Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

19–22 ноября 2018 г.

Тезисы докладов

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 18-01-20098)

Новосибирский государственный университет

Новосибирск • 2018

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL’TSEV MEETING

November 19–22, 2018

Collection of Abstracts

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 18-01-20098)

Novosibirsk State University

Novosibirsk • 2018

Содержание

I. Пленарные доклады

Позитивные эквивалентности и предпорядки

С. А. Бадаев

Почему позитивные эквивалентности являются интересными и естественными объектами изучения? Примеры из алгебры, логики, теории вычислимости. Мономорфизмы позитивнно нумерованных моделей, вычислимая сводимость на эквивалентностях и предпорядках. Некоторые сведения о возникающих структурах степеней. Специальные классы позитивных эквивалентностей. Типы вычислимого изоморфифзма внутри степеней эквивалентностей и предпорядков. Некоторые алгебраические и алгоритмические свойства структуры степеней, вопросы определимости.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (Казахстан)
E-mail: sbadaev@gmail.com

Вычислимая категоричность и индексные множества

Н. А. Баженов

Пусть $\mathbf{d}$ — это тьюрингова степень. Вычислимую структуру $\mathcal{S}$ называют $\mathbf{d}$-вычислимо категоричной, если любые два вычислимых представления $\mathcal{S}$ $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфны. В докладе будет дан обзор недавно полученных результатов о $\mathbf{d}$-вычислимой категоричности для линейных порядков, дистрибутивных решёток, абелевых групп. Также будут представлены результаты о сложности различных индексных множеств, связанных с $\mathbf{d}$-вычислимой категоричностью.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Коммутаторы в свободных и не совсем свободных группах

А. А. Клячко

Ещё в 1959 году М. П. Шюценбергер заметил, что в свободной группе никакой неединичный коммутатор не может быть истинной степенью. Я расскажу о развитии этой тематики.

МГУ, Москва
E-mail: ahtoh-a-k@ya.ru

Ассоциативные алгебры и алгебры Ли с почти регулярными группами автоморфизмов

Н. Ю. Макаренко

В первой части доклада обсуждаются результаты, касающиеся алгебр Ли с почти регулярными конечными автоморфизмами. Будет приведен обзор классических теорем и их применений в теории нильпотентных групп.

Вторая часть посвящена ассоциативным алгебрам с разрешимой конечной группой автоморфизмов. В частности, будет представлен новый результат о том, что почти нильпотентность подалгебры неподвижных точек влечет почти нильпотентность самой алгебры. А именно, верна следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что ассоциативная алгебра A над полем произвольной характеристики допускает разрешимую конечную группу автоморфизмов G порядка n. Если подалгебра неподвижных точек $A^G = \{a \in A \mid a^g = a \ \forall g \in G\}$ содержит двусторонний нильпотентный идеал $I \lhd A^G$ ступени нильпотентности d и конечной коразмерности m в A^G, то алгебра A также содержит нильпотентный двусторонний идеал $H \lhd A$, причем ступень нильпотентности идеала H ограничена некоторой функцией, зависящей только от n и d, а коразмерность H в A ограничена некоторой функцией от m, n и d.*

Этот результат обобщает классическую теорему Бергмана — Айзекса о том, что ассоциативная алгебра, допускающая регулярную группу автоморфизмов конечного порядка, нильпотентна ступени, ограниченной некоторой функцией, зависящей только от n.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00065).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: natalia_makarenko@yahoo.fr

BSS-машины, работающие в бесконечном времени: вычислимость для анализа

А. С. Морозов

Изучается понятие вычислимости над вещественными числами, базирующееся на BSS-машинах, работающих в бесконечном времени. Даются некоторые её характеризации и свойства, а также обсуждается пригодность этого понятия в качестве вычислимости для классического анализа.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: morozov@math.nsc.ru

Порождающие множества элементов групп лиева типа и их приложения

Я. Н. Нужин

В докладе излагаются различные методы выбора порождающих множеств элементов групп лиева типа как над полями, так и над кольцами. Рассматриваются некоторые задачи о порождающих наборах инволюций с определенными свойствами для конечных простых групп и для групп Шевалле над кольцом целых чисел, в частности, речь пойдет о двух моих вопросах 14.69 и 15.67 из Коуровской тетради, ответы на которые в общем случае пока неизвестны. Отмечаются некоторые приложениями таких порождающих в теории графов.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Конечные алгебры операций и мультиопераций

Н. А. Перязев

В докладе рассматриваются множества операций и мультиопераций (частичных многозначных операций) фиксированной местности на конечных множествах. Сигнатурными операциями (метаоперациями) алгебр операций являются суперпозиция и нульместные метаоперации, определяющие операции проектирования, а алгебр мультиопераций еще и разрешимости, пересечения и нульместные метаоперации, определяющие полную и пустую мультиоперацию. Внимание будет уделено вопросам вложения, описания минимальных алгебр, решеток подалгебр, нахождения порождающих множеств и другим. Алгебры указанных типов наиболее естественны для построения математических моделей конечных преобразователей информации.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Санкт-Петербург
E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Универсальная алгебраическая геометрия: основные проблемы и предельные комбинаторики

В. Н. Ремесленников

Доклад будет состоять из двух частей.

1. Будут сформулированы основные задачи универсальной алгебраической геометрии.

2. Пусть A — алгебраическая система языка L и $K = \mathrm{ucl}(A)$ — универсальный класс, порожденный A, и $\mathrm{FG}(A)$ — множество типов конечно порожденных L-подсистем из A. Будет предложено несколько способов построения предельных систем для $\mathrm{FG}(A)$. Для них будут сформулированы несколько задач и приведены уже известные результаты.

ОФ ИМ СО РАН, Омск
E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Генерические сводимости и степени

А. Н. Рыбалов

В докладе будут рассмотрены сводимости алгоритмических проблем, которые сохраняют свойство разрешимости для почти всех входов — так называемые генерические сводимости, предложенные К. Джокушем и П. Шуппом, Г. Игусой, А. Рыбаловым. Будут доложены результаты о структуре рекурсивно перечислимых степеней этих сводимостей. Также будут представлены результаты о полиномиальной генерической сводимости.

ОФ ИМ СО РАН, Омск
E-mail: alexander.rybalov@gmail.com

Countable models of the small theories with $\emptyset$-definable linear order

Bektur Baizhanov

In our talk we consider the conditions on small ordered theories assuring maximal numbers of countable non-isomorphic models. This research is based on the studying the properties linear orders defined on the classes of convex equivalence of one-formulas, classifications of one-types in (small) ordered theories, classification ω-categorical ordered theories of boundary rank of density. As application of obtained conditions we consider ordered theories with few number (non-maximal) of countable models of some classes ordered small theories.

On characterization of a periodic group by its set of element orders

A. S. Mamontov

Assume that a set of group element orders is given. We discuss when it can be deduced that a corresponding group is locally finite.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: mamontov@math.nsc.ru

Measure and categoricity for classes of countable structures

Russell Miller

We consider classes of countable structures for which the isomorphism problem is not overly difficult. Examples include the class of algebraic fields of characteristic 0, the class of finite-branching trees under the predecessor function, the class of torsion-free abelian groups of a fixed finite rank n, and the class of real closed fields of a fixed finite transcendence degree d. The isomorphism problems are Π^0_2 for the first two of these, Σ^0_3 for the abelian groups, and Π^0_3 for the real closed fields.

The first goal for such a class is to give an effective classification of all structures in the class, up to isomorphism. Such a classification is computed by two Turing functionals Φ and Ψ. For every atomic diagram D of an element of the class, the index $A = \Phi^D$ for its isomorphism type should be an element of a known topological space (usually Cantor space 2^ω or Baire space ω^ω, possibly modulo a standard equivalence relation), and for every A in this index space, $D = \Psi^A$ should be the atomic diagram of a structure of the isomorphism type mapped to A. Thus Φ and Ψ constitute a computable homeomorphism between the class, modulo isomorphism, and the index space.

In some cases, it is then possible to put a probability measure on the index space, and thus to ask about the measure of the subclass consisting of those structures satisfying a particular property. We will address this question in the case of the algebraic fields, for the property of uniform computable categoricity. Current joint work by the author and Johanna Franklin considers the same question for the finite-branching trees.

Queens College & CUNY Graduate Center, New York, NY (USA)
E-mail: Russell.Miller@qc.cuny.edu

Infinite time BSS-machines: a computabiliy for analysis

A. S. Morozov

We study an approach to computability over the real numbers based on infinite time BSS-machines. We give some its characherizations and discuss its adequacy for classical analysis.

This is a joint work with Peter Koepke.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: morozov@math.nsc.ru

Heyting–Ockham logic and hyperintentionality

S. P. Odintsov

The logic HYPE was recently [**3**] suggested by H. Leitgeb with the aim to give a basic propositional logic allowing to deal with hyperintensional contexts. The approach to negation in HYPE is a combination of 'Star' and 'Perp' from [**2**], where J.M. Dunn denoted in this way two basic approaches for treatment of the negation operation, via *-star operator and via the incompatibility relation:

$$(\neg^*) \quad w \models \neg\varphi \quad \text{iff} \quad w^* \not\models \varphi$$
$$(\neg^\perp) \quad w \models \neg\varphi \quad \text{iff} \quad \forall u(u \models \varphi \text{ implies } u \perp w)$$

Moreover, the negation of HYPE has also features of strong negation [**4**]. A complex combination of conditions involved in the definition of HYPE semantics implies however that the resulting negation operator loses the features of strong negation, moreover, 'Perp' turns to 'Star'.

It turns out that logic HYPE is closely related to Heyting-Ockham logic N^* introduced in [**1**] as a framework for studying logical foundations of WFS [**6**] (well founded semantics of logic programs with negation). Algebraic semantics for N^* and the term 'Heyting-Ockham logic' were suggested in [**5**].

In this talk we track the history of 'Star' approach to negation, demonstrate that in Vakarelov's theory [**7**] of negation N^* can be characterized as the least normal and co-normal logic with intuitionistic impication, and show that proof theoretically hyperintentional HYPE turns out to be equivalent to intensional $N^* + \{\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi\}$.

The investigation presented in the talk was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-501-12019-DFG-a).

References

[1] Cabalar P., Odintsov S.P., Pearce D., Logical Foundations of Well-Founded Semantics, in: P. Doherty et al. (Eds.) *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 10-th International Conference (KR2006)* , AAAI Press, Menlo Park, California, 25–36, 2006.

[2] Dunn J.M., Star and Perp: Two Treatments of Negation, *Philosophical Perspectives* 7:331–357, 1993.

[3] Leitgeb H., HYPE: A System of Hyperintensional Logic (with an Application to Semantic Paradoxes) *Journal of Philosophical Logic* First online, 2018.

[4] Nelson D., Constructible falsity, *Journal of Symbolic Logic*, 14:16–26, 1949.

[5] Odintsov S.P., Combining intuitionistic connectives and Routley negation, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 7:21–41, 2010.

[6] Van Gelder A., Ross K.A., Schliphf J.S., The well founded semantics for general logic programs, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 38:620–650, 1991.

[7] Vakarelov D., Consistency, Completeness and Negation, In: Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent, Phylosophia Verlag, Münich, 1989.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: odintsov@math.nsc.ru

Non-classical multi-agent logics with multi-valuations

V. V. Rybakov

We study various modeling multi-agent reasoning and taking decision by instruments of non-classical logics. The departure point is usage some modifications of relational Kripke-Hinttikka models (in particular the ones with different accessibility relations or with different valuations of the agents knowledge). In particular, a kernel distinction from the standard relational models is introduction of separate valuations for each agents and then computation the global valuation using the all individual ones. We discuss this approach, illustrate it with examples and demonstrate that this is not a mechanical combination of standard models, but much more thin and sophisticated modeling knowledge and computation truth values in multi-agent environment.

Usual most important logical problems are addressed to that logics, in particular the satisfiability problem,the decidability problem and the admissibility problem. We solve them for some logics and find deciding algorithms, for some others that are yet open problems. Illustrating examples for applications to be provided.

The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research, Government of Krasnoyarsk Territory, Krasnoyarsk Regional Fund of Science, the research project No. 18-41-240005.

Institute of Mathematics and Informatics, Siberian Federal University, Krasnoyarsk
Institute of Informatics Systems of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk
E-mail: Vladimir_Rybakov@mail.ru

II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Логический анализ численных алгоритмов на основе концепции Q-детерминанта и его применение для исследования ресурса параллелизма численных алгоритмов

Р. Ж. Алеев, В. Н. Алеева, Е. С. Богатырёва

Впервые концепция Q-детерминанта предложена в [**1**], и являлась, в основном, теоретическим инструментом, поскольку имеющаяся на то время вычислительная техника не допускала массового параллелизма. В настоящее время имеются системы, содержащие огромное число вычислительных блоков, что позволяет распараллеливание программ. Существует значительный разрыв между вычислительным потенциалом параллельных вычислительных систем и его использованием. Одной из причин этого является не полное использование ресурса параллелизма алгоритмов.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный численный алгоритм. Пусть Q — множество всех операций, используемых алгоритмом $\mathcal{A}$, I — множество входных и E — множество выходных данных алгоритма $\mathcal{A}$. Для каждого $e \in E$ алгоритма $\mathcal{A}$ строится Q-терм, который можно рассматривать, как терм сигнатуры Q (точнее, обычной сигнатуры поля действительных чисел, пополненной операциями из Q). Каждый Q-терм описывает все способы вычисления e в зависимости от I. Алгоритм $\mathcal{A}$ определяет свой Q-детерминант, который описывает алгоритм как набор Q-термов. Фактически выполняется логический анализ алгоритма $\mathcal{A}$, позволяющий строить все возможные вычисления E по I согласно этому алгоритму.

