ВЫЧИСЛИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Н. Т. Когабаев

В докладе рассматриваются проективные плоскости на основе алгебраического подхода, предложенного А.И. Ширшовым. *Проективной плоскостью* мы называем частичную алгебраическую систему $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и частичной бинарной коммутативной операцией “$\cdot$”, удовлетворяющей естественным аксиомам.

Исследуются алгоритмические свойства счётных структур из следующих классов проективных плоскостей: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, папповы плоскости, дезарговы плоскости.

Для каждого из указанных выше классов мы описываем естественные конструкции, позволяющие доказывать существование вычислимых представлений структур. В каждом из классов полностью решена задача о существовании автоматных представлений структур.

Исследуя вопросы равномерной вычислимости, мы доказываем, что ни один из рассматриваемых классов, включая класс всех проективных плоскостей, не имеет вычислимой нумерации типов вычислимого изоморфизма.

Получено описание вычислимых размерностей свободных проективных плоскостей. Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости может принимать лишь два значения: 1 или ω. Свободная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она имеет конечный ранг.

Мы доказываем, что класс свободно порождённых плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. В частности, для любого $1 < n < \omega$ существует свободно порождённая плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n. Доказана наследственная неразрешимость теории класса свободно порождённых плоскостей.

Мы также показываем, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Следствием данного результата является существование папповых проективных плоскостей любой вычислимой размерности n, где $1 < n < \omega$.

Получены точные оценки сложности некоторых естественных алгоритмических проблем. В классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблемы изоморфизма и вложимости являются m-полными Σ^1_1-множествами, а проблема вычислимой категоричности — m-полным Π^1_1-множеством. Если же K — это класс свободных проективных плоскостей конечного ранга, то проблема вложимости вычислима внутри K, а проблема изоморфизма является m-полным Δ^0_3-множеством внутри K.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail address: kogabaev@math.nsc.ru