналог вопроса (A) неизвестен только для $n = 6, 10$.

В силу гомоморфизма $PSp_n(\mathbb{Z}) \to PSp_n(\mathbb{Z}_p)$ из непорождаемости тремя инволюциями, две из которых перестановочны, проективной симплектической группы $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$ [**3**] следует отрицательный ответ на вопрос (A) для группы $PSp_4(\mathbb{Z})$, которая изоморфна присоединенной группе Шевалле $B_2(\mathbb{Z})$.

Отметим также, что над $\mathbb{Z}$ каждая присоединенная группа Шевалле исключительного типа, отличного от E_7, совпадает с универсальной. Здесь порождающие тройки инволюций для типа E_7 выбираются именно в присоединенной группе. Таким образом, ответ на вопрос (A) для универсальной группы Шевалле типа E_7 остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707).

Список литературы

[1] Нужин Я. Н., Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и Логика, Т.29, 2, 1990, 192–206.

[2] Нужин Я. Н., Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I // Алгебра и логика, Т.36, 1, 1997, 77–96.

[3] Нужин Я. Н., Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II // Алгебра и логика, Т.36, 4, 1997, 422–440.

[4] Timofeenko I. A., Generation of the Chevalley group of type G_2 over the ring of integers by three involutions two of which commute // Журнал СФУ Сер. Матем. и физ., Т.8, 1, 2015, 104–108.

[5] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп), 17-е изд., дополненое, Новосибирск, ИМ СО РАН, 2010.

[6] Tamburini M. C., Zucca P., Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra, V.195, 1997, 650–661.

[7] Нужин Я. Н., О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями две из которых перестановочны // Владикавказский матем. журнал, Т.10, 1, 2008, 68–74.

Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: vvk@csu.ru

Централизаторные размерности частично коммутативных метабелевых групп

Е. И. Тимошенко

Граф $\Gamma = (X; E)$ – это конечное множество вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, на котором задано симметричное бинарное отношение смежности $E \subseteq X \times X$ и для всех x_i имеет место $(x_i, x_i) \notin E$.

Частично коммутативная метабелева группа M_Γ с определяющим графом Γ имеет представление

$$M_\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } (x_i, x_j) \in E; \ \mathfrak{A}^2 \rangle$$

в многообразии $\mathfrak{A}^2$ метабелевых групп.

А. Мясников и П. Шумятский ввели понятие *централизаторной размерности* $Cdim(G)$ для любой группы G. По определению $Cdim(G) = m$, если в группе существует строго убывающая цепочка централизаторов длины m

$$C(M_1) > C(M_2) > \ldots > C(M_m)$$

и не существует более длинной строго убывающей цепочки централизаторов. Если для группы G длины цепочек не ограничены, то полагают $Cdim(G) = \infty$.

Класс групп конечной централизаторной размерности довольно широк. В частности конечно порожденные метабелевы группы имеют конечную централизаторную размерность.

Мы доказываем, что централизаторные размерности 2-порожденных метабелевых групп без кручения не ограничены и изучаем централизаторные размерности частично коммутативных метабелевых групп M_Γ. Для этого определяем две числовые характеристики $\alpha(M_\Gamma)$ и $\beta(M_\Gamma)$, а затем доказываем, что

$$Cdim(M_\Gamma) \leq \alpha(M_\Gamma) + \beta(M_\Gamma) + 1. \tag{1}$$

Далее получаем, что централизаторная размерность частично коммутативной метабелевой группы, определенной циклом длины $n \geq 5$, равна 7. Отметим, что ранее автором была вычислена централизаторная размерность частично коммутативной метабелевой группы, определяющий граф Γ которой – дерево. Она равна 3, если Γ – звезда, и 5 в остальных случаях. Используя неравенство (1), мы устанавливаем, что для любой частично коммутативной метабелевой группы M_Γ её централизаторная размерность не превышает $2n + 1$, где n – количество вершин определяющего графа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01485), а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки (государственное задание 2014/138, проект 1052).

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: eitim45@gmail.com

Об аппроксимируемости групп Баумслага–Солитэра корневыми классами, состоящими из периодических групп

Е. А. Туманова

Напомним, что группами Баумслага–Солитэра называются группы с одним определяющим соотношением вида

$$\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$

где без потери общности можно считать, что $|n| \geq m > 0$. Напомним также [**1**], что класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет условию Грюнберга: если X — некоторая группа и $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что X/Y, $Y/Z \in \mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$ (другие равносильные определения корневого класса можно найти в [**2**]).

В [**3**] автором был анонсирован критерий аппроксимируемости групп Баумслага–Солитэра произвольным корневым классом $\mathcal{K}$, замкнутым относительно взятия фактор-групп. В случае, когда класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, этот критерий может быть дополнен следующим образом.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\pi(\mathcal{K})$ — множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{K}$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Группа $BS(m,n)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*
2. *Группа $BS(m,n)$ аппроксимируема конечными $\mathcal{K}$-группами.*
3. *Группа $BS(m,n)$ аппроксимируема конечными разрешимыми $\pi(\mathcal{K})$-группами (как обычно, под $\pi(\mathcal{K})$-группой понимаем группу, порядок которой является $\pi(\mathcal{K})$-числом).*

Непосредственно из сформулированной теоремы вытекает

Следствие. *Группа $BS(m,n)$ аппроксимируема классом конечных разрешимых групп тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема (т. е. тогда и только тогда, когда $m = 1$ или $m = |n|$).*

Список литературы

[1] Gruenberg K. W., Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc., V.7, 1957, 29–62.

[2] Sokolov E. V., A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra, V.43, 2, 2015, 856–860.

[3] Туманова Е. А., Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитера // Мальцевские чтения 2015, Тез. докл. междунар. науч. конф., посвященной 75-летию Ю. Л. Ершова, Новосибирск, НГУ, С.129.

Ивановский государственный университет, г. Иваново
E-mail: helenfog@.ru

Факторизации конечных групп тремя подгруппами

В. Н. Тютянов

Рассматриваются только конечные группы. Пусть A, B, C являются подгруппами группы G. Если $G = AB = AC = BC$, то будем говорить, что группа G обладает тройной факторизацией. В большинстве работ о группах с тройной факторизацией исследуется строение группы G в зависимости от строения сомножителей A, B, C и способа их вложения в G.

В 1960 г. Х. Виландт [**1**] установил, что если A, B, C разрешимы и их индексы в G попарно взаимно просты, то G является разрешимой группой. Позже Л.С. Казарин [**2**] показал, что арифметические условия в [**1**] можно опустить и при этом разрешимость группы G сохраняется. В общем случае, если индексы подгрупп A, B, C в G попарно взаимно просты, то, как показано в [**3**], G не является простой неабелевой группой. Ряд важных результатов о группах с тройной факторизацией был установлен О. Кегелем и Е. Пеннингтон.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – конечная простая неабелева группа. Если $G = AB = AC = BC$, то группа G принадлежит следующему списку: A_6; M_{12}; $P\Omega_8^+(q)$; $PSp_{2m}(2)$, $m \geq 2$.*

Также получен ряд результатов о группах с тройной факторизацией при ограничениях на строение сомножителей.

Список литературы

[1] Wielandt H, Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierten Gruppen // J. Australian Math. Soc., V.1, 1960, 143–146.

[2] Казарин Л. С., Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. матем. ж., Т.34, 7-8, 1991, 947–950.

[3] Тютянов В. Н., Шеметков Л. А., Тройные факторизации в конечных группах // Докл. НАН Беларуси, Т.46, 4, 2002, 52–55.

Международный университет “МИТСО”, Гомельский филиал, Гомель
E-mail: tyutyanov@front.ru

Конечные группы с $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами

В. Н. Тютянов, Т. В. Тихоненко

Рассматриваются только конечные группы. В работе [**1**] введено следующее

Определение 1. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается через H $\mathbb{P}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.*

Изучению строения конечных групп с заданной системой $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп посвящено достаточно много работ. Мы рассматриваем несколько более общую ситуацию. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ – множества всех натуральных и простых чисел соответственно. Обозначим $\mathbb{P}^2 = \{p^k | p \in \mathbb{P}, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \leq 2\}$.

Определение 2. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}^2$-субнормальной в G (обозначается через H $\mathbb{P}^2$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^2$ для любого $i = 1, \ldots, n$.*

С использованием теоремы о классификации конечных простых неабелевых групп доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G — конечная группа, у которой любая подгруппа Шмидта $\mathbb{P}^2$-субнормальна в G. Тогда G является разрешимой группой.*

Список литературы

[1] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н., О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн, Т.51, 6, 2010, 1270–1281.

Международный университет "МИТСО", Гомельский филиал, Гомель, Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель
E-mail: tyutyanov@front.ru, tihonenkotanya@rambler.ru

Ортогональность в группах

С. Л. Фуксон

В [**1**] авторы вводят понятие бинарного отношения ортогональности в произвольных абелевых группах следующим образом.

Пусть $G = (G, +)$ – аддитивная абелева группа. Пусть $\perp$ – бинарное отношение в G, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(A1) $\forall a \in G : \exists b \in G : a \perp b$,

(A2) $\forall a \in G \setminus \{0\} : a \neg \perp a$,

(A3) $\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow b \perp a$,

(A4) $\forall a, b, c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b + c)$,

(A5) $\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp -b$.

$\perp$ называется ортогональностью в G.

Нам удалось двумя различными способами построить бесконечное множество ортогональностей $(Q_+, \cdot)$, где Q_+ – множество положительных рациональных чисел [**2**].

Исследуя группу $Z_p \oplus Z_p$, мы нашли всевозможные ортогональности групп $Z_2 \oplus Z_2$, $Z_3 \oplus Z_3$, $Z_5 \oplus Z_5$, а также доказали ряд утверждений, позволяющих обобщить полученные результаты [**3**]. Так, например, установлено, что число s всевозможных нетривиальных ортогональностей прямой суммы циклических групп $Z_p \oplus Z_p$, $p \geq 3$, вычисляется по формуле

$$s = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \frac{C^2_{p+1} \cdot C^2_{p-1} \cdot \ldots \cdot C^2_{p-(2i-1)}}{(i+1)!}$$

Вызывает интерес отношение ортогональности в l-группах. В. М. Копытов [**4**] вводит понятие ортогональности элементов решёточно упорядоченной группы следующим образом: элементы a, b l-группы G называются ортогональными, если $|a| \wedge |b| = e$. Обозначим ортогональность элементов a и b символом $a \perp_e b$.

Нами установлено, что $\forall a, b \in G : a \perp_e b \Rightarrow a \perp b$.

Список литературы

[1] Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J. K., Tossavainen T., Perpendicularity in an Abelian Group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, V.13, 2013.

[2] Гриншпон С. Я., Фуксон С. Л., Отношение ортогональности в мультипликативной группе Q_+ // Вестник Томского государственного университета, Математика и механика, Т.6, 38, 2015.

[3] Фуксон С. Л., Ортогональности группы $Z_p \oplus Z_p$ // Вестник Томского государственного университета, Математика и механика, Т.4, 36, 2015.

[4] Копытов В. М., Решёточно упорядоченные группы // М.: Наука, 1984.

ТГУ, Томск
E-mail: fouk.son.ya@gmail.com

О хопфовости гиперграфических полуавтоматов и полугрупп их входных сигналов

Е. В. Хворостухина

Изучение хопфовых алгебраических систем является важной задачей современной алгебры. В настоящей заметке исследуется вопрос о хопфовости гиперграфических полуавтоматов (автоматов без выходных сигналов) и их полугрупп входных сигналов.

Напомним [**1**], что гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X – непустое множество и L – семейство произвольных подмножеств X. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа. Пусть p – произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа принадлежат не более, чем одному его ребру. Например, проективная плоскость и аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами, вершинами которых являются точки этих плоскостей, а ребрами - соответствующие прямые.

В настоящей работе под гиперграфическим полуавтоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [**2**] $A = (X, S, \delta)$, множество состояний которого X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом H. Например, для любого гиперграфа H алгебраическая система $A = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$ (где $(\varphi, x) \in \mathrm{End}H \times X$) является гиперграфическим полуавтоматом, который обозначается $\mathrm{Atm}(H)$ и называется универсальным гиперграфическим полуавтоматом. Полугруппу входных сигналов полуавтомата A будем обозначать также $\mathrm{Inp}(A)$.

Напомним, что алгебраическая система называется хопфовой, если всякий ее эндоморфизм на себя является автоморфизмом.

Теорема. *Пусть* $\mathrm{Atm}(H)$ *– универсальный гиперграфический полуавтомат над эффективным гиперграфом с* p*-определимыми ребрами* H*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *полуавтомат* $\mathrm{Atm}(H)$ *является хопфовой алгебраической системой;*
2) *полугруппа входных сигналов* $\mathrm{Inp}(\mathrm{Atm}(H))$ *является хопфовой алгебраической системой.*

Список литературы

[1] Зыков А. А., Гиперграфы // УМН, Т.29, 6, 1974, 89–154.

[2] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А., Элементы алгебраической теории автоматов // М.:Высшая школа, 1994, 192 с.

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

Плотность подгрупп конечного индекса конечно порожденных свободных групп

Д. Г. Храмцов

Пусть F_n - свободная группа конечного ранга $n \geq 1$ со множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Каждый элемент g группы F_n представляется единственным образом в виде несократимого слова от порождающих из X и обратных к ним. Длина этого слова называется длиной $|g|$ элемента g. Функция длины определяет естественную метрику на графе Кэли $Cay(F_n, X)$ группы F_n относительно порождающего множества X. Шаром $B_X(r)$ радиуса r (с центром в единице) в группе F_n называется метрический шар радиуса r в пространстве $Cay(F_n, X)$ с центром в единичном элементе группы, то есть множество элементов из F_n длины не больше r. *Естественной плотностью* $\delta_X(S)$ подмножества S группы F_n относительно X называется предел $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S \bigcap B_X(n)|}{|B_X(n)|}$ при $n \to \infty$. Есть и другие похожие концепции плотности, например, экспоненциальная плотность и степень коммутативности [**1**], которые можно считать относительно любых порождающих множеств группы F_n. Каждая из них напрямую зависит от выбора порождающего множества, относительно которого считается плотность, поэтому естественной разумно считать именно плотность относительно свободного базиса группы. В работе [**2**] Х.Бурильо и Э.Вентуры, где изучалась, в частности, естественная плотность множества примитивных элементов группы F_n, было установлено (пример 1.3), что плотностью подгруппы индекса 2 слов чётной длины в F_n, является вовсе не $\frac{1}{2}$, как можно было ожидать, а число $\frac{(2n-2)(2n-2)}{((2n-1)^2-1)}$, хотя для других подгрупп индекса 2 прямые вычисления дают плотность, равную именно $\frac{1}{2}$. В связи с этим автором доказана следующая

Теорема. *Подгруппа конечного индекса m свободной группы F_n ранга $n \geq 2$ имеет естественную плотность $\frac{1}{m}$ относительно множества свободных порождающих X тогда и только тогда, когда она не содержится в подгруппе чётных слов группы F_n.*

При этом при подсчёте плотности подгрупп, не лежащих в подгруппе чётных слов, в определении можно убрать супремум. Кроме того показано, что при подходящем выборе порождающего множества группы F_n, плотность её подгруппы чётных слов может быть сколь угодно близка к 1.

Список литературы

[1] Antolin J., Martino A., Ventura E., Degree of commutativity of infinite groups // arXiv: 1511.07269v1.

[2] Burillo J., Ventura E., Counting primitive elements in Free Groups, Geometriae Dedicata // V.93, 1, 2002, 143–162.

ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: dx@math.nsc.ru

Об аксиоматическом ранге класса Леви квазимногообразия qH_{p^s}

С. А. Шахова

Множество $T_Q(M)$ всех квазитождеств, истинных во всех группах из класса M, называется $Q-$теорией класса M. Подмножество $\Sigma \subseteq T_Q(M)$ называется базисом $Q-$теории класса M, если всякое квазитождество из $T_Q(M)$ является следствием множества Σ квазитождеств. Если данная $Q-$теория обладает базисом квазитождеств от n переменных и не обладает базисом квазитождеств от меньшего числа переменных, то говорят, что аксиоматический ранг $Q-$теории конечен и равен n. Класс M называется конечно аксиоматизируемым, если $T_Q(M)$ обладает базисом, состоящим из конечного числа квазитождеств.

Задача изучения аксиоматических рангов квазимногообразий впервые была поставлена Д.М. Смирновым в [**1**]. В работах А.И. Будкина [**2, 3, 4**] установлена бесконечность аксиоматических рангов большого класса неабелевых квазимногообразий.

Пусть p — простое число, $p \neq 2$, H_{p^s} — группа, имеющая в многообразии нильпотентных ступени не выше 2 групп представление: $H_{p^s} = gr(x, y || x^{p^s} = y^{p^s} = [x, y]^p = 1)$. Обозначим через qH_{p^s} — квазимногообразие, порождённое группой H_{p^s}, $M^{p^s} = L(qH_{p^s})$ — класс Леви, порождённый квазимногообразием qH_{p^s}, т.е. класс всех групп G, в которых нормальное замыкание x^G любого элемента $x \in G$ принадлежит qH_{p^s}. Классы Леви 2-ступенно нильпотентных квазимногообразий групп изучались В.В. Лодейщиковой в [**5, 6**]. В частности, были выписаны квазитождества, задающие квазимногообразие M^{p^s}. Список этих квазитождеств бесконечен и содержит квазитождества от любого сколь угодно большого числа переменных.

А.И. Будкин поставил вопрос: верно ли, что квазимногообразие M^{p^s} имеет конечный аксиоматический ранг? Ответ на этот вопрос оказался положительным. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Квазимногообразие M^{p^s} конечно аксиоматизируемо.*

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь (нерешённые проблемы теории групп) // Новосибирск, 1980.

[2] Будкин А. И., О квазитождествах в свободной группе // Алгебра и логика, Т.15, 1, 1976, 39–52.

[3] Будкин А. И., Квазитождества нильпотентных групп и групп с одним определяющим соотношением // Алгебра и логика, Т.18, 2, 1979, 127–136.

[4] Будкин А. И., Аксиоматический ранг квазимногообразия, содержащего свободную разрешимую группу // Математический сборник, Т.112, 4, 1980, 647–655.

[5] Лодейщикова В. В., О классах Леви, порождённых нильпотентными группами // Сибирский математический журнал, Т.51, 6, 2010, 1359–1366.

[6] Лодейщикова В. В., О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика, Т.50, 1, 2011, 26–41.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: sashakhova@gmail.com

О периодической части группы Шункова, насыщенной конечными простыми неабелевыми группами

А. А. Шлепкин

Говорят, что группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. Группа G называется группой Шункова, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. Первоначально такая группа называлась сопряженно биримитивно конечной группой [2]. Класс групп Шункова очень обширен и включает в себя, в частности, все группы без кручения и некоторые смешанные группы. Поэтому для каждой данной группы Шункова G актуален следующий вопрос: обладает ли группа G периодической частью, т.е. составляют ли периодические элементы в G подгруппу? Нетривиальность ответа на этот вопрос подчеркивается примерами разрешимых групп Шункова, не обладающих периодической частью (см. например [3]).

Теорема 1. *Группа Шункова, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.*

Теорема 2. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества конечных простых неабелевых групп, и в G есть инволюция z такая, что $C_G(z)$ содержит лишь конечное число элементов конечного порядка. Тогда G обладает периодической частью, изоморфной конечной простой неабелевой группе.*

Список литературы

[1] Шлепкин А. К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, 1993, 363.

[2] Шунков В. П., Об одном классе p-групп // Алгебра и логика, Т.4, 1970, 484–496.

[3] Череп А. А., О элементах конечного порядка в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика, Т.26, 4, 1987, 518–521.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru

О группах Шункова, насыщенных полными линейными группами степени 3

А. К. Шлепкин

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [**1**].

Группа G называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H < G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [**2**].

Группа Шункова, порожденная элементами конечных порядков, не обязана быть периодической [**3**].

Под периодической частью группы G понимается множество всех ее элементов конечного порядка при условии, что они образуют группу. Периодическую часть группы G будем обозначать через $T(G)$.

Доказана следующая

Теорема. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\{GL_3(p^n)\}$, где p - фиксированное простое нечетное число, а натуральное n не фиксируется , обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна $U_3(P)$, где P — подходящее локально конечное поле характеристики p.*

Список литературы

[1] Шлепкин А. К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, 1993, 369.

[2] Шунков В. П., Об одном классе p-групп // Алгебра и логика, Т.4, 1970, 484–496.

[3] Череп А. А., О элементах конечного порядка в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика, Т.26, 4, 1987, 518–521.

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск

The finite simple groups satisfying the two-prime hypothesis on conjugacy class sizes

B. Asadian, N. Ahanjideh

For a finite group G, $cs(G)$ denotes the set of conjugacy class sizes of G and $cs^*(G) = cs(G)\backslash\{1\}$. By $\pi(x)$, we denote the prime divisors of x and $\rho(X) = \bigcup_{x\in X}\pi(x)$. The bipartite divisor graph $B(G)$ is a graph associated to G whose vertices are the disjoint union of $cs^*(G)$ and $\rho(cs^*)$ such that there is an edge between $x \in cs^*(G)$ and $p \in \rho(cs^*)$ if and only if $p \in \pi(x)$. We use $K_{m,n}$ to define a complete bipartite graph i.e., there is a bipartition $\{V_1|V_2\}$ of vertices such that $|V_1| = m$ and $|V_2| = n$. Every vertex of V_1 is adjacent to all vertices of V_2. A graph $\mathcal{D}$ is $K_{m,n}$-free, if it has no $K_{m,n}$ as a subgraph. We denote by $\overrightarrow{K_{a,b}}$, a complete bipartite subgraph of $B(G)$ with a vertices in $\rho(cs^*)$ and b vertices in $cs^*(G)$. The group G is said to satisfy the n-prime hypothesis if the common divisor of a, $b \in cs^*(G)$ with $a \neq b$ is divisible by at most n primes (counting multiplicities).

In [**4**], the author proved that if $G/Z(G)$ is simple, where $Z(G)$ is the center of G, then $B(G)$ has no cycle of lenght 4 if and only if $G \cong A \times L_2(q)$, where $q \in \{4, 8\}$. In [**1**], the authors proved that if G is non-solvable group, then G satisfies the one-prime hypothesis if and only if $G = A \times S$, where A is abelian and S is isomorphic to either $L_2(4)$ or $L_2(8)$. The finite group G satisfying the one-prime hypothesis is equivalent to $B(G)$ having no cycle of length 4.
In [**2, 3**], n-prime hypothesis has been examined to study character degrees, where $n \in \{1, 2\}$. In this paper, we use conjugacy class sizes to investigate the two-prime hypothesis for the finite simple group S.

Theorem. *Suppose that* S *is a finite simple group. Then* S *satisfies the two-prime hypothesis if and only if* S $\cong L_2(q)$ *such that:*

(i) *If* $q \geq 4$ *is even, then* $|\pi(q \pm 1)| \leq 2$.

(ii) *If* $q \geq 5$ *is odd, then* $|\pi(\frac{q(q+\epsilon)}{2})|$ *and* $|\pi(\frac{q-\epsilon}{2})| \leq 2$, *where* $q \equiv \epsilon \ (mod\ 4)$.

The finite group S satisfying the two-prime hypothesis is equivalent to the bipartite divisor graph $B(S)$ is $\overrightarrow{K_{3,2}}$-free.

References

[1] Camina A. R., Camina R. D., One prime hypohthesis for conjugacy class sizes // Int. J. Group Theory, 2015.

[2] Lewis M. L., Solvable groups having almost relatively prime distinct irreducible character degrees // J. Algebra, V.174, 1, 1995, 197–216.

[3] Lewis M. L., Liu Y., Simple groups and the two-prime hypothesis // Monatsh Math, 1–13, 2015.

[4] Taeri B., Cycles and bipartite graph on conjugacy class of group // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, V.123, 2010, 233–247.

Shahrekord University, Shahrekord (Iran)
E-mail: asadian.bahare@gmail.com, ahanjideh.neda@sci.sku.ac.ir

Intersection of conjugate solvable subgroups in classical groups of Lie type

A. Baykalov

Assume that a finite group G acts on a set Ω. An element $x \in \Omega$ is called a *regular point* if $|xG| = |G|$, i.e. if the stabilizer of x is trivial. Define the action of the group G on Ω^k by the rule

$$g : (i_1, \ldots, i_k) \mapsto (i_1 g, \ldots, i_k g).$$

If G acts faithfully and transitively on Ω, then the minimal number k such that the set Ω^k contains a G-regular point is called the *base size* of G and is denoted by $b(G)$. For a positive integer m the number of G-regular orbits on Ω^m is denoted by $Reg(G, m)$ (this number equals 0 if $m < b(G)$). If H is a subgroup of G and G acts by the right multiplication on the set Ω of right cosets of H then G/H_G acts faithfully and transitively on the set Ω. (Here $H_G = \cap_{g\in G} H^g$.) In this case, we denote $b(G/H_G)$ and $Reg(G/H_G, m)$ by $b_H(G)$ and $Reg_H(G, m)$ respectively.

Thus $b_H(G)$ is the minimal number k such that there exist elements $x_1, \ldots, x_k \in G$ for which $H^{x_1} \cap \ldots \cap H^{x_k} = H_G$.

Consider the problem 17.41 from "Kourovka notebook"[**1**]:

Let H be a solvable subgroup of finite group G and G does not contain nontrivial normal solvable subgroups. Are there always exist five subgroups conjugated with H such that their intersection is trivial?

The problem is reduced to the case when G is almost simple in [**2**]. Specifically, it is proved that if for each almost simple group G and solvable subgroup H of G condition $Reg_H(G, 5) \geq 5$ holds then for each finite nonsolvable group G and maximal solvable subgroup H of G condition $Reg_H(G, 5) \geq 5$ holds.

Let p be a prime number and $q = p^t$. A cyclic irreducible subgroup $Sin_n(q)$ of $GL_n(q)$ of order $q^n - 1$ is called a *Singer cycle*. If H is a cycle subgroup of $GU_n(q)$ and $|H| = q^n - (-1)^n$ we also call it a Singer cycle and denote by $Sin_n(q)$.

By φ_n we denote an automorphism of $Sin_n(q)$ such that
$\varphi_n : g \mapsto g^q$ if $G = GL_n(q)$;
$\varphi_i : g \mapsto g^{q^2}$ if $G = GU_n(q)$ and n is add;
$\varphi_i : g \mapsto g^{-q}$ if $G = GU_n(q)$ and n is even.

We have proved the following

Theorem 1. *Let G be isomorphic to $GL_n(q)$ or $GU_n(q)$ and H be a subgroup of G such that H is block diagonal with blocks isomorphic to $Sin_{n_i}(q) \rtimes \langle \varphi_{n_i} \rangle; i = 1, \ldots, k; \sum_{i=1}^k n_i = n$. Then $b_H(G) \leq 4$.*

Theorem 2. *Let $G = GL_n(q) \rtimes \langle \tau \rangle$ where $q = 2$ or $q = 3$, n is even, τ is an automorphism which acts by $\tau : A \mapsto (A^{-1})^T$ for $A \in GL_n(q)$. Let H be the normalizer in G of subgroup $P \leq GL_n(q)$ where P is the stabilizer of the chain of subspaces:*

$$\langle v_n, v_{n-1} \rangle < \langle v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \rangle < \ldots < \langle v_n, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1 \rangle.$$

Then $Reg_H(G, 5) \geq 5$.

The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

References

[1] Kourovka notebook; Edition 18, Novosibirsk 2014.

[2] Vdovin E. P., On the base size of a transitive group with solvable point stabilizer // Journal of Algebra and Application, V.11, 1, 2012, 1250015 (14 pages).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: anton188@bk.ru

On periodic subgroups of the finitary linear group over a commutative ring

O. Yu. Dashkova, M. A. Salim

Let $FL_\nu(K)$ be the finitary linear group where K is a ring with the unit, ν is a linearly ordered set. $FL_\nu(K)$ is investigated in [**1, 2**]. In particular the finitary unitriangular group $UT_\nu(K)$ is studied in [**2**].

We study periodic subgroups of the finitary linear group $FL_\nu(K)$ in the case where K is a commutative ring.

The main result of this paper is the theorem.

Theorem. *Let G be a periodic subgroup of $FL_\nu(K)$, K be a commutative ring. Then G is a locally finite group.*

References

[1] Levchuk V. M., Some locally nilpotent rings and their adjoined groups // Math. Notes., V.42, 5, 1987, 631–641.

[2] Merzlyakov Yu. I., Equsubgroups of unitriangular groups: the criterion of self-normalization // Reports of the Academy of sciences, V.339, 6, 1994, 732–735.

The Branch of Moscow State University in Sevastopol, Sevastopol (Russia)
E-mail: odashkova@yandex.ru
United Arab Emirates University, Al Ain (United Arab Emirates)

Retracts of group of unitriangular matrices over a ring

A. A. Konyrkhanova, M. K. Nurizinov, R. K. Tyulyubergenev, N. G. Khisamiev

A retract of a group G is a subgroup H, for which there exists an endomorphism $\rho : G \to H$, which the identity on H.Such an endomorphism is called a retractive endomorphism. Any idempotent endomorphism $\rho : G \to G$, $\rho^2 = \rho$, provides a retraction of the group G on the subgroup $\rho(G)$.

Theorem 1. An Abelian subgroup H of the group $G = UT_n(Z)$, $n \geq 3$ is a retract of the group G if and only if there exist matrices $g^{(i)} \in G, i < n-1$ and a number $s \leq [\frac{n}{2}]$ such that the determinant

$$\triangle = \begin{vmatrix} g_{12}^{(0)} & g_{12}^{(1)} & \cdots & g_{12}^{(n-2)} \\ g_{23}^{(0)} & g_{23}^{(1)} & \cdots & g_{23}^{(n-2)} \\ . & . & . & \\ g_{n-1,n}^{(0)} & g_{n-1,n}^{(1)} & \cdots & g_{n-1,n}^{(n-2)} \end{vmatrix} = \pm 1 \text{ and } H = \left(g^{(0)}\right) \oplus \ldots \oplus \left(g^{(s-1)}\right).$$

Theorem 2. Let K – be a commutative and associative unit ring with identity such that its additive group K^+ is locally cyclic and torsion-free. Then any retract H of the group $G = UT_3(K)$ is isomorphic to K^+.

Corollary 1. Any retract of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ is a pure cyclic subgroup of it.

Corollary 2. A subgroup H of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ is a retract of it if and only if there exists a matrix $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ such that $H = (h)$ and the numbers h_{12} and h_{23} are coprime.

Corollary 3. There is an algorithm that for any subgroup A of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ determines whether or not A is a retract of it.

Theorem 3. A subgroup H of the group $G = UT_3(\mathbb{Z})$ is a transvectional retract if and only if either $H = (t_{12})$ or $H = (t_{23})$,where the each t_{ij} – is a transvection.

Theorem 4. A subgroup H of the group $G = UT_3(\mathbb{Z})$ is an essentially standard retract if and only if $H = (h)$ and it holds either $h_{12} = 1$ or $h_{23} = 1$.

Corollary 4. A subgroup H of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ is not an essentially standard retract of the group G if and only if there is an element $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ such that numbers h_{12} and h_{23} are different from 1 and greatest common factor of these numbers are equal to 1.

Corollary 5. There is an algorithm that for any subgroup H of the group $UT_3(\mathbb{Z})$ determines whether H is transvectional retract or essential retract of the group $UT_3(\mathbb{Z})$.