Применение Q-детерминанта позволяет определить ресурс параллелизма численных алгоритмов и разрабатывать Q-эффективные программ, использующие ресурс параллелизма алгоритма полностью, для решения практических задач [2, 3]. Полученные теоретические результаты апробированы на алгоритмах с различными структурами Q-детерминантов: алгоритмы умножения плотных и разреженных матриц, методы решения систем линейных уравнений Гаусса–Жордана, Якоби, Гаусса–Зейделя и другие.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта N 17-07-00865 а, при поддержке Правительства РФ в соответствии с Постановлением N 211 от 16.03.2013 г. (соглашение N 02.A03.21.0011).

Список литературы

[1] Алеева В.Н. Анализ параллельных численных алгоритмов: Препринт N 590. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. 23 с.

[2] Алеева В.Н. Q-эффективная реализация численных алгоритмов // Наука ЮУрГУ. [Электронный ресурс]: материалы 69-й научной конференции. Секции технических наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2017. С. 346–353. (http://omega.sp.susu.ru/publications/misc/Aleeva_NaukaSUSU-17.pdf)

[3] Алеева В.Н., Иванов Н.А. Исследование внутреннего параллелизма численных алгоритмов // Параллельные вычислительные технологии — XII международная конференция, ПаВТ'2018, г. Ростов-на-Дону, 2–6 апреля 2018 г. Короткие статьи и описания плакатов. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. С. 224–234.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинск
E-mail: aleevrz@susu.ru, aleevavn@susu.ru, kate_215@mail.ru

Первая теорема Гёделя о неполноте нумерационно зависима

А. В. Бессонов

При доказательстве первой теоремы о неполноте Гёдель строит формулу с одной свободной переменной $\forall y \neg Prov(x, y)$, выражающую факт недоказуемости формулы с номером x. Далее в нее на место переменной x подставляется нумерал $\mathbf{n}$, соответствующий гёделеву номеру n самой этой формулы. В результате получается замкнутая формула $\forall y \neg Prov(\mathbf{n}, y)$ (обозначим ее через G), неразрешимость которой и доказывается в первой теореме.

Считается, что в первой теореме установлена неразрешимость G в формальной арифметике Дедекинда–Пеано (PA) как таковой. В действительности же Гёделем доказана всего лишь неразрешимость G во вполне конкретной фиксированной нумерации синтаксиса PA. Однако определение неразрешимости формулы в арифметике нумерационно независимо: в нем вообще нет упоминания какой-либо нумерации. Доказательство неразрешимости G проходит только в случае, когда нумерация гёделева и гёделев номер $\forall y \neg Prov(x, y)$ равен n. В нумерации, отличной от нумерации Гёделя, будет другая формула $\forall y \neg Prov_{new}(x, y)$, с другим номером n_{new}, и другая неразрешимая (в этой нумерации) формула G_{newq}, своя у каждой нумерации. Но ведь для установления неполноты PA требуется доказать неразрешимость G вне какой-либо нумерации, и уж, по крайней мере, ее неразрешимость в любой другой нумерации. Что будет в новой нумерации со старой формулой G? Что будет, если формула $\forall y \neg Prov(x, y)$ получит другой номер, или если n будет номером какой-либо иной формулы, или вообще не будет гёделевым номером? Останется ли G неразрешимой?

Приведем пример формулы, полученной (как и G) подстановкой в формулу PA с одной свободной переменной гёделевого номера одной и той же арифметической формулы, которая неразрешима в одной нумерации и разрешима в другой. Пусть в нумерации Гёделя номер G равен m. Этот факт выразим формулой $x = \mathbf{m}$. Рассмотрим формулу с одной свободной переменной

$$G \,\&\, (x = \mathbf{m}). \qquad (*)$$

Подставив в $(*)$ на место x реальный номер G в нумерации Гёделя, получим формулу $G \,\&\, (\mathbf{m} = \mathbf{m})$, которая очевидно эквивалентна G и потому неразрешима, если неразрешима G.

Перейдем к другой нумерации, в которой G имеет номер l, отличный от m. Подставив в $(*)$ на место x новый гёделев номер формулы G, получим формулу $G \,\&\, (\mathbf{l} = \mathbf{m})$, второй конъюнкт которой — опровержимая в PA формула, поскольку при $l \neq m$ в PA $\vdash \neg(\mathbf{l} = \mathbf{m})$, из чего следует $\vdash \neg(G \,\&\, (\mathbf{l} = \mathbf{m}))$.

Таким образом, формула, полученная подстановкой в $(*)$ на место переменной x номера формулы G, неразрешима в нумерации Гёделя и разрешима (опровержима) в другой. Значит, ситуация, когда неразрешимая в одной нумерации формула будет разрешимой в другой, возможна. Поэтому до тех пор, пока мы не докажем, что гёделева формула G останется неразрешимой в любой другой нумерации, у нас нет достаточных оснований утверждать, что в первой теореме Гёделя установлена неполнота PA.

Институт философии и права СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: trt@academ.org

Сложность булевых функций в классах полиномиальных нормальных форм

С. Ф. Винокуров, А. С. Францева

В докладе приводятся оценки значений функции Шеннона $L(n)$ сложности представлений булевых функций в классах полиномиальных нормальных форм. Под сложностью понимается количество слагаемых. Первое точное значение сложности было получено в классе Pol (поляризованных полиномов Жегалкина): $L_{Pol}(n) = \left\lfloor \frac{2}{3}2^n \right\rfloor$. Следующие значения сложности были получены с помощью операторного подхода, который позволил построить широкий спектр классов:

1. Семейство классов Kro_A по ряду свойств схожих с классом Pol; каждый класс содержит 2^n базисов. Сложность в любом из этих классов совпадает со сложностью в классе Pol и со сложностью в классе всех кронекеровых форм Kro, который содержит 3^n базисов и включает в себя все классы Kro_A.

2. Семейство классов E_A, получивших название классов расширенных форм, где каждый из классов E_A содержит $2^n + 1$ базисов. В каждом из этих классов значение сложности равно: $L_{E_A}(n) = \frac{1}{2}2^n$

3. Семейство классов $EKro_A$, каждый из которых содержит классы E_A и Kro_A. Значение сложности в классах $EKro_A$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{2}2^n - 1 \le L_{EKro_A}(n) \le \frac{1}{2}2^n.$$

4. Класс $EKro$ включает все классы $EKro_A$ и класс Kro. Значение сложности в этом классе удовлетворяет неравенству:

$$\left\lfloor \frac{5}{12}2^n \right\rfloor \le L_{EKro}(n) \le \frac{6}{12}2^n.$$

5. Класс псевдокронекеровых форм $PKro$. Сложность в этом классе равна

$$L_{PKro}(n) = \frac{1}{2}2^n.$$

Детали получения оценок для классов из 1, 2, 5 приведены в [**1**]; для классов из 3 — в [**3**], для класса из 4 — в [**2**].

Список литературы

[1] Избранные вопросы теории булевых функций : монография / под ред. С. Ф. Винокурова и Н. А. Перязева. — М. : Физматлит, 2001. 192 с.

[2] Францева А.С. Нижняя оценка сложности представлений булевых функций в классе расширенных однородных операторных форм / С. Ф. Винокуров, А. С. Францева / Дискретные модели в теории управляющих систем: X Международная конференция : Труды / Отв. ред. В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов. Москва, 2018. С. 83-86.

[3] Францева А.С. Сложность представлений многовыходных функций алгебры логики / С.Ф. Винокуров, А.С. Францева // Изв. Иркутского гос. университета. Серия : Математика. 2016. Т. 16. С. 30-42.

Иркутский государственный университет, Иркутск
E-mail: servin38@gmail.com; a.s.frantseva@gmail.com

Онтологические методы разработки пользовательских интерфейсов

А. Ю. Волкова

Основная цель работы — создать систему, которая на основе запросов, составленных на естественном языке, наиболее точно угадывает желания пользователя. В нашем случае это модель поиска и подбора туристического продукта.

С теоретико-модельной точки зрения онтологическое моделирование предметной области и построение теории предметной области содержит следующие этапы [**1, 2**].

(1) Составить перечень основных понятий предметной области;
(2) Установить взаимосвязи между различными уровнями представления понятий;
(3) Исследование отзывов туристов, блогов о путешествиях и комментариях на тематических сайтах и форумах с целью выявления наиболее распространённых видов туризма и используемых услугах среди путешествующих;
(4) Реализация основы для создания пользовательского интерфейса — структурированное представление имеющихся данных, визуализация, с дальнейшей системой диалога с пользователем.

Каждый пользователь имеет свое собственное понимание смысла понятий, принадлежащих к этой онтологии. С другой стороны, программная система предназначена для всех пользователей. По существу, мы должны решить проблему «перевода» понятий онтологии пользовательских задач в понятия онтологии программной системы и обратно, т. е. дать определения различным задачам пользователя на языке описания функциональности программной системы.

В Telegram, который взят за основу реализации, все объекты являются JSON-объектами. Такие объекты имеют вид множества пар ключ и значение, заключённых в фигурные скобки: {ключ_1: значение_1, ключ_2: значение_2}. Подобный подход позволяет в дальнейшем рассчитывать на возможность создания собственной системы, которая будет анализировать текст и отвечать пользователю, используя раннее разработанную и дополненную во время работы онтологию.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Применение теоретико-модельных методов и онтологического моделирования для автоматизации диагностирования заболеваний. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2015. Т. 13. N 3. С. 42-51.

[2] Пальчунов Д.Е., Целищев В.В. Проблема извлечения знаний в системе взаимодействия человека и компьютера: онтологии и пресуппозиции. Философия науки. 2012. N 4 (55). С. 20-35.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: antitery@mail.ru

Разработка онтологических моделей предметных областей

А. И. Капустина

Для создания онтологической модели предметной области обычно необходимо проделать четыре этапа [**1**]: создание онтологии, описание общих знаний предметной области, описание прецедентов, а также описание оценочных знаний [**2**].

При разработке онтологических моделей разных предметных областей часто приходится проделывать одни и те же этапы по несколько раз. Это происходит из-за того, что нельзя переиспользовать отдельные уровни онтологической модели.

Для того, чтобы этого избежать предлагается модульная система для работы с онтологическими моделями. Модульная система позволяет выделить часто используемые функции и разрабатывать онтологическую модель, как совокупность нескольких связанных между собой частей. Модульная система состоит из следующий частей:

1. ядро системы;
2. модуль взаимодействия с онтологической моделью;
3. модуль пополнения онтологической модели.

Ядро системы позволяет создавать онтологии на языке OWL DL [**3**]. Визуализовать онтологические модели с помощью редактора онтологий Protege и плагина Ontograf. Ядро системы позволяет проверять созданные онтологические модели на непротиворечивость.

Модуль пополнения онтологической модели содержит правила вывода SWRL [**4**]. С помощью этих правил и машины логического вывода можно получать новые знания. Модуль взаимодействия с онтологической моделью позволяет с помощью языка запросов SQWRL и правил вывода SWRL выполнять запросы к онтологической модели. Полученная модульная система является расширяемой, что позволяет добавлять к ней новые модули, без изменения логики работы предыдущих модулей.

Список литературы

[1] Долгушева Е.В., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы порождения знаний о предпочтениях абонентов мобильных сетей. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 2. С. 5-16.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечёткие логики и теория нечётких моделей. Алгебра и логика. 2015. Т. 54. N 1. С. 109-118.

[3] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34-48.

[4] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 2. С. 34-46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.kapustina@g.nsu.ru

Онтологический подход к работе с нормативными текстовыми документами

А. А. Карманова

В современном мире все технически сложные процессы сопровождаются корпусом нормативных документов. Эти документы специфицирует, для чего нужен процесс, каковы его ожидаемые результаты, как и кем он должен быть выполнен, из каких структурных частей этот процесс состоит. Нормативные документы нужны для того, чтобы установить соглашения по каждому из этих вопросов. Впоследствии эти документы необходимы для установления истины в спорных ситуациях.

Нормативные документы можно рассматривать с точки зрения их формы и сточки зрения их содержания. Форма, как правило, задается единожды и редко подвергается изменениям. Содержание при этом может меняться достаточно регулярно. Изменение содержания может быть связано с изменившимися данными предметной области. Чем сложнее процесс, тем большим изменениям он потенциально подвержен, а значит, требует больших издержек на поддержание нормативной базы в актуальном состоянии [**1**]. Для снижения таких издержек был предложен онтологических подход к обработке структурированных документов [**2, 3, 4**].

В работе описывается система анализа и генерации нормативных документов для предметной области «Образование». В этом домене существует множество процессов, сопровождаемых отчетной и другой нормативный документацией (зачисление, начисление стипендий, прием на работу сотрудников, проведение сессий и так далее).

В рамках данной работы были выявлены основные нормативные документы и проведен их анализ. Были выявлены термины предметной области, использующиеся в этих документах [**5**]; был составлен терминологический словарь. На основании терминологического словаря была построена онтология. Кроме того, был разработан алгоритм автоматической генерации нормативных документов на примере документа «Приказ о зачислении». В основе алгоритма лежит онтологический подход. Алгоритм позволяет поддерживать корпус документов в актуальном состоянии в условиях изменения данных предметной области, а значит, и онтологической модели.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Финк А.А. Разработка автоматизированных методов порождения служебных документов на естественном языке. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 3. С. 79-89.

