

Нестандартные изоморфизмы кристаллографических групп и доля матриц с вещественным спектром в некоторых вещественных алгебрах Ли

Чуркин В.А.

Предполагается рассказать о следующих результатах и близких нерешенных задачах.

Изоморфизм кристаллографических групп движений псевдоевклидовых пространств стандартен, если он индуцирует изоморфизм решеток трансляций. Р.М. Гарипов предложил алгебраический метод классификации кристаллографических групп с помощью стандартных изоморфизмов и сформулировал вопрос о существовании нестандартных изоморфизмов. Автор (СМЖ, 2010) показал, что если максимальная размерность изотропного подпространства меньше трех, то все изоморфизмы стандартны, в противном случае существуют группы с нестандартными изоморфизмами. Вопрос о количестве классов нестандартных автоморфизмов по модулю стандартных остается нерешенным. Однако доказано, что в случае псевдоевклидовых пространств типа $(3,3)$ кристаллографическая группа может содержать максимум три таких класса и эта возможность реализуется (неопубликовано).

Множество матриц с некрратным вещественным спектром образует открытый конус в пространстве вещественных матриц и потому имеет ненулевой объем. Его доля в объеме шара с центром в вершине конуса может трактоваться как вероятность случайного выбора матрицы с вещественным спектром. А. Эйдельман (1997) нашел эту вероятность для алгебры вещественных матриц порядка n . Совместно с А.С. Кривоноговым (СМЖ, 2014, 2016) была вычислена доля матриц с вещественным спектром для всех симплектических и псевдоортогональных алгебр Ли. Вместе с результатом Эйдельмана это означает, что задача решена для всех классических простых вещественных расщепимых алгебр Ли. Общий ответ — вероятность равна степени половины корня из двух с показателем, совпадающим с числом положительных корней в системе корней алгебры Ли. Задача остается нерешенной для исключительных алгебр Ли. Неизвестен ответ и для других естественных конусов в матричных алгебрах Ли.

Совместно с А.И. Ильиным найдена относительная вероятность выбора матриц в евклидовом шаре с центром в нуле для вещественной алгебры Ли $so(1, n)$, экспоненты которых представляют эллиптические или, соответственно, гиперболические повороты лоренцева пространства $\mathbb{R}^{1,n}$ с подпространством неподвижных векторов коразмерности 2. Оказалось, что она равна $(\sqrt{2})^{n-1} - 1$. В частности, доля гиперболических поворотов убывает экспоненциально, а выбор равновероятен только в случае пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ специальной теории относительности (работа сдана в печать). Остался неизвестным общий случай с меньшим подпространством неподвижных векторов.