References

[1] Myasnikov A., Roman'kov V., Verbally closed subgroups of free groups // J.Group Theory, 2014, 17, 29–40.

[2] Roman'kov V.A., Khisamiev N.G., Verbally and existentially closed subgroups of free nilpotent groups // Algebra and logic, 2013, V.4, 52, 502–525.

D. Serikbaev East-Kazakhstan state technical university, Ust-Kamenogorsk
E-mail: hisamiev@mail.ru, ErkeshanK@mail.ru

On finite groups with restrictions on the number of isomorphic classes of non-σ-subnormal subgroups

V. A. Kovaleva

All considered groups are finite and G always denotes a finite group. We use the terminology in [**1, 2**].

Let $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ be some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. Then G is called: *σ-primary* if G is a σ_i-group for some $\sigma_i \in \sigma$; *σ-soluble* if every chief factor of G is σ-primary.

If n is an integer, then $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n; $\pi(G) = \pi(|G|)$ is the set of all primes dividing the order of G; $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

In [**3**], the authors study the influence of the number of conjugacy classes of non-normal subgroups of G on the structure of G.

A subgroup A of G is said to be *σ-subnormal* in G if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$$

such that either A_{i-1} is normal in A_i or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i = 1, \ldots, t$.

Denote by $n_\sigma(G)$ and $cn_\sigma(G)$ *the number of isomorphic classes of non-σ-subnormal subgroups* of G and *the number of isomorphic classes of non-σ-subnormal non-cyclic subgroups* of G respectively.

We study the structure of G depending on the invariants $n_\sigma(G)$ and $cn_\sigma(G)$. In particular, new conditions of σ-solubility of groups were found.

References

[1] Skiba A. N., On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra, V.436, 2015, 1–16.

[2] Skiba A. N., A generalization of a Hall theorem // J. of Algebra and Its Appl., V.15, 5., 2016, 21–36.

[3] Lu J., On solvability of finite groups with few non-normal subgroups // Comm. Algebra., V.43, 5, 2015, 1752–1756.

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel (Belarus)
E-mail: vika.kovalyova@rambler.ru

On the pronormality of subgroups of odd indices in finite simple groups

A. S. Kondrat′ev, N. V. Maslova, D. O. Revin

A subgroup H of a group G is said to be *pronormal* in G if H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g\rangle$ for every $g \in G$. In [**1**], the following conjecture was formulated.

Conjecture. *All subgroups of odd indices are pronormal in all finite simple groups.*

The conjecture was verified for many families of finite simple groups in [**2**]. Namely, it was proved that all subgroups of odd indices are pronormal in the following finite simple groups: A_n, where $n \geq 5$; sporadic groups; groups of Lie type over fields of characteristic 2; $PSL_{2^n}(q)$; $PSU_{2^n}(q)$; $PSp_{2n}(q)$, where $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$; $P\Omega_{2n+1}(q)$; $P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$; exeptional groups of Lie type not isomorphic to $E_6(q)$ or ${}^2E_6(q)$. In [**3**, Theorem 1] it was proved that, if a finite group G has a normal abelian subgroup V and a subgroup H such that $G = HV$, then H is pronormal in G if and only if $U = N_U(H)[H,U]$ for any H-invariant subgroup U of the group V. Using this fact, in [**3**, Theorem 2] it was proved that Conjecture fails. Precisely, a finite simple symplectic group $PSp_{6n}(q)$ with $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ contains a nonpronormal subgroup of odd index. Moreover, using [**3**, Theorem 2] it's not difficult to prove that if $n \notin \{2^m, 2^m(2^{2k}+1) \mid m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ then a finite simple symplectic group $PSp_{2n}(q)$ contains a nonpronormal subgroup of odd index. In view of the above results, the following problem naturally arises.

Problem. *Classify finite simple groups in which all subgroups of odd indices are pronormal.*

In this talk, we discuss (in progress) a solution of the problem. In particular, we discuss the following theorem.

Theorem. *Let $G = PSp_{2^n}(q)$, where $n \geq 2$ and $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Then any subgroup of odd index of G is pronormal in G.*

The work is supported by the grant of the President of Russian Federation for young scientists (grant no. MK-6118.2016.1). The second author is a winner of the competition of the Dmitry Zimin Foundation "Dynasty" for support of young mathematicians in 2013 year.

References

[1] Vdovin E. P., Revin D. O., Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups // Sib. Math. J., V.53, 3, 2012, 419–430.

[2] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On the pronormality of subgroups of odd indices in finite simple groups // Sib. Math. J, V.56, 6, 2015, 1101–1107.

[3] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups // Proc. Steklov Inst. Math., to appear.

IMM UB RAS, UrFU, Yekaterinburg (Russia)
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru
IM SB RAS, NSU, Novosibirsk (Russia)
E-mail: danila.revin@gmail.com

A note on the $\mathfrak{F}$-hypercenter of a finite group

V. I. Murashka

All groups considered here are finite. In [**1**] R. Baer showed that on the one hand the hypercenter $\mathrm{Z}_\infty(G)$ of a group G coincides with the intersection of all maximal nilpotent subgroups of G and on the other hand $\mathrm{Z}_\infty(G)$ coincides with the intersection of normalizers of all Sylow subgroups of G.

Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. A chief factor H/K of a group G is called $\mathfrak{X}$-central if $(H/K)\leftthreetimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$. A normal subgroup N of G is said to be $\mathfrak{X}$-hypercentral in G if $N = 1$ or $N \neq 1$ and every chief factor of G below N is $\mathfrak{X}$-central. The $\mathfrak{X}$-hypercenter $\mathrm{Z}_\mathfrak{X}(G)$ is the product of all normal $\mathfrak{X}$-hypercentral subgroups of G (see [**2**, 1, Definition 2.2]). So if $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups then $\mathrm{Z}_\mathfrak{N}(G)$ is just the hypercenter $\mathrm{Z}_\infty(G)$ of a group G.

Recall that $\mathrm{Int}_\mathfrak{F}(G)$ is the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a group G and $\underset{i\in I}{\times}\mathfrak{F}_{\pi_i} = (G = \underset{i\in I}{\times}\mathrm{O}_{\pi_i}(G)|\mathrm{O}_{\pi_i}(G) \in \mathfrak{F}_{\pi_i})$ is a hereditary saturated formation where $\sigma = \{\pi_i|i \in I\}$ is a partition of $\mathbb{P}$ into mutually disjoint subsets and $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ is a hereditary saturated formation with $\pi(\mathfrak{F}_{\pi_i}) = \pi_i$ for all $i \in I$. Denote the intersection of all normalizers of $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of G by $\mathrm{NI}_\mathfrak{F}(G)$.

Theorem. *Let $\sigma = \{\pi_i|i \in I\}$ be a partition of $\mathbb{P}$ into mutually disjoint subsets, $\mathfrak{F}_{\pi_i}$ be a hereditary saturated formation with $\pi(\mathfrak{F}_{\pi_i}) = \pi_i$ for all $i \in I$ and $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\times}\mathfrak{F}_{\pi_i}$. The following statements are equivalent*:

(1) $\mathrm{Int}_\mathfrak{F}(G) = \mathrm{Z}_\mathfrak{F}(G)$ *for every group G.*

(2) $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}_{\pi_i}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}_{\pi_i}}(G)$ *for every π_i-group G and every $i \in I$.*

(3) $\bigcap_{i\in I}\mathrm{NI}_{\mathfrak{F}_{\pi_i}}(G) = \mathrm{Z}_\mathfrak{F}(G)$ *for every group G.*

Corollary (Baer [**1**]). *Let G be a group. Then*

(1) *The hypercenter of G is the intersection of all normalizers of all Sylow subgroups of G.*

(2) *The hypercenter of G is the intersection of all maximal nilpotent subgroups of G.*

Remark. A. N. Skiba [**3**] described all hereditary saturated formations $\mathfrak{F}$ with $\mathrm{Int}_\mathfrak{F}(G) = \mathrm{Z}_\mathfrak{F}(G)$ in terms of the canonical local definition of $\mathfrak{F}$. In the proof of Theorem we don't use his description.

References

[1] Baer R., Group Elements of Prime Power Index // Trans. Amer. Math Soc., V.75, 1, 1953, 20–47.

[2] Guo W., Structure theory for canonical classes of finite groups // Springer 2015.

[3] Skiba A. N., On the $\mathfrak{F}$-hypercentre and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group // Journal of Pure and Applied Algebra, V.216, 4, 2012, 789–799.

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel (Belarus)

E-mail: mvimath@yandex.ru

On the isotopically invariant property of automorphic Moufang loops

M. N. Rasskazova

By definition a set Q is a loop with the multiplication $x \cdot y = z \in Q$ if the maps $L_a : Q \to Q$, $L_a x = a \cdot x$, $R_a : Q \to Q$, $R_a y = y \cdot a$ are bijections and there exists the *unity* 1. A loop Q is a *Moufang loop* if the following identity holds: $((xy)x)z = x(y(xz))$.

The *inner mapping group* of the loop Q is the group $\mathrm{Inn}(Q)$ generated by three families of elements:

$$\ell_{x,y} = L_{xy}^{-1} \circ L_x \circ L_y, \quad r_{x,y} = R_{xy}^{-1} \circ R_y \circ R_x, \quad T_x = L_x^{-1} \circ R_x$$

for all $x, y \in Q$. The loop Q is called *automorphic* if $\mathrm{Inn}(Q)$ acts on Q by automorphisms.

Definition. Let $(M, \cdot)$ be Moufang loop. Then an *isotope* of $(M, \cdot)$ is a loop $(M, \circ)$, where

$$x \circ y = (x \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot y)$$

for some fixed element $a \in M$. If every isotope of a loop M is an automorphic Moufang loop then we will call this loop M is *isotopically invariant* automorphic Moufang loop.

The aim of this talk is to show the following

Theorem. A loop L is isotopically invariant automorphic Moufang loop if and only if L is an automorphic loop with the following identity:

$$((x, y, z), v, t) = 1.$$

This talk is based on the joint work with Alexandre Grishkov and Liudmila Sabinina.
Author thanks to CNPq, Brazil for the Grant number 456693/2014-0

References

[1] Bruck R. A Survey of Binary Systems, Springer-Verlag (1966).

[2] Grishkov A., Plaumann P., Sabinina L. Structure of free automorphic loops. Proc. Amer. Math. Soc. **140**, no. 7 (2012), 2209- 2214.

Omsk State Technical University, pr. Mira 11, Omsk 644050 (Russia)
E-mail: marinarasskazova@yandex.ru

On rationality of verbal subsets in a solvable group

V. A. Roman′kov

Following Gilman [**1**] (also see [**2**]) we define for a given group G the set $Rat(G)$ of all *rational subsets* in G as the closure of the set of all finite subsets of G under the rational operations: union, product, and generation of a submonoid (Kleene's star operation). It is known that a subset L of a group G is rational in G if and only if L is accepted by a finite automaton over G.

Let $F(X)$ be a free group with basis $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, and $w \in F(X)$. An element g in a group G is called *w-element* if g is the image in G of the word w under some homomorphism $F(X) \to G$. By $w[G]$, termed *verbal subset* in G, we denote the set of all w-elements in G. Any word $w = w(x_1, \ldots, x_n) \in F(X)$ can be uniquely written in the form $w = x_1^{t_1} x_2^{t_2} ... x_n^{t_n} w'$, where $w' = w'(x_1, \ldots, x_n) \in [F, F]$. The number $e(w) = gcd(t_1, t_2, ..., t_n)$ is called *exponent* of w. In particular, $e(w) = 1$ implies $w[G] = G$ for every group G.

For arbitrary positive integers r and k, we denote by $N_{r,k}$ the free nilpotent group of rank r and nilpotency class k.

Theorem. *For every positive integers $r, k \geq 2$ and any word $w \in F(X)$ of exponent $e(w) \geq 2$ the verbal subset $w[N_{r,k}]$ is a proper rational subset in $N_{r,k}$.*

In contrast to this statement, it has been shown in [**3**], that for every $r \geq 2$ and any word $w \in F(X), e(w) \neq 1$, the verbal subset $w[F_r]$ is not rational in F_r.

Acknowledgements. This research was supported by Russian Science Foundation (project 16-11-0002).

References

[1] Gilman R. H., Formal languages and infinite groups // Geometric and computational perspectives of infinite groups (Minneapolis, MN and New Brunswick, NJ, 1994), vol. 25 of DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 27-51. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996).

[2] юьрэъют . ., ршюэрыэх яюфьэюцхё№тр т уЁяяр // ьёъ: ь, 2014, 176 ё.

[3] Myasnikov A., Roman′kov V., On rationality of verbal subsets in a group // Theory Comput. Syst., V.52, 2013, 587–598.

Dostoevsky Omsk State University, Omsk (Russia)
E-mail: romankov48@mail.ru

On separability problem for S-rings over abelian p-groups

G. K. Ryabov

Let G be a finite group. *An S-ring (or a Schur ring)* $\mathcal{A}$ over G is a subring of the group ring $\mathbb{Z}G$ that is a free $\mathbb{Z}$-module spanned by a partition $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ of G closed under taking inverse and containing the identity element $\{e\}$ of G as a class. An isomorphism of two S-rings is an isomorphism of the corresponding Cayley schemes. An algebraic isomorphism of two S-rings is a ring isomorphism of them. Every isomorphism induces in a natural way the algebraic isomorphism. However not every algebraic isomorphism is induced by an isomorphism. An S-ring $\mathcal{A}$ is called *separable* with respect to a class of S-rings $\mathcal{K}$ if for every $\mathcal{A}^{'} \in \mathcal{K}$ all algebraic isomorphisms from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{A}^{'}$ are induced by isomorphisms.

Denote the cyclic group of order n by C_n. We prove the following theorem.

Theorem 1. *Every S-ring over $G = C_p \times C_{p^k}$, where $p \in \{2, 3\}$ and $k \geq 1$, is separable with respect to the class of S-rings over abelian groups.*

Theorem 1 gives the first example of an infinite family of noncyclic groups such that every S-ring over every group from this family is separable. Theorem 1 implies the next statement.

Theorem 2. *Suppose that the group $G = C_p \times C_{p^k}$, where $p \in \{2, 3\}$ and $k \geq 1$, is given by its multiplication table. Then given Cayley graph Γ over G and given Cayley graph $\Gamma^{'}$ over an arbitrary abelian group it can be tested in time $|G|^{O(1)}$ whether Γ and $\Gamma^{'}$ are isomorphic.*

The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: gric2ryabov@gmail.com

On L. G. Kovàcs' problem

S. V. Skresanov, A. V. Vasil′ev

"Kourovka notebook" contains the following question due to L. G. Kovàcs [**1**, Problem 8.23]: If the dihedral group D of order 18 is a section of a direct product $X \times Y$, must at least one of X and Y have a section isomorphic to D? Recall that a section of a group is a homomorphic image of one of its subgroups. If X and Y are locally finite groups, the positive answer to the question is given by the following

Theorem. *Let p and q be distinct primes and let $D = A \rtimes B$ be a semidirect product of its subgroups A and B such that A is a cyclic p-group, B is a cyclic group of order q, and $[A, B] \neq 1$. Suppose that X and Y are locally finite groups and D is a section of the direct product $X \times Y$. Then D is a section of either X or Y.*

We recall that a variety of groups is said to be locally finite if every finitely generated group from this variety is finite. The direct consequence of our theorem is the following

Corollary. *Let $\mathfrak{L}$ be a locally finite variety generated by a set $\mathfrak{X}$ of groups, and let D be as in the theorem. If D lies in $\mathfrak{L}$, then D is a section of a group from $\mathfrak{X}$. In particular, if $\mathfrak{X}$ consists of a finite number of finite groups and D belongs to the variety generated by $\mathfrak{X}$, then D is a section of a group from $\mathfrak{X}$.*

Also we discuss some other conditions on the group D and their correlations with the theorem.

References

[1] Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook, 18th edn (Eds. V. D. Mazurov and E. I. Khukhro), Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics (2014).

Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: s.skresanov@g.nsu.ru, vasand@math.nsc.ru

On recognition by prime graph of alternating groups

A. M. Staroletov

Suppose that G is a finite group. The set of prime divisors of $|G|$ is denoted by $\pi(G)$. The *spectrum* of G is the set of its element orders and is denoted by $\omega(G)$. The spectrum defines the *prime graph* (or *Gruenberg — Kegel graph*) $GK(G)$ of G: the set of vertices is $\pi(G)$, and two distinct vertices r and s are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$.

A nonabelian simple group L is called *recognizable by spectrum* if the spectrum characterizes L in the class of all finite groups, i.e. if for a finite group H it is true that $\omega(H) = \omega(G)$ implies $H \simeq G$. Denote by Alt_n the alternating group of degree n. I. B. Gorshkov proved that Alt_n with $n \geq 5$ is recognizable by spectrum iff $n \neq 6, 10$ ([**1**]). However, it is easy to see that $GK(Alt_5) = GK(Alt_6)$. A. S. Kondratiev described in [**2**] finite groups with the prime graph equal to $GK(Alt_{10})$. Namely, he proved that there exist soluble groups G such that $GK(G) = GK(Alt_{10})$. Moreover, if S is a finite nonabelian simple group such that $\pi(S) \subseteq \{2,3,5,7\}$ and $S \not\simeq L_2(8)$, $U_4(2)$, $S_4(7)$, then there exists a finite group G such that $GK(G) = GK(Alt_{10})$ and G has a composition factor isomorphic to S. We continue to investigate nonabelian composition factors of a finite group, which has the prime graph equal to $GK(Alt_n)$ for some integer n.

Theorem. *Let $p \geq 13$ be a prime and G be a finite group such that $GK(G) = GK(Alt_n)$, where $p \leq n \leq p+3$. Then G has a unique nonabelian composition factor and this factor is isomorphic to an alternating group of degree at least p.*

References

[1] Gorshkov I. B., Recognizability of alternating groups by spectrum // Algebra Logic V.52, 1, 2013, 41–45.

[2] Kondrat′ev A. S., Finite groups with the same prime graph as the group A_{10} // Proc. Steklov Inst. Math. V.285, (suppl. 1), 2014, 99–107.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: staroletov@math.nsc.ru

On the 2-closure of a finite permutation group

A. V. Vasil′ev

Let Ω be a finite set and $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$. The action of G on Ω induces the componentwise action on Ω^2: $(\alpha, \beta)^g = (\alpha^g, \beta^g)$ for $\alpha, \beta \in \Omega$ and $g \in G$. The orbits of the induced action are called 2-*orbits* of G. The largest subgroup of $\mathrm{Sym}(\Omega)$ with the same 2-orbits as G is called the 2-*closure* of G and denoted by $G^{(2)}$. Obviously, $G \leq G^{(2)}$. Our goal is to discuss the following problem: Given a permutation group G, find $G^{(2)}$.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vasand@math.nsc.ru

Spectra of automorphic extensions of finite simple groups $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, and $E_7(q)$

M. A. Zvezdina

If G is a finite group, its *spectrum* $\omega(G)$ is the set of orders of its elements. Groups are called *isospectral* if their spectra coincide. Our work is concerned with the following problem (see [**1**, Problem 17.36]): for all nonabelian finite simple groups S, describe groups G such that $S < G \leq \mathrm{Aut}(S)$ and G is isospectral to S. We solve this problem in case when S is one of the finite simple groups $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$. We use the abbreviation $E_6^\varepsilon(q)$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, where $E_6^+(q) = E_6(q)$ and $E_6^-(q) = {}^2E_6(q)$.

Theorem 1. *Let S be a finite simple exceptional group $E_6^\varepsilon(q)$, where q is a power of prime p, and let $S < G \leq \mathrm{Aut}(S)$. Then $\omega(G) = \omega(S)$ if and only if G is an extension of S by a field automorphism, G/S is a 3-group, 3 divides $q - \varepsilon 1$ and $p \notin \{2, 11\}$.*

Theorem 2. *Let S be a finite simple exceptional group $E_7(q)$, where q is a power of prime p, and let $S < G \leq \mathrm{Aut}(S)$. Then $\omega(G) = \omega(S)$ if and only if G is an extension of S by a field automorphism, G/S is a 2-group and $p \notin \{2, 13, 17\}$.*

In the proof of the theorems, we use the description of the spectra of $E_6^\varepsilon(q)$ and $E_7(q)$ obtained in [**2, 3**].

We say that the *recognition by spectrum problem* is solved for a group S if we know the number of pairwise non-isomorphic groups isospectral to S. This problem is solved for all simple exceptional groups of Lie type except for the groups of types E_6 and E_7. By [**4**, Theorem 1], any finite group isospectral to a simple exceptional group $S \neq {}^3D_4(2)$ is isomorphic to a group G such that $S < G \leq \mathrm{Aut}(S)$. Applying Theorems 1 and 2, we complete the study of recognition problem for all simple exceptional groups of Lie type. These results also complete the study of recognition problem for finite simple groups of Lie type over fields of characteristic 2 (the results for classical groups are surveyed in [**5**]).

Acknowledgments. The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

References

[1] Mazurov V. D., Khukhro E. I. (eds.), The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 18 ed., Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Siberian Div., Novosibirsk, 2014.

[2] Buturlakin A. A., Spectra of finite simple groups $E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$ // Algebra and Logic, V.52, 3, 2013, 188–202.

[3] Buturlakin A. A., Spectra of finite simple groups $E_7(q)$ // Sib. Math. J., in print.

[4] Vasil′ev A. V., Staroletov A. M., Almost recognizability by spectrum of simple exceptional groups of Lie type // Algebra and Logic, V.53, 6, 2014, 433–449.

[5] Vasil′ev A. V., Grechkoseeva M. A., Recognition by spectrum for simple classical groups in characteristic 2 // Sib. Math. J., V.56, 6, 2015, 1009–1018.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: maria.a.zvezdina@gmail.com

V. Секция «Теория колец»

Кольца, над которыми каждый модуль является почти инъективным

А. Н. Абызов

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули унитарными.

Пусть M, N – правые R-модули. Модуль M называется *почти N-инъективным*, если для каждого подмодуля N' модуля N и каждого гомоморфизма $f : N' \to M$ либо существует такой гомоморфизм $g : N \to M$, что $f = g\iota$, либо существуют ненулевой идемпотент $\pi \in End_R(N)$ и гомоморфизм $h : M \to \pi(N)$, для которых выполнено равенство $hf = \pi\iota$, где $\iota : N' \to N$ – естественное вложение. Модуль M называется *почти инъективным,* если он почти инъективен относительно каждого правого R-модуля.

Понятие почти инъективного модуля впервые было изучено в работах Харады и его учеников. В последнее время почти инъективные модули были рассмотрены в работах [1]-[5]. В работе [3] была поставлена проблема об описании колец, над которыми каждый правый модуль является почти инъективным. В некоторых частных случаях эта проблема была решена в работе [3]. В частности, в случае полусовершенных колец. Следующая теорема дает описание колец, над которыми каждый правый модуль является почти инъективным, в общем случае.

Теорема.*Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *каждый правый R-модуль является почти инъективным;*
2) *R – полуартиново справа кольцо, $Loewy(R_R) \leq 2$ и над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой инъективного модуля и V - модуля;*
3) *R – полуартиново справа кольцо, $Loewy(R_R) \leq 2$ и над кольцом R каждый правый модуль является прямой суммой проективного модуля и V - модуля;*
4) *для кольца R выполнены условия*
   a) *в кольце R существует такое конечное множество ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i\in I}$, что e_iR – инъективный локальный правый R-модуль длины два для каждого $i \in I$ и $J(R) = \oplus_{i\in I} J(e_iR)$;*
   b) *$R/J(R)$ – правое SV-кольцо и $Loewy(R_R) \leq 2$;*
   c) *$R/SI(R_R)$ – артиново справа кольцо;*
5) *кольцо R изоморфно кольцу формальных верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} T & {}_TM_S \\ 0 & S \end{pmatrix}$, где*
   a) *S – правое SV-кольцо и $Loewy(S) \leq 2$;*
   b) *для некоторого идеала I кольца S имеет место равенство $MI = 0$ и кольцо $\begin{pmatrix} T & {}_TM_{S/I} \\ 0 & S/I \end{pmatrix}$ является артиновым полуцепным, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

Список литературы

[1] Alahmadi A., Jain S. K. A note on almost injective modules, Math. J. Okayam, 51, 2009, p. 101-109.

[2] Alahmadi A., Jain S. K., Singh S. Characterizations of Almost Injective Modules, Contemp. Math., 634(2015), p. 11-17.

[3] Arabi-Kakavand M., Asgari S., Tolooe Y. Rings Over Which Every Module Is Almost Injective, Communications in Algebra, 44(7), 2016, p. 2908-2918.

[4] Arabi-Kakavand M., Asgari S., Khabazian H. Rings for which every simple module is almost injective, Bull. Iranian Math. Soc., 42(1), 2016, p. 113-127.

[5] Singh S. Almost relative injective modules, Osaka J. Math., 53, 2016, p. 425–438.

Казанский федеральный университет, г. Казань
E-mail: aabyzov@kpfu.ru

Решетка идеалов полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

Пусть X — произвольное топологическое пространство.

Напомним, что через $C(X)$ обозначается кольцо непрерывных действительнозначных ($\mathbf{R}$-значных) функций на X.

Рассмотрим полукольцо $CP(X) = \cup\{C(Y)\colon Y \subseteq X\}$ всех непрерывных частичных действительнозначных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$. Изучение полуколец $CP(X)$ начато в [1].

Важную роль в полукольцах вида $CP(X)$ играют *унитарные идемпотенты* (по умножению) e_A, $A \subseteq X$: $D(e_A) = A$, $e_A(x) = 1$ для всех $x \in A$. Обозначим через θ_A, $A \subseteq X$, функцию из $CP(X)$, для которой $D(\theta_A) = A$ и $\theta_A(x) = 0$ для любых $x \in X$.

Полукольцо $CP(A) = e_A CP(X)$ является главным идеалом полукольца $CP(X)$. Для любой точки $x \in X$ идеал (e_x), как полукольцо изоморфный $\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$, содержит ровно три идеала $(e_x) \supset (\theta_x) \supset \{\varnothing\}$ полукольца $CP(X)$. Главные идеалы $(\theta_x) = \theta_x CP(X) = \{\theta_x, \varnothing\}$ при $x \in X$ суть в точности минимальные идеалы полукольца $CP(X)$.

Предложение 1. *Максимальные идеалы полукольца $CP(X)$ имеют вид $(CP(X) \setminus C(X)) \cup M$, где M — произвольный максимальный идеал кольца $C(X)$.*

Идеал J полукольца $CP(X)$ называется *D-идеалом*, если $f \in J, g \in CP(X, R)$ и $D(g) = D(f)$ влекут $g \in J$, и *биидеалом*, если $I + CP(X) \subseteq I$. В полукольцах $CP(X)$ биидеалы совпадают с D-идеалами и исчерпываются всевозможными объединениями главных идеалов вида (e_A), $A \subseteq X$.

Множество $\mathrm{Id}CP(X)$ всех идеалов полукольца $CP(X)$ относительно теоретико-множественного включения есть решетка с операциями $\sup(I, J) = I \cup J \cup (I + J)$ и $\inf(I, J) = I \cap J$.

Предложение 2. *Всякое T_1-пространство X определяется — однозначно с точностью до гомеоморфизма — решеткой $\mathrm{Id}CP(X)$.*

Предложение 3. *Решетка $\mathrm{Id}CP(X)$ — модулярная решетка с псевдодополнениями. Дополнениями в $\mathrm{Id}CP(X)$ обладают только элементы $\{\varnothing\}$ и $CP(X)$.*

Предложение 4. *Решетка $\mathrm{Id}CP(X)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда X — наследственное F-пространство.*

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки РФ, проект 1.1375.2014/K.

Список литературы

[1] Вечтомов Е. М. О полукольцах частичных функций // Вестник Сыктывкарского университета, 2014. Сер.1. Вып. 1(19). С. 3–11.

ВятГУ, Киров
E-mail: vecht@mail.ru

Биизотропные бинарно лиевы алгебры

А. Т. Гайнов

В работе вводится в рассмотрение новый класс алгебр.

Определение 1. *Алгебру A над полем F, $charF \neq 2$, назовем биизотропной алгеброй, если на ней задана невырожденная симметрическая билинейная форма $n(x, y)$, такая, что $n(xy, zt) = 0$ для любых $x, y, z, t \in A$.*

Если биизотропная алгебра A конечномерная, то справедливо неравенство: $\dim A^2 \leq \frac{1}{2}\dim A$.

Определение 2. *Алгебра A называется бинарно лиевой, если в ней выполняются тождества: для любых $x, y \in A$, $xy = -yx$, $J(x, y, xy) = [(xy)y]x - [(xy)x]y = 0$.*

Определение 3. *Алгебра A называется алгеброй Мальцева, если в ней выполняются тождества: для любых $x, y, z \in A$, $xy = -yx$, $J(x, y, xz) = J(x, y, z)x$.*

Здесь $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ — якобиан.

В работе найдены все биизотропные бинарно лиевы алгебры размерности 4, не являющиеся алгебрами Ли. Они также не будут алгебрами Мальцева. Они составляют 6 семейств. Две алгебры, принадлежащие различным семействам, будут неизоморфными.

1 семейство. $e_1e_2 = e_1$; $e_1e_3 = e_1$; $e_2e_4 = e_2$; $e_1e_4 = e_1$; $e_2e_3 = e_2$; $e_3e_4 = \alpha_{34}e_1$ $(\forall\alpha_{34})$. $J(e_1, e_2, e_3) = -e_1$; $J(e_1, e_2, e_4) = -e_1$; $J(e_1, e_3, e_4) = 0$; $J(e_2, e_3, e_4) = \alpha_{34}e_1$.

2 семейство. $e_1e_2 = e_1$; $e_1e_3 = \varepsilon_1e_1$; $(\varepsilon_1 = 0$ или $1)$; $e_2e_4 = 0$; $e_1e_4 = 0$; $e_2e_3 = \beta_{23}e_2$; $(\forall\beta_{23} \neq 0)$. $e_3e_4 = \alpha_{34}e_1$ $(\forall\alpha_{34})$. $J(e_1, e_2, e_3) = -\beta_{23}e_1$; $J(e_1, e_2, e_4) = 0$; $J(e_1, e_3, e_4) = 0$; $J(e_2, e_3, e_4) = \alpha_{34}e_1$.

3 семейство. $e_1e_2 = e_1$; $e_1e_3 = 0$; $e_2e_4 = e_2$; $e_1e_4 = e_1$; $e_2e_3 = 0$; $e_3e_4 = \alpha_{34}e_1$ $(\forall\alpha_{34})$. $J(e_1, e_2, e_3) = 0$; $J(e_1, e_2, e_4) = -e_1$; $J(e_1, e_3, e_4) = 0$; $J(e_2, e_3, e_4) = \alpha_{34}e_1$.

4 семейство. $e_1e_2 = e_1$; $e_1e_3 = \varepsilon_1e_1$; $(\varepsilon_1 = 0; 1)$; $e_2e_4 = 0$; $e_1e_4 = \alpha_{14}e_1$; $e_2e_3 = \alpha_{23}e_1$; $e_3e_4 = \alpha_{34}e_1$. $\alpha_{14}\alpha_{23} = 0$; $(\forall\alpha_{34} \neq 0)$. $J(e_1, e_2, e_3) = 0$; $J(e_1, e_2, e_4) = 0$; $J(e_1, e_3, e_4) = 0$; $J(e_2, e_3, e_4) = \alpha_{34}e_1$.