[2] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка. Философия науки. 2009. N 4 (43). С. 70-90.

[3] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Применение теоретико-модельных методов и онтологического моделирования для автоматизации диагностирования заболеваний. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2015. Т. 13. N 3. С. 42-51.

[4] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечёткие логики и теория нечётких моделей. Алгебра и логика. 2015. Т. 54. N 1. С. 109-118.

[5] Власов Д.Ю., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. N 3. С. 23-33.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: anast.karmy.aa@gmail.com

Теоретико-модельный подход формализации пространственно-временного описания ситуаций

И. А. Корсун

Онтология — это и наука, отвечающая на вопрос «что есть в мире» и конкретный вариант ответа на этот вопрос. Любая онтология, определяющая, что есть в мире, должна быть как-то формализована, выражена в какой-то терминологии, то есть представлена как «онтологическое описание» [**1**]. Все рассуждения о системе должны быть привязаны к физическому миру, пространству-времени. При осмыслении систем выделяются индивиды, занимающие собой какое-то пространство - время, потом они осмысливаются через отношения друг с другом и с абстрактными объектами. Индивиды с течением времени подвергаются изменениям, поэтому мы вынуждены ввести понятие события перемещения между классами, время события. Для этого мы переходим к пространственно-временному описанию, к 4D. На сегодняшний день есть несколько вариантов четырёхмерного описания. Одна из которых концепция эксдурантизма. В каждый момент (слой времени) объекты описываются как разные, но также вводится соглашение, что эти разные объекты — есть один объект, в котором есть «разные темпоральные стадии». В конкурирующей концепции пердурантизма объект считается полноценным четырёхмерным объектом, существующим во времени так же, как и в пространстве. При этом объект у нас один, но в нём выделяются другие объекты — его темпоральные части, по аналогии с привычными пространственными частями. Однако если через какое-то время объект будет разрушен — в этот момент его четырёхмерное существование (жизненный цикл) прекратится [**2**]. При рассмотрении этих двух подходов ситуационное исчисление позволят нам проще ответить на вопрос протекания времени: «Я сейчас не равен мне через пять минут», однако в контексте информационных систем его применение невозможно из-за очень большого количества требуемых темпоральных стадий.

В данной работе мы рассматриваем возможность расширения теоретико-модельного представления данных [**3**] концепцией эксдурантизма при помощи темпоральных логик, а также применение персистентных структур данных для оптимизации хранения временных «слоев». При выборе подходящего профиля темпоральной логики первым кандидатом была LTL из-за низкого класса вычислительной сложности AC0. Однако выбор данного профиля влечёт за собой трудности при адаптации жизненных сценариев на модель за счет использования A-Box с выражениями формы $A(a, n)$ где a — имя объекта, а n — точка времени. Также логика не позволяет описать выражения метрических ограничений таких как: «не менее 1 часа». Первый недостаток может преодолеть логика Halpern-Shoham Interval Temporal Logic, где утверждения концепции A-Box предполагаются типа: $A(a, n_1, n_2)$, где n_1, n_2 — натуральные числа, указывающие интервал действия. А в случае необходимости хранения более сложных временных структур можно использовать метрическую темпоральную логику. Для этого профиля также есть алгоритмы вывода с полиномиальной оценкой сложности.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Президиума СО РАН (проект «Инженерия интенсиональных онтологий в дедуктивных и информационных системах» Комплексной программы ФНИ СО РАН II.1).

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка. Философия науки. 2009. N 4 (43). С. 70-90.

[2] Ненашева Е.О., Пальчунов Д.Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 3. С. 49-63.

[3] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34-48.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: mail-irene@rambler.ru

Об оптимизации поиска логического вывода в исчислениях кангеровского типа

А. В. Лялецкий

В автоматизации поиска вывода в классической логике первого порядка предпочтение, как правило, отдаётся резолюционному подходу из-за высокой эффективности методов, построенных на его основе. Но в случае, когда участие человека в дедуктивных построенях, проводимых на компьютере, является необходимым элементом, использование секвенциального подхода кажется более подходящим. Он позволяет соблюсти такие важные для организации интерактивного режима поиска доказательства свойства, как (i) возможность проведения поиска вывода в сигнатуре исходной теории (т. е. отказ от выполнения предварительной скулемизации) и (ii) целеориентированность поиска, поскольку в таком случае человеку легче понять текущее состояние процесса поиска доказательства.

Использование обычных секвенциальных исчислений ведёт к появлению катастрофически огромного перебора относительно разных порядков применения кванторных правил, который можно частично оптимизировать заменой кванторных правил их аналогами, базирующимся на понятии допустимой подстановки, введённом С. Кангером в [**1**] и отодвигающем выбор термов, подставляемых вместо переменных, до определённого момента времени. Дальнейшую же оптимизацию такого перебора можно достичь за счёт перехода на другое, предложенное автором, понятие допустимости подстановки, которое может оказаться полезным при разработке компьтерно-ориентированных секвенциальных исчислений не только для классических, но и для неклассических логик (см., например, [**2**]).

Использование же целеориентированности поиска позволяет некоторым разумным образом оптимизировать перебор относительно разных порядков применения пропозициональных правил.

Основываясь на ранее проведённых исследованиях по допустимым подстановкам и целеориентированному поиску, автором предлагаются как принципы построения модификаций секвенциальных исчислений кангеровского типа для классических и неклассических логик, удовлетворяющих (i) и (ii), так и способы обоснования их корректности и полноты, что нашло свое применение при реализации логического аппарата системы SAD (http://nevidal.org/sad.ru.html).

Список литературы

[1] Kanger S. A simplified proof method for elementary logic. Computer programming and formal systems. Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963, P. 87-94.

[2] Lyaletski A. Admissibility, compatibility, and deducibility in first-order sequent logics. Computer Science Journal of Moldova, vol.23, no. 3(69), 2015, P. 289-303.

НУБиП, Киев; Институт математики и информатики, Кишинев
E-mail: lav@unicyb.kiev.ua

Разработка автоматизированных методов идентификации речевых действий

Е. Д. Махина

В настоящее время проектирование, построение и пополнение онтологических моделей различных предметных областей являются актуальными задачами, решение которых играет немалую роль в области семантического анализа текстов [**1, 2, 3, 4**]. Одной из наиболее острых проблем является проблема предоставления интерфейсов для коммуникации человека и компьютера [**5**].

Целью данной работы является разработка и программная реализация алгоритма для извлечения речевых действий из текстов естественного языка. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

- идентификация речевого действия;
- формулирование правил для определения типа речевого действия;
- классификация иллокутивных глаголов русского языка;
- разработка алгоритма, основанного на полученных лингвистических данных.

Необходимо отметить, что целью не является создание полностью автоматической системы распознавания речевых действий, так как существуют проблемы, которые на настоящем этапе не представляется возможным решить автоматизированно. К таким проблемам можно отнести выделение контекста для определения пропозициональной составляющей и иллокутивной силы [**6**] (другими словами, обработка пресуппозиции), а также обработку одновременно нескольких предложений.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. *Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка.* Философия науки. 2009. N 4 (43). С. 70-90.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. *Применение теоретико-модельных методов и онтологического моделирования для автоматизации диагностирования заболеваний.* Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2015. Т. 13. N 3. С. 42-51.

[3] Долгушева Е.В., Пальчунов Д.Е. *Теоретико-модельные методы порождения знаний о предпочтениях абонентов мобильных сетей.* Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 2. С. 5-16.

[4] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. *Conceptual methods for identifying needs of mobile network subscribers.* В сборнике: CEUR Workshop Proceedings 13. Сер. "CLA 2016 - Proceedings of the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications" 2016. С. 147-160.

[5] Пальчунов Д.Е., Целищев В.В. *Проблема извлечения знаний в системе взаимодействия человека и компьютера: онтологии и пресуппозиции.* Философия науки. 2012. N 4 (55). С. 20-35.

[6] Dmitri E. Pal'chunov. *Algebraische Beschreibung der Bedeutung von Aeusserungen der natuerlichen Sprache.* In: Zelger, Josef/Maier, Martin (1999, Hrsg.): GABEK. Verarbeitung und Darstellung von Wissen. Innsbruck-Wien: STUDIENVerlag, 310-326.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: ekatermakhina96@gmail.com

Применение методов регрессионного анализа для решения проблемы разреженности пользовательских оценок в музыкальной рекомендательной системе

А. В. Менькин

Появление и распространение музыкальных стриминговых сервисов вызвало интерес к исследованиям музыкальных рекомендательных систем (МРС). МРС значительно помогает пользователю найти музыкальный контент интересный для него. Однако МРС не совершены и часто составляют неудовлетворительные рекомендации. Разреженность данных — одна из главных проблем МРС. Музыкальные каталоги содержат огромное число треков, а прослушивание музыки обычно пассивно. В результате, доля объектов из музыкального каталога, оцененных пользователем, близка к нулю.

На сегодняшний день существует множество различных методологий работы с неполными базами знаний. Это, в первую очередь, логические методы, базируемые на различных нечетких логиках [**1**], статистические методы и методы машинного обучения [**2**], а также различные гибридные методы [**3**].

В данной работе предлагается использование регрессионной модели для предсказания пользовательских оценок треков [**4**]. Параметрами модели являются средние взвешенные значения оценок, поставленных похожими пользователями, треку, альбому, трекам альбома, артисту, трекам и альбомам артиста, жанрам, трекам и альбомам жанров. Таким образом, при вычислении значений параметров используются не только существующие пользовательские оценки трека, но и оценки объектов, связанных с ним. Предложенный подход способствует решению проблемы разреженности пользовательских оценок в МРС.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э. Нечеткие логики и теория нечетких моделей // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, N 1. C. 109-118.

[2] Kordumova S., Kostadinovska I., Barbieri M., Pronk V., Korst J. Personalized Implicit Learning in a Music Recommender System // User Modeling, Adaptation, and Personalization. Springer Berlin Heidelberg, 2010. P. 351–362.

[3] Palchunov D. E., Tishkovsky D. E., Tishkovskaya S. V., Yakhyaeva G. E. Combining logical and statistical rule reasoning and verification for medical applications // Proceedings of 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, SIBIRCON 2017. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2017. P. 309-313

[4] Менькин А. В. Метод предсказания пользовательских оценок для рекомендательной системы музыкального контента // Информационные технологии : Материалы 56-й Междунар. науч. студ. конф. 22–27 апреля 2018 г. / Новосиб. гос. ун-т., Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2018. С. 175.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.menkin@g.nsu.ru

Разработка прецедентно-ориентированной системы генерации html кода на основе растрового изображения

П. В. Мызников

Web-технологии являются одним из самых развитых направлений современных информационных технологий. Они используются как один из важных узлов любой IT-инфраструктуры. Соответственно, практически вся отрасль информационных технологий в том или ином виде использует web-разработку.

Вместе с тем, автоматизация самой web-разработки является недостаточно полной. Почти не охваченным остаётся одна из ключевых задач: создание HTML - документов. Автоматизация этой задачи не только позволит ускорить процесс разработки web-приложений, но и сделает его более гибким, позволяя масштабировать его результаты, проверять гипотезы, помогать тестированию. Это обуславливает целесообразность описываемой разработки.

Объектом исследования является обратный реинжиниринг, а предметом – автоматизация обратного реинжиниринга интерфейсов web-приложения. Цель работы – создать технологию построения систем генерации html кода на основе растрового изображения.

Методическую основу теоретических оснований составляет подход *case-based reasoning* [**4**]. Это способ решения проблем путём адаптации решений аналогичных проблем в прошлом к текущей ситуации. Такой подход выбран в связи с поставленной в работе гипотезой о том, что формализация изображений посредством трансдуктивных выводов, или рассуждений по аналогии, порождает результат, наиболее близкий тому, что производит человек.

Поставленная выше гипотеза обуславливает использование подхода, который отличает данное исследование от смежных ([**1, 2, 3**]), что является элементом научной новизны. Также к новым результатам можно отнести разработку алгоритма извлечения структуры элементов изображения.

Список литературы

[1] Balog M. et al. Deepcoder: Learning to write programs // arXiv preprint arXiv:1611.01989. 2016.

[2] Beltramelli T. pix2code: Generating code from a graphical user interface screenshot // Proceedings of the ACM SIGCHI Symposium on Engineering Interactive Computing Systems. ACM, 2018. C. 3.

[3] Nguyen T. A., Csallner C. Reverse Engineering Mobile Application User Interfaces with REMAUI (T) // 2015 30th IEEE/ACM International Conference on Automated Software Engineering (ASE). Nov. 2015.

[4] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Программная система, осуществляющая case-based reasoning для диагностирования заболеваний позвоночника // Сибирский научный медицинский журнал. 2016. Т. 36. N 1. С. 97-104.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: miznikov72@gmail.com

Теоретико-модельный подход к автоматизации деятельности университетской кафедры

Ч. А. Найданов

Работа посвящена разработке в виде программной системы онтологической модели деятельности университетской кафедры. В частности, автоматизации делопроизводства, которым занят секретарь кафедры: оформление на работу преподавателей, сопровождение студентов к государственной итоговой аттестации, информирование преподавателей и студентов.

Автоматизацию деятельности кафедры предлагается произвести на примере Кафедры общей информатики ФИТ НГУ. В делопроизводстве секретарь кафедры занимается составлением однотипных документов, проверкой документов на соответствия нормативным актам, отслеживанием сроков исполнения. Актуальность работы заключается в избавление секретаря кафедры от монотонной работы; новизна в составлении онтологической модели предметной области "Кафедра общей информатики ФИТ НГУ" и применении теоретико-модельных методов [**1, 2**] к формализации работы кафедры.