5 семейство. $e_1e_2 = 0$; $e_1e_3 = e_1$; $e_3e_4 = 0$; $e_2e_4 = \alpha_{24}e_1$; $e_1e_4 = \alpha_{14}e_1$ $(\forall\alpha_{14} \neq 0)$; $e_2e_3 = 0$. $J(e_1, e_2, e_3) = -\alpha_{14}e_1$; $J(e_1, e_2, e_4) = 0$; $J(e_1, e_3, e_4) = 0$; $J(e_2, e_3, e_4) = -\alpha_{24}e_1$.

6 семейство. $e_1e_2 = 0$; $e_1e_3 = e_1$; $e_2e_4 = \alpha_{24}e_1$; $(\forall\alpha_{24} \neq 0)$; $e_1e_4 = 0$; $e_2e_3 = \alpha_{23}e_1$; $(\forall\alpha_{34})$; $e_3e_4 = 0$. $J(e_1, e_2, e_3) = 0$; $J(e_1, e_2, e_4) = 0$; $J(e_1, e_3, e_4) = 0$; $J(e_2, e_3, e_4) = -\alpha_{24}e_1$.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: gainov@math.nsc.ru

Вещественно замкнутые поля с симметричными сечениями

Н. Ю. Галанова

Пусть G - линейно упорядоченная делимая абелева группа, β - кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$, $\mathbb{R}[[G,\beta]]$ – поле ограниченных формальных степенных рядов $x = \sum_{g\in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbb{R}, supp(x) = \{g \in G | r_g \neq 0\}$ - вполне антиупорядоченное подмножество группы $G, |supp(x)| < \beta$. Два элемента a и b упорядоченного поля K называются архимедовски эквивалентными, если $\exists n \in N(|a|n \geq |b| \wedge |b|n \geq |a|)$. Отношение архимедовой эквивалентности на вещественно замкнутом линейно упорядоченном поле $K^+ \setminus \{0\}$ порождает делимую линейно упорядоченную абелеву группу(группу архимедовых классов). Сечение (A, B) упорядоченного поля называется симметричным, если $\forall x \in A\ \exists\ y \in\ B \forall\ z\ \in B\ (z \leq y \Rightarrow (x + y - z) \in A)$ и $\forall y \in B\ \exists x \in A \forall z \in A\ (x \leq z \Rightarrow (y - z + x) \in B)$. С использованием результатов [**1**], в данной работе продолжается исследование симметричных сечений вещественно замкнутых полей.

Пусть вещественно замкнутые упорядоченные поля P и K имеют одинаковую группу архимедовых классов G, и $K \subset P$. Пусть (A, B) - симметричное сечение поля P, $cf(A, B) = \beta$, обозначим через $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\beta}$ - множество наименьшей мощности конфинальное A. Пусть $\forall\gamma \in \beta\ \ x_\gamma \in P \setminus K$.

Полагаем $K_1 = \overline{K(x_1)}$ - вещественное замыкание простого трансцендентного расширения поля K. Если γ - не предельный ординал, то $K_\gamma = \overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)}$. Если γ - предельный ординал, то $K_\gamma = \overline{(\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} K_\alpha)(x_\gamma)}$. Полагаем $H = \bigcup\limits_{\gamma\in\beta} K_\gamma$.

Теорема. *Множество H является вещественно замкнутым упорядоченным полем, имеющим симметричное сечение конфинальности β.*

Пример. Пусть $\aleph_0 < \beta < \beta^+ \leq |G|, K = \mathbb{R}[[G,\beta]], P = \mathbb{R}[[G,\beta^+]]$. Пусть носитель ряда $x = \sum_{g\in G} 1g$ вполне антиупорядоченное подмножество группы G инверсно подобное кардиналу β^+(группу G с такими свойствами можно построить), тогда $x \in \mathbb{R}[[G]] \setminus P$. Ряд x порождает в поле P сечение конфинальности β^+ , обозначим его (A, B). Для каждого γ , $\beta \leqslant \gamma < \beta^+$ обозначим через x_γ срезку ряда x с носителем $supp(x_\gamma) = \{g \in supp(x) | g > \gamma\}$. Возрастающая последовательность $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\beta^+}$ поля P конфинальна A. Поле H (из Теоремы) имеет симметричное сечение конфинальности β^+. Причем, $\mathbb{R}[[G,\beta]] \subset H \subset \mathbb{R}[[G,\beta^+]]$. Остаются открытыми вопросы: будет ли H равно (изоморфно) $\mathbb{R}[[G,\beta^+]]$; существует ли линейно упорядоченное поле с симметричными сечениями разной конфинальности?

Список литературы

[1] Галанова Н. Ю., Пестов. Г. Г., Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика, Т.47, 2, 2008, 174–185.

ТГУ, ММФ, г.Томск
E-mail: galanova@math.tsu.ru

Линейный базис свободной алгебры Акивиса

И. А. Гроо

Линейное пространство над полем K называется *алгеброй Акивиса*, если на этом пространстве введены две операции: антикоммутанивная билинейная операция $[x, y]$ (*коммутатор*), и трилинейная операция $\mathcal{A}(x, y, z)$ (*ассоциатор*), удовлетворяющие соотношению:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] =$$
$$\mathcal{A}(x, y, z) + \mathcal{A}(y, z, x) + \mathcal{A}(z, x, y) - \mathcal{A}(y, x, z) - \mathcal{A}(x, z, y) - \mathcal{A}(z, y, x)$$

Эта алгебра впервые была рассмотрена М.А. Акивисом[1].

В свободной неассоциативной алгебре $F(X)$ с множеством X свободных образующих, рассмотрим новые операции: коммутатор $[x, y] = xy - yx$, и ассоциатор $\mathcal{A}(x, y, z) = x(yz) - (xy)z$. Тогда подалгебра в $F(X)$ относительно этих операций, порожденая множеством X — *свободная алгебра Акивиса*. Обозначим ее $Ak(X)$. Известно, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны, см [2].

Назовем базисным семейством любое подмножество $R = R(X) \subseteq F(X) = F$ с линейной упорядоченностью $\leq$, которое удовлетворяет следующим условиям.

R1. $X \subseteq R$.

R2. Элемент $\omega = [u, v]$ лежит в R тогда и только тогда, когда:

(i) $u, v \in R$,

(ii) $u \leq v$,

(iii) если $v = [v_1, v_2]$, то $u \geq v_1$.

R3. Элемент ω лежит в R, если $\omega = \mathcal{A}(a, b, c)$, где $a, b, c \in R$.

Теорема. *Множество R образует линейный базис алгебры $Ak(X)$.*

Список литературы

[1] Акивис М. А. О локальных алгебрах многомереных три-тканей, Сиб. мат. ж. 17(1) (1976), 5-11.

[2] Shestakov I. P., Umirbaev U. U. Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras. Journal of Algebra 250(2002), 533-548.

механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: grooivan@yandex.ru

Универсальные обертывающие алгебры Рота – Бакстера пре- и посталгебр

В. Ю. Губарев

Пусть A — алгебра, λ — скаляр из основного поля. Линейный оператор $R\colon A \to A$, удовлетворяющий для любых $x, y \in A$ тождеству

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy),$$

называют оператором Рота — Бакстера (РБ-оператором) A веса λ. Алгебра многообразия Var с заданным РБ-оператором называют Var-алгеброй Рота — Бакстера.

В 1960-е годы у Э.Б. Винберга, М. Герштенхабера, Ж.-Л. Кожуля возникли прелиевы алгебры, удовлетворяющие тождеству $(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3) = (x_2x_1)x_3 - x_2(x_1x_3)$. Ж.-Л. Лодей в 1990-х годах ввел понятия преассоциативной и прекоммутативной алгебр. В 2000-е годы разными авторами были определены постлиевы, постассоциативные и пр. алгебры. В [1] получены определяющие тождества пре- и пост-Var-алгебр для произвольного многообразия Var.

М. Агуиар и К. Эбрахими-Фард показали, что алгебра с РБ-оператором нулевого веса относительно операций $a \prec b = aR(b)$, $a \succ b = R(a)b$ является преассоциативной алгеброй, а с РБ-оператором ненулевого веса относительно $a \prec b = aR(b)$, $a \succ b = R(a)b$, $a \perp b = \lambda ab$ — постассоциативной алгеброй. Данное утверждение далее было обобщено на произвольное многообразие пре- и посталгебр. В [2] было введено понятие универсальной обертывающей алгебры Рота — Бакстера для пре- и постассоциативных алгебр. В [3] была доказана

Теорема. *а) Каждая пре-*Var*-алгебра инъективно вкладывается в свою универсальную обертывающую* Var*-алгебру Рота — Бакстера веса* $\lambda = 0$.

*б) Каждая пост-*Var*-алгебра инъективно вкладывается в свою универсальную обертывающую* Var*-алгебру Рота — Бакстера веса* $\lambda \neq 0$.

Автором найден линейный базис универсальной обертывающей алгебры Рота — Бакстера произвольной пре- и пост-Var-алгебры, где Var — многообразие ассоциативных, коммутативных или лиевых алгебр. Показано, что PBW-парами [4] не являются только пары многообразий (RBAs, preAs), (RBCom, preCom).

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-21-00065).

Список литературы

[1] *Bai C., Bellier O., Guo L., Ni X.* Splitting of operations, Manin products, and Rota—Baxter operators // Int. Math. Res. Notes. 2013. Vol. 3. P. 485–524.

[2] *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Rota—Baxter algebras and dendriform algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2008. Vol. 212, No. 2. P. 320–339.

[3] *Gubarev V., Kolesnikov P.* Embedding of dendriform algebras into Rota—Baxter algebras // Cent. Eur. J. Math. 2013. Vol. 11, No. 2. P. 226–245.

[4] *Mikhalev A.A., Shestakov I.P.* PBW-pairs of varieties of linear algebras // Communications in Algebra. 2014. Vol. 42, no. 2. P. 667–687.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)
E-mail: vsevolodgu@math.nsc.ru

Альтернативные алгебры, допускающие тернарные дифференцирования с обратимыми значениями

В. Н. Желябин

Определение. Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Тогда тройка (D, D_1, D_2) линейных преобразований векторного пространства A называется тернарным дифференцированием, если имеет место

$$D(xy) = D_1(x)y + xD_2(y).$$

Алгебра A называется альтернативной, если в ней выполняются тождества:

$$x^2y = x(xy),\ yx^2 = (yx)x.$$

Пусть U — множество обратимых элементов алгебры A. Тернарное дифференцирование (D, D_1, D_2) алгебры A будем называть тернарным дифференцированием с *обратимыми значениями* или просто *обратимым*, если $D(A) \subseteq U \cup \{0\}$.

Теорема 1. *Пусть A — альтернативная неассоциативная алгебра с 1 и центром $Z(A)$. Пусть (D, D_1, D_2) — обратимое тернарное дифференцирование алгебры A. Если $\ker D$ не содержит ненулевых идеалов алгебры A, то либо A — алгебра Кэли-Диксона, либо характеристика поля равна 2, $A = \mathcal{C} + t\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — алгебра Кэли-Диксона с делением, $t \in Z(A)$, $t^2 = 0$. В последнем случае существуют $\alpha, \beta \in Z(\mathcal{C})$, $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, такие что для любых $a, b \in \mathcal{C}$*

$$\begin{aligned} D(a+tb) &= b + c_2a + ac_1 + t(\alpha b + (\alpha + c_2)(b + c_2a) + (b + ac_1)(\alpha + c_1)),\\ D_1(a+tb) &= D(a+tb) - (a+tb)c_2 - ta(\alpha c_2 + c_2^2 + \beta),\\ D_2(a+tb) &= D(a+tb) - c_1(a+tb) - t(\alpha c_1 + c_1^2 + \beta)a. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть A — альтернативная неассоциативная алгебра с 1 над полем характеристики не 2, 3 и (D, D_1, D_2) — обратимое тернарное дифференцирование алгебры A. Предположим, что $\mathcal{J}(A) \neq 0$ и фактор-алгебра $A/\mathcal{J}(A)$ не является алгеброй обобщенных кватернионов или полем. Тогда $\ker D = \mathcal{J}(A)$ и $\mathcal{J}(A)^2 = 0$. Кроме того, $B = \{a \in A | D(a) = D(1)a\}$ — йорданова подалгебра с делением в йордановой алгебре $A^{(+)}$, $A = B \oplus \mathcal{J}(A)$ и A содержит алгебру Кэли-Диксона с делением $\mathcal{C}$ такую, что $\mathcal{C}^{(+)} \cong B$.*

Эти теоремы являются аналогами соответствующих результатов для ассоциативных алгебр, которые были доказаны Х. Комацу и А.Накаямой в [**1**]

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00065).

Список литературы

[1] Komatsu H., Nakajima A. Generalized derivations with invertible values // Comm. Algebra, **32** (2004), 5, 1937–1944.

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru

Матрицы Паули и градуировки супералгер Ли

М. В. Зайцев

Матрицы Паули впервые были предложены Вольфгангом Паули для описания спина и магнитного момента электрона. Они составляют базис в пространстве всех эрмитовых 2x2 матриц с нулевым следом. Впоследствии выяснилось, что наряду с квантовой механикой, они находят широкое применение во многих других разделах теоретической физики и математики. Например, с их помощью можно получить одну из реализаций гиперкомплексных чисел, т.е. кватернионов.

Доклад посвящен применению матриц Паули для описания градуировок на конечномерных супералгебрах Ли и изучению тождественных соотношений. Супералгебры Ли являются обобщением обычных алгебр Ли. Они возникают естественным образом в математической физике, дифференциальных уравнениях, геометрии, функциональном анализе и в других разделах математики и физики.

Классификация всех градуировок на конечномерных простых алгебрах Ли была недавно завершена (см., например, библиографию в [**1**]). При этом матрицы Паули и их многомерные обобщения сыграли существенную роль. Для одной из серий конечномерных простых супералгебр Ли мы строим новый тип градуировок, базирующихся на градуировках матричной алгебры 2-го порядка матрицами Паули. В качестве приложения мы используем предложенную конструкцию для изучения количественных характеристик градуированных и неградуированных тождеств супералгебр Ли.

В частности, для градуированных тождеств простых супералгебр Ли типа $b(t)$ получена следующая оценка.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 16-01-10013.

Теорема. *Пусть $G = \langle a_0\rangle_2 \times \langle a_1\rangle_2 \times \langle b_1\rangle_2 \times \cdots \times \langle a_q\rangle_2 \times \langle b_q\rangle_2$ — элементарная абелева 2-группа и пусть L — простая супералгебра Ли типа $b(t)$, $t = 2^q, q \geq 1$ с G-градуировкой, построенной на основе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-градуировки алгебры Ли sl_2 матрицами Паули. Тогда G-градуированная PI-экспонента L существует и*

$$exp^G(L) = t^2 - 1 + t\sqrt{t^2 - 1}.$$

С основами количественной PI-теории можно познакомиться в [**2**]

Список литературы

[1] Elduque A., Kochetov M. Gradings on simple Lie algebras. Mathematical Surveys and Monographs, 189. American Mathematical Society, Providence, RI; Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences (AARMS), Halifax, NS, 2013. xiv+336 pp.

[2] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial identities and asymptotic methods. Mathematical Surveys and Monographs, 122. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xiv+352 pp.

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: zaicevmv@mail.ru

«Linkage principle» для классических алгебраических супергрупп

А. Н. Зубков

Под «принципом связи» («linkage principle» в англоязычной литературе), в широком смысле этого слова, можно понимать следующее. Предположим, что в категории $\mathfrak{A}$ имеют смысл понятия простого объекта, композиционного ряда и прямой суммы. Тогда два простых объекта L и L' из $\mathfrak{A}$ называются просто связанными, если существует нерасщепимое расширение одного из них при помощи другого. Если же существует цепь простых объектов от L к L', в которой любые два соседних объекта просто связанны, то L и L' называются связанными.

Нетрудно видеть, что отношение связанности является отношением эквивалентности на множестве простых объектов. Соответствующие классы эквивалентности называются блоками категории $\mathfrak{A}$. Если $M \in Ob(\mathfrak{A})$, то мы говорим, что M принадлежит блоку $\mathcal{B}$, если все композиционные факторы M принадлежат $\mathcal{B}$. Обозначается $M \in \mathcal{B}$.

При некоторых дополнительных предположениях можно показать, что произвольный объект $N \in Ob(\mathfrak{A})$ является прямой суммой своих подобъектов $N_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$, где сумма берется по всем блокам $\mathcal{B}$. Более того, если N и N' принадлежат разным блокам, то $Ext^i_{\mathfrak{A}}(N, N') = 0$ для всех $i \geq 0$.

В докладе будет обсуждаться «принцип связи» и описание блоков для категорий рациональных супермодулей над общей линейной и ортосимпектической группой в том случае, когда основное поле имеет конечную (нечетную) характеристику. Для общей линейной группы $GL(m|n)$ будут представлены решения обеих задач. Кроме того, будут обсуждаться другие типы блоков. Например, центральные блоки, или блоки Хариш-Чандры, и их связь с обычными блоками.

Будет представлен «принцип связи» для случая ортосимплектической супергруппы $OSp(m|2n)$. В отличие от случая общей линейной супергруппы, здесь появляется (только для полей конечной характеристики и только для нечетного m) новый тип связи через нечетные изотропные корни.

Мы так же обсудим и другие классические супергруппы, т.е. супергруппы типа P и Q.

Работа выполнена совместно с F. Marko, Penn State University, USA.

ИМ СОРАН, Омский филиал

Критерии выполнения теорем Голди для градуированных по группе колец

А. Л. Канунников

Доклад посвящён одной известной проблеме в теории градуированных колец — аналогам теорем Голди. Найдены необходимые и достаточные условия на группу G, при которых каждое G-градуированное gr-первичное (gr-полупервичное) кольцо Голди обладает вполне приводимом классическим градуированным кольцом частных.

Пусть R — ассоциативное кольцо, градуированное группой G, являющееся gr-полупервичным правым кольцом Голди, $Q^{gr}_{cl}(R)$ — его правое градуированное классическое кольцо частных (если существует). (Необходимые определения см. в [**2**]. Отметим, что приставкой gr- принято обозначать стандартный градуированный аналог понятия или свойства.) Известно, что кольцо $Q^{gr}_{cl}(R)$ существует и вполне gr-приводимо в следующих случаях:

- кольцо R gr-первично и группа G абелева [**1**];
- кольцо R имеет конечный носитель [**3**];
- группа G периодична [**3**].

Также построены контрпримеры, когда кольцо $Q^{gr}_{cl}(R)$ не является вполне gr-приводимым: для gr-полупервичного кольца R — Настасеску и ван Остайеном (1979), для gr-первичного кольца R — Д. С. Баженовым (2016).

В 2016 году автор доказал следующие два критерия.

Теорема 1. *Следующие условия на группу G равносильны:*

(1) кольцо $Q^{gr}_{cl}(R)$ существует и вполне gr-приводимо для любого G-градуированного gr-полупервичного правого кольца Голди R;

(2) группа G периодична.

Теорема 2. *Следующие условия на группу G равносильны:*

(1) кольцо $Q^{gr}_{cl}(R)$ существует и вполне gr-приводимо для любого G-градуированного gr-первичного правого кольца Голди R;

(2) $\forall g, h \in G\, \exists n \in \mathbb{N}\; gh^n = h^n g$;

(2)′ $\forall g, h \in G\, \exists m, n \in \mathbb{N}\; gh^m = h^n g$.

Автор поддержан грантом РНФ, 16-11-10013.

Список литературы

[1] Goodearl K., Stafford T. The graded version of Goldie's theorem // Contemporary Math. 259. 2000, p. 237–240.

[2] Nastasesku C., Van Oystayen F. Graded ring theory. — Amsterdam, North-Holland, 2004.

[3] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестник МГУ, 2011, 3, с. 46–50.

Механико-математический факультет МГУ, Москва
E-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

Простые конечномерные алгебры, не имеющие конечного базиса тождеств

А. В. Кислицин

В 1993 г. И. П. Шестаков поставил вопрос о существовании центральной простой конечномерной алгебры над полем нулевой характеристики, тождества которой не задаются конечным набором [**1**]. В 2012 г. И. М. Исаевым и автором построен искомый пример, дающий положительный ответ на поставленный вопрос [**2, 3**]. В 2015 году автором построен пример конечномерной центральной простой коммутативной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств [**4**]. В данной работе продолжается исследование вопроса И. П. Шестакова для случая антикоммутативных алгебр. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $D = \langle e, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\rangle_F$ *— алгебра над полем* F *нулевой характеристики, ненулевые произведения базисных элементов которой определяются правилами:* $v_i e_{ij} = -e_{ij} v_i = v_j$, $v_2 p = -p v_2 = e$, $v_i e = -e v_i = v_i$, $e_{ij} e = -e e_{ij} = e_{ij}$, $pe = -ep = p$. *Алгебра* D *является простой антикоммутативной алгеброй, не имеющей конечного базиса тождеств.*

Следствие. *Пусть* A *— конечномерная алгебра над полем* F *нулевой характеристики и* $B = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}\rangle_F$ *— подалгебра* A, *причем ненулевые произведения базисных элементов* B *определяются правилами:* $v_i e_{ij} = -e_{ij} v_i = v_j$. *Тогда алгебра* A *не имеет конечного базиса тождеств.*

Более того, алгебра B, фигурирующая в формулировке следствия, является сильно бесконечно базируемой алгеброй [**5**].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10002).

Список литературы

[1] Филиппов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Днестровская тетрадь. 4-е изд. Изд-во ИМ СО РАН. Новосибирск, 1993.

[2] Исаев И. М., Кислицин А. В. Пример простой конечномерной алгебры, не имеющей конечного базиса тождеств. Доклады Акад. н. 2012. Т. 447. 3. С. 252–253.

[3] Isaev I. M., Kislitsin A. V. Example of simple finite dimensional algebra with no finite basis of its identities. Commun. Algebra. 2013. Vol. 41. 12. pp. 4593-4601.

[4] Кислицин А. В. Пример центральной простой коммутативной конечномерной алгебры с бесконечным базисом тождеств. 2015. Алгебра и логика. Т. 54. 3. С. 315–325.

[5] Исаев И. М., Кислицин А. В. Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств. Алгебра и логика. 2013. Т. 52. 4. С. 435–460.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск
E-mail: kislitsin@altspu.ru

О шпехтовости L-многообразий векторных пространств

А. В. Кислицин

Пусть F — бесконечное поле, $F\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра над полем F от множества свободных образующих X, V — подпространство некоторой ассоциативной F-алгебры A, причем A как F-алгебра порождается векторным пространством V. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ назовем тождеством пары (A, V), если $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$ при всех $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Совокупность всех тождеств пары (A, V) образуют идеал алгебры $F\langle X\rangle$, замкнутый относительно линейных подстановок переменных. Будем называть такие идеалы L-идеалами.

Пусть $G \subseteq F\langle X\rangle$. Класс всех пар, в которых выполняются все тождества $g = 0$, где $g \in G$, называется L-многообразием, заданным множеством тождеств G и обозначается $\mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$. Многообразие пар, заданное множеством тождеств пары (A, V), назовем L-многообразием, порожденным пространством V и будем обозначать $\mathrm{Var}_L V$. В случае, если пара (A, V) не имеет конечного базиса тождеств, многообразие $\mathrm{Var}_L V$ назовем бесконечно базируемым. Пусть $G = \{f_i | i \in I\} \subseteq F\langle X\rangle$ и $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}_L\langle f_i = 0 | i \in I\rangle$. L-многообразие $\mathfrak{M}$ назовем шпехтовым, если любой L-идеал алгебры $F\langle X\rangle \big/ L(G)$ конечно порожден как L-идеал, и локально шпехтовым, если любой L-идеал алгебры $F\langle X\rangle \big/ L(G)$, порожденный многочленами из $F\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ для фиксированного k, конечно порожден как L-идеал. Через $L(G)$ обозначен наименьший L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$, содержащий множество G.

Объединением L-многообразий $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называется наименьшее L-многообразие $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, содержащее $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.

В работе [**1**] доказано, что свойство шпехтовости многообразий линейных алгебр переносится на объединение этих многообразий. В случае L-многообразий дело обстоит иначе.

Пусть $A_1 = \langle e_{11}, e_{21}\rangle_F$, $A_2 = \langle e_{11}, e_{12}\rangle_F$ — векторные пространства над бесконечным полем F, $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{Var}_L A_1$, $\mathfrak{M}_2 = \mathrm{Var}_L A_2$, $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}_L(A_1 \oplus A_2)$.

Теорема 1. *Пусть F — поле нулевой характкристики. Бесконечно базируемое L-многообразие $\mathfrak{M}$ является объединением шпехтовых L-многообразий $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.*

Теорема 2. *Пусть F — бесконечное поле. Бесконечно базируемое L-многообразие $\mathfrak{M}$ является объединением локально шпехтовых L-многообразий $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10002).

Список литературы

[1] Дорофеев Г. В. О некоторых свойствах объединения многообразий алгебр. Алгебра и логика. 1977. Т 18. 1. С. 24–39.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск
E-mail: kislitsin@altspu.ru

Решеточные изоморфизмы конечных коммутативных колец с единицей

С. С. Коробков

Рассматриваются ассоциативные кольца. Решёточным изоморфизмом (иначе, проектированием) кольца R на кольцо R^{φ} называется изоморфизм φ решётки подколец $L(R)$ кольца R на решётку подколец $L(R^{\varphi})$ кольца R^{φ}.

Пусть R — конечное коммутативное кольцо с единицей и R^{φ} — кольцо, решёточно изоморфное кольцу R. Выясняется, какими из алгебраических свойств кольца R будет обладать кольцо R^{φ}. Приведём некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. *Пусть конечное коммутативное кольцо R с единицей разложимо в прямую сумму колец T_i $(i=\overline{1,k})$, удовлетворяющих условиям: $T_i = S_i + N_i$, $S_i \cong GR(p^{n_i}, m_i)$, $n_i > 1$, $m_i > 1$, N_i — ненулевой нильпотентный идеал, единица e_i кольца S_i является единицей в T_i $(i=\overline{1,k})$. Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^{φ}. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $T_i^{\varphi} = S_i^{\varphi} + N_i'$, $S_i^{\varphi} \cong S_i$, $\langle e_i\rangle^{\varphi} = \langle e_i'\rangle$, e_i' *— единичный элемент в кольце* T_i^{φ}, N_i' *— двусторонний нильпотентный идеал, порождённый подкольцом* N_i^{φ}, $s'r' = r's'$ *для всех* $s' \in S_i^{\varphi}$ *и всех* $r' \in N_i'$ $(i=\overline{1,k})$;

(2) $R^{\varphi} = T_1^{\varphi} \dotplus \dots \dotplus T_k^{\varphi}$;

(3) $\langle e\rangle^{\varphi} = \langle e'\rangle$, *где* e *и* e' *— единичные элементы колец* R *и* R^{φ} *соответственно;*

(4) $(\operatorname{Rad} R)^{\varphi} = \operatorname{Rad} R^{\varphi}$;

(5) *кольцо* R^{φ} *коммутативно тогда и только тогда, когда коммутативно каждое подкольцо* N_i^{φ} $(i=\overline{1,k})$.

Теорема 2. *Пусть конечное коммутативное кольцо R определено следующим образом: $R = F \oplus N$, где $F \cong GF(p^n)$ $(n>1)$, единичный элемент поля F является единицей кольца R, N — главный идеал в кольце R, порождённый ненулевым нильпотентным элементом. Пусть φ — решёточный изоморфизм кольца R на кольцо R^{φ}. Тогда $R^{\varphi} \cong R$.*

Приведённые факты говорят о взаимосвязи между алгебраическими свойствами решёточно изоморфных колец, из которых одно коммутативно и содержит единицу. Полученные теоремы дополняют результаты исследований, содержащиеся в работах [**1**], [**2**].

Список литературы

[1] Коробков С. С. Проектирования колец Галуа, Алгебра и логика, 54, 1 (2015), 16–33.

[2] Коробков С. С. Проектирования конечных однопорождённых колец с единицей, Алгебра и логика, 55, 2 (2016), 128–145.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

Автоморфизмы нильтреугольных подколец $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле

А. В. Литаврин

В алгебре Шевалле L_K с базисом $\{e_r\ (r \in \Phi),\ \cdots\}$ над полем или кольцом K, ассоциированной с системой корней Φ [**1**, § 4.4], выделяют нильпотентную подалгебру $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r | r \in \Phi^+\}$. Автор изучает автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ классического типа над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, в частности, K-алгебры Ли $N\Phi(K)$.

К основным элементарным автоморфизмам кольца Ли $N\Phi(K)$ относим: автоморфизмы индуцированные автоморфизмами основного кольца, диагональные, внутренние, графовые и центральные автоморфизмы. Порождаемые ими автоморфизмы называют стандартными.

В решении проблемы описания группы $Aut\ U$ унипотентных подгрупп U групп лиева типа существенным оказывается следующее обобщение в [**2**] центральных автоморфизмов: *Автоморфизм ϕ группы или кольца Ли, тождественный по модулю m-го гиперцентра и внешний по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют гиперцентральным автоморфизмом высоты m.*

Для кольца Ли $N\Phi(K)$ типа C_n при $n = 3, 4$ получено описание группы $Aut\ (N\Phi(K))$.

Теорема 1. *Пусть K – ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Всякий автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n $(n = 3, 4)$ есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты ≤ 5 автоморфизмов.*

При существенных ограничениях на основное кольцо коэффициентов K автоморфизмы алгебр Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 2)$ были описаны ранее в [**3**]. Описание группы автоморфизмо кольца Ли $N\Phi(K)$ для произвольного ассоциативно коммутотивного кольца K с единицей приведено в [**4**] для типа $C_n (n > 4)$; и в [**5**] для типов B_n $(n > 5)$ и D_n $(n > 5)$.

Список литературы

[1] Carter R. Simple groups of Lie type. – New York: Wiley and Sons, 1972.

[2] Левчук В.М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле / В.М.Левчук // Алгебра и логика – 1990 – Т. 29, 3, С. 316-338.

[3] Cao Y., Jiang D., Wang D. Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings / Y. Cao, D. Jiang, J. Wang // J. Algebra – 2007 – Vol. 17, no. 3, P. 527-555.

[4] Литаврин А.В. Автоморфизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Известия Иркутского Государственного Университета, сер. матем. – 2015 – Т. 13, – 3, – С. 41–55.

[5] Левчук В.М., Литаврин А.В. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле [Электронный ресурс] // Сибирские электронные математические известия. – 2016, – Т. 13, – С. 467–477.

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
E-mail: anm11@rambler.ru

Числовые инварианты тождеств унитарных алгебр

П. Н. Овсов

Доклад посвящен рассмотрению числовых характеристик тождеств конечномерных неассоциативных алгебр, в частности PI-экспонент. Известно, что каждой алгебре можно сопоставить целочисленную последовательность $c_n(A)$, характеризующую количество её тождественных соотношений. С основами количественной PI-теории можно познакомиться в [**1**].

Пусть A — четырехмерная алгебра из работы [**2**] с базисом z, t, d, b и таблицей умножения

$$zd = t, \ \ td = b, \ \ bb = z,$$

остальные произведения базисных элементов равны нулю. В работе [**2**] было показано, что

$$2,3 < \underline{\exp}(A), \ \overline{\exp}(A) < 2,9.$$

При этом вопрос о существовании $\exp(A)$ оставался открытым.