Теоретико-модельный подход дает возможность представлять знания в виде 4-х уровневой модели: онтологии, общих знаний, прецедентов и оценочных знаний. Представление знаний в виде формул логики предикатов позволяет проверять документы на непротиворечивость, соответствие требованиям нормативных актов, отслеживать истинность знаний в процессе изменения документов, из которых они были извлечены.

Программная система разрабатывается с использованием ядра онтологической модели, настраиваемой под предметную область[**3**]. Программная система имеет модульную архитектуру. Расширение функциональности происходит через создание новых модулей.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Президиума СО РАН (проект «Инженерия интенсиональных онтологий в дедуктивных и информационных системах» Комплексной программы ФНИ СО РАН II.1).

Список литературы

[1] Найданов Ч. А., Пальчунов Д. Е., Сазонова П. А. Теоретико-модельные методы интеграции знаний, извлеченных из медицинских документов // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2015. Т. 13, вып. 3. С. 29–41.

[2] Найданов Ч.А., Пальчунов Д.Е., Сазонова П.А. Разработка автоматизированных методов предупреждения рисков возникновения критических состояний, основанных на анализе знаний, извлечённых из историй болезней пациентов // Сибирский научный медицинский журнал. Том 36, Выпуск 1, 2016, с. 105-113.

[3] Найданов Ч.А. Разработка ядра онтологической модели, настраиваемой под предметную область // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2018. Т. 16, вып. 4. [В печати]

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: chimit-naydanov@yandex.ru

Алгоритм проверки корректности субъективных знаний эксперта о предметной области

К. С. Нам

В большинстве методик статистической обработки данных используются объективные и/или субъективные вероятности. Под объективной вероятностью понимается относительная частота появления какого-либо события в общем объеме наблюдений или отношение числа благоприятных исходов к общему количеству наблюдений. Под субъективной вероятностью имеется в виду мера уверенности некоторого эксперта или группы экспертов в том, что данное событие в действительности будет иметь место [**1, 2**].

Зачастую эксперту/группе экспертов необходимо дать вероятностную (нечеткую) оценку множеству различных событий. Однако информация представленная таким образом можем иметь большой объем и конфликтующие между собой данные. Проверить корректность вручную бывает сложно и долго, также нужно иметь в виду человеческий фактор, вследствие которого возможна ошибка при проверке данных.

В данной работе поставленная проблема решается путем автоматизации процесса проверки корректности конечного множества нечетких данных. Входными параметрами являются формулы, обозначающие то или иное событие, и вероятностное значение каждого события. По множеству формул строится система линейных уравнений с ограничениями [**3, 4**]. Несовместность данной системы свидетельствует о наличие конфликта. Для визуализации наличия конфликта строится граф, вершинами которого являются формулы.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э. Нечеткие логики и теория нечетких моделей // Алгебра и логика. Том 54, N 1, 2015, с. 109-118.

[2] Яхъяева Г. Э., Карманова А. А., Ершов А. А., Савин Н. П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей // Информационные технологии. Том 23, N , 2017, с. 97–106.

[3] Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э. Нечёткие алгебраические системы // Вестник Серия: Математика, механика, информатика. Том 10, N 3, 2010. с. 75-92.

[4] Yakhyaeva G. Logic of Fuzzifications // Proceedings of the 4th Indian International Conference on Artificial Intelligence (IICAI-09), Tumkur, 2009, pp. 222-239.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: ksenyanam@gmail.com

Формализованное представление знаний на языке двухместных предикатов

Е. О. Ненашева

С каждым днем количество информации, представленной в цифровом виде, растет. Обрабатывать такие объемы данных вручную уже практически невозможно. По этой причине возникает потребность в программном обеспечении, которое позволило бы анализировать тексты естественного языка, извлекать из них нужную информацию и объединять полученные знания [**1, 2**]. При этом особое внимание уделяется семантике обрабатываемого текста.

Проблема извлечения знаний из текстов естественного языка и их формального представления описана в статье Пальчунова Д.Е. и Махасоевой О.Г. [**3**] В своей работе я продолжаю их исследования. В ходе работы был предложен подход к формализации знаний, позволяющий представлять извлеченные знания с помощью бескванторных формул логики предикатов. При этом сигнатура содержит только двухместные предикаты и константы [**4**].

Работа посвящена разработке автоматизированных методов интеграции знаний, извлеченных из текстов естественного языка. В качестве основной конструкции построения моделей знаний, извлеченных из текстов, используются двухместные предикаты и константы-ситуации.

Для верного понимания контекста крайне важно рассматривать несколько предложений естественного языка одновременно. Поэтому одной из главных задач исследования является возможность объединения нескольких предложений текста и построения для них общего фрагмента атомарной диаграммы.

В данной работе предложен подход к интеграции знаний, содержащихся в нескольких предложениях естественного языка, с использованием констант-ситуаций. Для более точного понимания контекста введены дополнительные отношения между ситуациями и аксиомы для этих отношений. Разработанные методы позволяют объединять знания из нескольких предложений текста одновременно, не нарушая общей семантики.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Президиума СО РАН (проект «Инженерия интенсиональных онтологий в дедуктивных и информационных системах» Комплексной программы ФНИ СО РАН II.1).

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка. Философия науки. 2009. N 4 (43). С. 70–90.

[2] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34–48.

[3] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестник НГУ Серия: Информационные технологии. - 2014. - Том 12, Выпуск N 2. - С. 64–73.

[4] Ненашева Е.О., Пальчунов Д.Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов // Вестник НГУ Серия: Информационные технологии. - 2017. - Том 15, Выпуск N 3. - С. 49–63.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: nenasheva.zhenya@gmail.com

Об использовании частичной скулемизации в задаче поиска натурального логического вывода

О. А. Охотников

В работе [**1**] сформулирован алгоритм автоматического доказательства теорем, в котором впервые была использована частичная скулемизация для решения задачи поиска натурального вывода. Раньше скулемизация использовалась только в алгоритмах установления выводимости, но не поиска вывода. Практика использования этого алгоритма показала его высокую эффективность. В настоящей работе мы формулируем этот алгоритм в виде продукционной системы, что позволяет построить теорию, в которой указанный алгоритм получает свое обоснование.

Рассматриваемый алгоритм описывается в рамках некоторой продукционной системы с метапеременными, в которой посылки дедуктивных задач скулемизируются в определенном смысле. Такая продукционная система представляет собой способ решения дедуктивных задач путем указания примитивных задач и правил сведения задач к подзадачам. В рамках продукционной системы процесс поиска решения задачи сопряжен с формированием дерева поиска типа И/ИЛИ. Для рассматриваемого алгоритма доказана теорема о корректности и полноте.

Доказательство корректности содержит в себе эффективный алгоритм получения вывода в односукцедентном исчислении секвенций [**2**] из деривационного поддерева поискового дерева. В то же время существует эффективный алгоритм получения натурального вывода из односукцедентного секвенциального вывода. Все это вместе дает точную формулировку и обоснование новой процедуры поиска натурального вывода.

Список литературы

[1] Вторушин Ю.И., О поиске вывода в системе натуральной дедукции логики предикатов. *Интеллектуальные системы*, МГУ, 2009. Т. 13, С. 263–288.

[2] Okhotnikov O., A new sequent calculus for automated proof search. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8, 2014, No. 100, P. 4977–4984.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: oleg.okhotnikov@gmail.com

Аксиоматизация классов прецедентов предметных областей

Д. Е. Пальчунов

В работе рассматривается проблема аксиоматизации классов прецедентов различных предметных областей. Исследования основаны на теоретико-модельном подходе к формализации предметных областей и на анализе формальных понятий (АФП), и продолжают исследования, начатые в [**1, 2, 3**]. Исследуются теории классов прецедентов предметной области и аксиоматизируемые классы прецедентов. Они определяются как содержания и объёмы формальных понятий соответствующих формальных контекстов. Решается проблема аксиоматизации классов алгебраических систем, содержащих системы, имеющие разную сигнатуру. Показано, что понятие теории класса прецедентов является обобщением понятия классической теории класса моделей.

Определение. Пусть σ и σ_1 — две различные сигнатуры, пусть $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ и $\varphi \in S(\sigma_1)$. Обозначим $\mathfrak{A}\|\varphi$, если $\mathfrak{A} \models (Th(\varphi) \cap S(\varphi))$. Обозначим $KS(\sigma)$ — класс всех моделей, сигнатура которых содержится в σ. А именно, $KS(\sigma) = \{\mathfrak{A}|\sigma(\mathfrak{A}) \subseteq \sigma\}$, то есть, $KS(\sigma) = \cup_{\sigma' \subseteq \sigma} K(\sigma')$.

Нам необходимо дать определение теории класса алгебраических систем, содержащего системы, имеющие разную сигнатуру, и ввести понятие аксиоматизируемого класса алгебраических систем, имеющих разную сигнатуру.

Определение. Пусть $K \subseteq KS(\sigma)$. Супертеорией класса К назовем множество $ST(K) = \{\Gamma \subseteq S(\sigma)|\Gamma$ – *максимальное по включению со свойством* $Th(\mathfrak{A}) \cup \Gamma \nvdash$ *для любой* $\mathfrak{A} \in K\}$.

В [**1**] мы исследовали связь между аксиоматизируемыми классами и решётками формальных понятий. По аналогии с тем, как мы поступали для аксиоматизируемых классов и теорий в классической теории моделей, можно рассмотреть формальный контекст $(KS(\sigma), S(\sigma), \|)$.

Теорема 1. Рассмотрим формальный контекст $(KS(\sigma), \wp(S(\sigma)), \|)$.

а) Пусть (A, B) — формальное понятие данного формального контекста. Тогда $B = \{\Gamma|\Gamma \subseteq T$ *для некоторого* $T \in ST(A)\}$.

б) Пусть $K \subseteq KS(\sigma)$. Тогда $K' = \{\Gamma|\Gamma \subseteq T$ *для некоторого* $T \subseteq ST(K)\}$.

Определение. Класс $K_0 \subseteq KS(\sigma)$ называется сигнатурным если для любой $\mathfrak{A} \in K_0$ выполнено $K(\sigma(\mathfrak{A})) \subseteq K_0$, то есть K_0 является классом всех моделей некоторого заданного набора сигнатур.

Определение. Пусть класс $K_0 \subseteq KS(\sigma)$ является сигнатурным. Класс $K \subseteq K_0$ называется аксиоматизируемым, если пара $(K, QT(K))$ является формальным понятием формального контекста $(K_0, \wp(S(\sigma)), \|)$.

Далее мы рассмотрим класс булевых алгебр с произвольным конечным набором выделенных идеалов (для разных алгебр, входящих в класс, количество выделенных идеалов может быть различным), а также класс, являющийся объединением класса булевых алгебр с одним выделенным идеалом (произвольным конечным набором выделенных идеалов) и класса булевых алгебр с одной выделенной подалгеброй.

Предложение. а) Класс булевых алгебр с произвольным конечным набором выделенных идеалов является аксиоматизируемым. Его супертеория является одноэлементной.

б) Класс булевых алгебр с одним выделенным идеалом или одной выделенной подалгеброй является аксиоматизируемым. Его супертеория является одноэлементной.

в) Класс булевых алгебр с произвольным конечным набором выделенных идеалов или с одной выделенной подалгеброй является аксиоматизируемым. Его супертеория является одноэлементной.

Теорема 2. Супертеория класса булевых алгебр с любым конечным набором выделенных идеалов является разрешимой.

Теорема 3. а) Супертеория класса булевых алгебр с одним выделенным идеалом или одной выделенной подалгеброй является неразрешимой.

б) Супертеория класса булевых алгебр с любым конечным набором выделенных идеалов или с одной выделенной подалгеброй является неразрешимой.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Президиума СО РАН (проект «Инженерия интенсиональных онтологий в дедуктивных и информационных системах» Комплексной программы ФНИ СО РАН II.1).

Список литературы

[1] Pal'chunov D.E. Lattices of relatively axiomatizable classes. Lecture Notes in Computer Science. 2007. Т. 4390 LNAI. С. 221-239.

[2] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. Conceptual methods for identifying needs of mobile network subscribers. В сборнике: CEUR Workshop Proceedings 13. Сер. "CLA 2016 - Proceedings of the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications" 2016. С. 147-160.

[3] Palchunov D., Yakhyaeva G. Application of Boolean-valued models and FCA for the development of ontological models. В сборнике: CEUR Workshop Proceedings Сер. "Proceedings of International Workshop on Formal Concept Analysis for Knowledge Discovery, FCA4KD 2017" 2017. С. 77-87.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Адаптация структуры иерархических меню услуг для различных типов пользователей

Р. С. Погодин

Цель работы — разработка механизма построения иерархических меню услуг, структура которых перестраивается в соответствии с интересами пользователя.

В работе решается проблема адаптации больших древовидных меню интернет-услуг на основании интересов пользователей, их социального статуса, а также иных параметров. Используется онтологический подход для формального представления понятий предметной области, извлечения, представления и обработки знаний [**1**].

Предложен алгоритм получения частот использования услуг на основании модели пользователя и алгоритм оптимизации иерархических меню по полученным частотам, который является модифицированным алгоритмом оптимизации USSD-меню [**2**].

Для адаптации интерфейсов используются модели пользователей, представляющие описания их потребностей, целей, интересов [**3**]. Формализация поведения пользователей осуществляется при помощи онтологической модели интернет-услуг [**4**].