Первым результатом настоящего доклада является

Теорема 1. *Существует PI-экспонента алгебры A, причем* $\exp(A) \approx 2.368801...$

Отдельный интерес представляет вопрос о существовании PI-экспоненты унитарных алгебр. Так в ряде работ рассматривался вопрос об изменении PI-экспоненты при присоединении к алгебре внешней единицы (см. [**3**], [**4**]). Например, если A — ассоциативная PI-алгебра, то $\exp(A \oplus 1)$ либо равна $\exp(A)$, либо равна $\exp(A) + 1$ (см [**4**]). В работе [**3**] был поставлен вопрос может ли $\exp(A \oplus 1)$ отличаться от $\exp(A)$ на величину не равную 0 или 1. Вторым результатом доклада является

Теорема 2. $\exp(A \oplus 1) = \exp(A) + 1$, *где A – алгебра из теоремы 1, $A \oplus 1 = A^{\#}$ — алгебра, получающееся из алгебры A присоединением внешней единицы.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 16-01-00113.

Список литературы

[1] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial identities and asymptotic methods. Mathematical Surveys and Monographs, 122. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xiv+352 pp.

[2] Мищенко С. С. Экспоненты многообразий коммутативных и антикоммутативных линейных алгебр — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Ульяновск, 2012.

[3] Зайцев М. В. Тождества конечномерных унитарных алгебр, Алгебра и логика, 50, 5 (2011).

[4] Giambruno A., Zaicev M. Proper identities, Lie identities and exponential codimension growth. J. Algebra, 2008, 320:5. 1933-1962.

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: OvsovNikita@gmail.com

О подполукольцах циклических полуколец с некоммутативным сложением

И. В. Орлова

Основные результаты по циклическим полукольцам с некоммутативным сложениям представлены в работах [**1, 2**].

Определение 1. *Полукольцом* будем называть алгебраическую структуру S с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими, что $\langle S,+\rangle$ — полугруппа, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Определение 2. Полукольцо S с единицей 1 назовем *циклическим*, если в S существует *образующий* элемент $a \neq 1$, такой, что каждый ненулевой элемент из S является его неотрицательной целой степенью. Циклическое полукольцо S с образующим a обозначим $S = (a)$.

Определение 3. *Полутелом* называется полукольцо, являющееся группой по умножению; коммутативное полутело называется *полуполем*.

Определение 4. *Циклическим полуполем* называется полуполе, являющееся циклическим полукольцом.

Пусть $S = (a)$ – циклическое полукольцо (с некоммутативным сложением) типа (k, n) с циклом C. Заметим, что не все подполукольца в S являются циклическими. Произвольный идеал [**3**] циклического полукольца S является подполукольцом в S, но не обязательно циклическим.

Предложение 1. *Пусть (c) – циклическое полуполе. Множество (c^r) для любого $r \in \mathbb{N}$ является циклическим подполуполем в (c).*

Предложение 2. *Пусть (a) – циклическое полукольцо типа (k, n). Множество (a^d), где d – делитель числа n, является циклическим подполукольцом в (a).*

Предложение 3. *Пусть $S = (a)$ – циклическое полукольцо. Если все суммы элементов S лежат в цикле C полукольца S, то $\forall r \in \mathbb{N}$ множество (a^r) является циклическим подполукольцом в S.*

Список литературы

[1] Вечтомов Е. М., Лубягина И. В. Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 33–52.

[2] Вечтомов Е. М., Орлова И. В. Циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением // Фундаментальная и прикладная математика (в печати).

[3] Орлова И. В. Идеалы и конгруэнции циклических полуколец с некоммутативным сложением // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Казанское математическое общество, 2015. Т. 52. С. 118–120.

Вятский государственный университет, Киров
E-mail: lubyagina@yandex.ru

О почти конечномерных йордановых алгебрах

А. С. Панасенко

Пусть A — бесконечномерная алгебра над полем k. Она называется почти конечномерной над k, если коразмерность над k любого ее ненулевого идеала конечна.

Классическими примерами почти конечномерных алгебр являются, например, кольцо многочленов $k[x]$, кольцо формальных степенных рядов $k[[x]]$, кольцо полиномов Лорана $k[x, x^{-1}]$. Так же известен ряд нетривиальных примеров ассоциативных почти конечномерных алгебор.

В работе [**1**] доказано, что почти конечномерная ассоциативная алгебра A первична; если A, к тому же, удовлетворяет тождественному соотношению, то A — конечный $Z-$модуль, где Z — центр A, который почти конечномерен. В работе [**2**] доказано, что альтернативная неассоциативная почти конечномерная алгебра A является кольцом Кэли-Диксона, конечным над своим центром, который является почти конечномерной алгеброй.

Известно, что примеры йордановых почти конечномерных алгебр можно получать из ассоциативных: если A — почти конечномерная ассоциативная алгебра, то A^+ — почти конечномерная йорданова алгебра, где A^+ — алгебра на пространстве A с симметризованным произведением $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y)$. В работе эта конструкция обобщена на альтернативные алгебры.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Почти конечномерная йорданова алгебра первична и невырожденна.*

Теорема 2. *Почти конечномерная йорданова исключительная алгебра J является кольцом Алберта. Кроме того, ее центр Z почти конечномерен, и A является конечным $Z-$модулем.*

Теорема 3. *Пусть J — почти конечномерная йорданова PI алгебра. Тогда либо J — центральный порядок в йордановой алгебре симметрической билинейной невырожденной формы на бесконечномерном пространстве, либо J — конечный $Z-$модуль, где центр Z — почти конечномерная алгебра.*

Список литературы

[1] Farina J., Pendergrass-Rice C. A Few Properties of Just Infinite Algebras Communications in Algebra, 35, N 5(2007), Pages 1703 - 1707.

[2] Желябин В.Н., Панасенко А.С. О ниль идеалах конечной коразмерности в альтернативных нетеровых алгебрах, Мат.заметки, принята в печать.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: tom-anjelo@mail.ru

Определяющие соотношения и тождества нильпотентной конечномерной алгебры R с условием $dimR^2/R^3 = 2$

Е. П. Петров

В 80-е годы в Днестровской тетради [1] была поставлена задача (1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех n-мерных ассоциативных алгебрах над полем (n – фиксированное число). В 1980 году С.А.Пихтильковым [2] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$. В 1986 году Ю.Н.Мальцевым [3] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$ ассоциативных алгебр над произвольным полем, порожденное всеми n-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1,6}$, а также доказано, что каждая n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет тождествам:
$x_1 x_2 \dots x_{n-2} = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n-2)}$, $\sigma \in S_{n-2}$, $n \geq 6$; $[x_1, x_2, \dots, x_k] = 0$,
где $k = [\frac{n+1}{2}] + 1$. Кроме того, в работе [3] был поставлен вопрос:
(*) *Какова степень минимального тождества в многообразии $\mathfrak{M}_n$?*

Заметим, что описание многообразия $\mathfrak{M}_n$ на языке тождеств позволит ответить на вопрос: когда приведенно-свободная алгебра некоторого многообразия аппроксимируется k-мерными нильпотентными алгебрами ($k \leq n$)? Исходя из этого, представляется естественным изучение тождеств сначала нильпотентных n-мерных алгебр, а затем уже произвольных n-мерных алгебр.

В 1989 г. И.Л.Гусевой [4] было доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0, \text{ где } k = [\tfrac{n}{3}] + 2.$$

В 1991 г. автором [5] была сформулирована гипотеза о том, что произвольная n-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, в качестве подтверждения этой гипотезы приводится пример n-мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что n-мерная нильпотентная алгебра R с условием $dimR^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе.

Из этого результата следует, что стандартное тождество $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, является минимальным тождеством в $\mathfrak{M}_n$ для $n \leq 12$ и $n = 15$ (см. [5]). Таким образом, для малых размерностей был получен положительный ответ на вопрос (*).

Оказывается, что можно усилить результат работы [5]. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Произвольная нильпотентная конечномерная алгебра R с условием $dimR^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству*

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Список литературы

[1] Днестровская тетрадь (нерешенные проблемы теории колец и модулей). - 3 изд., Новосибирск, 1982, 7 с.

[2] Пихтильков С. А. О многообразии, порожденном n-мерными алгебрами. - Деп. в ВИНИТИ, 1980, N 1213 - 80.

[3] Мальцев Ю. Н. О тождествах нильпотентных алгебр. - Изв. Вузов, N 9, 1986, с. 68-72.

[4] Гусева И. Л. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр. - Тезисы сообщений международной конференции по алгебре, посвященной памяти Мальцева А.И., Новосибирск, август 1989 г., с. 43.

[5] Петров Е. П. О тождествах конечномерных нильпотентных алгебр. - Алгебра и логика, 30, N 5, 1991, с. 540-556.

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, 656049, Барнаул (Россия)
E-mail: pep@email.asu.ru

Полное устранение ветвления в расширениях дискретно нормированных полей

К. Н. Пономарев

Конечное (не обязательно сепарабельное) расширение полей K'/K называем *разрешимым расширением*, если у наименьшего нормального расширения F/K, содержащего K'/K, его сепарабельная часть F^{sep}/K образует разрешимое расширение Галуа.

Установлено разрешимое устранение ветвления конечного сепарабельного расширения конечнопорожденного дискретно нормированного поля.

Теорема. *Пусть L/K – конечное сепарабельное расширение конечнопорожденного поля K, которое наделено дискретным нормированием.*

Утверждается, что в алгебраическом замыкании поля K найдется такое разрешимое конечное расширение K'/K, для которого расширение LK'/K' является неразветвленным относительно любого продолжения нормирования поля K на поле K' , и далее на поле LK'.

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ponomaryov@ngs.ru

Об элементарной эквивалентности в частично коммутативных кольцах и алгебрах Ли

Е. Н. Порошенко

Работа посвящена поиску критериев универсальной эквивалентности конечнопорожденных частично коммутативных алгебр и колец Ли. При этом R-алгебра Ли L рассматривается либо как одноосновная алгебраическая система $\langle L; +, [\cdot\,,\cdot], \{\lambda\cdot \mid R\}\rangle$, где $+ : L^2 \to L$ и $[\cdot,\cdot] : L^2 \to L$ — бинарные операции умножения и умножения, а $\lambda\cdot : L \to L$ — операции умножения на фиксированный элемент кольца R; либо как двуосновная $\langle L, R; +, [\cdot\,,\cdot], \cdot\rangle$, с такими же операциями сложения и умножения элементов алгебры и одной операцией умножения элемента алгебры на скаляр $\cdot : R \times L \to L$.

Исследуются три случая:

(1) частично коммутативная или метабелева частично коммутативная алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$, рассматриваемая как двуосновная алгебраическая система;

(2) частично коммутативное или метабелево частично коммутативное кольцо Ли, рассматриваемое как одноосновная алгебраическая система;

(3) частично коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра Ли, где $\mathbb{F}$ — поле, содержащее $\mathbb{Q}$ в качестве подполя, рассматриваемая как одноосновная алгебраическая система.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть L_1 и L_2 — частично коммутативные (метабелевы частично коммутативные) алгебры Ли, рассматриваемые как двуосновные алгебраические системы или частично коммутативные (метабелевы частично коммутативные) кольца Ли, рассматриваемые как одноосновные алгебраические системы. Тогда L_1 и L_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны их определяющие графы.*

Пусть $L(X;G)$ — частично коммутативная алгебра Ли с множеством порождающих X и определяющим графом G. Обозначим через C_G множество вершин графа G, каждая из которых смежна со всеми другими вершинами этого графа. Через $G(Y)$ обозначим подграф графа G, построенный на множестве вершин Y.

Теорема 2. *Пусть G_1 и G_2 графы с конечными множествами вершин X_1 и X_2 соответственно, такие что дополнения графов $G_1(X_1 \backslash C_{G_1})$ и $G_2(X_2 \backslash C_{G_2})$ связны. Частично коммутативные алгебры Ли $L_1(X_1;G_1)$ и $L_2(X_2;G_2)$ над полем $\mathbb{F}$, содержащим подполе $\mathbb{Q}$, рассматриваемые как одноосновные алгебраические системы, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда графы $G_1(X_1 \backslash C_{G_1})$ и $G_2(X_2 \backslash C_{G_2})$ изоморфны и при этом множества C_{G_1} и C_{G_2} либо оба пусты, либо оба не пусты.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–01485), а также Министерства образования и науки РФ (гос. задание 214/138, проект 1052).

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: auto_stoper@ngs.ru

Собственные тождества конечно порожденных коммутативных альтернативных алгебр

С. В. Пчелинцев

Интерес к коммутативным альтернативным алгебрам вызван, прежде всего, их связью с коммутативными лупами Муфанг [**1**], [**2**] и первичными вырожденными альтернативными алгебрами [**3**], [**4**]. Известно [**1**], что если C_n – свободная коммутативная альтернативная алгебра ранга $n \geq 3$, то коммутаторный идеал алгебры умножений $R\left(C_n\right)$ нильпотентен индекса $n-1$, а индекс нильпотентности ассоциаторного идеала $D\left(C_n\right)$ не превосходит $n-1$.

Многочлен называется *собственным*, если он содержится в подалгебре, порожденной итерированными ассоциаторами от порождающих элементов.

Теорема. *Всякий собственный многочлен степени $\geq 2n-2$ является тождеством свободной коммутативной альтернативной алгебры C_n ранга n.*

Следствие 1. *Всякая коммутативная альтернативная ниль-алгебра индекса 3, порожденная n элементами, нильпотентна индекса $\leq 4n-2$ (оценка точная).*

Следствие 2. *Пусть $d\left(n\right)$ – индекс нильпотентности ассоциаторного идеала $D\left(C_n\right)$. Тогда для любого $n \geq 3$ верно $d\left(n\right) = \left[\frac{2n}{3}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x.*

А.А. Лопатин [**5**] указал точную оценку индекса нильпотентности $c\left(n,p\right)$ ассоциативной ниль-алгебры индекса 3 от $n \geq 2$ порождающих над бесконечным полем конечной характеристики $p=2$ или $p=3$. Для случая поля характеристики 3 развитые методы позволяют получить более простое доказательство теоремы А.А. Лопатина.

Список литературы

[1] Пчелинцев С.В. Строение конечно порожденных коммутативных альтернативных алгебр и специальных луп Муфанг, Мат. заметки, **80**, 3 (2006), 413–420; English transl. in Math. Notes **80** (2006), 3-4, 396–402.

[2] Grishkov A.N., Shestakov I.P. Commutative Moufang loops and alternative algebras, J. Algebra, **333**, 1 (2011), 1–13.

[3] Пчелинцев С.В. Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным, Изв. РАН, Сер. Матем., **68**, 1 (2004), 183–206; English transl. in Math. USSR-Izv. **68**, 1 (2004), 181–204.

[4] Пчелинцев С.В. Исключительные первичные альтернативные алгебры, Сиб. матем. журн., **48**, 6 (2007), 1322–1337; English transl. in Siberian Math. J., **48** (2007).

[5] Lopatin A.A. Relatively free algebras with the identity $x^3 = 0$, Communications in Algebra, **33**, 10 (2005), 3583–3605.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru

Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с унитарной чётной частью над полем характеристики нуль

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

Простые альтернативные супералгебры и простые $(-1,1)$-супералгебры описаны И.П. Шестаковым [**1**], [**2**]. Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была поставлена им в Днестровской тетради [**3**].

В [**4**] и [**5**] начато изучение простых конечномерных правоальтернативных супералгебр. Так, в [**4**] классифицированы конечномерные центральные простые правоальтернативные супералгебры абелева типа над полем характеристики 0. В [**5**] описано строение некоторых простых правоальтернативных супералгебр малых размерностей. Кроме того, в [**5**] построен пример 5-мерной простой правоальтернативной супералгебры $B_{2|3}$, чётная часть которой – двумерная алгебра с нулевым умножением, а нечётная часть – неприводимый бимодуль над чётной частью. Супералгебра $B_{2|3}$ имеет своим прототипом правонильпотентную, но не нильпотентную алгебру Дорофеева [**6**].

Заметим, что чётная часть простой ассоциативной (альтернативной, йордановой или лиевой) супералгебры является полупростой.

Алгебра называется *унитарной*, если она получена внешним присоединением единицы к ниль-алгебре. Получен следующий результат

Теорема. *Пусть $B = A + M$ – простая конечномерная правоальтернативная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если чётная часть A унитарна и её единица является единицей в супералгебре B, то супералгебра B ассоциативна.*

Неизвестно является ли существенным ограничение конечномерности супералгебры.

Список литературы

[1] Шестаков И.П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики, Алгебра и логика, **36**, 6 (1997), 675–716.

[2] Шестаков И.П. Простые $(-1,1)$-супералгебры, Алгебра и логика, **37**, 6 (1998), 721–739.

[3] Днестровская тетрадь, Нерешенные проблемы теории колец и модулей, Издание четвертое, Новосибирск, ИМ СО РАН, 1993.

[4] Пчелинцев С.В., Шашков О.В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики 0, Изв. РАН, Сер. мат., **79**, 3 (2015), 131–158.

[5] Silva J.P., Murakami L.S.I., Shestakov I.P. On right alternative syperalgebras, Comm. in Algebra, **44**, 1 (2016), 240–252.

[6] Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным, М.: Наука, 1978.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru

Большие абелевы подалгебры алгебр Шевалле над полем

Г. С. Сулейманова

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, характеризуют базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ вместе с подходящей базой подалгебры Картана [**1**]. Элементы e_r $(r \in \Phi^+)$ образуют базу максимальной нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$.

В работе рассматриваются следующие задачи, записанные в [**2**] и исследованные при $K = C$ в [**3**]:

Обобщенная задача А.И. Мальцева: *описать абелевы подалгебры наивысшей размерности алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

Обобщенная редукционная задача: *описать абелевы подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$.*

Автором и В.М. Левчуком получен список абелевых идеалов наивысшей размерности подалгебры $N\Phi(K)$ классического типа [**2**] и доказана теорема [**4**]:

Теорема. *В алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ классического типа над полем K каждая большая абелева подалгебра подалгебры $N\Phi(K)$ переводится автоморфизмом алгебры $L_\Phi(K)$ в идеал подалгебры $N\Phi(K)$.*

В данной работе (совместно с Е.А. Кирилловой) исследуются большие абелевы подалгебры алгебры $N\Phi(K)$ исключительных типов.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 16-01-00707).

Список литературы

[1] Carter R., Simple groups of Lie type, Wiley and Sons, New York, 1972.

[2] Levchuk V.M., Suleimanova G.S. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 86. N 4. P. 384-388.

[3] Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Известия АН СССР, сер. матем., т. 9 (1945), 4, с. 291-300.

[4] Сулейманова Г.С. Большие абелевы подалгебры алгебр Шевалле над полем // XI Школа-конференция по теории групп: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А.Ю. Ольшанского. Красноярск, 27 июля - 2 августа 2016 г. - Красноярск, Сиб. федер. ун-т, 2016. - 96 с. С. 57-58.

Хакасский технический институт – филиал СФУ, Абакан
E-mail: suleymanova@list.ru

Кольца формальных матриц и обобщенные алгебры инцидентности

Д. Т. Тапкин

В теории колец и модулей большую роль играют кольца формальных матриц. В статье 2008 года "Об изоморфизме колец обобщенных матриц" за авторством П.А. Крылова был рассмотрен вопрос изоморфизма колец формальных матриц второго порядка. Было показано, что при определенных условиях на кольцо R, кольца $K_s(R)$ и $K_t(R)$ изоморфны в том и только в том случае, когда $t = v\alpha(s)$, где v - обратимый элемент, α – автоморфизм кольца R. В дальнейшем, рядом авторов этот результат был обобщен как на более широкий класс колец R, так и на некоторые классы колец формальных матриц больших размерностей.

После колец формальных матриц со значение в некотором кольце, имеет смысл рассмотреть и кольца формальных матриц $K_n(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$, где $M_{ii} = R$ для всех i, а каждый бимодуль M_{ij} равен либо 0, либо ${}_RR_R$. Как и в случае колец формальных матриц со значением в кольце, здесь возникает набор множителей $\eta = \{\eta_{ikj}\}$, таких что $\varphi_{ikj}(a \otimes b) = \eta_{ikj}ab$.

Обозначим такие кольца формальных матриц $I(X, R; \eta)$, где $X = \{1, ..., n\}$ – множество с отношением "$\leq$", определяемым по правилу: $x \leq y$ если и только если $M_{xy} \neq 0$. Потребуем чтобы кольцо R было коммутативно. Тогда $I(X, R; \eta)$ становится алгеброй, которую будем называть обобщенной алгеброй инцидентности.

На обобщенные алгебры инцидентности переносятся многие результаты для классических алгебр инцидентности. Вводятся понятия η-предпорядка и частичного η-порядка. Для случая коммутативного локального кольца R был получен критерий изоморфизма алгебр $I(X, R; \eta)$ и $I(Y, R; \mu)$. В частности, выполняется следующее следствие.

Теорема. *Пусть R — коммутативное локальное кольцо, X – конечный η-предпорядок, а Y – конечный μ-предпорядок. Тогда если $I(X, R; \eta) \cong I(Y, R; \mu)$ как алгебры, то найдется биекция $\varphi : X \to Y$, сохраняющая отношение $' \leq'$, такая что для любой тройки $x \leq y \leq z \in X$ $\eta_{xyz} = v_{xyz}\,\mu_{xyz}$, где $v_{xyz} \in U(R)$.*

Обращение приведенной выше теоремы в общем случае не верно.

Вопрос изоморфизма колец $I(X, R; \eta)$ и $I(Y, R; \mu)$ сводится к вопросу изоморфизма некоторых обобщенных алгебр инцидентости, что позволяет получить критерий изоморфизма.

КФУ, Казань
E-mail: danil.tapkin@yandex.ru

Инварианты матриц второго порядка над кольцом классов вычетов по модулю составного числа

А. В. Трепачева

Пусть $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z}_m)$ – векторное пространство матриц второго порядка с элементами из кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_m$ по модулю числа $m \in \mathbb{N}$. Одной из классических проблем теории инвариантов является следующая: определить все полиномы от элементов матрицы, неизменные на классах подобия. На языке современной теории инвариантов можно сформулировать эту задачу так: для полной линейной группы $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z}_m)$ которая действует на $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z}_m)$ сопряжениями (и следовательно также на полиномиальную алгебру $\mathbb{Z}_m[\mathsf{M}_2(\mathbb{Z}_m)]$ на сопряженном векторном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{Z}_m)^*$) описать кольцо инвариантов $\mathbb{Z}_m[\mathsf{M}_2(\mathbb{Z}_m)]^{\mathsf{GL}(2,\mathbb{Z}_m)}$.

Случай, когда m – простое число (и в этом случае $\mathbb{Z}_m$ становится простым полем) был рассмотрен в [**1**]. В докладе будет рассмотрен случай составного m. Особое внимание будет посвящено случаю, когда m – произведение двух простых чисел. С одной стороны, этот случай более удобен для анализа, с другой стороны – позволяет увидеть важные закономерности, связанные с делителями нуля. Отметим, что этот случай представляет как теоретический интерес, так и практический в связи с приложениями в криптографии [**2**]. *Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 15-07-00597 а).*

Список литературы

[1] Smith L. Invariants of 2×2-matrices over finite fields. Finite Fields and their Applications, 8(4):504–510, 2002.

[2] Трепачева А. В. Криптоанализ симметричных полностью гомоморфных линейных криптосистем на основе задачи факторизации чисел. Известия Южного федерального университета. Технические науки, (5 (166)), 2015.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: alina1989malina@ya.ru

Линейно замкнутые многообразия алгебр

О. Б. Финогенова

Пусть F — ассоциативно-коммутативное кольцо, $F\langle X\rangle$ — свободная F-алгебра. Подмножество I алгебры $F\langle X\rangle$ назовем *линейно замкнутым*, если из включения

$$f(x+y,\ldots)-f(x,\ldots)-f(y,\ldots)\in I\setminus\{0\},$$

выполняющегося для некоторого однородного по x многочлена $f(x,\ldots)$ из $F\langle X\rangle$, следует $f(x,\ldots)\in I$. Многообразие F-алгебр будем называть *линейно замкнутым*, если идеал тождеств этого многообразия является линейно замкнутым множеством. Хорошо известно, что любое многообразие алгебр над полем нулевой характеристики является линейно замкнутым. Это не так в общем случае. Тем не менее, нетрудно показать, что множество полилинейных тождеств любого многообразия совпадает с множеством полилинейных тождеств некоторого линейно замкнутого многообразия. Таким образом, линейно замкнутые многообразия исчерпывающе характеризуют многообразия на полилинейном уровне.

Мы изучаем решеточные и эквациональные свойства линейно замкнутых многообразий и применяем полученные результаты для решения некоторых задач теории многообразий ассоциативных колец.

Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект 2248 Министерства образования и науки РФ), поддержана грантом РФФИ 14-01-00524.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: ob.finogenova@urfu.ru

Идеалы нильтреугольных алгебр Ли и их точных обертывающих алгебр

Н. Д. Ходюня

Алгебра Шевалле над полем K, ассоциированная с системой корней Φ, характеризуется базой Шевалле, составляемой из элементов e_r ($r \in \Phi$) и подходящей базы подалгебры Картана [**1**, теорема 4.2.1]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называют *нильтреугольной*. Следуя известной конструкции, произвольной (не обязательно ассоциативной) алгебре R мы сопоставляем алгебру $R^{(-)}$, заменяя умножение в R на новое умножение $a * b = ab - ba$. Алгебру R называем *точной обертывающей алгебры Ли* L, если обе алгебры изоморфны как линейные пространства и $R^{(-)} \simeq L$. Построена точная обертывающая R алгебр Ли $N\Phi(K)$ любого типа $\neq G_2$. Оказывается, проблема 1 из [**2**] равносильна перечислению всех идеалов точных обертывающих алгебр Ли $N\Phi(q) := N\Phi(GF(q))$ классических типов. В [**3**] она решена для типа A_n; упрощение получил Г.П. Егорычев [**4**], используя q-биномиальные коэффициенты $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1-q^{n-i}}{1-q^{i+1}}$. Доказана

Теорема 1. *Число всех идеалов точной обертывающей алгебры R к алгебре Ли $N\Phi(q)$ классического типа равно*

$$\sum_{m=0}^{n} B(m,\Phi) \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-t} (-1)^{m-t-k} q^k \binom{m-1}{t+k-1} \begin{bmatrix} t+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q,$$

где $B(m,\Phi) = \binom{n}{m}^2$ для типа B_n и C_n, а также

$$B(m, A_{n-1}) = \frac{1}{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}, \qquad B(m, D_n) = \binom{n}{m}\left(\binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m-2}\right).$$

Теорема дает полное решение проблемы 1 из [**2**]. Проблему 2 из [**2**] перечисления всех идеалов алгебр Ли $N\Phi(q)$ мы исследуем для типа A_n.

Список литературы

[1] Carter R. Simple Groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972.

[2] Egorychev G. P., Levchuk V. M. Enumeration in the Chevalley algebras, ACM SIGSAM Bulletin, 35 (2001), No. 2, 20–34.

[3] Кривоколеско В. П., Левчук В. М. Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр, Труды ИММ УрО РАН, 21 (2015), No. 1, 166–171.

[4] Егорычев Г. П. Перечисление собственных t-мерных подпространств пространства V_m над полем $GF(q)$, Известия ИркГУ, сер. матем, 17 (2016), No. 3, 12–22.

СФУ, Красноярск
E-mail: nkhodyunya@gmail.com

Функциональные представления f-полукольца

В. В. Чермных, О. В. Чермных

Под полукольцом мы понимаем алгебру, отличающуюся от ассоциативного кольца, возможно, необратимостью сложения [**1**]; наличие единицы не предполагается. Основным объектом является drl-полукольцо, впервые рассмотренное в [**2**], предъявленное автором как решение 37 проблемы Л. Фукса [**3**] об описании решеточно упорядоченных полуколец. Класс всех drl-полуколец образует многообразие, содержит l-кольца, брауэровы алгебры (в частности, булевы алгебры), числовые полукольца.

drl-Полукольцо S назовем *функциональным* (короче, *f-полукольцом*), если оно раскладывается в подпрямое произведение линейно упорядоченных drl-полуколец. drl-Полукольцо S является f-полукольцом тогда и только тогда, когда удовлетворяет условиям:

$$\text{если } a \wedge b = 0 \text{ и } c \geq 0, \text{ то } ca \wedge b = ac \wedge b = 0;$$
$$(a-b) \wedge (b-a) \leq 0 \text{ для любых } a, b, c \in S.$$

Конгруэнции на drl-полукольце S находятся во взаимно однозначном соответствии с l-идеалами, являющимися полукольцевыми идеалами и выпуклыми решетками одновременно. l-Идеал P называется *неприводимым*, если $A \cap B \subseteq P$ влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Обозначим через $MinS$ множество всех минимальных неприводимых l-идеалов f-полукольца S. Со стоуновской топологией $MinS$ становится нульмерным хаусдорфовым пространством. Строится пучок $(\Pi(S), MinS)$, где накрывающее пространство — дизъюнктное объединение слоев S/M по всем $M \in MinS$.

Теорема. *Произвольное f-полукольцо S изоморфно f-полукольцу $\hat{S}$ глобальных сечений пучка $(\Pi(S), MinS)$ линейно упорядоченных drl-полуколец.*

Также авторами рассмотрены некоторые подклассы f-полуколец и их представления сечениями.

Первый автор поддержан грантом Минобрнауки РФ, проект 1.1375.2014/K.

Список литературы

[1] Golan J. S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science. Longman scienificand tehnical. Harlow, 1992.
[2] Rao P. R. Lattice ordered semirings // Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1981. Vol. 9. P. 119–149.
[3] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

Вятский государственный университет, Киров
E-mail: vv146@mail.ru

О сильно инвариантных подгруппах абелевых групп

А. Р. Чехлов

Все группы предполагаются абелевыми. Подгруппа N группы G называется *сильно инвариантной* (сокращенно *si-подгруппой*), если $fN \subseteq N$ для всякого гомоморфизма $f\colon N \to G$. Сильно инвариантные подгруппы изучались в [1]. Группа G называется *si-простой*, если она не имеет нетривиальных ($\neq 0, G$) сильно инвариантных подгрупп. Подгруппы H, K группы G называются *соизмеримыми*, если подгруппа $K \cap H$ имеет конечный индекс в H и в K. *Сильно инертной* (С. Бреаз, Г. Калугареану) называется подгруппа N группы G такая, что $fN \cap N$ имеет конечный индекс в fN для каждого $f \in Hom(N, G)$.

Предложение 1. 1) *Всякая однородная сепарабельная группа без кручения G является si-простой.*

2) *Если G — вполне разложимая группа без кручения, то всякая si-подгруппа группы G совпадает с некоторым ее (вполне инвариантным) прямым слагаемым.*

3) *Если $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$, где все группы G_i si-просты, то всякая si-подгруппа группы G совпадает с некоторым ее (вполне инвариантным) прямым слагаемым.*

Предложение 2. 1) *Пусть G — сепарабельная группа без кручения и Ω — множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Тогда всякая si-подгруппа группы G чиста в G и имеет вид $\sum_{t \in \Delta} G(t)$, где $\Delta \subseteq \Omega$.*

2) *Если G — алгебраически компактная группа без кручения, то всякая ее si-подгруппа является плотной чистой si-подгруппой некоторого вполне инвариантного прямого слагаемого группы G.*

Предложение 3. *Если G — группа без кручения конечного ранга, то всякая ее сильно инертная подгруппа соизмерима с некоторой si-подгруппой тогда и только тогда, когда G является свободной группой.*

Теорема. 1) *Пусть $G = \bigoplus_{p \in \Pi} (D_p \oplus R_p)$ — периодическая группа, где D_p — делимая, а R_p — редуцированная части ее p-компоненты G_p. В группе G все вполне инвариантные подгруппы служат si-подгруппами тогда и только тогда, когда каждая R_p является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка, причем если $D_p \neq 0$, то $R_p = 0$.*

2) *В группе без кручения G всякая вполне инвариантная подгруппа является si-подгруппой тогда и только тогда, когда G — делимая группа.*

3) *В смешанной расщепляющейся группе G всякая вполне инвариантная подгруппа является si-подгруппой тогда и только тогда, когда группа G имеет вид $G = D_0 \oplus T$, где D_0 — делимая группа без кручения, а T — периодическая группа, каждая вполне инвариантная подгруппа которой является si-подгруппой.*

Список литературы

[1] Călugăreanu G. Strongly invariant subgroups // Glasg. Math. J. 2015. V. 57, No 2. P. 431–443.

Томский государственный университет, г. Томск
E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

Free non-associative algebras and their homology

A. S. Dzhumadil'daev, K. M. Tulenbaev

We establish polylinear part of LLN algebras and (α, β)– Bicommutative algebras. Let us remain that an algebra A is called *Novikov*, if

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) - (a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_3 \circ a_2) - (a_1 \circ a_3) \circ a_2,$$
$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = a_2 \circ (a_1 \circ a_3),$$

for any $a_1, a_2, a_3 \in A$. For LLN algebras it is true left commutative identity as for Novikov algebras. But instead of right symmetric identity for LLN algebras is true leftsymmetric identity An algebra A is called *LLN* , if

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) - (a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_2 \circ (a_1 \circ a_3) - (a_2 \circ a_1) \circ a_3,$$
$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = a_2 \circ (a_1 \circ a_3),$$

for any $a_1, a_2, a_3 \in A$. We construct free basis of LLN algebras also in terms of Young diagrams but with another rule of filling and another rule of multiplication.

Theorem. $\dim P_n = n * B(n-1)$, *where* $B(n-1)$ *is* $(n-1)$*-th Bell number.*

Also we find free and multilinear part of (α, β)– Bicommutative algebra in first part of article. Let $A = (A, \circ)$ be an algebra over field with characteristic $p \geq 0$ and $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, is product. An algebra $(A, \circ)$ is called (α, β)-*Bicommutative*, if

$$(a \circ b) \circ c = \alpha(a \circ c) \circ b(RC)$$
$$a \circ (b \circ c) = \beta b \circ (a \circ c)(LC)$$

for any $a, b, c \in A$. We prove that A^2 is nilpotent with index nilpotency equal to 3. Nagata-Higman theorem and Hilbert theorem on basis are true for (α, β)-Bicommutative algebras. Homology of (α, β)–Bicommutative algebra is constructed.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Pushkin, 125, Almaty, 050010, Kazakhstan
Suleyman Demirel University, 1/1 Abylai Khan street, Kaskelen, Almaty, 040900, Kazakhstan
E-mail: tulen75@@hotmail.com

New simple Lie p-algebra of dimension 248 over a field of characteristic 2

A. N. Grishkov

The classification of simple finite dimensional Lie algebras over an algebraically closed field k is one of the central problem in the theory of Lie algebras. If the characteristic p of the field k is zero or $p > 3$ this problem was solved by Killing and Cartan (in the case of characteristic zero) and by R.Block, R.Wilson, H.Strade and A.Premet in the case $p > 3$.

The cases $p = 2$ or 3 remains open untill now. We note that in the case of $p > 0$ the classification Lie of $p-$algebras is more easy. Recall that a simple Lie algebra L is called $p-$algebra if for any $x \in L$ the corresponding derivation $ad(x)^p : y \to [...[y, x], ..., x]$ (p times) is inner. In the last time many new simple Lie algebras was constructed in the case of $p = 2$. But all those algebras was not $p-$algebras. The last new simple Lie $p-$algebras $F_4(a), a \in k$, was constructed by V.Kac and B.Veisfeiler (see [**1**]) in 1971 and $dim_k F_4(a) = 34$.

We denote by $O(5)$ the commutative associative $k-$algebra $k[x_1, \dots, x_5 | x_i^2 = 0]$ and by $S(5) = \{\sum_{i=1}^5 a_i\partial_i | \sum_{i=1}^5 \partial_i a_i = 0, a_i \in O(5)\}$ the standard special Cartan type $p-$algebra Lie of dimension 124. We proved that contragradient $S(5)-$module $S(5)^*$ is isomorphic to $S(5)-$ module $\Omega_{ext}(5) = \{\omega = \sum_{i,j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j | a_{ij} \in O(5), d\omega = 0\}$. Moreover, there exists a bilinear map $\phi : \Omega_{ext}(5) \times \Omega_{ext}(5) \to S(5)$ such that the direct sum $E(5) = S(5) \oplus \Omega_{ext}(5))$ with multiplication $[\omega_1, \omega_2] = \phi(\omega_1, \omega_2)$, where $S(5)$ is a subalgebra, $\Omega_{ext}(5)-$ is a $S(5)-$submodule is a Lie algebra. For example, $\phi(dx_i \wedge d_j, dx_k \wedge d_t) = \partial_s$, if $\{i, j, k, t, s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Theorem. *The above defined algebra $E(5)$ is a new simple Lie $p-$algebra of dimension 248 over a field of characteristic 2.*

This result is proved in a joint paper with V. Kac.

The author acknowledges financial support from the Russian Science Foundation, project 16-11-10002.

References

[1] Kac V., Veisfeiler B. Exponencials in Lie algebras of characteristic p, Math. USSR Izvestija, v.5 (1971), n.4.

University of São Paulo, São Paulo (Brazil) and Omsk State University n.a. F.M.Dostoevskii pr. Mira 55-A, Omsk 644077 (Russia)
E-mail: shuragri@gmail.com

Degenerations of Malcev algebras

I. Kaygorodov, Yu. Popov, Yu. Volkov

Degenerations of algebras were studied in various papers. In particular, there are many results concerning degenerations of algebras of low dimensions from some variety defined by a set of identities. One of important problems in this direction is the description of so-called rigid algebras. These algebras are of big interest, since the closures of their orbits under the action of generalized linear group form irreducible components of a variety under consideration (with respect to the Zariski topology). All information about degenerations has been found for four-dimensional Lie algebras (D. Burde, C. Steinhoff), for nilpotent five- and six-dimensional Lie algebras [**3**], for three-dimensional nilpotent Leibniz algebras (B. Omirov, I. Rakhimov), for two-dimensional pre-Lie algebras [**1**] and three-dimensional Novikov algebras [**2**]. Also the problem of finding rigid algebras was solved for low dimensional associative (P. Gabriel, P. Mazzola), Leibniz (S. Albeveiro, B. Omirov, I. Rakhimov and others) and Jordan algebras (I. Kashuba, M. Martin, [**4**]).

The notions of Malcev and binary Lie algebras were introduced by A. Malcev. Any Lie algebra is a Malcev algebra and any Malcev algebra is a binary Lie algebra. Note also that any alternative algebra can be turned to a Malcev algebra by defining a new multiplication $[\ ,\ ]$ by $[x, y] = xy - yx$.

In our work [**5**] we give the full information about degenerations of binary Lie algebras of dimension 4 and nilpotent Malcev algebras of dimensions 5 and 6. In particular, we describe all rigid algebras and irreducible components in the corresponding varieties.

The authors were supported by RFBR 16-31-00004.

References

[1] Benes T., Burde D. Degenerations of pre-Lie algebras, J. Math. Phys., 50 (2009), 11, 112102, 9 pp.

[2] Benes T., Burde D. Classification of orbit closures in the variety of three-dimensional Novikov algebras, J. Algebra Appl., 13 (2014), 2, 1350081, 33 pp.

[3] Grunewald F., O'Halloran J. Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six, J. Algebra, 112 (1988), 315–325.

[4] Kashuba I., Martin M. Deformations of Jordan algebras of dimension four, J. Algebra, 399 (2014), 277–289.

[5] Kaygorodov I., Popov Yu., Volkov Yu. Degenerations of binary Lie and nilpotent Malcev algebras, arXiv:1609.07392

Universidade Federal do ABC, CMCC, Santo André (Brazil)
E-mail: kaygorodov.ivan@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk state university (Russia)
E-mail: yuri.ppv@gmail.com
Saint Petersburg state university, Saint Petersburg (Russia)
E-mail: wolf_666@list.ru

Degenerations of Zinbiel and nilpotent Leibniz algebras

I. Kaygorodov, Yu. Popov, A. Pozhidaev, Yu. Volkov

The general linear group $GL_n(F)$ acts naturally on the set of all algebras of fixed dimension n in a given variety M over a field F. Given A and B in M, we say that B *generates to* A provided that A belong to the closure of $GL_n(F)$-orbit of B (in the Zariski topology on M).

If A and B are non-isomorphic then B generates to A *non-trivially*. The notion of degeneration is closely connected with the notion of deformation of algebras, and it is applied to filtrations and graduations as well. Important role play *rigid* algebras, i. e., such algebras which admit only trivial degenerations.

We give the full information about degenerations of Zinbiel and nilpotent Leibniz algebras of dimension 4. More precisely, we construct a graph of primary degenerations. The vertices of this graph are the isomorphism classes of algebras in the variety under consideration. An algebra A degenerates to an algebra B iff there is a path from the vertex corresponding to A to the vertex corresponding to B. Also we describe the rigid algebras and the irreducible components of the varieties of algebras under consideration.

Supported by RFBR 16-31-50017, FAPESP 14/19521-3 and by R & D 6.38.191.2014 of Saint-Petersburg State University, “Structure theory, classification, geometry, K-theory and arithmetics of algebraic groups and related structures”.

Universidade Federal do ABC, CMCC, Santo André, (Brazil)
E-mail: kaygorodov.ivan@gmail.com
Novosibirsk state university, Novosibirsk, (Russia)
E-mail: yuri.ppv@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, (Russia)
E-mail: app@math.nsc.ru
Universidade de São Paulo, Sao Paulo, (Brazil)
E-mail: wolf86_666@list.ru

The algebra of matrix invariants of the orthogonal group is not polynomial

A. Lopatin

We work over an infinite field $\mathbb{F}$ of the characteristic $\operatorname{char}\mathbb{F}$ different from two, unless otherwise stated. To define the algebras of matrix $O(n)$-invariants, where $O(n)$ is the orthogonal group, we consider the polynomial algebra

$$R = R_n = \mathbb{F}[x_{ij}(k) \,|\, 1 \le i, j \le n,\ 1 \le k \le d]$$

together with $n \times n$ *generic* matrices

$$X_k = \begin{pmatrix} x_{11}(k) & \cdots & x_{1n}(k) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(k) & \cdots & x_{nn}(k) \end{pmatrix}$$

where $n > 1$ and $d > 0$. Denote by $\sigma_t(A)$ the t^{th} coefficient of the characteristic polynomial χ_A of A.

The algebra of *matrix $O(n)$-invariants* R^G is the subalgebra of R generated by $\sigma_t(A)$, where $1 \le t \le n$ and A ranges over all monomials in the matrices $X_1, \ldots, X_d$, $X_1^T, \ldots, X_d^T$. If we consider only the products of generic matrices, then we obtain the algebra of matrix $GL(n)$-invariants, which we denote by $R^{GL(n)}$, where we do not need the restriction that $\operatorname{char}\mathbb{F} \ne 2$.

The algebra $R^{GL(n)}$ is known to be polynomial (i.e., a free associative commutative algebra) if and only if $(n, d) = (2, 2)$ or $d = 1$.

We proved that $R^{O(n)}$ is not polynomial for all $d > 1$ and in case $d = 1$ and $n > 9$.

This research was partially supported by RFFI (project 16-01-00577 A).

Sobolev Institute of Mathematics, Omsk Branch, Pevtsova, 13, 644099, Omsk (Russia)
E-mail: artem_lopatin@yahoo.com

VI. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

Критерий полноты для частичных ультрафункций

С. А. Бадмаев

Класс дискретных функций, определенных на конечном множестве A и принимающих в качестве значений подмножества множества A, является естественным обобщением класса конечнозначных функций на A (функций k-значной логики). Функции такого вида называют мультифункциями на A, и они находят применение, например при решении функциональных уравнений, в логических и технических системах. Очевидно, что суперпозиция в обычном смысле для работы с мультифункциями не подходит, поэтому для мультифункций требуется несколько расширить стандартное понятие суперпозиции. В зависимости от вида мультифункций и соответствующей им суперпозиции возникают частичные функции, гиперфункции, ультрафункции, частичные гиперфункции, частичные ультрафункции на A.

В данной заметке $A = \{0, 1\}$ и исследуется задача описания всех максимальных клонов частичных ультрафункций. Будем придерживаться терминологии, принятой в [**2**].

Некоторые максимальные клоны найдены в работах [**1, 3**].

Автором доказана следующая

Теорема. *Существует ровно 12 максимальных клонов частичных ультрафункций на двухэлементном множестве.*

Следствие. *Множество функций* В *является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из этих 12 классов.*

Список литературы

[1] Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К. О максимальных клонах частичных ультрафункций на двухэлементном множестве // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика, 16 (2016). С. 3–18.

[2] Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2009. 2 (68). С. 60–79.

[3] Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, 4. С. 46–53

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: badmaevsa@mail.ru

О почти дизъюнктных гиперграфах моделей теорий абелевых групп

К. А. Байкалова, С. В. Судоплатов

В работе [**1**] показано, что существует три вида ациклических гиперграфов минимальных простых моделей: дизъюнктные (т.е. с попарно непересекающимися носителями), почти дизъюнктные (с конечными попарными пересечениями) диаметра 2, почти дизъюнктные бесконечного диаметра. Некоторые другие виды гиперграфов простых моделей рассмотрены в [**2, 3, 4**].

В настоящей работе рассматриваются почти дизъюнктные гиперграфы минимальных простых моделей теорий абелевых групп и дается характеризация наличия таких гиперграфов в терминах шмелевских инвариантов $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, ε [**5**].

В силу наличия константы в сигнатуре абелевых групп дизъюнктных гиперграфов, в рамках ω-насыщенных моделей, для теорий бесконечных абелевых групп не существует.

Теорема. *Теория* $\mathrm{Th}(A)$ *абелевой группы* A *имеет почти дизъюнктный гиперграф минимальных простых моделей тогда и только тогда, когда имеется лишь конечное число положительных инвариантов* $\alpha_{p,n}$*, а все инварианты* β_p*,* γ_p *являются нулевыми.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0830/ГФ4).

Список литературы

[1] Судоплатов С. В. Об ациклических гиперграфах минимальных простых моделей // Сиб. матем. журн. — 2001. — Т. 42, 6. — С. 1408–1412.

[2] Байкалова К. А. О некоторых гиперграфах простых моделей и порождаемых ими предельных моделях // Алгебра и теория моделей, 7. Сб. тр. / Под. ред. А. Г. Пинуса, К. Н. Пономарева, С. В. Судоплатова. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. — С. 6–17.

[3] Судоплатов С. В. Гиперграфы простых моделей и распределения счётных моделей малых теорий // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — Т. 15, 7. — С. 179–203.

[4] Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014.

[5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011.

НГТУ, ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: bkristina@bk.ru, sudoplat@math.nsc.ru

Об алгебрах распределений бинарных формул теорий абелевых групп

К. А. Байкалова, Д. Ю. Емельянов, Б. Ш. Кулпешов, Е. А. Палютин,
С. В. Судоплатов

Для теорий базисных абелевых групп [**1**] описаны алгебры распределений бинарных изолирующих формул [**2, 3**]: алгебры $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Z}_{p^n}$, $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$, $\mathfrak{R}_p$.

Теорема 1. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\langle \mathbf{Q}; +, 0\rangle)$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{Q}$.

Теорема 2. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\mathbf{Z}_{p^n})$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{Z}_{p^n}$.

Теорема 3. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(\mathbf{Z}_{p^\infty})$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{Z}_{p^\infty}$.

Теорема 4. *Алгебра бинарных изолирующих формул теории* $\mathrm{Th}(R_p)$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{R}_p$.

Указанные алгебры для теорий базисных абелевых групп позволяют описать алгебры бинарных изолирующих формул для теорий прямых сумм базисных абелевых групп, т. е. для произвольных теорий абелевых групп, а также для ряда теорий упорядоченных абелевых групп.

При описании алгебр используются как общие результаты для алгебр изолирующих формул [**2, 3**], так и их приложения к счетно категоричным теориям слабо о-минимальных структур [**4**] и к теориям унаров [**5**].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0830/ГФ4).

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011.

[2] Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2014. — Vol. 11. — P. 380–407.

[3] Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014.

[4] Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах // Алгебра и логика. (в печати)

[5] Емельянов Д. Ю. Об алгебрах распределений бинарных формул теорий унаров // Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”. — 2016. — Т. 17. — С. 23–36.

ИМ СО РАН, НГТУ, НГУ, Новосибирск
E-mail: bkristina@bk.ru, dima-pavlyk@mail.ru, palyutin@math.nsc.ru, sudoplat@math.nsc.ru
Международный университет информационных технологий, ИМММ МОН РК, Алматы
E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Базисы квазитождеств квазимногообразий алгебраических систем

А. О. Башеева

Базис квазитождеств Σ квазимногообразия $\mathbf{K}$ называется *независимым*, если для любого $\varphi \in \Sigma$ существует алгебраическая система $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{A} \models \Sigma \setminus \varphi$ и $\mathcal{A} \models \neg\varphi$. В. К. Карташов [**1**] доказал существование континуума квазимногообразий унаров, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Для квазимногообразий графов аналогичный результат был получен С. В. Сизым [**3**], см. также А.В. Яковлев [**4**].

Теорема. *Существует континуум квазимногообразий дифференциальных группоидов [точечных абелевых групп], не имеющих независимого базиса квазитождеств.*

Отметим, что квазимногообразия дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп являются сложными с разных точек зрения. Например, А. В. Кравченко [**5**] доказал Q-универсальность квазимногообразия дифференциальных группоидов, а А. М. Нуракунов [**2**] показал, что квазимногообразие точечных абелевых групп является Q-универсальным, а его решетка квазимногообразий имеет невычислимое множество конечных подрешеток. В работе М. В. Швидефски и А. Замойской-Джденио [**6**] было показано, что и решетка квазимногообразий графов также обладает свойством невычислимости А. М. Нуракунова.

Список литературы

[1] Карташов В. К. Континиум квазимногообразий унаров без незавсимого базиса квазитождеств, Алгебра и логика, 19 (1980), 173–193.

[2] Нуракунов А. М. Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп, Алгебра и логика, 53 (2014), 372–400.

[3] Сизый С. В. Квазимногообразия графов, Сиб. матем. журн., 35 (1994), 879–892.

[4] Яковлев А. В. Квазимногообразия графов и независимая базируемость, Сборник тезисов “Мальцевские чтения 2016”.

[5] Kravchenko A. V. On the lattices of quasivarieties of differential groupoids, Comment. Math. Univ. Carolin., 49 (2008), 11–17.

[6] Schwidefsky M. V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. II, Internat. J. Algebra Comput., 24 (2014), 1099–1126.

Евразийский Национальный Университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: basheeva@mail.ru

Некоторые свойства упорядоченно стабильных упорядоченных полей

В. В. Вербовский

В статье [**1**] было введено понятие упорядоченно стабильной теории, которое позволяет переносить теорию стабильности на исследование линейно упорядоченных структур. В статье [**2**] были рассмотрены некоторые свойства упорядоченно стабильных упорядоченных групп и полей, в частности было доказано, что упорядоченно стабильная упорядоченная группа является коммутативной, а упорядоченно стабильное упорядоченное поле с условием ограниченности семейства формульных выпуклых подгрупп является вещественно замкнутым.

Определение. [**1**]

(1) Линейно упорядоченная структура $\mathcal{M}$ называется *упорядоченно стабильной в* λ, если для любого подмножества $A \subseteq M$ мощности не больше λ и для любого сечения $\langle C, D\rangle$ в $\mathcal{M}$ существует самое большее λ 1-типов над A, которые совместны с сечением $\langle C, D\rangle$, то есть $|S^1_{\langle C,D\rangle}(A)| \leq \lambda$.

(2) Теория T называется *упорядоченно стабильной в* λ, если каждая ее модель такова. Иногда будем писать, что T упорядоченно λ-стабильна.

(3) Теория T называется *упорядоченно стабильной*, если существует бесконечный кардинал λ в котором теория T упорядоченно стабильна.

Теорема 1. *Любое бесконечное формульное подмножество упорядоченно стабильного упорядоченного поля имеет непустую внутренность, то есть содержит бесконечный интервал.*

Теорема 2. *Пусть даны формульное подмножество A упорядоченно стабильного упорядоченного поля F и некоторый элемент $b \in F$. Пусть H будет наименьшей выпуклой подгруппой аддитивной группы поля F, содержащей элемент b (заметим, что подгруппа H не обязана быть формульной). Тогда если пересечение $A \cap H$ неограниченно в H, то существует такой элемент $h \in H$, что $A \cap H \cap (h, +\infty) = H \cap (h, +\infty)$.*

Теорема 3. *Упорядоченно стабильное упорядоченное поле является вещественно замкнутым.*

Список литературы

[1] Байжанов Б., Вербовский В. Упорядоченно стабильные теории // Алгебра и логика, 2011, том 50, номер 3, С. 303-325.

[2] Вербовский В. Упорядоченно стабильные группы // Математические труды, 2010, N. 2, С. 84–127.

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы
E-mail: viktor.verbovskiy@gmail.com

О богатых формулах и типах в многосортных системах и новых кластеризациях формул и типов в логических исчислениях

А. А. Викентьев

Доклад посвящен *обобщению и уточнению результатов и теорем о богатых множествах типов,* доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[1] *на случай богатых семейств типов над параметрами модели многосортной теории с $\varkappa$-компактными (насыщенными, однородными) измеримыми и вычислимыми моделями со свойством $\varkappa$-отделимости новых элементов, реализующих вычислимые типы (над малыми подмножествами модели) совместных с этими множествами, от элементов вложенной модели и наличия реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых, вычислимых(стабильных) типов или неразличимых элементов. Стабильность теорий не предполагается, а некоторые теоремы получаются как следствия.*

Основными инструментами доказательств являются теоремы типа компактности, развитая техника современной теории моделей, вычислимости, в частности, для логических исчислений, локальной стабильности и наличия (даже локально) подходящих компактных измеримых (нужных малых мощностей $\varkappa$) моделей теории со свойствами $\varkappa$-отделимости над реализациями семейств стабильных (определимых, рекурсивных) типов. Продолжено изучение предельных и двукардинальных моделей в классе теорий с покрытиями, введенных автором. Рассмотрены вопросы определимости систем с метрикой в наследственно конечных надстройках, и о мощностях типово определимых подмножеств и их свойств двукардинальности. Интерес к этим вопросам и таким моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (нетривиальных) типов прикладной теории, логических закономерностей для кластеризации и упорядочения таких 'знаний' с помощью привлечения метрических или измеримых систем и расстояний между множествами моделей. Все это служит для введения новых метрик на классах эквивалентных формул и типов на измеримых подклассах измеримых, вычислимых (метрических) моделей, необходимых для разработки алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий и кластеризации многозначных формул-знаний в логике Лукасевича. Найдены различные новые метрики, методы кластеризации по введенным метрикам для конечных множеств формул в различных логиках (частично совместно с аспирантом Авиловым М.С.), начато изучение различных индексов качества для сравнений и способов введения коллективных метрик. Проведены совместно с Фефеловой В.В. модельные эксперименты с помощью программы на джаве, поддерживающей все необходимые алгоритмы и получение по расстояниям кластеризаций. Показано, что коллективные расстояния имеют более высокие индексы кластеризаций по сравнению с другими введенными метриками. В дальнейшем планируется использование лучших кластеризаций для локальной структуризации баз знаний. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты No. 14-07-00851а, 14-7-00249а, кафедры ДМИ ММФ НГУ.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

[1]Некоторые из них вошли в диссертацию автора "Теории с покрытием и формульные подмножества", ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, а также опубликованы в сборнике, посвященном 90-летию академика А.Д. Тайманова — "Two cardinal theorems for sets of types in stable theory", Казахстан, Алма–Ата, 2007, с. 67–69, были доложены Алма-Ате и Новосибирске — на ежегодных Мальцевских чтениях с 2006 г., в том числе к 100-летию акад. А.И. Мальцева и др.

О кластеризациях формул в логических базах знаний, индексах качества и коллективных алгоритмах

А. А. Викентьев, Р. А. Викентьев

В работе рассматривается одна из актуальных задач — анализ логических высказываний из базы знаний. При анализе требуется найти близкие высказывания, выявить достоверные, противоречивые и т.д. Для кластеризации знаний, построения решающих функций на основе знаний — логических формул, надо ввести расстояние между формулами. В работе высказывания (экспертов или базы знаний) записаны в виде формул n-значной логики. С привлечением теории моделей определяется общий вид новых расстояний между формулами с учетом других параметров-весов рассматриваемых моделей всех различных истинностных значений в формулах,обобщающих известные:

$$\rho(\varphi,\psi)=\frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{|k-l|}{n-1}\,M\left(\frac{k}{n-1},\frac{l}{n-1}\right), \tag{1}$$

где $n^{|S(\Sigma)|}$ — количество всех моделей, $M\left(\frac{k}{n-1},\frac{l}{n-1}\right)$ — тех моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а ψ — $\frac{l}{n-1}$; и аналогично обобщаются меры нетривиальности:

$$I(\varphi)=\rho(\varphi,1)=\frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n-1-k}{n-1}\,M\left(\frac{k}{n-1}\right), \tag{2}$$

где $M\left(\frac{k}{n-1}\right)$ — количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$. Отдельно рассматриваем меру пересечения моделей пар формул. В работе доказаны свойства метрики для таких расстояний и мер нетривиальностей; они учитывают многозначность, схожи со свойствами величин в случае 2-значных и 3-значных логик Лукасевича, отвечают на вопросы Г.С. Лбова и применяются для алгоритмов кластеризации формул из базы знаний. В классическом случае рассмотрены классы моделей в которых допускается в некоторых моделях истинными противоречивые суждения, и не верности в некоторых моделях тождественно истинных формул, например свойство 2-значности логики. Для этих классов с их теорией моделей перенесены все результаты по расстояниям и мере опровержимости [**1, 4**]. Для всех способов введенных расстояний рассмотрены различные методы кластеризации формул на основе новых расстояний и мер нетривиальности, а также методы сравнения результатов кластеризации — индексы качества. В общем случае по различным расстояниям и их индексу качества, вводятся новые коллективные расстояния, а по ним коллективные кластеризации, которые в большинстве случаев дают лучшую кластеризацию множеств формул. Как следствие получаются результаты полученные совместно с Кореневой, Кабановой, Фефеловой и другими. Планируется применение новых расстояний для структурного анализа конечных подмножеств базы знаний и автоматизация всех процессов. Мера значений истинности формулы на измеримой модели первого порядка может служить степенью нетривиальности (недостоверности) формулы. Полученные результаты распространяются на многозначные формулы с переменными (первого порядка). Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проект 14-07-00851а,14-7-00249а, кафедры ДМИ ММФ НГУ, АМЛ НГТУ.

Список литературы

[1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.

[2] Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[3] Викентьев А. А, Лбов Г. С. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказ. экспертов // Доклады РАН 1998. Т. 361, No. 2, С. 174–176.
[4] Викентьев А. А, Лбов Г. С. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis, 1997, V. 7, No. 2, P. 175–183.
[5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Физматлит, 2011.
[6] Викентьев А. А., Коренева Л. Н. К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты // Математические методы распознавания образов (ММРО-99), РАН ВЦ, Москва, 1999. С. 151–154.

ИМ СО РАН и НГУ, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

О решетках с модулярными и стандартными элементами среди порождающих

А. Г. Гейн

С момента возникновения теории решёток в классических работах Г. Биркгофа, Р. Дедекинда, О. Оре и других математиков особое внимание было уделено решёткам двух важных классов — классу дистрибутивных решёток и классу модулярных решёток, определяемых посредством тождества дистрибутивности и квазитождества модулярности, соответственно. В последующем изучение произвольных решёток стало основываться на выделении в них «опорных» элементов, которые в той или иной степени аккумулировали в себе свойство дистрибутивности. Так, О. Оре в [**1**] ввел понятие дистрибутивного элемента, а Г. Гретцер в [**2**] — понятие стандартного элемента решётки. Для квазитождества модулярности аналогичным является понятие модулярного элемента.

Определение. Элемент a решетки L называется *модулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x \leq y \to x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

В [**2**] показано, что элемент решётки стандартен тогда и только тогда когда он дистрибутивен и модулярен.

В [**2**] показано, что решётка, порожденная тремя элементами, два из которых стандартны, дистрибутивна. Тем самым, такая решётка конечна и содержит не более 18 элементов.

Теорема. *Решетка, порожденная тремя элементами, один из которых стандартен, а другой модулярен, содержит не более 25 элементов.*

Указанная оценка является точной.

Открытым остаётся вопрос: будет ли конечной решётка, порожденная тремя элементами, два из которых модулярны?

Отметим в связи с этим, что если все три порождающих элемента модулярны, то и сама решётка модулярна и, следовательно, конечна ([**3**]).

Список литературы

[1] Ore O. On the foundations of abstract algebra-I // Ann. of Math. 1935. Vol. 36. P. 406–437.

[2] Gratzer G. Standard ideals // Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kozl. 1959. Vol. 9. P. 81–97.

[3] Шушпанов М. П. Решётки, порожденные модулярными элементами / М.П. Шушпанов // Изв. вузов. Математика. 2015. 12. С. 84–86.

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург
E-mail: a.g.geyn@urfu.ru

Обратимые бинарные алгебры изотопные абелевой группе

Д. С. Давидов

Бинарная алгебра $(Q;\Sigma)$, т. е. алгебра с бинарными операциями, называется обратимой алгеброй (или системой квазигрупп), если каждая операция $A \in \Sigma$ является квазигрупповой.

Квазигруппы, изотопные группам (абелевым группам), различные их подклассы и тождества, приводящие к ним, исследовались многими авторами. При исследовании ассоциативных в целом систем квазигрупп и уравновешенных тождеств в квазигруппах возникли линейные и односторонние линейные квазигруппы. Позднее, по аналогии с линейными квазигруппами были определены линейные и односторонние линейные обратимые алгебры, которые были охарактеризованы с помощью $\forall\exists(\forall)$-тождеств.

Абсолютно замкнутая формула 2-го порядка вида

$$\forall X_1, ..., \forall X_k, \exists X_{k+1}, ..., \exists X_t, \forall x_1, ..., \forall x_s (w_1 = w_2),$$

где w_1, w_2 — термы (слова) от функциональных переменных $X_1, ..., X_t$ и от предметных переменных $x_1, ..., x_s$, называется $\forall\exists(\forall)$-тождеством.

Определение. *Бинарная алгебра $(Q;\Sigma)$ изотопна группоиду $Q(\cdot)$, если каждая операция из Σ изотопна группоиду $Q(\cdot)$, т.е. для каждой операции $A \in \Sigma$ существуют подстановки $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A$ множества Q такие, что*

$$\gamma_A A(x, y) = \alpha_A x \cdot \beta_A y,$$

для всех $x, y \in Q$. Изотопия называется главной, если $\gamma_A = \varepsilon$ (ε – единичная подстановка) для всех $A \in \Sigma$.