Пусть n_i — количество вызовов i-й услуги пользователем, k — количество услуг в меню. Обозначим общее количество вызовов услуг пользователем $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Пусть d_i — минимальное количество переходов в меню для вызова i-й услуги. Минимизируется функция $D_p = \sum_{i=1}^{k} p_i d_i$, где $p_i = \frac{n_i}{n}$ — вероятность вызова i-й услуги. Минимизация функции D_p влечёт за собой минимизацию общего количества нажатых клавиш пользователем $\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{k} n_i d_i$.

Алгоритм был протестирован на истории о 30000 заказах услуг. Сокращение количества нажатий клавиш пользователем для выбора требуемой услуги составило от 29% до 35%.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Степанов П. А. Применение теоретико-модельных методов извлечения онтологических знаний в предметной области информационной безопасности // Программная инженерий, 2013, N 11, с. 8–16.

[2] Погодин, Р. С. Адаптация структуры USSD-меню для различных типов пользователей / Р. С. Погодин // Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016: Информационные технологии / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016. с. 229.

[3] Пальчунов, Д.Е. Моделирование мышления и формализация рефлексии I: Теоретико-модельная формализация онтологии и рефлексии. // Философия науки. N 4 (31), 2006. С. 86–114.

[4] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. Conceptual Methods for Identifying Needs of Mobile Network Subscribers // Proceedings of the Thirteenth International Conference on Concept Lattices and Their Applications, Moscow, Russia, July 18-22, 2016, p. 147–160.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: ruspog@gmail.com

Применение самоорганизующиеся карты Кохонена для решения задачи кластеризации прецедентов по компьютерной безопасности

Н. П. Савин

Сегодня невозможно представить себе полноценное функционирование какой-либо организации без компьютеров. В связи с этим не теряет актуальности задача обеспечения информационной безопасности. В рамках данной проблемы в Новосибирском государственном университете разрабатывается система анализа рисков «RiskPanel» [**1, 2, 3**]. Она представляет собой вопросно-ответную систему, основанную на базе знаний [**4**]. База знаний была составлена на основе прецедентного подхода и формализации знаний из открытых источников [**5**]. На сегодняшний день база знаний содержит описание более 18 тысяч прецедентов компьютерных атак.

Для дальнейшей работы системы эти знания необходимо структурировать в соответствии с требованиями системы. А именно, необходимо объединить в группы на основе их семантической близости. На этапе формализации знаний для каждого прецедента были получены представление в виде n-мерного вектора, построенные на основе семантической близости. Для решения задачи кластеризации применяется одна из разновидностей нейросетевых алгоритмов — самоорганизующиеся карты Кохонена. Главным преимуществом этого подхода является обучение без учителя.

Количество выходных нейронов в алгоритме равно количеству итоговых кластеров. В случае самоорганизации сети, т.е. когда заранее неизвестно число кластеров, необходимо задать критическое расстояние $R_{\text{кр}}$ и выбрать случайный прецедент для создание первого выходного нейрона. На его основании и задаётся первый вектор веса. На k-ом шаге работы алгоритма выбирается произвольный прецедент $x(k)$, рассчитывается расстояние от него до вектора весов всех выходных нейронов и находится наименьшее расстояние $R_{min}(k)$, т.е. для любого i имеет место $\|x(k) - m_{min}(k)\| < \|x(k) - m_i(k)\|$, где $m(k)$ вектор веса выходного нейрона. Если $R_{min} > R_{\text{кр}}$ то на основании этого прецедента создаётся новый кластер. Иначе выбранный прецедент относится к этому выходному нейрону, а вектор весов кластера пересчитывается:

$$m_{min}(k) = m_{min}(k-1) + S(m_{min}(k), m_j(k))(m_j(k) - m_{min}(k)),$$

где S — это гауссовская функция.

$$S(m_{min}(k), m_j(k)) = a(k)\exp(-\frac{\|m_{min} - m_j\|^2}{2q^2(k)}),$$

где $0 < a(k) < 1$ — монотонно убывающий с каждым шагом сомножитель, q — монотонно убывает, m_j — вектор веса соседнего нейрона.

Таким образом, удалось объединить максимально похожие по смыслу атрибуты прецедентов в один кластер, что ускоряет работу с базой знаний и позволяет выявлять скрытые связи между прецедентами.

Список литературы

[1] Пальчунов, Д.Е., Яхъяева, Г.Э., Хамутская, А.А. Программная система управления информационными рисками RiskPanel // Программная инженерия. N 7. 2011. С. 35-50.

[2] Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Применение методологии прецедентных моделей в системе риск - менеджмента, направленного на раннюю диагностику компьютерного нападения // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т.10, вып. 2. 2012. С. 106-115.

[3] Yakhyaeva G.E., Ershov A.A. Knowledge Base System for Risk Analysis of the Multi-Step Computer Attacks // Proceedings of the 18th International Conference on Enterprise Information Systems. V.2. 2016. P. 143-150.

[4] Яхъяева Г.Э., Карманова А.А., Ершов А.А., Савин Н.П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей // Информационные технологии. Том 23, N 2. 2017. С. 97–106.
[5] Pulchunov D., Yakhyaeva G. Application of boolean-valued models and FCA for the development of ontological models // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1921, P. 77-87 (2017).

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: npsavin@rambler.ru

О формализации базы прецедентов компьютерных атак с помощью нечётких моделей

В. А. Скокова

Современный этап развития общества характеризуется возрастающей ролью информационной сферы, представляющей собой область человеческой деятельности, связанной с созданием, преобразованием и потреблением информации. В связи с этим, проблема информационной безопасности становится все более актуальной. Управление информационными рисками является актуальным и динамично развивающимся направлением в области защиты информации.

В Новосибирском государственном университете была разработана программная система управления информационными рисками RiskPanel [**1**]. На сегодняшний день база знаний этой насчитывает более 18 тысяч прецедентов. Прецеденты разбиты на атрибуты: симптомы, уязвимости, угрозы, контрмеры, возможные последствия [**2, 3**]. Каждый прецедент задается текстовым описанием атрибутов и является уникальным. Все атрибуты кластеризованы и введено понятие более общих атрибутов.

Полученная база знаний формализуется в виде нечеткой модели с естественной мерой [**4**]. В данной работе рассматриваются методы факторизации множества прецедентов после кластеризации атрибутов и переход к нечеткой модели с неравномерной мерой прецедентов. Предложена модификация алгоритма поиска импликативных зависимостей атрибутов при условии неравномерной меры прецедентов.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Хамутская А.А. Программная система управления информационными рисками RiskPanel. // Программная инженерия. 2011. N 7. С. 29-36.

[2] Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Методы согласования знаний по компьютерной безопасности, извлеченных из различных документов. // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2013. Т. 11, вып. 3. с. 63–73.

[3] Яхъяева Г.Э., Карманова А.А., Ершов А.А., Савин Н.П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей Информационные технологии, Том 23, N 2, 2017, с. 97–106.

[4] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечеткие логики и теория нечетких моделей. // Алгебра и логика, 54, N 1 (2015), С. 109-118.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: v.skokova@g.nsu.ru

Применение онтологического подхода для формализации процесса сбора и анализа требований к программному продукту

К. А. Табаков

Несмотря на все усилия специалистов, направленные на формализацию и стандартизацию процесса работы с требованиямик программному продукту, этот процесс по прежнему во многом носит творческий и случайный характер.

Это порождает ряд проблем в области разработки ПО: срыв сроков, превышение бюджета, создание некачественного программного продукта. В качестве одной из причин можно назвать отсутствие единой и согласованной теоретической базы инженерии требований, единого понимания требований и верификации.

В рамках данной работы был проведен анализ существующих подходов к сбору требований, методов рботы с ними и применяемого инструментария. Результаты анализа показали, что процесс сбора требований действительно нуждается в формализации, так как даже в рамках одного подхода к работе с требованиями возникают противоречия в названиях основных сущностей. Особенно остро эта проблема стоит для русскоязычного рынка аналитики ПО, так как устоявшиеся англоязычные термины имеют очень много вариантов использования русскоязычными аналитиками. Так, для одних и тех же терминов в различных компаниях могут использоваться оригинальные англоязычные названия, калькированные русскоязчные варианты или различные версии перевода.

Данную проблему было предложено решать созданием единой онтологии [**1, 2, 3, 4**]. Для этих целей были выявленя основные сущности предметной области «Сбор и анализ требований», которые могут быть использованы для высокоуровнего описания различных подходов. Был составлен терминологический словарь, описывающий эти сущности [**5**]. Разработанный словарь лег в основу онтологии предметной области. Построенная онтология позволяет формализовать процесс сбора и анализа требований, и тем самым уменьшить неоднозначность.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. Решение задачи поиска информации на основе онтологии. Бизнес-информатика. 2008. N 1 (3). С. 3-13.

[2] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Хамутская А.А. Программная система управления информационными рисками RISKPANEL. Программная инженерия. 2011. N 7. С. 29-36.

[3] Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Применение теоретико-модельных методов извлечения онтологических знаний в предметной области информационной безопасности. Программная инженерия. 2013. N 11. С. 8-16.

[4] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. Conceptual methods for identifying needs of mobile network subscribers. В сборнике: CEUR Workshop Proceedings 13. Сер. "CLA 2016 - Proceedings of the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications" 2016. С. 147-160.

[5] Власов Д.Ю., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. N 3. С. 23-33.

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
E-mail: konkov90@gmail.com

Анализ субъективности текстов с использованием онтологических моделей для оценки общественного мнения

А. С. Трегубов

Появление сети интернет и развитие средств текстовой передачи сообщений резко увеличило объем информации. В связи с этим увеличилось число исследований в области анализа текстов на естественном языке [**1**] [**2**]. Данная работа посвящена вопросу определения настроений и оценки общественного мнения.

Анализ тональности текстов в последние годы обрел большую популярность. В то же время первые работы по данной теме относятся к 70-80м годам прошлого столетия. Основной проблемой анализа тональности текстов, рассматриваемой в данной работе, является определение оценок и извлечение мнений.

Определение тональности текста на основе примитивного словаря не позволяет в достаточной мере определить степень эмоциональной составляющей в тексте. Использование онтологического аппарата позволило бы расширить возможности существующих подходов к решению данной проблемы [**3**].

Цель работы: разработать и применить на практике метод анализа субъективности текстов на естественном языке с использованием онтологического аппарата.

В рамках работы рассматриваются тексты из социальных сетей, связанные со сферой криптовалют. Однако анализ настроений в социальных сетях имеет значительный потенциал и в других областях.

Социальные сети — важный источник информации пригодной для интеллектуального анализа. Поэтому именно они были выбраны для формирования массива данных необходимого для проведения тестирования.

Были решены следующие задачи: проведен анализ литературы, описана методология исследования, подготовлен массив данных для проведения тестов, реализован и протестирован алгоритм, проанализированы результаты и сделаны выводы.

Эмпирические результаты показали, что выбранные технологии могут быть успешно применены для оценки общественного мнения.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка. Философия науки. 2009. N 4 (43). С. 70-90.

[2] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34-48.

[3] Долгушева Е.В., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы порождения знаний о предпочтениях абонентов мобильных сетей. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 2. С. 5-16.

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
E-mail: artem.tregubov@mail.ru

Разработка автоматизированных методов порождения служебных документов на естественном языке

А. А. Финк

Каждый из нас хоть раз в жизни сталкивался с заполнением (составлением) каких-либо служебных документов. С каждым днем количество таких документов растет и на их заполнение приходится тратить всё больше и больше времени. А постоянное изменение нормативных документов лишь ухудшает ситуацию. Особенно остро эта проблема ощущается в государственных учреждениях, где нормативные документы часто меняются[**1**].

В наше время такие проблемы частично решаются разнообразными бланками и формами, на заполнение которых уходит значительно меньше времени, чем составление документов с нуля. Однако, такие формы не решают проблемы полностью, ведь их тоже приходится переделывать.

Для решения этой проблемы предлагается рассматривать документы как параметрические шаблоны [**2, 3**]. В качестве параметров выступают данные, извлекаемые из нормативных документов. Данные, которые нельзя заполнить без человеческого участия становятся переменными. Подставляя извлечённые данные в параметрические шаблоны, мы получаем всем знакомые формы (бланки).

Для извлечения данных из нормативных документов используются шаблоны. Обычные лексико-графические шаблоны обладают недостаточной гибкостью, поэтому было решено использовать древовидные шаблоны. Конечно, шаблоны не решают проблему автоматизированного извлечения знаний из нормативных документов.

Однако, можно заметить, что разные версии одного документа зачастую отличаются содержанием, но редко отличаются своей структурой. Таким образом, полагаясь на неизменяемость структуры нормативных документов, мы можем определить ряд шаблонов, по которым автоматически будет извлекаться нужная нам информация и подставляться в параметрический шаблон.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Финк А.А. Разработка автоматизированных методов порождения служебных документов на естественном языке. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 3. С. 79-89.

[2] Власов Д.Ю., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. N 3. С. 23-33.

[3] Деревянко Д.В., Пальчунов Д.Е. Формальные методы разработки вопросно-ответной системы на естественном языке. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. N 3. С. 34-47.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.fink@g.nsu.ru

Исследование влияния форм быстрой коммуникации на поведение посетителей веб-сайтов

Н. С. Хенкина

С каждым днем процент населения, использующий интернет, только растет, и интернет-маркетинг становится более эффективным инструментом для привлечения клиентов. Существуют различные методы продвижения продуктов и услуг компаний. Для порождения рекомендаций пользователям по приобретению новых товаров и услуг используется, например, анализ формальных понятий (АФП) и методы поиска релевантных ассоциативных правил [**1, 2, 3**].

Основной точкой коммуникации компании и потенциальных потребителей в интернете является сайт. Он отвечает за то, чтобы пользователь продолжил общение и связался с персоналом компании — выполнил целевое действие. Для упрощения выполнения целевого действия среди интернет-маркетологов стало популярно использование форм быстрой коммуникации — сервисов, которые устанавливаются на сайт. Но эффективность таких форм оценивается «по ощущениям», а не статистическими методами. Цель данной работы — разработка и реализация методики анализа эффективности форм быстрой коммуникации.

Ключевым параметром для оценки эффективности является конверсия — показатель вероятность того, что пользователь оставит свои контактные данные компании для дальнейшей связи. Чтобы получить точную конверсию, нужно иметь бесконечный трафик, то есть бесконечное число испытаний. На практике это невозможно, и вероятность события вычисляется с некоторой точностью. Для оценки точности в ходе работы использованы статистические модели на основе биномиального распределения с параметром p, где p — предельное значение конверсии. В работе сравниваются две модели:

- Аппроксимация биномиального распределения нормальным распределением согласно центральной предельной теореме;
- Сравнение вариантов тестирования с помощью Байесовской статистики и вероятностного вывода.

В ходе работы модели проверяются на реальных данных, а также рассматривается их применимость на предельных случаях.

Список литературы

[1] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. Conceptual methods for identifying needs of mobile network subscribers. В сборнике: CEUR Workshop Proceedings 13. Сер. "CLA 2016 - Proceedings of the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications" 2016. С. 147-160.

[2] Palchunov D., Yakhyaeva G. Application of Boolean-valued models and FCA for the development of ontological models. В сборнике: CEUR Workshop Proceedings Сер. "Proceedings of International Workshop on Formal Concept Analysis for Knowledge Discovery, FCA4KD 2017" 2017. С. 77-87.

[3] Долгушева Е.В., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы порождения знаний о предпочтениях абонентов мобильных сетей. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 2. С. 5-16.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: natalykhens@gmail.ru

Методы определения сочетаемости слов естественного языка, основанные на прагматике

В. В. Шамова

На сегодняшний день английский язык повсеместно используется в различных сферах деятельности. Специалистам часто требуется переводить свои работы на английский язык, не владея им на высоком уровне, из-за чего они допускают ошибки. В данной работе рассматриваются следующие проблемы при переводе с русского языка на английский: полисемия и омонимия слов [**1**], употребление определенного и неопределенного артикля в английском языке, а также фразовые глаголы.

Для решения данных проблем разрабатывается полуавтоматизированная система для перевода словосочетаний с русского языка на английский, которая также автоматически составляет пояснения к полученному переводу и производит его корректировку. По введенному в систему словосочетанию интерфейс предлагает возможные варианты перевода, показывая количество результатов по данному запросу в поисковом сервисе и возможный контекст употребления введенного словосочетания. Пользователю предоставляется возможность либо выбрать перевод из имеющихся вариантов, либо перейти в режим редактора для пополнения словаря. Также в редакторском режиме пользователь может пополнять уже существующий словарь вручную, то есть добавлять в базу данных новые слова, варианты перевода или примеры использования словосочетания. Используемый программой словарь пополняется интерактивно, то есть по мере поступления словосочетаний в систему.

Для формализации представления вариантов употребления применяется теория «Смысл-Текст» и автоматизированные методы построения атомарных диаграмм [**2, 3**].

Список литературы

[1] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. Вып. 3. С. 34-48.

[2] Мельчук И. А., Опыт теории лингвистических моделей Смысл-Текст. 2-е изд., доп. М., 1999.

[3] Махасоева О.Г., Пальчунов Д.Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, вып. 2. С. 64-73.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: v.shamova@g.nsu.ru

On similarity based decision trees

V. B. Berikov, R. M. Kozinets

This work briefly presents a novel method of supervised learning with decision tree (DT) methodology. Let us consider pattern recognition problem with labeled dataset A in some feature space X. We propose a modification of DT in which instead of standard predicates [**1**] such as

"feature X_m for data point a belongs to E_m",

where E_m is a subset of the domain of X_m, more general predicates of the type

"object a is more similar to set B than to set C in the feature subspace X' with respect to metrics μ"

are examined in the internal nodes. Here B, C are subsets of A, typically of small cardinality. This type of decision tree allows one to get more complicated decision boundaries which have clear logical interpretation.

We examine several strategies for DT induction: transformation of feature space using core points extracted with Relief procedure, SVM support vectors and K-means based extraction. The method was studied experimentally in the problem of computed tomography scans analysis. Experiments have shown that the proposed method gives more accurate predictions than CART algorithm of DT induction, Support Vector Machine and Deep Convolutional Neural Network (AlexNet).

We plan to expand the proposed methodology on different types of similarity measures, in particular, for those learned with clustering ensemble [**2**].

The work is partly supported with RFBR, projects 18-07-00600a, 18-29-0904mk.

References

[1] Kotsiantis S.B. Decision trees: a recent overview // Artificial Intelligence Review. 2013. Vol. 39, Issue 4. P. 261–283.

[2] Berikov V., Pestunov I. Ensemble clustering based on weighted co-association matrices: Error bound and convergence properties // Pattern Recognition. 2017. Vol. 63. P. 427–436.

Sobolev Institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

E-mail: berikov@math.nsc.ru; romanec1954@gmail.com

On discretization of models of circular gene networks

V. P. Golubyatnikov, V. V. Ivanov, L. S. Minushkina

We consider dynamical systems which appear in modeling of circular gene networks:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_3) - k_1 x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1) - k_2 x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_2) - k_3 x_3, \tag{1}$$

where f_j are monotonically decreasing step-functions defined as

$$f_j(x_{j-1}) = A_1 \equiv a_j k_j \text{ for } 0 \le x_{j-1} < 1; \quad f_1(x_{j-1}) = 0 \text{ for } 1 \le x_{j-1}. \tag{2}$$

All coefficients are assumed to be positive. Let $F_0 \subset [0, a_1] \times [0, a_2] \times [0, a_3]$ be defined by $x_1 = 1$, $0 \le x_2 < 1$, $1 \le x_3 < a_3$. Trajectories of the system (1) are piecewise smooth; their angle points are located on the planes $x_j = 1$, $j = 1, 2, 3$. This system is a kind of discretization of smooth dynamical systems introduced in [**1**], see also [**2**].

Lemma 1. *For all points of F_0, their trajectories of the system* (1) *return to F_0.*

Let Φ be the corresponding Poincaré mapping $F_0 \to F_0$.

Lemma 2. *Φ is monotonic.*

This means that if $(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}), (\widehat{x}_2^{(0)}, \widehat{x}_3^{(0)}) \in F_0$,

$$x_2^{(0)} \le \widehat{x}_2^{(0)}, \quad x_3^{(0)} \ge \widehat{x}_3^{(0)}, \tag{3}$$

and $\Phi(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (y_2^{(0)}, y_3^{(0)})$, $\Phi(\widehat{x}_2^{(0)}, \widehat{x}_3^{(0)}) = (\widehat{y}_2^{(0)}, \widehat{y}_3^{(0)})$, then

$$y_2^{(0)} \le \widehat{y}_2^{(0)}, \quad y_3^{(0)} \ge \widehat{y}_3^{(0)}. \tag{4}$$

Morover, if one of the inequalities (3) is strong then all the inequalities (4) are strong.

Theorem. *The system* (1) *has a cycle if and only if $A_j > k_j$ for all $j = 1, 2, 3$.*

Similar constructions and results can be reproduced for models of more complicated gene networks which are described by odd-dimensional block-linear dynamical systems of the type (1), (2), cf. [**3**]. The proofs are based on some algebraic properties of the Jacobi matrix of the Poincaré mapping Φ.

References

[1] Elowitz M.B., Leibler S. A Synthetic Oscillatory Network of Transcriptional Regulators. Nature. 2000. V. 403. P. 335–338.

[2] Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. On the uniqueness of a cycle in an asymmetric 3-dimensional model of a molecular repressilator. Journ. Industrial and Appl. Math. 2014. V. 8, N 2. P. 1–6.

[3] Gaidov Yu.A., Golubyatnikov V.P. On cycles and other geometric phenomena in phase portraits of some nonlinear dynamical systems. In: Geometry and applications. Springer Proc. in Mathematics and Statistics. 2014. V. 72. Springer NY. P.225–233.

Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk (Russia)
E-mail: glbtn@math.nsc.ru; iva@math.nsc.ru
Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: l.minushkina@g.nsu.ru

Intuitionistic epistemic logic and functional programming

D. Rogozin

Modal intuitionistic epistemic logic IEL^- was proposed by S. Artemov and T. Proropopescu [**1**]. IEL^- provides the epistemology and the theory of knowledge based on BHK-semantics of the intuitionistic logic.

Intuitionistc epistemic logic IEL^- is defined as follows:

Definition

(1) IPC axioms;
(2) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;
(3) $A \to \Box A$
(4) Rule: MP

If we would interpret this logic according to the propositions-as-types paradigm, then modal axioms of IEL^- satisfy the construction called applicative functor that widely used in functional programming [**2**].

In our report, we propose the modal lambda-calculus λ_{IEL^-} Curry-Howard isomorphic to IEL^- to consider a computation with applicative functor type-theoretically. The proposed lambda-calculus is an extension of simply typed lambda-calculus with additional typing rules:

Definition Modal typing rules in λ_{IEL^-}

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \mathbf{box}\ M : \Box A}\ (\Box_I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A} \qquad \vec{x} : \vec{A} \vdash N : B}{\Gamma \vdash \mathbf{let\ box}\ \vec{x} = \vec{M}\ \mathbf{in}\ N : \Box B}\ (\mathbf{let}_\Box)$$

where $\Gamma \vdash \vec{M} : \Box\vec{A}$ and $\vec{x} : \vec{A}$ denote $\Gamma \vdash M_1 : \Box A_1, \ldots, \Gamma \vdash M_n : A_n$ and $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$.

There are the following theorems:

Theorem. Reduction in λ_{IEL^-} is strongly normalizible.

Theorem. Reduction in λ_{IEL^-} is confluent.

Theorem. Normal form is unique.

Theorem. If term M is in normal form, then all its subterms are normal norm.

After that we define an applicative functor categorically and formulate the following theorem:

Theorem λ_{IEL^-} is sound and complete with respect to applicative functor on cartesian closed category.

The research described in this report was supported by Russian Foundation for Basic Research (grant 16-03-00364)

References

[1] Artemov S. and Protopopescu T. Intuitionistic Epistemic Logic, The Review of Symbolic Logic. 9 (2016).

[2] McBride C. and Paterson R. Applicative programming with effects, Journal of Functional Programming, 18 (2008).

Moscow State University, Moscow
E-mail: daniel.rogozin@serokell.io

III. Секция «Теория вычислимости»

Внутренняя вычислимость отношений плотности и предельности на 1-вычислимых линейных порядках

М. С. Еряшкин

Два элемента линейного порядка называются *соседними*, если между ними нет других элементов. Элемент линейного порядка называется *предельным справа*, если он не имеет правого соседа. Два элемента линейного порядка находятся в отношении *плотности*, если множество элементов между ними имеет тип η. В работе [**1**] показано, что вычислимый линейный порядок является 1-вычислимым тогда и только тогда, когда его отношение соседства вычислимо. Рассматриваются вычислимые линейные порядки, сигнатура которых обогащена отношением соседства, которое также является вычислимым. Такие вычислимые обогащенные порядки будем называть 1-*вычислимыми линейными порядками.* В работе [**2**] описаны линейные порядки, имеющие внутренне вычислимым либо отношение соседства, либо отношшение блока. Также в работе [**1**] описаны 1-вычислимые линейные порядки, имеющие внутренне вычислимое отношение блока.

Удалось получить следующие описания 1-вычислимых линейных порядков, в которых либо отношение плотности dn, либо отношение предельности справа P_+ является внутренне вычислимым.

Теорема. *Пусть L — 1-вычислимый линейный порядок. Тогда отношение dn является внутренне вычислимым на L тогда и только тогда, когда L имеет вид*

$$k_0 + f_0 + k_1 + f_1 \ldots + f_{n-1} + k_n,$$

где f_i — конечны и не пусты, а каждый k_i либо имеет тип η, либо $\neg dn(a,b)$ для любых $a, b \in k_i$.

Теорема. *Пусть L — 1-вычислимый линейный порядок. Тогда отношение P_+ является внутренне вычислимым на L тогда и только тогда, когда L имеет вид*

$$k_0 + f_0 + k_1 + f_1 \ldots + f_{n-1} + k_n,$$

где f_i — конечны и не пусты, а каждый k_i либо имеет тип ω^*, $\omega + \omega^*$ или $k \cdot \eta$, либо все блоки в k_i бесконечны вправо.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00174 "Алгоритмические аспекты линейных порядков и отношений на них").

Список литературы

[1] *Moses M.* Recursive linear orders with recursive successivities // Ann. Pure Appl. Logic. – 1984. – V. 27. – P. 253–264.

[2] *Moses M.* Relations intrinsically recursive in linear orders // Z. Math. Logik Grundlag. Math. – 1986. – V. 32. – P. 467–472.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: mikhail.eryashkin@gmail.com

О низких линейных порядках не имеющих вычислимых копий

М. В. Зубков

Существование низкого представления линейного порядка не влечет автоматически существование вычислимой копии [**1**]. Доуни Р. поставил вопрос об описании типов линейных порядков для которых существование низкой копии влечет конструктивизируемость. Доуни Р. и Мозес М. [**2**] доказали, что каждый дискретный порядок, имеющий представление низкой степени, имеет вычислимую копию. Фроловым А. Н. был получен ряд таких достаточных условий. Наиболее общее было получено в работе [**3**], где было доказано, что каждый линейный порядок, любой блок которого либо бесконечный, либо имеет мощность, не превосходящую некоторого наперед заданного числа k (такие порядки были названы k-квазидискретными), имеет вычислимую копию.