Теорема. *Обратимая алгебра $(Q;\Sigma)$ главно изотопна абелевой группе тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему $\forall\exists(\forall)$ – тождеству*

$$A({}^{-1}A(B(x, z), y), A^{-1}(u, B(w, y))) = A({}^{-1}A(B(w, z), y), A^{-1}(u, B(x, y))).$$

Российский университет дружбы народов, Москва
E-mail: turhaw@gmail.com

О почти детерминированных алгебрах бинарных изолирующий формул

Д. Ю. Емельянов

Определение [**1**]. Система $\mathfrak{P}_{\nu(\mathfrak{p})}$ называется *(почти) детерминированной*, если множество uv одноэлементно (непусто и конечно) для любых $u, v \in \rho_{\nu(p)}$.

На основе определения почти детерминированности получим определение n-почти детерминированности.

Определение. Система $\mathfrak{P}_{\nu(\mathfrak{p})}$ называется *n-почти детерминированной* ($n \in \omega$), если множество uv имеет не более n элементов для любых $u, v \in \rho_{\nu(p)}$.

Заметим, что счетно категоричные теории имеют n-детерминированные алгебры и при этом, как показывают примеры с отношениями эквивалентности [**2, 3**], значения n не ограничены в совокупности. В ряде примеров 2-почти детерминированность алгебры описывается формулой $uv = |u \pm v| (\mathrm{mod}\ d)$, где d — диаметр графовой структуры. Формула $uv = |u \pm v| (\mathrm{mod}\ d)$ работает для кубических теорий, для теорий неорграфов, образующих циклы, для теорий ациклических графов с транзитивной группой автоморфизмов и т.д. В целом это верно для теорий неорграфов, которые базируются формулами, описывающими расстояния между элементами и при этом при последовательных переходах по этим формулам расстояния складываются или вычитаются.

Для теории тетраэдра значение n равно 2, для теории октаэдра $n = 3$, для теории икосаэдра $n = 4$, для теории додекаэдра $n = 6$, соответственно алгебры будут $2, 3, 4, 6$-почти детерминированными.

Отметим, что структуры и их теории могут не восстанавливаться по указанному выше "простому" умножению: имеются различные теории графов одного и того же диаметра d и с алгеброй, задаваемой формулой $uv = |u \pm v| (\mathrm{mod}\ d)$. Это верно для любого $d > 0$.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул для теорий правильных многогранников.

Теорема. *Для любой теории T правильных многогранников алгебра $\mathfrak{B}$ бинарных изолирующих формул задается ровно одной из следующих алгебр: алгеброй $\mathfrak{Q}$, алгеброй $\mathfrak{T}$, алгеброй $\mathfrak{O}$, алгеброй $\mathfrak{D}$, алгеброй $\mathfrak{I}$.*

Список литературы

[1] Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.

[2] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вложенных отношений эквивалентности // Algebra and Model Theory 10: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2015. P. 59-70.

[3] Емельянов Д. Ю. Об алгебрах распределений бинарных формул теорий унаров // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". 2016. Т. 17. С. 23–36.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Полнота класса слабо инъективных полигонов

Е. Л. Ефремов

В [**1**] описаны коммутативные моноиды, над которыми класс инъективных полигонов аксиоматизируем (полон). Обобщением понятия инъективного полигона являются понятия слабо инъективного, конечно порожденно слабо инъективного и главно слабо инъективного полигона. В [**2**] дается характеризация моноидов с аксиматизируемыми классами слабо инъективных, конечно порожденно слабо инъективных и главно слабо инъективных полигонов. В данной работе рассматриваются вопросы полноты этих классов полигонов.

Пусть S – моноид. Под левым полигоном ${}_SA$ над моноидом S или просто полигоном понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Полигон ${}_SA$ называется *слабо инъективным (конечно порожденно слабо инъективным, главно слабо инъективным)*, если он инъективен относительно вложений всех левых идеалов (конечно порожденных левых идеалов, главных левых идеалов) в ${}_SS$.

Через **S-WInj** (**S-FGWInj**, **S-PWInj**) обозначим класс всех слабо инъективных (конечно порожденно слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов над S.

Теорема 1. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(а) *класс* **S-PWInj** *полон;*

(б) *класс* **S-PWInj** *модельно полон;*

(в) *класс* **S-PWInj** *категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(г) $S = \{1\}$.

Моноид S называется *реверсивным справа*, если $Ss \cap St \neq \varnothing$ для любых $s, t \in S$.

Теорема 2. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

1) *S — реверсивный справа моноид;*

2) *T — группа и для любого $s \in S \setminus T$ существует $r \in S$ ($r \neq 1$) такой, что $rs = s$.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) *класс* **S-WInj** (**S-FGWInj**) *полон;*

(б) *класс* **S-WInj** (**S-FGWInj**) *модельно полон;*

(в) *класс* **S-WInj** (**S-FGWInj**) *категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(г) $S = \{1\}$.

Список литературы

[1] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом и над группой // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56, 3. — С. 650–662.

[2] Степанова А. А., Ефремов Е. Л. Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов // Сибирский математический журнал (в печати).

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: efremov-el@mail.ru

О принадлежности гиперопераций максимальным клонам мультиопераций

А. С. Зинченко, В. И. Пантелеев

Для множества $E_2 = \{0, 1\}$ определим следующие множества операций:

$$P^{*-}_{2,n} = \{f \mid f : E^n_2 \to 2^{E_2}\}, P^{*-}_2 = \bigcup_n P^{*-}_{2,n}$$

$$P^{-}_{2,n} = \{f \mid f : E^n_2 \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\}, P^{-}_2 = \bigcup_n P^{-}_{2,n}$$

Операции из P^{*-}_2 называются мультиоперациями, а из P^{-}_2 — гипероперациями. Очевидно, что множество гиперопераций вкладывается в множество мультиопераций. Заметим, что множество мультиопераций содержит и множество функций алгебры логики (булевых операций).

Суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

мультиопераций $f(x_1, ..., x_n)$, $f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m)$ определяет мультиоперацию $g(x_1, ..., x_m)$ следующим образом:

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E^m_2$.

Определения клона операций, максимального клона предполагаем стандартными. В [**1**] описаны все 15 максимальных клонов мультиопераций.

Для каждой мультиоперации можно поставить вопрос о принадлежности максимальным клонам. Отношение принадлежности максимальным клонам является отношением эквивалентности на множестве всех мультиопераций и определяет скелет решетки клонов мультиопераций.

Известно [**2**], что множество функций алгебры логики порождает 18 классов эквивалентности.

Теорема. *Множество гиперопераций порождает 67 классов эквивалентности.*

Список литературы

[1] Пантелеев В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 95–114.

[2] Казимиров А. С, Пантелеев В. И. О классах булевых функций, порожденных максимальными мультклонами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. 2015. Выпуск 9. С. 16–22.

Иркутский государственный университет, Иркутск
E-mail: azinchenko@gmail.com, vl.panteleyev@gmail.com

Элементарная эквивалентность некоторых нильпотентных неассоциативных колец

И. Н. Зотов

Через $\equiv$ обозначаем элементарную эквивалентность алгебраических систем в логике первого порядка. Пусть $U = U\Phi(K)$ — унипотентная подгруппа группы Шевалле ранга > 1 над полем K [**1**] и $p(\Phi) := \{max(r,r)/(s,s)|r,s \in \Phi\}$; аналогично выберем $U' = U\Phi'(K')$. Следующая теорема известна [**2**] при $char\ K \neq 2,3$.

Теорема 1. *Если $p(\Phi)!$ — обратимый элемент, то $U \equiv U'$ в том и только в том случае, когда системы корней Φ и Φ' эквивалентны и $K \equiv K'$.*

К.Видэла [**2**] использовал описание $Aut\ U$ Гиббсом [**3**] при $char\ K \neq 2,3$. Описание $Aut\ U$ для произвольного поля K получено в 1990 году в [**4**].

Вопросы о модельных свойствах различных групп Шевалле исследовали в своих работах Е.И. Бунина и А.В.Михалёв [**5**]-[**6**]; для унипотентных подгрупп, алгебр Шевалле и их нильтреугольных подалгебр $N\Phi(K)$ они отмечались в [**7**].

Следуя известной конструкции, произвольной (не обязательно ассоциативной) алгебре R мы сопоставляем алгебру $R^{(-)}$, заменяя умножение в R на новое умножение (коммутирование) $a * b = ab - ba$. Алгебру R называют *точной обертывающей алгебры Ли* L, если обе алгебры изоморфны как линейные пространства и $R^{(-)} \simeq L$. Исследуются, взаимосвязано с автоморфизмами, модельные свойства (ассоциативных и известных лишь для типа A_n) точных обертывающих алгебр для алгебр Ли $N\Phi(K)$.

Список литературы

[1] Carter R. Simple Groups of Lie type. Wiley and Sons, New York, 1972.

[2] Videla C. R. On the Mal'cev correspondence // Proceed. AMS. 1990. V. 109, 2. P. 493-502.

[3] Gibbs J. A. Automorphisms of certain unipotent groups // J.Algebra. 1970. V. 14, 2. P. 203-208.

[4] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29. 2. С. 141-161; 3. С. 315-338.

[5] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность линейных и алгебраических групп // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6 (3). С. 707-722.

[6] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами // Матем. сб. 2010. Т. 201. 3. С. 3-20.

[7] Левчук В. М. Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Итоги науки. - Юг России. 2012. Т. 6. С. 75-84.

Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: zotovin@rambler.ru

О разрешимости универсальных теорий и аксиоматизируемости двух классов комбинаторных геометрий

А. В. Ильев

Существует несколько хорошо известных определений комбинаторной геометрии [**1, 2, 3**]. В настоящей работе предложено эквивалентное определение этого объекта на языке исчисления предикатов первого порядка с равенством.

Комбинаторная геометрия G ранга $r \in \mathbb{N}$ — это алгебраическая система $G = \langle U, \Sigma_F \rangle$, где U — непустое множество, элементы которого являются точками комбинаторной геометрии, а сигнатура $\Sigma_F = \langle F_0, F_1, ..., F_r, = \rangle$ состоит из $r+1$ предикатов поверхностей и предиката равенства. Истинность предиката $F_k(x_1, ..., x_k, y)$ означает, что точки $x_1, ..., x_k$, не лежат ни в какой поверхности ранга, меньшего k, и определяют единственную поверхность ранга k, а точка y лежит в поверхности, определенной точками $x_1, ..., x_k$. Для любого $k \in \{0, 1, ..., r\}$ имеют место аксиомы:

1) $\forall x_1 \dots \forall x_k \; \forall y \; [F_k(x_1, ..., x_k, y) \to \bigwedge\limits_{i \in \{1,\dots,k\}} F_k(x_1, ..., x_k, x_i)]$;

2) $\forall x_1 \dots \forall x_k \; \forall y \; [F_k(x_1, ..., x_k, y) \to \bigwedge\limits_{i \neq j} (x_i \neq x_j)]$;

3) $\forall x_1 \dots \forall x_k \; \forall y \; [F_k(x_1, ..., x_k, y) \to \bigwedge\limits_{\pi} F_k(\pi(x_1), ..., \pi(x_k), y)]$, где π пробегает по всем перестановкам элементов $x_1, ..., x_k$;

4) $\forall x_1 \dots \forall x_k \; \forall y \; [F_k(x_1, ..., x_k, y) \leftrightarrow \forall z_1 \dots \forall z_{k-1} \; \neg(\bigwedge\limits_{i \in \{1,\dots,k\}} F_{k-1}(z_1, ..., z_{k-1}, x_i))]$;

5) $\forall x_1 \dots \forall x_k \; \forall y \; \forall z \; [F_k(x_1, ..., x_k, y) \wedge \neg F_k(x_1, ..., x_k, z) \to F_{k+1}(x_1, ..., x_k, z, y)]$;

6) $\forall x \; [\neg F_0(x) \wedge F_1(x, x)]$;

7) $\exists x_1 \dots \exists x_r \; \exists y \; F_r(x_1, ..., x_r, y)$.

Класс *комбинаторных геометрий конечного ранга* является объединением всех классов комбинаторных геометрий фиксированного ранга $r \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Класс комбинаторных геометрий ранга $r \in \mathbb{N}$ конечно аксиоматизируем, а класс комбинаторных геометрий конечного ранга не является аксиоматизируемым.*

Теорема 2. *Универсальная теория комбинаторных геометрий ранга $r \in \mathbb{N}$ и универсальная теория комбинаторных геометрий конечного ранга разрешимы.*

Список литературы

[1] *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир. 1982. 558 с.

[2] *Crapo H. H., Rota G.-C.* On the foundations of combinatorial theory. II. Combinatorial geometries. Cambridge, MA: MIT Press, 1970. 293 p.

[3] *Lint J. H. van, Wilson R. M.* A course in combinatorics. New York: Cambridge University Press, 2001. 602 p.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: artyom_iljev@mail.ru

О минимально полных периодических полугруппах

О. В. Князев

В обзоре ([**1**]) наряду с многими другими проблемами ставится задача (проблема 3.10) характеризации минимально полных алгебр данного многообразия алгебр. Мы изучаем минимально полные полугруппы.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп, $L(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$, $S \in \mathbf{V}$. Произвольное дизъюнктное семейство подполугрупп полугруппы S называют *россыпью* полугруппы S, а полугруппы, которые ее составляют, — *компонентами* россыпи. Пусть $\mathbf{X}(S)$ есть $\mathbf{X}$-вербал полугруппы S, т.е. россыпь, компоненты которой в точности все классы $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции полугруппы S, являющиеся подполугруппами полугруппы S. Если $\mathbf{X}$-вербал полугруппы S состоит из одной компоненты, совпадающей с S, то полугруппу S называют $\mathbf{X}$-*полной* полугруппой. Если равенство $\mathbf{X}(S) = S$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $L(\mathbf{V})$, то полугруппу S называют *полной* полугруппой. Полугруппа называется *минимально полной*, если она содержит более одного элемента и является полной, но любая ее неодноэлементная собственная подполугруппа не является полной. Пусть S — периодическая полугруппа и $e = e^2 \in S$. Через G_e обозначается максимальная подгруппа полугруппы S, имеющая идемпотент e своей единицей. Совокупность элементов K_e=$\{x \in S \mid x^n \in G_e$ *для некоторого натурального* $n\}$ называется *классом унипотентности*. Таким образом, произвольная периодическая полугруппа S разбивается на классы унипотентности. Класс унипотентности полугруппы не обязан быть подполугруппой. Если в периодической полугруппе S все классы унипотентности являются подполугруппами, то S называют *унипотентно разбиваемой*. Через $B_{n,k}$ обозначим полугруппу, которую в классе полугрупп с нулем можно задать копредставлением

$$B_{n,k} = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^n = b^k = 0\rangle, \text{ где } n, k \geq 2.$$

Теорема. *Если унипотентно неразбиваемая периодическая полугруппа S является минимально полной полугруппой, то S есть гомоморфный образ полугруппы $B_{n,k}$.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. 13. С. 181-241.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev50@rambler.ru

О решении проблемы Воота для одного варианта о-минимальности

Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов

Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [**1**]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

В следующих определениях M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы.

Определение 1. [**2**] Будем говорить, что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Определение 2. [**3**] Будем говорить, что тип p не является *вполне ортогональным* типу q ($p \not\perp^q q$), если существует A-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$. Будем говорить что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Как известно, в работе [**4**] решена проблема Воота для о-минимальных теорий. Байжанов Б.С. и Алибек А. [**5**] построили примеры слабо о-минимальных теорий с k счетными моделями, где $k \in \{4, 5, 6, \ldots\} \cup \{\omega\}$. Здесь мы представляем теорему, являющуюся решением проблемы Воота для вполне о-минимальных теорий:

Теорема 1. *Пусть T — вполне о-минимальная теория в счетном языке. Тогда либо T имеет 2^ω счетных моделей, либо T имеет в точности $6^a 3^b$ счетных моделей, где a и b — неотрицательные целые числа.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0830/ГФ4).

Список литературы

[1] Macpherson H. D., Marker D., and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society, 2000, V. 352, pp. 5435–5483.

[2] Baizhanov B. S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // Jour. of Symb. Logic, 2001, V. 66, pp. 1382–1414.

[3] Кулпешов Б. Ш. Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая, 2003, 227, С. 26–31.

[4] Mayer L. L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // Jour. of Symb. Logic, 1988, V. 53, pp. 146–159.

[5] Alibek A., Baizhanov B. S. Examples of countable models of a weakly o-minimal theory // International Journal of Mathematics and Physics, 2012, V. 3, 2, pp. 1–8.

Международный университет информационных технологий, Алматы; ИМ СО РАН, НГТУ, НГУ, Новосибирск

E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz, sudoplat@math.nsc.ru

Сложность решеток квазимногообразий

С. М. Луцак

Согласно М. В. Сапиру [**1**], квазимногообразие $\mathbf{K}$ *Q-универсально*, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ конечной сигнатуры $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}') \in \mathbf{HS}\big(\mathrm{Lq}(\mathbf{K})\big)$. Будем говорить, что квазимногообразие $\mathbf{K}$ имеет *свойство невычислимости Нуракунова*, если в нем существует подкласс $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, такой, что множество всех конечных подрешёток решётки $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}')$ не вычислимо. В работе [**2**] А. М. Нуракунов доказал следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть сигнатура σ содержит хотя бы одну неконстантную операцию. Тогда существует квазимногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$, такое что множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ невычислимо.*

В [**3**] А. М. Нуракунов доказал аналогичный результат для квазимногообразия точечных абелевых групп. В этой же работе доказана Q-универсальность этого квазимногообразия. В [**4**] показано, что класс $\mathbf{K}$ всех систем сигнатуры σ является Q-универсальным тогда и только тогда, когда он обладает свойством невычислимости Нуракунова. В этой связи возникают следующие проблемы. Верно ли, что любой Q-универсальный класс систем $\mathbf{K}$ фиксированной сигнатуры обладает свойством невычислимости Нуракунова? Существует ли класс $\mathbf{K}$, не являющийся Q-универсальным, но, тем не менее, обладающий указанным выше свойством?

В [**5**] дан положительный ответ на первый вопрос для почти всех известных Q-универсальных квазимногообразий. Нами показано, что и на второй вопрос ответ положителен. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Существует континуум квазимногообразий $\mathbf{R}$ унаров, которые обладают свойством невычислимости Нуракунова, но не являются Q-универсальными.*

Теорема 3. *Существует континуум классов $\mathbf{K}$ точечных абелевых групп [ориентированных графов, дифференциальных группоидов], обладающих свойством невычислимости Нуракунова, но не являющихся Q-универсальными.*

Результат, аналогичный теоремам 2 и 3, справедлив и для многих других классов систем.

Список литературы

[1] Sapir M. V. The lattice of quasivarieties of semigroups, Algebra Universalis, 21 (1985), 172–180.

[2] Nurakunov A. M. Unreasonable lattices of quasivarieties, Internat. J. Algebra Comput., 22(3) (2012), 1–17.

[3] Нуракунов А. М. Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп, Алгебра и логика, 53 (2014), 372–400.

[4] Schwidefsky M. V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. II, Internat. J. Algebra Comput., 24 (2014), 1099–1126.

[5] Швидефски М. В. О сложности решеток квазмногообразий, Алгебра и логика, 54, no.3, (2015), 381–398.

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилва, Астана
E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

Разделение квазилинейных клонов гипертождествами

И. А. Мальцев

Функции k-значной логики, зависящие от одной переменной, и функции, выражающиеся через такие функции следующим образом:

$$f(g_1(x_1) \oplus \ldots \oplus g_n(x_n)),$$

где сложение ведется по модулю 2, называются квазилинейными. Далее рассматриваются клоны, образованные квазилинейными функциями, определенными на множестве $\{0, 1, 2\}$, со значениями в множестве $\{0, 1\}$.

Пусть $f_1^{n_1}, \ldots, f_k^{n_k}$ — все функциональные символы и $x_1, \ldots, x_n$ — все предметные символы, входящие в термы T_1 и T_2. Гипертождеством называется выражение вида

$$\forall f_1^{n_1} \ldots \forall f_k^{n_k}\, \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (T_1 = T_2).$$

Гипертождество разделяет два клона, если оно истинно на одном из них, но ложно на другом.

Квазилинейная функция называется не креативной, если при подстановке в нее любой другой квазилинейной функции со значениями в множестве $\{0, 1\}$ число существенных переменных не возрастает. Клоны, образованные не креативными функциями, назовем не креативными. Клоны, в которых имеются креативные функции, назовем креативными.

Возможность разделения не креативных клонов гипертождествами полностью изучена в [**4**].

Теорема. *Любой креативный клон образованный функциями, определенными на множестве* $\{0, 1, 2\}$, *со значениями в множестве* $\{0, 1\}$, *отделим от не креативного клона, образованного функциями такого же вида, одним из следующих гипертождеств:*

$$\forall F\, (F(F(x, y), F(x, y)) \approx F(x, y))$$
$$\forall F\, [F(x, F(x, y)) \approx F(x, y)].$$
$$\forall F\, (F(F(x, y), F(y, x)) \approx F(F(x, x), F(x, x)))$$
$$\forall F\, F(F(x, y), F(x, y)) \approx F(F(x, x), F(y, y))$$
$$\forall F\, (F(F[F(x, y), F(y, x)], F[F(x, y), F(y, x)]) \approx F(x, x))$$
$$F(F(x, y), F(y, x)) \approx F(x, x).$$
$$\forall F\, (F(x, x, x) \approx F(F(x, y, z), F(z, x, y), F(z, y, x)))$$
$$\forall F\, (F(F(x, x, x), F(x, x, x), F(x, x, x)) \approx F(F(x, y, z), F(z, x, y), F(z, y, x)))$$
$$\forall F\, (F(F(F(x, x), F(x, x)), F(F(y, y), F(y, y))) \approx F(x, y))$$
$$\forall F\, (F(F(x, y), F(x, y)) \approx F(x, y))$$
$$\forall F\, F(F(x, y), F(y, x)) \approx F(F(x, x), F(x, x))$$

Список литературы

[1] Деметрович Я., Мальцев И. А. О существенно минимальных TC-клонах на трехэлементном множестве // MTA SZTAKI Kozl. 1984. 32. С. 115–151.

[2] Деметрович Я., Мальцев И. А. О строении клона Бурле на трехэлементном множестве // Acta cybernetica. 1989. V. 9. 1. P. 1–25.

[3] Денеке К., Мальцев И. А., Решке М. О разделимости клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, 5. С. 1050-1066.

[4] Мальцев И. А. Гипертождества квазилинейных клонов на трехэлементном множестве // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55. 2. С. 350–363.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: malcev@math.nsc.ru

Об одной комбинаторной классификации конечных квазигрупп

И. П. Мишутушкин

Определение 1. *Последовательность элементов* $a_0 = a, a_1 = b, a_2, ...$ *конечного группоида* $< A; f >$, *в которой* $a_{t+2} = f(a_t, a_{t+1})$, $t = 0, 1, ...$, *назовем* λ*-последовательностью группоида* f *с началом* a, b.

Лемма 1. λ*-последовательность группоида с правым сокращением (бицикл) - циклична.*

Множество $B(f) = \{B_1(f), B_2(f), ..., B_{m_f}(f)\}$ всех различных бициклов группоида f с правым сокращением назовем бициклическим разложением f.

Лемма 2. *Каждая упорядоченная пара* ab, $(a, b) \in A^2$, *входит ровно в один бицикл из* $B(f)$.

Следствие. $\sum_{i=1}^{m_f} |B_i(f)| = |A|^2$.

Теорема 1. *Два группоида с правым сокращением изоморфны тогда и только тогда, когда бициклическое разложение одного из них можно получить из бициклического разложения другого путем замены элементов каждого бицикла на их изоморфные образы.*

Теорема 1 приводит к полиномиальным алгоритмам, решающим для группоидов с правым сокращением задачи:

- проверки наличия изоморфизма между двумя заданными группоидами;
- нахождения группы автоморфизмов данного группоида;
- нахождения всех подгрупп данного группоида.

Определение 2. *Квадратом* b^2 *бицикла* $b = (b_0, b_1, ..., b_{p-1})$ *назовем:*

(1) *при* p *нечетном – бицикл* $(b_0, b_2, ..., b_{p-1}, b_1, b_3, ..., b_{p-2})$,

(2) *при* p *четном – пару бициклов* $(b_0, b_2, ..., b_{p-2})(b_1, b_3, ..., b_{p-1})$.

Теорема 2. *Группоид* f *с бициклическим разложением* $B(f)$ *- квазигруппа тогда и только тогда, когда квадрат* $B^2(f) = \{B_1^2(f), B_2^2(f), ..., B_{m_f}^2(f)\}$ *его бициклического разложения задает группоид с правым сокращением.*

Следствие. *Если любая пара элементов* b_t, b_{t+4} *однозначно определяет содержащий ее бицикл* $(b_0, b_1, ...) \in B(f)$ *, то* $B^2(f)$ *задает квазигруппу.*

Определение 3. *Типом* $T(f)$ *квазигруппы* f, *отвечающей условиям следствия, назовем упорядоченную по неубыванию последовательность длин бициклов* $B(f)$.

Введем сравнение типов таких квазигрупп: $f \in Q_2(A)$, полагая $T(f) \leq T(g)$, если $B(f)$ получается рекуррентно из $B(g)$ кратным нахождением бициклического квадрата.

Теорема 3. *Множество квазигрупп* $Q_2(A)$ *есть объединение непересекающихся цепей подмножеств* $\{f | f \in Q_2(A) \,\&\, T(f) = T_0\} \subset Q_2(A)$, $T_0 = const$, *упорядоченных сравнением типов квазигрупп.*

ЗАО "АСТ", г. Москва
E-mail: lachika@bk.ru

О стандартности топологических квазимногообразий алгебр

А. М. Нуракунов

Конечная топологическая алгебра $\mathbf{A}_\tau = \langle \mathbf{A}, \tau \rangle$ конечной сигнатуры с дискретной топологией τ порождает *топологическое квазимногообразие* $\mathbf{Q}_\tau(\mathbf{A}_\tau)$, состоящее из подалгебр непустых декартовых степеней алгебры $\mathbf{A}$, замкнутых в соответствующих декартовых топологиях. Пусть $Th_q(\mathbf{A})$ — квазиэквациональная теория алгебры $\mathbf{A}$ и $Mod_\tau(Th_q(\mathbf{A}))$ — класс топологических алгебр $\mathbf{B}_\tau$ таких, что $\mathbf{B} \in Mod(Th_q(\mathbf{A}))$ и $\langle B, \tau \rangle$ является компактным и вполне несвязанным. Топологическое квазимногообразие $\mathbf{Q}_\tau(\mathbf{A}_\tau)$ *стандартно*, если $\mathbf{Q}_\tau(\mathbf{A}_\tau) = Mod_\tau(Th_q(\mathbf{A}))$. В работе приводятся достаточные условия при которых конечная алгебра порождает стандартное топологическое квазимногообразие. В частности, таковыми являются конечные алгебры, порождающие квазимногообразия с определимыми главными подконгруэнциями. Этот факт позволяет подтвердить гипотезу, выдвинутую в [**1**], что множество всех конечных алгебр, которые порождают квазимногообразия с конечно термально определимыми главными конгруэнциями, невычислимо.

Список литературы

[1] Clark D. M., Davey B. A., Freese R. S., and Jackson M. Standard topological algebras: syntactic and principal congruences and profiniteness, Algebra Universalis, 52 (2004), 343-376

Институт теоретической и прикладной математики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан
E-mail: a.nurakunov@gmail.com

Некоторые свойства форсинг-компаньонов

А. Т. Нуртазин

При изучении экзистенциально замкнутых структур полезным оказывается понятие класса Фрэсе. Две структуры называем компаньонами, если совпадают их классы Фрэсе. С помощью этого понятия довольно естественно определяется “вынуждение” Коэна - Робинсона [**1**]. При этом определение вынуждения задаётся лишь в терминах конечных структур и вложений между ними. При рассмотрении произвольной структуры из данного компаньон-класса возникает вопрос о совпадении истинности формул на кортежах и их вынуждении её конечными подструктурами. Напомним, что структуры, в которых эти понятия полностью совпадают называются форсинг-структурами. Известно, что все они экзистенциально замкнуты, а их теория T^f полна. С помощью этого подхода также удаётся получить важное заключение о теории T^c всего класса экзистенциально замкнутых структур:

Теорема 1. *Любое $\exists\forall\exists$-предложение из T^f также принадлежит и T^c.*

В [**2**] было замечено, что при изучении экзистенциально замкнутых структур важную роль играют максимальные экзистенциальные типы. Такой тип $p(\bar{x})$ назовём f-типом, если он имеет единственное расширение до полного.

Теорема 2. *Данная структура является f-структурой, если и только если максимальные экзистенциальные типы её кортежей являются f-типами.*

Следствие 1. *Если в данном компаньон-классе все экзистенциально замкнутые модели являются форсинг-структурами, то его индуктивная оболочка T^c полна и модельно полна.*

Автором были построены примеры компаньон-теорий, имеющих в точности две счётные экзистенциально замкнутые модели.

Следствие 2. *Если в данном компаньон-классе имеются две счётные экзистенциально замкнутые модели и индуктивная оболочка T^c не полна, то одна из этих моделей является форсинг-структурой, а вторая — нет.*

Следующее утверждение объясняет значение f-типов для изучения строения форсинг-структур.

Теорема 3. *Любой f-тип реализуется в некоторой счётной форсинг-структуре.*

Список литературы

[1] Barwise J., Robinson A. Completing theories by forcing, Ann. Math. Logic, 1970, 2, 119-142.

[2] Нуртазин А. Т. Счётные экзистенциально замкнутые модели универсально аксиоматизируемых теорий, Математические труды, 2015, том 18, 1, 1-50.

Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы
E-mail: abyznurtazin@mail.ru

Три замечания об экзистенциально замкнутых структурах и их теориях

А. Т. Нуртазин

При изучении экзистенциально замкнутых структур и их элементарных теорий одним из первых возникает следующий вопрос:

- *Какой может быть элементарная теория некоторого класса экзистенциально замкнутых структур?*

Теорема 1. *Для того, чтобы данная непротиворечивая теории T реляционной сигнатуры Σ была элементарной теорией класса экзистенциально замкнутых в ней структур необходимо и достаточно, чтобы для любой выполнимой в ней формулы $\varphi(\bar{x})$ и универсальной формулы от того же самого набора переменных $\psi(\bar{x})$ такой, что $T \vdash \forall\bar{x}[\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})]$ найдётся экзистенциальная формула $\theta(\bar{x})$, для которой с теорией T совместно предложение $\exists\bar{x}\ [\theta(\bar{x})\&\varphi(\bar{x})]\ \&\ \forall\bar{x}\ [\theta(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})]$.*

При изучении экзистенциально замкнутых моделей удобно использовать понятие класса Фрэсе и рассматривать теории, в которых эти классы для всех моделей совпадают, а сами модели при этом называть компаньонами. Автором замечено, что произвольная структура из данного компаньон-класса экзистенциально замкнута, если и только если в ней экзистенциальные типы всех кортежей максимальны и само понятие максимального экзистенциального типа имеет важное значение. Поэтому для подсчёта счётных экзистенциально замкнутых моделей может оказаться полезным ответ на вопрос:

- *При каких условиях в некоторой экзистенциально замкнутой модели можно реализовать один и опустить другой максимальный экзистенциальный тип?*

Теорема 2. *Для того, чтобы в компаньон-теории T^c для максимальных экзистенциальных типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ в любой экзистенциально замкнутой модели, реализующей $q(\bar{y})$ также реализуется и $p(\bar{x})$ необходимо и достаточно, чтобы существовала экзистенциальная формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что в индуктивной оболочке T^c для нового кортежа констант $\bar{b}$ выполнялось: $q(\bar{b}) \cup \{\varphi(\bar{x}; \bar{b})\} \to p(\bar{x})$.*

Ранее ряд специалистов отмечали, что многие классические компаньон-классы имеют континуум попарно не элементарно эквивалентных счётных экзистенциально замкнутых моделей. В этой связи представляют интерес автора, которые показывают, что *имеются компаньон-классы, в которых может существовать любое конечное или счтное число попарно не элементарно эквивалентных счтных экзистенциально замкнутых моделей.*

Список литературы

[1] Нуртазин А. Т. Счётные экзистенциально замкнутые модели универсально аксиоматизируемых теорий, Математические труды, 2015, том 18, 1, 1-50.

Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы
E-mail: abyznurtazin@mail.ru

Счетные структуры с изоморфными бесконечными подструктурами

А. Т. Нуртазин, З. Г. Хисамиев

Мы называем бесконечную структуру M s-категоричной, если любая её подструктура той же мощности, изоморфна ей. Проблема описания s-категоричных структур с одним бинарным отношением полностью решается следующим утверждением:

Теорема 1. *С точностью до эквивалентности существует единственная счётная s-категоричная структура с одним бинарным отношением, которое совпадает или обратно обычному порядку на натуральных числах.*

Возможно, что полное описание s-категоричных структур, имеющих помимо отношений и функции, может оказаться достаточно сложным. Простое и вполне законченное решение сформулированная задача имеет для класса счётных булевых алгебр.

Теорема 2. *Единственной счётной s-категоричная булевой алгеброй является булева алгебра конечных и коконечных подмножеств натурального ряда.*

Также вполне каноническими объектами оказываются и s-категоричные абелевы группы.

Теорема 3. *В семействе счётных абелевых групп s-категоричными являются $Z, C_{p^\infty}, Z_p^\omega$ и только они.*

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Алгебраические системы, Математические труды, Москва: Наука, 1970, 392.

Институт информационных и вычислительных технологий МОН РК, Алматы
E-mail: abyznurtazin@mail.ru khisamievz@mail.ru

Структурные свойства полугрупп элементарных типов булевых алгебр с выделенным идеалом

Д. Е. Пальчунов, В. С. Викерева

Определение 1. *Для алгебраических систем* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *обозначим* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, *если* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *элементарно эквивалентны, т.е.* $\{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} = \{\varphi \mid \mathfrak{B} \models \varphi\}$. *Пусть зафиксирован некоторый класс* K *алгебраических систем. Для* $\mathfrak{A} \in K$ *обозначим* $[\mathfrak{A}]_{\equiv} = \{\mathfrak{B} \in K \mid \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\}$ — ***элементарный тип*** *алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ *(относительно класса* K*). Обозначим* $[\mathfrak{A}]_{\equiv} \times [\mathfrak{B}]_{\equiv} = [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_{\equiv}$.

Алгебра $E = \langle\{[\mathfrak{A}]_{\equiv} \mid \mathfrak{A} \in K\}; \times\rangle$ *называется* ***полугруппой элементарных типов*** *класса* K.

Предложение 1. *а) Элементарная характеристика произвольной булевой алгебры выразима одной формулой языка полугруппы элементарных типов.*

б) Элементарная характеристика произвольной суператомной булевой алгебры с выделенным идеалом выразима одной формулой языка полугруппы элементарных типов.

Теорема 1. *а) Полугруппа* E_B *элементарных типов булевых алгебр изоморфно вкладывается в полугруппу* E_{SBI} *элементарных типов суператомных булевых алгебр с выделенным идеалом.*

б) Полугруппа E_{SBI} *не вкладывается изоморфно в полугруппу* E_B.

в) Подполугруппа идемпотентов полугруппы E_{SBI} *не вкладывается изоморфно в полугруппу* E_B.

Предложение 2. *а) Конечно аксиоматизируемые элементарные типы булевых алгебр образуют полугруппу* E_{Bf}.

б) Не конечно аксиоматизируемые элементарные типы булевых алгебр образуют полугруппу E_{Bnf}.

в) Конечно аксиоматизируемые элементарные типы суператомных булевых алгебр с выделенным идеалом образуют полугруппу E_{SBIf}.

г) Не конечно аксиоматизируемые элементарные типы суператомных булевых алгебр с выделенным идеалом образуют полугруппу E_{SBInf}.

Теорема 2. *а) Полугруппа* E_{Bf} *изоморфно вкладывается в полугруппу* E_{SBInf}, *но не вкладывается изоморфно в полугруппу* E_{SBIf}.

б) Полугруппа E_{Bnf} *изоморфно вкладывается в полугруппу* E_{SBInf}, *но не вкладывается изоморфно в полугруппу* E_{SBIf}.

в) Полугруппа E_{SBIf} *не вкладывается изоморфно в полугруппу* E_B.

г) Полугруппа E_{SBInf} *не вкладывается изоморфно в полугруппу* E_B.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Обогащения категоричных квазимногообразий до аддитивных хорновых теорий

Е. А. Палютин

Хорнова теория — это элементарная теория, класс моделей которой замкнут относительно фильтрованных произведений. Квазимногообразие — это класс структур с хорновой теорией, замкнутый относительно подструктур.

Сведения по хорновым теориям можно найти, например, в [**3**], [**2**] и [**1**].

Под категоричной теорией T понимается теория, категоричная в мощностях, больших мощности $|T|$.

В дальнейшем под хорновой теорией будем понимать категоричную хорнову теорию, имеющую бесконечные модели.

Категоричные хорновы теории делятся на 2 класса: антиаддитивные и аддитивные. Антиаддитивными называются теории, в которых нельзя проинтерпретировать никакую бесконечную группу. Данное название обусловлено тем, что в категоричных хорновых теориях интерпретируются только бесконечные абелевы группы.

Теорема. *Существует категоричное квазимногообразие, которое нельзя обогатить до аддитивной хорновой теории.*

Идея доказательства состоит в том, что дается характеризация групп G подстановок множеств A, которое является носителями структуры с категоричной хорновой теорией и в которой определима некоторая бесконечная группа, а также каждая подстановка из группы G примитивно определима. Известно (см. [**4**]), что любая группа примитивно определяется в некотором категоричном квазимногообразии. Так как не каждая группа подпадает под данную характеризацию, то мы получаем данную теорему.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0830/ГФ4).

Список литературы

[1] Палютин Е. А. Категоричные хорновы классы 1., Алгебра и логика, т. 19, 5 (1980), с. 582–614.
[2] Палютин Е. А. Категоричные хорновы классы 2., Алгебра и логика, т. 49, 6 (2010), с. 782–802.
[3] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.
[4] Палютин Е. А. Описание категоричных квазимногообразий, Алгебра и логика, т. 14, 2 (1975), с. 145–185.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palyutin@math.nsc.ru

Элементарные подрешетки решеток всех клонов

А. Г. Пинус

Функциональный клон F на множестве A назовем ограниченно порожденным, если существует множество функций на A ограниченной в совокупности арности, порождающее клон F. Совокупность всех ограниченно порожденных клонов на A образует решетку L_A^{rg} (относительно теоретико множественного включения), являющуюся подрешеткой решетки L_A всех клонов на A. Свойства решеток L_A и L_A^{rg}, выразимые в языке логики первого порядка, совпадают.

Теорема 1. *Решетка L_A^{rg} является элементарной подрешеткой решетки L_A.*

Как хорошо известно, для любого не менее чем трехэлементного множества A решетки L_A не счетны (в отличии от счетной решетки $L_{\{0,1\}}$, досконально описанной Постом). Это является известным препятствием при изучении свойств решеток L_A. Поскольку же для конечных множеств A решетки L_A^{rg} счетны, то теорема 1 открывает путь изучения элементарных свойств решеток L_A через изучение элементарных свойств счетных решеток L_A^{rg}.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, гос. задание 2014/138, проект 1052.

(Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск)
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Оператор параметрического замыкания на множестве гиперфункций ранга 2

Л. В. Рябец

Пусть A — конечное множество, тогда 2^A — множество всех подмножеств A и $E_2 = \{0,1\}$. Определим P_2^- — множество всех гиперфункций ранга 2:

$$P_{2,n}^- = \left\{f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\right\},\ P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-.$$

Для E_2 используем обозначение «$-$».

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m)$ — гиперфункции. Суперпозиция $f(f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m))$ определяет гиперфункцию $g(x_1,\ldots,x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in E_2^m$, то

$$g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

Замыканием $[Q]$ множества Q называется множество всех гиперфункций из P_2^-, которые можно получить из Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных и суперпозиции.

Символами языка Par являются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_i$, символы f_i для обозначения гиперфункций, символ включения $\subseteq$, логическая связка конъюнкция &, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки, запятая.

Введем понятие терма. Переменная есть терм. Если $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ — переменные, а f_j — символ n-местной гиперфункции, то $f_j(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$ — терм. Если $t_1,\ldots,t_m$ — термы, f_i — символ m-местной гиперфункции, то $f_i(t_1,\ldots,t_m)$ есть терм.

Если t_1, t_2 — термы языка Par, то выражение $(t_1 \subseteq t_2)$ есть элементарная формула. Остальные формулы определяем следующим образом: если Φ_1, Φ_2 — формулы, а x_i — переменная, то $(\Phi_1 \,\&\, \Phi_2)$, $(\exists x_i)\Phi_1$ — формулы языка Par.

Пусть $Q \subseteq P_2^-$, $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_2^-$, $\Phi(x_1,\ldots x_n, y)$ — формула языка Par со свободными переменными $x_1,\ldots x_n, y$, все функциональные символы которой являются обозначениями функций из $[Q]$. Формула Φ параметрически выражает f через функции множества Q, если множества истинности Φ и отношения $y \subseteq f(x_1,\ldots,x_n)$ совпадают. Множество гиперфункций, параметрически выразимых через функции множества Q, есть параметрическое замыкание Q.

В [**1**] описаны все 25 параметрически замкнутых классов булевых функций.

Пусть S^- — множество гиперфункций, которые на любой паре противоположных наборов принимают либо значения $(0,1)$ или $(1,0)$, либо прочерки $(-,-)$, и L^- — множество линейных булевых функций в объединении с функцией прочерк.

Теорема. *Существует ровно 13 параметрически замкнутых классов гиперфункций, из которых предполными являются классы S^- и L^-.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-31-00209 мол_а.

Список литературы

[1] Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. М. : Физматлит, 2000. 126 с.

Иркутский государственный университет, Иркутск
E-mail: riabets@rambler.ru

Ранги планарности перестановочных многообразий полугрупп

Д. В. Соломатин

Настоящая работа посвящена изучению свойства планарности графов Кэли полугрупп для перестановочных многообразий. А именно, исследуется предложенное Л. М. Мартыновым понятие ранга планарности многообразия полугрупп. Напомним соответствующее определение. Пусть $\boldsymbol{V}$ — произвольное многообразие полугрупп. Если существует такое натуральное число r, что все $\boldsymbol{V}$-свободные полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарный граф Кэли, а $\boldsymbol{V}$-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то *рангом планарности* $\boldsymbol{V}$ называется это число r. Если для многообразия $\boldsymbol{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет бесконечный ранг планарности. Ранее автором в [**1**] найдены ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп. Оказалось, что нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп либо имеет бесконечный ранг планарности и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности 1, 2 или 3. Здесь мы приводим описание рангов планарности перестановочных многообразий полугрупп и классификацию по рангам планарности таких многообразий. Напомним, что многообразие полугрупп называется перестановочным, если оно задано тождеством вида $x_1x_2\ldots x_n = x_{1\sigma}x_{2\sigma}\ldots x_{n\sigma}$, где σ — нетривиальная перестановка множества $\{1,2,\ldots,n\}$. Доказана следующая

Теорема. *Перестановочное многообразие полугрупп имеет ранг планарности 1 или 2. При этом ранг планарности 2 имеют многообразия полугрупп, заданные тождеством вида $x_1x_2\ldots x_kx_{k+1} = x_1x_2\ldots x_{k+1}x_k$, где $k \geq 1$, а все остальные перестановочные многообразия полугрупп имеют ранг планарности 1.*

В частности, заданное тождеством $x_1x_2x_3 = x_1x_3x_2$ многообразие полугрупп имеет ранг планарности 2, а многообразие, заданное тождеством $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$, имеет ранг планарности 1.

Список литературы

[1] Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895–1944) и Александра Петровича (1926–1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. — Казань: Казанский университет; изд-во Академии наук РТ, 2016 — С. 318.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

Об одном соответствии между коммутативными кольцами и йордановыми лупами

В. И. Урсу

Известным примером о соответствии между классами моделей является пример А. И. Мальцева, который указал о соответствии между классом всех колец и некоторым классом метабелевых групп [**1**]. Здесь мы излагаем одно соответствие между классом всех коммутативных колец и некоторым классом 2-нильпотентных Йордановых луп. Отметим, что коммутативная лупа с тождеством $x^2 \cdot (yx) = (x^2 \cdot y)x$ называется Йордановой.

Рассматривается одно отображение φ, ставящее в соответствие произвольному коммутативному кольцу R квазигруппу $\varphi(R)$, элементами которой являются кватернионы множества R^4, перемножающиеся по некоторому закону. Для любого коммутативного кольца R квазигруппа $L = \varphi(R)$ является 2-нильпотентной Йордановой лупой. Если R обладает единицей, то R воспроизводимо из L, и в результате получается взаимно однозначное соответствие с точностью до изоморфизма класса коммутативных колец с единицей особому классу 2-нильпотентных Йордановых луп с выделенной тройкой элементов. Как известно, неразрешимость элементарных теорий установлена для многих классов колец [**2**], то отсюда указанное соответствие позволяет получить серию луп и классов луп с неразрешимыми теориями. Среди них являются, например, класс всех Йордановых 2-нильпотентных луп, класс всех Йордановых 2-нильпотентных луп с тождеством $x^p = 1$ (p – простое число), свободные m-нильпотентные коммутативные A-лупы (определение см. в [**2**]) с n свободными образующими при $m, n \geq 2$ и некоторые другие.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Об одном соответствии между кольцами и группами // Мат. сб. 1960, 50, 3, 257–266

[2] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. Москва: Мир, 1967.

Институт математики Симион Стоилов Румынской Академии
E-mail: Vasile.Ursu@imar.ro

Разложения в полных решетках

М. В. Швидефски

Дана характеризация полных решеток, в которых несократимые разложения обладают свойством замены, а также решетки с единственными несократимыми разложениями, в шести классах:

– в классе непрерывных вверх и вниз решеток;
– в классе непрерывных вверх вполне полудистрибутивных вверх решеток;
– в классе полумодулярных вверх непрерывных вниз решеток;
– в классе полумодулярных вверх вполне полудистрибутивных вверх решеток;
– в классе консистентных непрерывных вниз решеток;
– в классе консистентных вполне полудистрибутивных вверх решеток.

В частности, полная решетка, принадлежащая одному из шести перечисленных выше классов, имеет единственные несократимые разложения тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке замкнутых подмножеств выпуклой геометрии.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: semenova@math.nsc.ru

О конечности 3-порожденной решетки с ограничениями типа модулярности на порождающие элементы

М. П. Шушпанов

Элемент a решетки L называется *левомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x < y \to x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

Элемент a решетки L называется *правомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x < a \to x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge a.$$

Элемент a решетки L называется *коправомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : a < x \to x \wedge (a \vee y) = (y \wedge x) \vee a.$$

Если элемент решётки обладает хотя бы одним из этих свойств, будем говорить, что для него выполнено ограничение типа модулярности.

В [**1, 2**] в терминах этих свойств были найдены достаточные условия модулярности 3-порождённой решётки. Например, решётка, порождённая тремя левомодулярными элементами, модулярна ([**2**]). В этих случаях решётка автоматически конечна. Для других комбинаций указанных свойств решётка может уже не быть модулярной, но, тем не менее, может также оказаться конечной.

Теорема. *Решётка, порождённая тремя элементами, один из которых левомодулярен и правомодулярен, а другой левомодулярен и коправомодулярен, конечна и содержит не более 45 элементов.*

Указанная оценка является точной.

Список литературы

[1] Гейн А. Г., Шушпанов М. П. Достаточные условия модулярности решётки с порождающими элементами, обладающими свойствами типа модулярности // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. 4. С. 798–804.

[2] Шушпанов М. П. Решётки, порожденные модулярными элементами // Изв. вузов. Математика. 2015. 12. С. 84–86.

Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург
E-mail: Mikhail.Shushpanov@gmailcom

Квазимногообразия графов и независимая базируемость

А. В. Яковлев

В докладе рассматривается такая мера сложности решеток квазимногообразий как наличие континуума элементов, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Ранее подобный результат был доказан для квазимногообразий унаров и орграфов, а также антимногообразия унаров.

Теорема. *Существует квазимногообразие* $\mathbf{V}$ *неориентированных графов такое, что решетка квазимногообразий* $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$ *содержит континуум элементов, не имеющих покрытий.*

Ранее было известно что решетка квазимногообразий графов имеет мощность 2^ω, является $\mathcal{Q}$-универсальной, а множество ее конечных подрешеток невычислимое.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: yakor1191@gmail.com

Groupoids of quasivarieties

A. Basheyeva, M. Bekenov, D. Kozybayev, S. Lutsak

Authors study properties of axiomatizable classes of models of a countable language. An A-tree of models is the class of all models of some complete theory. Every axiomatizable class K of models is a join of some set of A-trees of models.

Let $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$ are two A-trees. Then $\mathbf{K}\otimes\mathbf{R}$ is a closure of the class $\{\mathcal{K}\times\mathcal{R} : \mathcal{K}\in\mathbf{K}, \mathcal{R}\in\mathbf{R}\}$ with respect to elementary equivalence. $\mathbf{K}\otimes\mathbf{R}$ is called a direct product of A-trees $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$.

Lemma. *Direct product of the complete theories is a complete theory.*

Thus, if $\mathbf{R}^A$ is a class of all A-trees of a class $\mathbf{R}$ then we may consider algebra $\langle\mathbf{R}^A;\otimes\rangle$ with operation of a direct product of A-trees. In general, the direct product of models allows to define product of any number of axiomatizable classes. By duality, we may consider this product as a direct product of theories and algebra as an algebra of theories.

The main purpose of the paper is to study connections between subalgebras of algebra of theories and properties of categoricity, stability, finite generation of Horn theory of algebras and quasivariety algebras, etc.

Let $\mathbf{V}$ be a quasivariety. The direct product of subquasivarieties of $\mathbf{V}$ defines a subquasivariety of the quasivariety $\mathbf{V}$. Thus, the lattice of a quasivarieties is a groupoid of quasivarieties with binary operation of a direct product of subquasivarieties of a quasivariety $\mathbf{V}$. Authors study properties of classes of subgroupoids of groupoid of subquasivarieties by the model theory's methods.

The L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana
E-mail: basheeva@mail.ru, bekenov50@mail.ru, kozybaev2010@yandex.kz, sveta_lutsak@mail.ru

On varieties of groupoids of relations

D. A. Bredikhin

A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra that is called an *algebra of relations*. We consider algebras of relations with a binary operation, i.e., groupoids of relations. Motivation for these researches can be find in [**1**].

For any set Ω of operations on binary relations, let $R\{\Omega\}$ denote the class of algebras whose elements are binary relations and whose operations are members of Ω. Let $Var\{\Omega\}$ be the variety generated by $R\{\Omega\}$.

We concentrate our attention on operation $*$ that is defined as follows. For any binary relations ρ and σ on U, put

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in U \times U : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma\} .$$

Note that this operation can be expressed by the operations of relation product $\circ$ and relation inverse $^{-1}$ as follows: $\rho * \sigma = \rho \circ \sigma^{-1}$.

Theorem. *A groupoid* $(A, \cdot)$ *belongs to the variety* $Var\{*\}$ *if and only if it satisfies the identity* $(x(yz))t = x(t(yz))$.

References

[1] Bredikhin D. A. On Varieties of Groupoids of Relations with Opertion of Binary Cylindrofication. Alg. Univers. 2015. vol. 73. pp. 43-52.

Saratov State Technical University, Saratov (Russia)
E-mail: bredikhin@mail.ru

A minimal complicated variety of unary algebras

A. V. Kravchenko

In [**1**], the author found an example of a minimal $\mathcal{Q}$-universal variety $\mathbf{K}$ of algebras with two fundamental unary operations.

Notice that $\mathcal{Q}$-universality is one of measures of complexity for quasivarieties of finite signature meaning that "the lattice of subquasivarieties is very complicated." Among other such measures, we mention the notion of unreasonable lattices of quasivarieties [**2**] and the existence of 2^ω subquasivarieties without independent bases for their quasi-identities [**3, 4**].

We find that $\mathbf{K}$ is very complicated with respect to these two measures too. Namely, we prove the following assertions.

Theorem 1. *There exist 2^ω subclasses $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$ such that the set of isomorphism types of finite sublattices of $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$ is not computably enumerable.*

Theorem 2. *There exist 2^ω elements of $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ without covers. Hence, there exist 2^ω subquasivarieties $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$ without independent bases for their quasi-identities.*

Two results that are similar to Theorem 2 can be found in this collection of abstracts [**5, 6**].

The work was partially supported by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-6848.2016.1).

References

[1] Kravchenko A. V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras, Siberian Adv. Math. 12 (2001), 63–76.

[2] Nurakunov A. Unreasonable lattices of quasivarieties, Internat. J. Algebra Comput. 22 (2012), no. 3, 125006, 17 pp.

[3] Gorbunov V. A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability, Algebra and Logic 16 (1977), 340–369.

[4] Kartashov V. K. Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles, Algebra and Logic 19 (1980), 106–120.

[5] Basheeva A. O. Bases for quasi-identities of quasivarieties of structures, this collection.

[6] Yakovlev A. V. Quasivarieties of graphs and independent bases, this collection.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: a.v.kravchenko@mail.ru

There is a virtual isomorphism between any two undecidable predicate calculi of finite signatures

M. G. Peretyat′kin

We consider theories in first-order predicate logic *with equality* and use general concepts of model theory and algorithm theory. Special concepts used in this paper can be found in [**1**]. Generally, *incomplete theories* of either enumerable of finite signatures are considered.

We denote by $\approx_a$ the relation of an algebraic isomorphism of theories, cf. [**1**]. Notation $\oplus$ stands for a known operation of the direct sum of theories, while $\otimes$ stands for a natural operation of the direct product of theories. By *FinSuc*, we denote a theory of signature $\{<^2, \lhd^2, B^1, E^1\}$ whose axioms state that $<$ is a discrete linear order, $x \lhd y \leftrightarrow (x < y) \wedge (\forall z)[x < z \rightarrow y \leqslant z]$, moreover, the order $<$ has both a minimal element distinguished by $B(x)$ and a maximal element distinguished by $E(x)$.

Given a theory T of signature σ and a finite sequence of formulas of this signature

$$\varkappa = \langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \ldots, \varphi_s^{m_s} \rangle \qquad (1)$$

satisfying the following technical condition:

$$(\forall k \leqslant s)\big[\, \varphi_k(\bar{x}_k) \ \textit{is}\ \exists \cap \forall\textit{-presentable in}\ T \,\big]. \qquad (2)$$

In the work [**1**], it is possible to find a definition of the concept of a *Cartesian extension* $T\langle\varkappa\rangle$ of a theory T by a sequence $\varkappa$ of formulas of the form (1).

The following property of ω-pushdown takes place:

Lemma. [First-order Pushdown Lemma] *Let T be an arbitrary computably axiomatizable theory of an enumerable signature. The following algebraic isomorphism of theories takes place*: $\mathcal{L}(T \oplus \mathit{FinSuc}) \approx_a \mathcal{L}(T \otimes (T \oplus \mathit{FinSuc}))$.

This technical lemma together with a standard release of the finite-to-finite signature reduction procedure allow us to establish the following statement:

Main Theorem. *Let σ_1 and σ_2 be arbitrary finite rich signatures. There are sequences $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ of formulas of the form* (1) *satisfying* (2) *in appropriate signatures, such that* $PC(\sigma_1)\langle\varkappa_1\rangle \approx_a PC(\sigma_2)\langle\varkappa_2\rangle$.

We can establish the following link between the predicate calculi:

Corollary. *Let σ_1 and σ_2 be two finite rich signatures. There exists a computable isomorphism μ*: $\mathcal{L}(PC(\sigma_1)) \rightarrow \mathcal{L}(PC(\sigma_2))$ *that preserves model-theoretic properties from the semantic layer ACL* (*thereby, μ preserves all available model-theoretic properties*). *Moreover, μ preserves globally the following general-model properties*: *decidability*, *computable axiomatizability*, *to be a theory of a given degree of unsolvability*, *finite axiomatizability*, *Π_n-axiomatizability, for any fixed $n \geqslant 2$.*

The part stating that the pointed out isomorphism μ preserves globally the general-model property of Π_n-axiomatizability, $n \geqslant 2$, gives the positive answer to an open question asked by V. L. Selivanov in 2007.

References

[1] Peretyat'kin M. G. First-order combinatorics and model-theoretical properties that can be distinct for mutually interpretable theories. Siberian Advances in Mathematics, 2016, Vol. 26, No 3, pp. 196-214.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty
E-mail: m.g.peretyatkin@predicate-logic.org

On relative closures and relative e-spectra for families of theories

S. V. Sudoplatov

We continue to study topological properties of families of theories with respect to natural closure operators [**1, 2**].

Definition. Let $\mathcal{T}$ be a class of theories. For a set $\mathcal{T}_0$ of theories we denote by $\mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}_0)$ the set $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_0) \setminus \mathcal{T}$. The set $\mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}_0)$ is called the *relative E-closure* of the set $\mathcal{T}_0$ with respect to $\mathcal{T}$, or *$\mathcal{T}$-relative E-closure*. If $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T} = \mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}_0)$ then $\mathcal{T}_0$ is said to be (relatively) *E-closed with respect to K*, or *$\mathcal{T}$-relatively E-closed*.

Let $\mathcal{T}_0$ be a closed set in a topological space $(\mathcal{T}, \mathcal{O}_E(\mathcal{T}))$. A subset $\mathcal{T}_0' \subseteq \mathcal{T}_0$ is said to be *generating* with respect to $\mathcal{T}$, or *$\mathcal{T}$-relatively generating*, if $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T} = \mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}(\mathcal{T}_0')$. The $\mathcal{T}$-relatively generating set $\mathcal{T}_0'$ (for $\mathcal{T}_0$) is *$\mathcal{T}$-minimal* if $\mathcal{T}_0' \setminus \mathcal{T}$ does not contain proper subsets $\mathcal{T}_0''$ such that $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T} = \mathrm{Cl}_{E,\mathcal{T}}((\mathcal{T}_0' \cap \mathcal{T}) \cup \mathcal{T}_0'')$. A $\mathcal{T}$-minimal $\mathcal{T}$-relatively generating set $\mathcal{T}_0'$ is *$\mathcal{T}$-least* if $\mathcal{T}_0' \setminus \mathcal{T}$ is contained in $\mathcal{T}_0'' \setminus \mathcal{T}$ for each $\mathcal{T}$-relatively generating set $\mathcal{T}_0''$ for $\mathcal{T}_0$.

For a set $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ of theories in a language Σ and for a sentence φ with $\Sigma(\varphi) \subseteq \Sigma$ we denote by $\mathcal{T}_\varphi$ the set $\{T \in \mathcal{T} \mid \varphi \in T\}$.

Theorem. *If $\mathcal{T}$ is a E-closed set and $\mathcal{T}_0'$ is a $\mathcal{T}$-relatively generating set for a E-closed set $\mathcal{T}_0$ then the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathcal{T}_0'$ is the $\mathcal{T}$-least generating set for $\mathcal{T}_0$;*
(2) *$\mathcal{T}_0'$ is a $\mathcal{T}$-minimal generating set for $\mathcal{T}_0$;*
(3) *any theory in $\mathcal{T}_0' \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0' \cup \mathcal{T})_\varphi$;*
(4) *any theory in $\mathcal{T}_0' \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T})_\varphi$;*
(5) *any theory in $\mathcal{T}_0' \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0')_\varphi$;*
(6) *any theory in $\mathcal{T}_0' \setminus \mathcal{T}$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0)_\varphi$.*

The notion of e-spectrum and a series of related results [**1, 2**] have been transformed for the relative case.

The research is partially supported by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (Grant NSh-6848.2016.1) and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0830/GF4).

References

[1] Sudoplatov S. V. Combinations of structures // arXiv:1601.00041v1 [math.LO]. 2016. 19 p.
[2] Sudoplatov S. V. Closures and generating sets related to combinations of structures // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2016. Vol. 16. P. 131–144.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

On free strong doppelsemigroups

A. V. Zhuchok

A semigroup $(D, \vdash)$ is called an interassociate of a semigroup $(D, \dashv)$ (see, e.g., [**1**]), if the axioms $(x \dashv y) \vdash z = x \dashv (y \vdash z)$ $(D1)$ and $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$ $(D2)$ hold. In this case $(D, \dashv, \vdash)$ is called a doppelsemigroup [**2**]. Semigroups $(D, \vdash)$ and $(D, \dashv)$ are strongly interassociative [**3**], if the axioms $(D1)$, $(D2)$ and $x \vdash (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z)$ $(D3)$ hold. If semigroups $(D, \vdash)$ and $(D, \dashv)$ are strongly interassociative, then $(D, \dashv, \vdash)$ will be called a strong doppelsemigroup. Equivalently, a strong doppelsemigroup is a doppelsemigroup satisfying the axiom $(D3)$.

The class of all strong doppelsemigroups forms a variety. A strong doppelsemigroup which is free in the variety of strong doppelsemigroups will be called a free strong doppelsemigroup.

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. $\mathbb{N}$ with zero will be denoted by $\mathbb{N}^0$. Let X be an arbitrary nonempty set, $n \in \mathbb{N}$. We denote the union of n different copies of X^n by Y_n and assume $D(X) = \bigcup_{n \geq 1} Y_n$. Denoting by $x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_n$ an element in the i-th summand of Y_n, define operations $\dashv$ and $\vdash$ on $D(X)$ by

$$(x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k) \dashv (x_{k+1} \dots \breve{x}_j \dots x_l) = x_1 \dots \breve{x}_{i+j-k} \dots x_l,$$

$$(x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k) \vdash (x_{k+1} \dots \breve{x}_j \dots x_l) = x_1 \dots \breve{x}_{i+j-k-1} \dots x_l$$

for all $x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k,\ x_{k+1} \dots \breve{x}_j \dots x_l \in D(X)$. The algebra $(D(X), \dashv, \vdash)$ will be denoted by $FSD(X)$.

Theorem 1. *$FSD(X)$ is the free strong doppelsemigroup.*

Let $F[X]$ be the free semigroup in the alphabet X. The length of $w \in F[X]$ will be denoted by l_ω. Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on $C = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N}^0 \,|\, l_w > m\}$ by

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1 + m_2 + 1),$$

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1 + m_2)$$

for all (w_1, m_1), $(w_2, m_2) \in C$. The algebra $(C, \dashv, \vdash)$ will be denoted by $\widetilde{F}[X]$. It is immediate to check that $\widetilde{F}[X]$ is a strong doppelsemigroup generated by $X \times \{0\}$.

Proposition 1. *$FSD(X)$ and $\widetilde{F}[X]$ are isomorphic.*

We also consider separately free strong doppelsemigroups of rank 1 and establish that the automorphism group of the free strong doppelsemigroup $FSD(X)$ is isomorphic to the symmetric group on X.

References

[1] Givens B.N., Linton K., Rosin A., Dishman L. Interassociates of the free commutative semigroup on n generators, Semigroup Forum 74 (2007), 370–378.

[2] Zhuchok A. V. Free products of doppelsemigroups, Algebra Univers. Accepted in 2016.