Зубковым М.В. в [**4**] введено понятия левых и правых максимальных блоков и доказано, что если в η-схожем линейном порядке размеры таких блоков ограничены фиксированным числом и $\mathcal{L}$ имеет копию низкой степени, то его порядковый тип может быть задан при помощи $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции. И, как следствие, такой линейный порядок будет иметь вычислимую копию. Это обобщает результаты Фролова А.Н. для η-схожих линейных порядков. Там же показано, что существование $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции более сильное условие, чем существование вычислимой копии, и полученное условие непосредственно не обобщается на линейные порядки с плотной конденсацией.

Другим важным направлением в решении поставленной Доуни Р. проблемы представляется построение различных низких линейных порядков, не имеющих вычислимых копий. Пример низкого линейного порядка без вычислимой копии, построенный Джокушем К. и Соаром Р., содержит бесконечные блоки и имеет плотную вторую конденсацию. Фролов А.Н. построил низкий линейный порядок без бесконечных блоков не имеющий вычислимой копии. Напомним, что η-представлением называется линейный порядок имеющий тип: $\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \ldots$. Совместно с Фроловым А.Н. был построен следующий пример.

Теорема (Зубков М.В., Фролов А.Н.) *Существует низкое η-представление не имеющее вычислимой копии.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 18-31-00174.

Список литературы

[1] Jockusch C.G., Soare R.I. Degrees of orderings not isomorphic torecursive linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. – 1991. – V.52. – P.39–61.

[2] Downey R.G., Moses M.F. On Choice Sets and Strongly Non-Trivial Self-Embeddings of Recursive Linear Orders // Math. Log. Quart. – 1989. – V.35. – P.237–246.

[3] Фролов А.Н. Линейные порядки низкой степени // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т.51, N5. – С.1147–1162.

[4] Зубков М.В. Достаточные условия существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонных функций для вычислимых η-схожих линейных порядков // Сибирский математический журнал. – 2017. – Т.58, N1. – С. 107–121.

Казанский Федеральный Университет, Казань
E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru

Примитивно рекурсивная категоричность на конусе

И. Ш. Калимуллин

Алгебраическая структура $\mathcal{A}$ на универсуме ω называется примитивно рекурсивно категоричной на конусе, если существует функция g такая, что для любой структуры $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ на универсуме ω некоторый изоморфизм $f : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и его обратный изоморфизм $f^{-1} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ могут быть получены из примитивно рекурсивных функций, функций (предикатов) структуры $\mathcal{B}$ и функции g посредством операторов композиции и примитивной рекурсии.

Нетривиальными примерами примитивно рекурсивно категоричных на конусе структур могут служить векторные пространства над простыми конечными полями. Другой пример — структура с одной унарной функцией, образующей циклы фиксированной длины. Среди моделей (структур без функциональных символов) нетривиальных примеров нет.

Теорема. Алгебраическая структура примитивно рекурсивно категорична на конусе тогда и только тогда, когда для некоторого набора ее элементов каждая перестановка, тождественная на этом наборе, является автоморфизмом структуры.

Также было получено (гораздо более сложное) теоретико-модельное описание примитивно рекурсивно категоричных на конусе структур в функциональной структуре. В частности, доказана

Теорема. Каждая примитивно рекурсивно категоричная на конусе структура является ω-категоричной.

Результаты получены совместно с Антонио Монталбаном (Университет Калифорнии в Беркли, США).

Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: ikalimul@gmail.com

Полурешетки Роджерса семейств отношений эквивалентности

Б. С. Калмурзаев, Н. А. Баженов

В работе [**1**] для произвольного $n \geq 1$ доказано существование универсальной Σ^{-1}_n-вычислимой нумерации для семейства всех Σ^{-1}_n-отношений эквивалентности. В работе для произвольного обозначения a ненулевого вычислимого ординала рассматривается Σ^{-1}_a-вычислимые нумерации семейства всех Σ^{-1}_a-отношений эквивалентности. Для таких семейств установлено существование бесконечного числа попарно несравнимых фридберговых нумераций и бесконечного числа попарно несравнимых позитивных неразрешимых нумераций. В установлении этого факта ключевую роль играет следующий результат:

Теорема. *Для бесконечного множества $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\} \subseteq \omega$ зададим семейства отношений эквивалентности*

$$\mathcal{F}_A := \{Id_1\} \cup \{E([0; a_i]) : \ i \in \omega\},$$
$$\mathcal{G}_A := \{Id\} \cup \{E(\omega \setminus [0; a_i]) : \ i \in \omega\}.$$

Пусть $a \in \mathcal{O}$, $|a|_{\mathcal{O}} \neq 0$, $\mathcal{E}$ — это Σ^{-1}_a-вычислимое семейство отношений эквивалентности. Предположим, что существует бесконечное вычислимое множество A, для которого $\mathcal{E}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

(i) *$\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{E}$ и при этом $e(a) = 1$ или $|a|_{\mathcal{O}} \geq \omega$;*

(ii) *$\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{E}$ и при этом $e(a) = 0$ или $|a|_{\mathcal{O}} \geq \omega$.*

Тогда $\mathcal{E}$ имеет Σ^{-1}_a-вычислимую фридбергову нумерацию.

Для семейства всех в.п. отношений эквивалентности, с помощью результатов [**2**], дополнительно показываем существование бесконечного числа попарно несравнимых минимальных непозитивных нумераций и существование бесконечного числа главных идеалов без минимальных нумераций.

Список литературы

[1] Ng K.M., Yu H., On the degree structure of equivalence relations under computable reducibility. (Preprint)

[2] Хуторецкий А.Б., Две теоремы существования для вычислимых нумераций, Алгебра и логика, 1969, Т.8, N4, с. 483–492.

КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы (Казахстан)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Задачи префиксной и Бюхи-разрешимости сверхслов для некоторых классов языков

Н. Н. Корнеева

В работе вводятся понятия префиксной и Бюхи-разрешимости сверхслов для некоторых классов языков, обобщающие аналогичные понятия из [**1**], и рассматриваются действия автоматных преобразователей на сверхслова с указанными свойствами.

Пусть $\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$ – класс контекстно-свободных языков (т.е. языков, распознаваемых недетерминированными автоматами с магазинной памятью), $\mathcal{L}_{AS}$ и $\mathcal{L}_{NS}$ – классы языков, распознаваемых детерминированными автоматами с магазинной памятью по допускающему состоянию и по пустому магазину соответственно.

Обозначим через $Pref(x)$ множество префиксов сверхслова x. Сверхслово x называется $\mathcal{L}$-префиксно разрешимым (где $\mathcal{L}$ – один из классов $\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$, $\mathcal{L}_{AS}$, $\mathcal{L}_{NS}$), если для любого языка $L \in \mathcal{L}$ разрешима задача $L \cap Pref(x) \neq \emptyset$. Сверхслово x называется $\mathcal{L}$-Бюхи-разрешимым (где $\mathcal{L}$ – один из классов $\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$, $\mathcal{L}_{AS}$), если для любого языка $L \in \mathcal{L}$ разрешима задача $|L \cap Pref(x)| = \infty$. Для класса регулярных языков $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ получим определение из [**1**]. Известно, что $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$-Бюхи-разрешимые сверхслова – это в точности сверхслова с разрешимой монадической теорией второго порядка [**2**]. А $\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$-Бюхи-разрешимые сверхслова – это сверхслова с разрешимой теорией второго порядка, в которой разрешены только переменные по бинарным предикатам со специальными свойствами [**3**].

В работе получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ – конечный инициальный асинхронный автомат, $x \in \Sigma^{\infty}$ – $\mathcal{L}$-префиксно разрешимое сверхслово (где $\mathcal{L}$=$\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$, $\mathcal{L}_{AS}$ или $\mathcal{L}_{NS}$). Тогда $\omega(s_0, x) \in (\Sigma')^{\infty}$ – $\mathcal{L}$-префиксно разрешимое сверхслово.*

Теорема 2. *Пусть $(S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ – конечный инициальный асинхронный автомат, $x \in \Sigma^{\infty}$ – $\mathcal{L}$-Бюхи разрешимое сверхслово (где $\mathcal{L}$=$\mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$ или $\mathcal{L}_{AS}$). Тогда $\omega(s_0, x) \in (\Sigma')^{\infty}$ – $\mathcal{L}$-Бюхи разрешимое сверхслово.*

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект N 1.12878.2018/12.1.

Список литературы

[1] Вялый М. Н., Рубцов А. А. Алгоритмическая разрешимость задач о поведении автоматов на сверхсловах // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. N 2. С. 3–18.

[2] Buchi J. R. On a decision method in restricted second-order arithmetic // Proc. Int. Congress Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Palo Alto: Stanford Univ. Press. 1962. P. 1–11.

[3] Lautemann C., Schwentick Th., Therien D. Logics for context-free languages // In: Pacholski L.,Tiuryn J. (eds) Computer Science Logic. CSL 1994. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995. V. 933. P. 205–216.

Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: Natalia.Korneeva@kpfu.ru

О сложности проблемы разрешимости систем уравнений над частичными порядками

А. Ю. Никитин

Частично упорядоченным множеством называется алгебраическая структура $\mathcal{P} = \langle P \mid L_A \rangle$ с носителем P и сигнатурой $L_A = \langle \leqslant^{(2)}, A \rangle$, в которой A – множество константных символов и $\leqslant$ – предикат частичного порядка. На $\mathcal{P}$ выполнены три аксиомы:

(1) $\forall p \in P\ p \leqslant p$ *(рефлексивность)*;

(2) $\forall p_1, p_2 \in P\ p_1 \leqslant p_2 \wedge p_2 \leqslant p_1 \to p_1 = p_2$ *(антисимметричность)*;

(3) $\forall p_1, p_2, p_3 \in P\ p_1 \leqslant p_2 \wedge p_2 \leqslant p_3 \to p_1 \leqslant p_3$ *(транзитивность)*.

Уравнением над частичным порядком $\mathcal{P}$ в языке L_A от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ называется одно из следующих выражений: $t_1 = t_2$, $t_1 \leqslant t_2$, где $t_1, t_2 \in X \cup A$ либо переменные, либо константы.

Системой уравнений над частичным порядком $\mathcal{P}$ в языке L_A от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ называется произвольное множество уравнений над этим частичным порядком и обозначается $S(X)$. Задачу разрешимости системы уравнений $S(X)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ будем обозначать через $S(\mathcal{P})$. Формулируется данная задача следующим образом: совместна ли система уравнений $S(X)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ в языке L_A.

Между частично упорядоченными множествами и орграфами существует следующее соответствие. Пусть задано частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$, ему соответствует такой граф H, что вершинам графа H соответствуют элементы частичного порядка, а дуга $E(p_i, p_j)$ будет в графе H, если над $\mathcal{P}$ верно $p_j \leqslant p_i$. Назовем такой граф, построенный по частичному порядку, *p-графом*.

Пусть заданы множества интервалов $\{I_1, \dots, I_n\}$ и $\{J_1, \dots, J_n\}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Ориентированный граф $G = \langle V \mid E \rangle$ называется *интервальным*, если каждой вершине v соответствует пара интервалов (I_v, J_v) и $(u, v) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $I_u \cap J_v \neq \emptyset$. Ориентированный интервальный граф называется *приведенным*, если для каждой вершины v интервалы I_v и J_v имеют общую левую точку.

Наконец, для ориентированного графа H через $U(H)$ будем обозначать соответствующий неориентированный граф.

Теперь, сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть задан конечный частичный порядок $\mathcal{P}$ в языке L_A. Если для соответствующего p-графа H в графе $U(H)$ содержится цикл без хорд длины больше 3, то задача $S(\mathcal{P})$ является NP-полной.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}$ – частичный порядок в языке L_A и H – соответствующий этому частичному порядку p-граф. Тогда, если H – приведенный интервальный орграф, то $S(\mathcal{P})$ разрешима за полиномиальное время.*

Институт Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: nikitinlexey@gmail.com

Фридберговы нумерации семейства всех частично вычислимых функционалов из класса $\mathcal{C}^*_{20}$

С. С. Оспичев

В работе рассматриваются вычислимые нумерации семейств частично вычислимых функционалов из класса $\mathcal{C}^*_{20}$ [**1**]. Пусть T – множество типов и для каждого $\sigma \in T$ определим семейство функционалов типа σ:

(1) в качестве C_0 возьмем любое семейство из класса $\mathcal{C}^*_{20}$

(2) $C_{\sigma\times\tau} = C_\sigma \times C_\tau$

(3) $C_{\sigma|\tau} = \mathfrak{Mor}(C_\sigma, C_\tau)$

В работе доказана

Теорема. *Пусть семейство всех частично вычислимых функционалов из* C_0 *обладает вычислимой фридберговой нумерацией. Для любого* $\sigma \in T$ *существует вычислимая фридбергова нумерация семейства всех частично вычислимых функционалов типа* σ.