[3] Gould M., Richardson R. E. Translational hulls of polynomially related semigroups, Czechoslovak Math. J. 33 (1983), no. 1, 95–100.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Starobilsk (Ukraine)
E-mail: zhuchok_a@mail.ru

VII. Секция «Неклассические логики»

Правила индукции достаточно для аксиоматизации логики процессов Пратта

М. К. Валиев

Известны различные варианты обобщения пропозициональной динамической логики (ПДЛ), позволяющие выражать свойства процессов выполнения программ (а не только отношений вход-выход как в ПДЛ). В частности, В. Пратт [**1**] определил логику процессов с програмно-модальным оператором, который мы будем здесь обозначать как $\{a]$, где a - (вообще говоря, недетерминированная) программа, а формула $\{a]p.q$ означает "для любого результативного процесса x исполнения a в конечном состоянии процесса x верно свойство q или в каком-то промежуточном состоянии верно свойство p". Эта логика объединяет подходы ПДЛ ($[a]q$ из ПДЛ выражается как $\{a]false.q$) и логики Кампа с временным оператором $Until$ (и $Since$, если допускается операция обращения программ).

В зависимости от того, как интерпретируются элементарные программы (например, как бинарные отношения или множества траекторий), имеются некоторые варианты логики процессов Пратта. В моей работе [**2**] предложены полные секвенциальные аксиоматизации для некоторых из этих вариантов. Все они содержат правило индукции $X \to r, Yr \to \{a]p.r\ r \to p, q \vdash X \to \{a*]p.q, Y(Ind)$ и правило сечения (cut) (выбор инварианта r в (Ind) и формулы сечения можно сильно ограничить), т.е. для варианта PL_V аксиоматизация имеет вид $Ax_V + \{Ind, cut\}$. Ax_V для различных вариантов PL_V в основном отличаются друг от друга правилами для элементарных программ, а правила для программных операторов получаются как простые обобщения правил из ПДЛ (например, для композиции программ имеются левое правило $X, \{a]p.\{b]p.q \to Y \vdash X, \{a;b]p.q \to Y$ и аналогичное правое правило).

Пусть PL_R - вариант логики процессов без операции обращения программ, причем элементарные программы интерпретируются как бинарные отношения.

Теорема. *Система* $Ax_R + Ind$ *является полной аксиоматизацией для* PL_R.

Это дает непрямое доказательство допустимости правила сечения в Ax_R+Ind. Эти результаты легко перенесятся на некоторые другие варианты логики процессов, но в некоторых случаях имеются дополнительные технические трудности.

Доказательство теоремы использует идеи доказательства аналогичной теоремы для различных вариантов ПДЛ из [**3**].

Список литературы

[1] Pratt V. Process logic. 6th Ann. ACM Symp. on Principles of Programming Languages. 1979, 93-100.

[2] Valiev M.K. On axiomatization of process logic. Lect. Notes Comput. Sci., 148, 1983, 304-313.

[3] Valiev M.K. Decision complexity of variants of propositional dynamic logic. Lect. Notes Comput. Sci., 88, 1980, 656-664.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва
E-mail: valiev@keldysh.ru

Континуальные цепи и иррефлексивный оператор

А. Г. Макаров

Рассматриваются два вида континуальных цепей — типа "континуум без наибольшего элемента" (полуинтервал числовой прямой, например $[0;1)$) и типа "континуум с наибольшим элементом" (отрезок числовой прямой, например $[0;1]$) как модели суперинтуиционистской логики Даммета $LC = Int + (A \to B) \vee (B \to A)$ [**1**]. Эти цепи снабжаются иррефлексивным модальным оператором

$$x \Vdash \varphi(A) \Leftrightarrow \forall y > x (y \Vdash A),$$

рассматриваемым как дополнительная логическая связка в пропозициональном языке.

Множество формул расширенного языка, тождественно истинных в некоторой шкале, называют *φ-логикой* этой шкалы. В данном случае рассматриваем две φ-логики: $\mathcal{L}([0;1))$ и $\mathcal{L}([0;1])$.

Теорема.

Обе рассматриваемые φ-логики являются консервативными расширениями LC.

Обе рассматриваемые φ-логики содержат аксиому замены для φ:

$$(A \leftrightarrow B) \to (\varphi(A) \leftrightarrow \varphi(B)).$$

Обе рассматриваемые φ-логики не содержат явных соотношений для φ, т.е. формул вида $\varphi(p) \leftrightarrow B$, где φ не входит в B.

Обе рассматриваемые φ-логики несовместимы, т.е. их объединение является неконсервативным над LC.

Другими словами, эти φ-логики являются примерами φ-логик, определяющих *новую логическую связку в LC в смысле П.С.Новикова* (подход П.С.Новикова к понятию новой логической связки описан в работе [**2**]).

В [**3**] построено некоторое счётное семейство $\{\mathcal{L}_k \mid k \in \omega\}$ попарно несовместимых расширений LC, каждое из которых определяет новую логическую связку в LC.

Предложение.

Каждая из φ-логик $\mathcal{L}([0;1))$ и $\mathcal{L}([0;1])$ несовместима с каждой из $\{\mathcal{L}_k \mid k \in \omega\}$.

Список литературы

[1] Dummett M. A propositional calculus with denumerable matrix.// Journal Symb. logic, 1959, v.24, 1, p.97–106.

[2] Сметанич Я.С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией. // ДАН СССР, 1961, т.139, 2, с. 357–371.

[3] Яшин А.Д. Иррефлексивная модальность как новая логическая связка в логике Даммета. // Сибирский матем. журнал, 2014, т. 55, 1, с. 228–234.

Московский государственный психолого-педагогический университет, Москва
E-mail: magrus87@gmail.com

Предтабличные расширения минимальной логики

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Работа посвящена проблеме табличности над минимальной логикой J Йохансона [**1**]. Логика называется табличной, если она характеризуется некоторой конечной моделью.

Известно, что проблема табличности разрешима над интуиционистской логикой Int и ее позитивным фрагментом [**2**], [**3**].

Для решения проблемы табличности над минимальной логикой нам потребуется описание предтабличных логик над J. Логика является предтабличной, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны.

Доказана следующая

Теорема 1. *Существуют точно семь предтабличных логик над* J.
Все они разрешимы и узнаваемы над J.

Найдены аксиоматизация и семантическая характеризация всех семи предтабличных расширений минимальной логики.

Кроме того, логика над J является табличной, если и только если она не содержится ни в одной из предтабличных логик. Отсюда, из теоремы 1 и финитной аппроксимируемости предтабличных логик вытекает

Теорема 2. *Проблема табличности разрешима над* J.

Доказано, что проблема табличности над J является NP-полной. Найдены эффективные критерии табличности и предтабличности над минимальной логикой.

Список литературы

[1] Johansson I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. Compositio Mathematica 4, 119–136 (1937).

[2] Максимова Л.Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики. Алгебра и логика, 11, 5 (1972), 558–570.

[3] Верхозина М.И. Промежуточные позитивные логики. Алгоритмические вопросы алгебраических систем. Иркутский госуниверситет, (1978), 13–25.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru

Эффективная версия теоретико-игровой семантики для логики первого порядка в языке без импликации

И. Ю. Шевченко

В докладе будут рассмотрены взаимосвязи между теоретико-игровой семантикой (GTS) и семантикой реализуемости Нельсона. Сперва мы рассмотрим описание GTS из [**1**] и предложим эффективную версию определения теоретико-игровой стратегии. Отталкиваясь от нового определения, мы получим эффективную версию GTS для логики первого порядка. Затем будет показано существование эффективных процедур, которые по эффективной теоретико-игровой стратегии строят реализацию по Нельсону и наоборот:

Теорема. *Существуют такие общерекурсивные функции* μ^+ *и* μ^-, *что*

$e \circledR_p s, \Phi \Leftrightarrow \mu^+(e, s, \Phi)$ *— индекс* $H_{\sigma_\exists}$ *для некоторой выигрышной эффективной стратегии Элоизы* $\sigma_\exists$ *в игре* $G(s, \Phi)$*;*

$e \circledR_n s, \Phi \Leftrightarrow \mu^-(e, s, \Phi)$ *— индекс* $H_{\sigma_\forall}$ *для некоторой выигрышной эффективной стратегии Абеляра* $\sigma_\forall$ *в игре* $G(s, \Phi)$.

Теорема. *Существуют такие вычислимые с оракулом* X *(*X *— множество индексов пустого множества) функции* $\tau^+(e, s, \varphi)$ *и* $\tau^-(e, s, \varphi)$, *что*

e *— индекс* H_σ *для выигрышной эффективной стратегии Элоизы* σ *в игре* $G(s, \varphi)$ $\Leftrightarrow \tau^+(e, s, \varphi) \circledR_p s, \varphi$

e *— индекс* H_σ *для выигрышной эффективной стратегии Абеляра* σ *в игре* $G(s, \varphi)$ $\Leftrightarrow \tau^-(e, s, \varphi) \circledR_n s, \varphi$

Список литературы

[1] Sandu G., Mann A. L., Sevenster M. Independence-Friendly Logic, Cambridge University Press, 2011.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: i.yur.shevchenko@gmail.com

Узнаваемость WIP-минимальных логик

В. Ф. Юн

Работа посвящена проблеме узнаваемости над минимальной логикой J Йохансона [**1**]. Более точно, исследуется узнаваемость WIP-минимальных логик.

В [**2**] было доказано, что существует континуум J-логик со слабым интерполяционым свойством WIP, тем не менее, WIP разрешимо над минимальной логикой. При этом все логики с WIP разбиваются на восемь попарно не пересекающихся интервалов. Нижние концы этих интервалов названы WIP-минимальными логиками. В [**3**] найдены аксиоматизация и семантическая характеризация WIP-минимальных логик.

Понятие узнаваемой логики введено в [**4**]. Логика L *узнаваема над* J, если она конечно аксиоматизируема и существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом устанавливает, верно ли равенство $J + Ax = L$. Там же доказано, что конечно аксиоматизируемая логика L узнаваема над J тогда и только тогда, когда L разрешима и ее аксиома различима над J. Формулу A называем *различимой (или разрешимой) над* J, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом проверяет выводимость A в $J + Ax$.

Узнаваемость над J пяти из восьми WIP-минимальных логик была доказана ранее [**4**]. Различимость аксиом над J всех WIP-минимальных логик следует из [**2**]. В данной работе доказано, что оставшиеся три WIP-минимальные логики финитно аппроксимируемы, то есть характеризуются классами конечных моделей и, следовательно, являются разрешимыми. Таким образом, доказана

Теорема. *Все WIP-минимальные логики разрешимы и узнаваемы над* J.

Список литературы

[1] Johansson I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. Compositio Mathematica 4, 119–136 (1937).

[2] Максимова Л.Л. Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой. Алгебра и логика, 50, 2 (2011), 152–188.

[3] Максимова Л.Л. Негативная эквивалентность над минимальной логикой и интерполяция. СЭМИ, 11 (2014), 1–17.

[4] Максимова Л.Л., Юн В.Ф. Узнаваемые логики. Алгебра и логика, 54, 2 (2015), 252–274.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: yun@math.nsc.ru

Иррефлексивный оператор на цепи типа ω и полнота по П.С. Новикову

А. Д. Яшин, А. Г. Макаров

Иррефлексивный модальный оператор

$$x \Vdash \varphi(A) \ \Leftrightarrow \forall y > x(y \Vdash A)$$

рассматривается на линейно упорядоченной по типу натуральных чисел шкале как дополнительная логическая связка в суперинтуиционистской *логике Даммета* $LC = Int + (A \to B) \vee (B \to A)$ [**1**]. Соответствующую φ-логику обозначим через $\mathcal{L}(\omega)$.

Теорема.

$\mathcal{L}(\omega)$ *является консервативным расширением* LC.

$\mathcal{L}(\omega)$ *содержит аксиому замены для* φ*:*

$$(A \leftrightarrow B) \to (\varphi(A) \leftrightarrow \varphi(B)).$$

$\mathcal{L}(\omega)$ *не содержит явных соотношений для* φ*, т.е. формул вида* $\varphi(p) \leftrightarrow B$*, где* φ *не входит в* B.

$\mathcal{L}(\omega)$ *не допускает присоединения никакой новой формулы, т.е. для любой формулы* A φ*-языка расширение* $\mathcal{L}(\omega) + A$ *оказывается неконсервативным над* LC.

Иначе говоря, $\mathcal{L}(\omega)$ является примером *полного расширения* логики Даммета, определяющим *новую логическую связку в* LC *в смысле П. С. Новикова* (подход П. С. Новикова к понятию новой логической связки описан в работе [**2**]).

Замечание. В [**3**] установлено, что семейство всех полных по П.С.Новикову расширений LC, каждое из которых определяет новую логическую связку, по меньшей мере счётно.

Список литературы

[1] Dummett M. A propositional calculus with denumerable matrix.// Journal Symb. logic, 1959, v.24,1, p.97–106.

[2] Сметанич Я.С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией. // ДАН СССР, 1961, т.139, 2, с. 357–371.

[3] Яшин А.Д. Иррефлексивная модальность как новая логическая связка в логике Даммета. // Сибирский матем. журнал, 2014, т. 55, 1, с. 228–234.

Московский государственный психолого-педагогический университет, Москва
E-mail: yashin.alexandr@yandex.ru, magrus87@gmail.com

Unification through the projective formulas in linear discrete temporal logics of knowledge

S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva, V. Rybakov

Linear temporal logic $\mathcal{LFPL}$ over the integer numbers can be viewed as a linear discrete temporal logic [**1**] or as a particular case of modal logic with linear alternative relations [**2**].

Research of the unification problems is actively developing area in the non-classical logics nowadays [**3**]. General unification problem here can be viewed as a possibility to convert formula into a theorem after replacing the variables. Following closely to the technique from [**4**], in [**5, 6**] we found a criterions of non-unifiability and construct a basis for passive inference rules in $\mathcal{LTK}$ and $\mathcal{LFPK}$.

Based on the approach and technique using projective formulas proposed in [**7, 8**], in this research we consider some linear discrete temporal logics of knowledge over the integers, for the case with future and past (with and without the operators Until, Next and Previous). Here we prove that any formula unifiable in these logics is projective, and hence give an algorithm for construction the most general unifier for any unifiable formula.

References

[1] Rybakov V. V. Logical Consecutions in Discrete Linear Temporal Logic // Annals of Pure and Applied Logic. 2008. V. 155, N 1. P. 32–45.

[2] Segerberg K. Modal Logics with Linear Alternative Relations // Theoria. 1970. V. 36. P. 301–322.

[3] Baader F., Ghilardi S. Unification in modal and description logics // Logic J. IGPL. 2011. V. 19. P. 705–730.

[4] Rybakov V. V., Terziler M., Gencer C. An essay on unification and inference rules for modal logics // Bulletin of the Section of Logic. 1999. V. 28, N 3. P. 145–157.

[5] Bashmakov S. I. Unification and inference rules in the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2016. V. 9, N 2. P. 149–157.

[6] Bashmakov S. I., Kosheleva A. V., Rybakov V. Non-unifiability in linear temporal logic of knowledge with multi-agent relations // Sib. Elect. Math. Reports. 2016. V. 13. P. 656-663.

[7] Ghilardi S. Unification Through Projectivity // J. of Logic and Computation. 1997. V. 7, N 6. P. 733–752.

[8] Rybakov V. V. Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU // Logic J. IGPL. 2014. V. 22, N 4. P. 665–672.

Institute of mathematics and computer science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: krauder@mail.ru
Institute of space and informatic technologies, Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: koshelevaa@mail.ru
Department of Computing and Mathematics, Manchester Metropolitan University, Manchester
E-mail: v.rybakov@mmu.ac.uk

Displaying non-normal negative operators

S. A. Drobyshevich

This work is dedicated to providing a display treatment for some non-normal negative modal operators.

Display calculi are a substantial generalization of Gentzen-style sequent calculi formulated by Nuel Belnap in [**1**], which are well suited for studying substructural logics. The main features of display calculi include a very general cut elimination result as well as a build-in subformula property.

Here we extend results of Takuro Onishi [**2**], who formulated a display calculus for normal modal operators of impossibility and unnecessity over bi-intuitionistic logic (sometimes also called Heyting-Brouwer logic). The fact that bi-intuitionistic logic is used for non-modal base is mostly for technical reasons and the whole framework can be naturally modified to obtain display treatment of these operators over intuitionistic or classical logics.

Two generalizations of impossibility and unnecessity operators were considered by Dimiter Vakarelov in [**3**] and were called regular and co-regular negations, respectively. These are essentially the non-normal versions of impossibility and unnecessity and were considered by Vakarelov over the so called distributive logic, which can be characterized as the logic of distributive lattices formulated in a language without conditionals. Let us point out that both intuitionistic and bi-intuitionistic logics are conservative extensions of distributive logic.

In this work we bridge Vakarelov's study of negations with Onishi's work. First, we introduce a display calculus for regular and co-regular negations over bi-intuitionistic logic, which is an extension of Onishi's calculus. Further, we establish the corresponding completeness result and show how this system can be modified to obtain display treatment of regular and co-regular negations over other non-modal bases, including intuitionistic, classical and distributive logics. We also provide a decidability proof for our display calculus, which can be trivially modified to obtain a decidability result for a large number of other display calculi.

This work was supported by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-6848.2016.1).

References

[1] Belnap N.D. Display Logic, Journal of Philosophical Logic 11 (1982): 375–417.

[2] Onishi T. Substructural negations, The Australasian Journal of Logic 12:4 (2015): 177–203.

[3] Vakarelov D. Consistency, Completeness and Negation, In: G. Priest, R. Routley, J. Norman (eds.), Paraconsistent Logics: Essays on the Inconsistent, Filosophia, 1989, pp. 328–363.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: drobs@math.nsc.ru

Proof search for non-prenex sentences of rational first-order Pavelka logic

A. S. Gerasimov

We continue our work on automation of proof search for infinite-valued first-order Łukasiewicz logic Ł∀ and some its extensions [**2, 3**]. Rational first-order Pavelka logic RPL∀ is the extension of Ł∀ by truth constants for all rational numbers in $[0, 1]$. Earlier (see [**3**]), for Ł∀ we introduced the cumulative hypersequent calculus $\mathrm{G^1Ł\forall}$, which does not have structural inference rules and proves any GŁ∀-provable sentence, where GŁ∀ is the hypersequent calculus for Ł∀ (with structural inference rules) defined in [**1**]. In [**3**], for the calculus $\mathrm{G^2Ł\forall}$ (a non-cumulative variant of $\mathrm{G^1Ł\forall}$) we described the family of bottom-up proof search algorithms, which construct some proof of any prenex GŁ∀-provable sentence. In this talk, we present a hypersequent calculus $\mathrm{G^3Ł\forall}$ for RPL∀ and bottom-up proof search algorithms that prove any (in general, non-prenex) GŁ∀-provable sentence.

In essence, we obtain $\mathrm{G^3Ł\forall}$ from $\mathrm{G^2Ł\forall}$ by changing its inference rules $(\to\Rightarrow)$, $(\forall\Rightarrow)$, and $(\Rightarrow\exists)$ to ones in each premise of which no designation of a multiset of formulas is repeated. Particularly, the $\mathrm{G^3Ł\forall}$-rules $(\forall\Rightarrow)$ and $(\Rightarrow\exists)$ are

$$\frac{\mathcal{G} \mid \Gamma, \mathfrak{p} \Rightarrow \Delta \mid \forall x A \Rightarrow \mathfrak{p} \mid [A]^x_t \Rightarrow \mathfrak{p}}{\mathcal{G} \mid \Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} \quad \text{and} \quad \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \mathfrak{q}, \Delta \mid \mathfrak{q} \Rightarrow \exists x A \mid \mathfrak{q} \Rightarrow [A]^x_t}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta},$$

where $\mathcal{G}$ is a hypersequent, A is an RPL∀-formula, t is a closed term, $\mathfrak{p}$ (respectively, $\mathfrak{q}$) is a special (so-called semi-propositional) variable that is assigned a value from $(-\infty, 1]$ (respectively, $[0, +\infty)$) in a model and does not occur in the conclusion of the corresponding rule, Γ and Δ are finite multisets of RPL∀-formulas and semi-propositional variables.

We show that the calculus $\mathrm{G^3Ł\forall}$ is sound, its inference rules are depth-preserving invertible, and $\mathrm{G^3Ł\forall}$ proves any $\mathrm{G^1Ł\forall}$-provable sentence (and so it proves any GŁ∀-provable sentence).

Then we investigate permutability of adjacent applications of $\mathrm{G^3Ł\forall}$-rules and partial weeding of $\mathrm{G^3Ł\forall}$-proofs. Based on this investigation, for a free-variable tableau variant of $\mathrm{G^3Ł\forall}$ we describe a family of proof search algorithms (parameterized by a fair tactics), such an algorithm constructs some proof of any $\mathrm{G^3Ł\forall}$-provable sentence.

References

[1] *Baaz M., Metcalfe G.* Herbrand's theorem, skolemization and proof systems for first-order Łukasiewicz logic // Journal of Logic and Computation. 2010. Vol. 20, No. 1. P. 35–54.

[2] *Gerasimov A. S.* Free-variable semantic tableaux for the logic of fuzzy inequalities // Algebra and Logic. 2016. Vol. 55, No. 2. P. 103–127.

[3] *Gerasimov A. S.* On proof search for prenex sentences of infinite-valued first-order Lukasiewicz logic // International Conference "Mal'tsev Meeting 2015": Collection of Abstracts, Novosibirsk. 2015. P. 219.

Saint Petersburg
E-mail: alexander.s.gerasimov@ya.ru

On realizability semantics for independence friendly logic

S. P. Odintsov, S. O. Speranski, I. Yu. Shevchenko

In his famous monograph [**1**], Hintikka discusses *independence-friendly first-order logic* (IF-FOL for short) and how drastically different the situation in the philosophy of mathematics would be if classical FOL were replaced by IF-FOL. IF-FOL extends FOL in the following way: syntactically, we need to add expressions of the form $\exists x \backslash X$ with $\{x\} \cup X$ a set of individual variables, called *independence quantifiers*; semantically, for each occurrence of $\exists x \backslash X$ we assume that a choice of value for x does not depend on a choice of values for X (including the cases when $\exists x \backslash X$ occurs in the scope of universal quantifiers over variables from X). Hintikka emphasizes constructive features of IF-FOL defined with the help of game theoretical semantics GTS (via games with imperfect information). Due to this reason we compare IF-FOL with one of traditional constrictive semantics for FOL, Nelson's realizability [**4**].

Two main results of this talk may be formulated as follows. First, we established that Nelson's realizability semantics restricted to implication-free formulas can be considered as an effective version of GTS for FOL, namely, there is one-to-one correspondence between Nelson's realizations and effective winning strategies in GTS for IF-FOL (effective strategies are those that can be codified by natural numbers). Second, starting from trump semantisc by Hodges [**2, 3**] we extend Nelson's realizability to IF-FOL formulas and prove that the obtained constrictive semantics (trump realizability) relates to GTS for IF-FOL in exactly the same way as Nelson's realizability to GTS for FOL. Moreover, it turns out that relations between trump and Nelson's realizabilities are very remarkable too. For implication-free FOL formulas, trump realizations w.r.t. computable teams can be identified with computable sequences of Nelson's realizations.

First author was supported by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-6848.2016.1).

References

[1] Hintikka J. The Principles of Mathematics Revisited. Cambridge University Press, 1996.
[2] Hodges W. Compositional semantics for a language of imperfect information. Logic Journal of the IGPL 5(4) (1997) 539–563.
[3] Hodges W. Some strange quantifiers. In J. Mycielski et al. (eds.), Structures in Logic and Computer Science: A Selection of Essays in Honor of A. Ehrenfeucht, 51–65. Springer, 1997.
[4] Nelson D. Constructible falsity. Journal of Symbolic Logic 14(1) (1949) 16–26.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: odintsov@math.nsc.ru
St. Petersburg State University, St. Petersburg
E-mail: katze.tail@gmail.com
Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: i.yur.shevchenko@gmail.com

Comparing FDE-based paraconsistent modal logics

S. P. Odintsov, H. Wansing

The relationships between various modal logics based on Belnap and Dunn's paraconsistent four-valued logic FDE are investigated. In [**3**] we defined a modal logic BK based on FDE and proved that its extension BS4 relates to paraconsistent Nelson's logic in the same way as S4 to intuitionistic logic. Here we introduce the paraconsistent modal logic $\mathsf{BK}^{\Box}$, which lacks a primitive possibility operator $\Diamond$, and prove that it is definitionally equivalent with the logic BK, which has $\Diamond$ as a primitive modality. Next, a tableau calculus for the paraconsistent modal logic KN4 introduced by L. Goble [**1**] is defined and used to show that KN4 is definitionally equivalent with $\mathsf{BK}^{\Box}$ without the absurdity constant. Moreover, a tableau calculus is defined for the modal bilattice logic MBL introduced and investigated by A. Jung, U. Rivieccio, and R. Jansana [**2, 4**]. MBL is a generalization of BK that in its Kripke semantics makes use of a four-valued accessibility relation. It is shown that MBL can be faithfully embedded into the bimodal logic $\mathsf{BK}^{\Box} \times \mathsf{BK}^{\Box}$ over the non-modal vocabulary of MBL. On the way from $\mathsf{BK}^{\Box}$ to MBL, the Fischer Servi–style modal logic $\mathsf{BK}^{\mathsf{FS}}$ is semantically defined in terms of models for $\mathsf{BK}^{\Box} \times \mathsf{BK}^{\Box}$ and is axiomatized.

References

[1] Goble, L., Paraconsistent modal logic, *Logique et Analyse*, 49: 3–29, 2006.

[2] Jung, A., U. Rivieccio, Kripke semantics for modal bilattice logic, in *Extended Abstracts of the 28th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, IEEE Computer Society Press, 2013, pp. 438–447.

[3] Odintsov, S.P., H. Wansing, Modal logics with Belnapian truth values, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 20(3):279–301, 2010.

[4] Rivieccio, U., A. Jung, R. Jansana, Four-valued modal logic: Kripke semantics and duality, *J Logic Computation*, published online, doi: 10.1093/logcom/exv038, 2015.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: odintsov@math.nsc.ru
Ruhr University, Bochum
E-mail: heinrich.wansing@ruhr-uni-bochum.de

Interpolant computation in consequence-based calculus for description logic $\mathcal{EL}$

D. K. Ponomaryov, S. Yakovenko

Description Logics (DLs) are counterparts of multimodal logics with the global consequence relation, which have a similar Kripke-style semantics, but slightly different family of syntactic sorts. Perhaps, the most known DLs are $\mathcal{EL}$ (Existential Language) and $\mathcal{ALC}$ (Attributive Language with Complements). These DLs have two syntactic sorts, namely *concept* (concept expression, term) and *concept inclusion* (formula). In $\mathcal{EL}$ concepts are defined inductively using the distinguished symbol $\top$ and a signature of primitive concepts (counterparts of propositional symbols) and roles (modality labels) by applying conjunction $\sqcap$ and existential restriction $\exists r.$ (the analogue of the modal diamond labelled with a role r). Concept inclusions are expressions of the form $C \sqsubseteq D$, where C, D are concepts. A *theory* is a set of concept inclusions. The DL $\mathcal{ALC}$ is obtained from $\mathcal{EL}$ by adding negation to the definition of concept (in particular, it allows for using disjunction $\sqcup$). The logic $\mathcal{EL}$ enjoys the *concept interpolation property*: if $\mathcal{T}_1$,$\mathcal{T}_2$ are theories and C_1, C_2 concepts such that $\mathtt{sig}(\mathcal{T}_1) \cap \mathtt{sig}(\mathcal{T}_2) \subseteq \Sigma$, for a signature Σ, and $\mathtt{sig}(C_i) \subseteq \mathtt{sig}(\mathcal{T}_i)$, for $i = 1, 2$, then there exists an *interpolant concept* D such that $\mathtt{sig}(D) \subseteq \Sigma$ and it holds $\mathcal{T}_1 \models C_1 \sqsubseteq D$, $\mathcal{T}_2 \models D \sqsubseteq C_2$ $(\bigstar)$.

Recently the so called *consequence-based* calculi and very efficient reasoning techniques for DLs have been introduced, which operate with concept inclusions and expressions of the form $init(C)$, where C is a concept. We propose an extension of a calculus for $\mathcal{EL}$ with labels, which allows to obtain interpolant concepts directly from a set of expressions closed under the inference rules. The latter are defined as

$$R_0\ \frac{init(C)}{C \sqsubseteq^{\{\}} C} \quad R_\top\ \frac{init(C)}{C \sqsubseteq^{\{\}} \top} : \top \in \mathrm{left}(\mathcal{T}) \quad R_\sqsubseteq\ \frac{C \sqsubseteq^{\{G\}} D}{C \sqsubseteq^{\{G \sqcup D\}} E\ ;\ C \sqsubseteq^{\{G\}} E} : D \sqsubseteq E \in \mathcal{T}$$

$$R_\sqcap^-\ \frac{C \sqsubseteq^{\{G\}} D_1 \sqcap D_2}{C \sqsubseteq^{\{G\}} D_1,\ C \sqsubseteq^{\{G\}} D_2} \quad R_\sqcap^+\ \frac{C \sqsubseteq^{\{G_1\}} D_1\ \ C \sqsubseteq^{\{G_2\}} D_2}{C \sqsubseteq^{\{G_1 \sqcap G_2\}} D_1 \sqcap D_2} : D_1 \sqcap D_2 \in \mathrm{left}(\mathcal{T})$$

$$R_{init}\ \frac{E \sqsubseteq^{\{G\}} \exists r.C}{init(C)} \qquad R_\exists\ \frac{E \sqsubseteq^{\{G_1\}} \exists r.C,\ C \sqsubseteq^{\{G_2\}} D}{E \sqsubseteq^{\{G_1 \sqcup \exists r.G_2\}} \exists r.D\ ;\ E \sqsubseteq^{\{G_1\}} \exists r.D} : \exists r.D \in \mathrm{left}(\mathcal{T})$$

where $C \in left(\mathcal{T})$ means that concept C occurs as a subexpression of the left-hand side of a concept inclusion in $\mathcal{T}$ and, given a signature Σ, the rules $R_\sqsubseteq$, $R_\exists$ are read as follows. $R_\sqsubseteq$ derives $C \sqsubseteq^{\{G \sqcup D\}} E$ if $\mathtt{sig}(D) \subseteq \Sigma$; else $C \sqsubseteq^{\{G\}} E$ is derived. $R_\exists$ derives $E \sqsubseteq^{\{G_1 \sqcup \exists r.G_2\}} \exists r.D$ if $r \in \Sigma$; else $E \sqsubseteq^{\{G_1\}} \exists r.D$ is derived.

Theorem. *Let $\mathcal{T}_1$,$\mathcal{T}_2$, C_1, C_2, and Σ be theories, concepts and a signature satisfying the conditions in $(\bigstar)$. Let Ω be the closure of $\{init(C_1)\}$ under application of the inference rules above wrt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \{C_2 \sqsubseteq \top\}$ and Σ. Then the following holds:*

- *there is a subset $\varnothing \neq \Theta \subseteq \Omega$ of inclusions $C_1 \sqsubseteq^L C_2$, where L is a label $\mathcal{ALC}$-concept;*
- *each conjunct of the expression $\sqcup_{C_1 \sqsubseteq^L C_2 \in \Theta} L$ given in DNF is a $\mathcal{EL}$-concept and it is an interpolant for C_1, C_2.*

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk
E-mail: ponom@iis.nsk.su, stivyakov@gmail.com

VIII. Авторский указатель