Следствие. *Если в записи типа* σ *есть подслово вида* $\tau_1|\tau_2$ *то семейство* C_σ *обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных фридберговых и неразрешимых позитивных вычислимых нумераций.*

Список литературы

[1] Ершов Ю.Л., Теория нумераций. М.: Наука, 1977

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: ospichev@gmail.com

О консервативности схемы ограниченности

Ф. Н. Пахомов

Хорошо известно, что теория множеств Крипке-Платека с бесконечностью $\mathsf{KP}\omega$ существенно превосходит арифметику Пеано PA по теоретико-доказательственной силе и в частности $\mathsf{KP}\omega$ доказывает непротиворечивость PA. Тем не менее, как было установлено Г. Егерем еще в 1984 году, если ограничить в $\mathsf{KP}\omega$ схему фундированности до Δ_0 формул, то получающаяся теория консервативно расширяет PA, т.е. теории доказывают одни и те же арифметические утверждения. Первый результат о котором я расскажу усиливает и технически упрощает результат Егеря: для всякой теории T аксиоматизируемой схемами, естественным образом определяемая теория $\mathsf{KPU}^+(T)$ оказывается консервативным расширением T.

Эти результаты тесно связаны с тем фактом, что версия KP без схемы фундированности является Π_2-консервативным расширением базовой теории множеств Ганди BST (одна из аксиоматизаций которой состоит из аксиомы объемности и аксиом замкнутости относительно рудиментарных функций). Также в настоящем докладе я расскажу об общем подходе, который позволяет получить как этот результат так и ряд известных результатов, а также некоторые новые результаты о частичной консервативности схем ограниченности. В частности, мой метод позволяет свести к общему результату Π_2-консервативность схемы ограниченности $\mathsf{B}\Sigma_1$ над арифметической теорией Δ_0-индукции $\mathsf{I}\Delta_0$ (Дж. Парис, Х. Фридман) и Π^1_2-консервативность схемы выбора Σ^1_1-AC над теорией арифметического свертывания ACA_0 (Дж. Барвайс, Дж. Шлипф), а также обобщения этих результатов на более высокие сложностные классы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда проект N 16-11-1025.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва
E-mail: pakhfn@mi.ras.ru

Универсальные функции и $K\Sigma$-структуры

А. Н. Хисамиев

Введено понятие $K\Sigma$-структуры и доказано существование универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке над такой структурой. Приведены примеры семейств $K\Sigma$-структур теории деревьев.

Институт математики им. С.Л. Соболева, НГУ, Новосибирск
E-mail: hisamiev@math.nsc.ru

On maximal Σ-subsets of admissible sets

I. I. Vlasov

Let $\mathbb{A}$ be an admissible set. There are two possible ways to generalize the notion of a computably enumerable set in $\mathbb{A}$: to consider either all Σ-definable sets of $\mathbb{A}$ or only those Σ-definable sets, which are subsets of ω. In the article [**1**] the connection of the later approach and e-ideal theory was revealed. Namely, there was observed that each e-ideal is a family of Σ-subsets of natural numbers in some admissible set and vice versa, thus computability theory on admissible sets equivalent to computability in e-ideal in some sense. In the light of this correspondence the question, whether some computability principle holds in admissible sets, can be reformulated in terms of e-ideals.

We study the principle of existence of maximal Σ-subset, which holds in classical computability, but doesn't generally hold in admissible set computability (even for admissible sets with a principle e-ideal of Σ-subsets of natural numbers). We translate the notion of maximal Σ-subset into the theory of principle e-ideals as following:

Definition. *A set $A \subseteq \omega$ is called B-maximal, if $\omega \setminus A$ is infinite and there is no $W \leq_e B$ such, that $|W \cap (\omega \setminus A)| = |(\omega \setminus W) \cap (\omega \setminus A)| = \infty$.*

In this talk we are going to present the following group of results about B-maximal sets.

Theorem 1. *Let B be a e-low co-c.e. set. Then there exists a B-maximal c.e. set A.*

Theorem 2. *Let B be a non-low$_2$ co-c.e set. Then there is no B-maximal set among c.e. sets.*

Theorem 3. *For some e-low Δ^0_2-set B, there is no B-maximal set.*

References

[1] Morozov A. S., Puzarenko V. G. On Σ-subsets of natural numbers, Algebra i Logika, 43(3):291–320, 2004.

Kazan Federal University, Kazan
E-mail: elijah.vlasov@gmail.com

On model-theoretic properties of m-degrees

M. M. Yamaleev

Given $A, B \subset \omega$, subsets of natural numbers, we say that A is m-reducible to B if there exists a computable function f such that for any $x \in \omega$ we have $x \in A$ if and only if $f(x) \in B$. This reducibility is one of the most classical and well studied reducibility in computability theory. The partial orderings of m-degrees and their substructures were actively studied since 1970th in the works of Arslanov, Denisov, Degtev, Ershov, Nies, Lachlan, Selivanov etc.

In a recent joint work with Ng Keng Meng (Selwyn) we obtained several results about model-theoretic properties of the structures of m-degrees from the finite levels of the Ershov hierarchy. In particular, we obtained that in the partial ordering of n-c.e. m-degrees the classes of k-c.e. m-degrees are definable for each $n > k \geq 1$.

The author is supported by RFBR, project No. 18-31-00420.

Kazan Federal University, Kazan
E-mail: mars.yamaleev@kpfu.ru

IV. Секция «Теория групп»

Единицы целочисленных групповых колец циклических 3-групп

Р. Ж. Алеев, А. Н. Воробьёв, Е. А. Кетова, Е. О. Шумакова

Группы единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 3 и 9 известны, а именно, первая тривиальна, вторая изучена в работе [**2**]. Воробьёвым А. Н. [**3**] были произведены разнообразные вычисления для единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 9, 27, 81, 243 и 729. Эти вычисления применены для исследования случая группы порядка 27.

Пусть α — примитивный корень из 1 степени 27. Циклическая группа G порядка 27 имеет 27 неприводимых комплексных характеров χ_i, $i \in \{0, 1, \dots, 26\}$, где $\chi_j(x^k) = \alpha^{jk}$ для любых $j, k \in \{0, 1, \dots, 26\}$. Множество представителей семейств алгебраически сопряжённых характеров — $I = \{\chi_0, \chi_1, \chi_3, \chi_9\}$. Для натурального числа m пусть $\mathbf{Z}[3^m]$ — кольцо целых кругового поля корней степени 3^m из 1.

Пусть u — произвольная единица целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ циклической группы G порядка 27. Из теоремы 2 в [**4**] следует, что существуют такие единицы $\beta_0 \in \mathbf{Z}$, $\beta_1 \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[27])$, $\beta_3 \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[9])$ и $\beta_9 \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[3])$, что $u = u_0(\beta_0)u_1(\beta_1)u_3(\beta_3)u_9(\beta_9)$, где, как в определении 1 в [**1**], для любого $i \in \{0, 1, 3, 9\}$ обозначим через $u_i(\beta_i)$ локальный элемент, соответствующий характеру χ_i и элементу β_i. Ограничимся случаем, когда $u_1(\beta_1) \in \mathbf{Z}G$ и $u_3(\beta_3) \in \mathbf{Z}G$, что позволит построить подгруппу конечного индекса группы единиц $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$, и облегчит получение полного описания группы единиц $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$.

Теорема. *Пусть* $F = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$. *Тогда*

$$\langle -x \rangle \times \langle u_3((1+\alpha^3)^6) \rangle \times \langle u_3((1+\alpha^6)^6) \rangle \times \prod_{j \in F} \langle u_1((1+\alpha^j)^{18}) \rangle$$

— *подгруппа группы* $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$ *конечного индекса, делящего* $6^2 \cdot 18^8 = 396718580736$.

Исследование выполнено при поддержке Правительства РФ в соответствии с Постановлением N211 от 16.03.2013 г. (соглашение N 02.A03.21.0011).

Список литературы

[1] Алеев Р.Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды, Т.3,1, 2000, 3–37.

[2] Алеев Р.Ж., Панина Г.А. Единицы циклических групп порядков 7 и 9 // Известия ВУЗОВ. Математика, N 11(450), 1999, 81–84.

[3] Воробьёв А. Н. Разработка программной системы для вычислений в групповых кольцах циклических 3-групп // ВКР бакалавра по напр. 02.03.02 “Фунд. информатика и информ. технологии” — Челябинск, 2017. — 51 с. http://omega.sp.susu.ru/publications/bachelorthesis/17-Vorobyov.pdf

[4] Aleev R. Ž. Higman’s central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers // Intern. J. of Algebra and Comp., V.4, 3, 1994, 309–358.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинский госуниверситет, Южно-Уральский госуд. гуманитарно-педагогический университет, Челябинск, Россия

E-mail: aleev@csu.ru, lobzz@inbox.ru,nice.katrin94@mail.ru, shumkaty@mail.ru

О локальных единицах целочисленного группового кольца циклической группы порядка 64 для характера с полем характера $\mathbf{Q}_{64}$

Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко

Пусть K — подполе поля комплексных чисел и $\bar{\mathbf{Z}}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел. Тогда обозначим через $\mathrm{Int}(K) = K \cap \bar{\mathbf{Z}}$ — кольцо целых поля K и $\mathrm{Un}(\mathrm{Int}(K))$ — группу единиц кольца $\mathrm{Int}(K)$. Круговое поле, полученное присоединением примитивного корня из 1 степени 2^m, обозначим через $\mathbf{Q}_{2^m}$.

Пусть G — циклическая группа порядка 2^n. Пусть α — примитивный корень из 1 степени 2^n. Группа G имеет 2^n неприводимых комплексных характеров χ_i, $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, где $\chi_j(x^k) = \alpha^{jk}$ для любых $j, k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Поле характера χ обозначим $\mathbf{Q}(\chi)$. Как в определении 1 в [**1**], для любого $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ обозначим через $u_i(\lambda)$ локальный элемент, соответствующий характеру χ_i и элементу $\lambda \in \mathbf{Q}(\chi_i)$. Из теоремы 2 в [**3**] следует, что нормализованная группа единиц целочисленного группового кольца группы G содержится в $\prod_{s=0}^{n-1} \langle u_{\chi_{2^s}}(\beta_{2^s}) \mid \beta_{2^s} \in \mathrm{Un}(\mathrm{Int}(\mathbf{Q}(\chi_{2^s})))\rangle$. Предложение 1 из [**2**] описывает периодическую часть группы $V(\mathbf{Z}G)$ и из этого результата следует, что множество

$$W = \left\{ \prod_{s=1}^{n-1} u_{\chi_{2^s}}(\beta_{2^s}) \in \mathrm{V}(\mathbf{Z}G) \mid \beta_{2^s} \in \mathrm{Un}(\mathrm{Int}(\mathbf{Q}(\chi_{2^s}))),\ s \in \{1, \ldots, n-1\} \right\}$$

— подгруппа без кручения группы $V(\mathbf{Z}G)$, изоморфная подгруппе группы единиц группового кольца $\mathbf{Z}\langle x^2 \rangle$, что позволяет применять индукцию. Оппонентом подгруппы W является подгруппа $W_1 = \langle u_{\chi_1}(\beta_1) \mid \beta_1 \in \mathrm{Un}(\mathrm{Int}(\mathbf{Q}(\chi_1)))\rangle$, а произведение $W_1 \times W$ является подгруппой конечного индекса группы $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$.

Для любого целого j положим $t_j = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j} + \alpha^{2j} + \alpha^{-2j}$.

Теорема. *Пусть G — циклическая группа порядка 64. При введённых ранее обозначениях $W_1 = \langle x^{32} \rangle \times V_1$, где*

$$V_1 = \langle u_{\chi_1}(t_1^{16})\rangle \times \langle u_{\chi_1}(t_1^{-8} t_3^{8})\rangle \times \big(\langle u_{\chi_1}(t_1^{-4} t_7^{4})\rangle \times \langle u_{\chi_1}(t_3^{-4} t_5^{4})\rangle\big) \times$$
$$\times \big(\langle u_{\chi_1}(t_1^{-2} t_{15}^{2})\rangle \times \langle u_{\chi_1}(t_3^{-2} t_{13}^{2})\rangle \times \langle u_{\chi_1}(t_5^{-2} t_{11}^{2})\rangle \times \langle t_7^{-2} t_9^{2}\rangle\big) \times \prod_{j=1}^{7} \langle u_{\chi_1}(t_{2j+1}^{-1} t_{31-2j})\rangle.$$

Список литературы

[1] Алеев Р.Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды, Т.3,1, 2000, 3–37.

[2] Алеев Р.Ж., Митина О.В., Ханенко Т.А. Нахождение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32 // Челяб. физ.-мат. журн., Т.1, 4, 2016, С. 30–55.

[3] Aleev R. Ž. Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers // Intern. J. of Algebra and Comp., V.4, 3, 1994, 309–358.

Южно-Уральский госуниверситет, Челябинский госуниверситет, Челябинск, Россия
E-mail: aleev@csu.ru, ovm@csu.ru, tanja_1110_94@mail.ru

Характеры на n-категориях и применение их к описанию дифференцирований групповой алгебры

А. В. Алексеев

В работе вводится понятие n-группоида Γ^n и n-характеров χ_n на n-группоидах как комплекснозначных отображений из пространств различных классов морфизмов, удовлетворяющих условию $\chi_n(\psi \circ_k \varphi) = \chi_n(\psi) + \chi_n(\varphi)$ для любых возможных композиций. Будет построена последовательность пространств n-характеров и морфизмов между ними и показана ее точность.

Для случая $n = 2$ строится конкретный пример 2-группоида, ассоциированного с некоторой бесконечной некоммутативной группой G. Показывается связь между 2-характерами и дифференцированиями групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$.

Данная конструкция позволяет изучать алгебру внешних дифференцирований с новой точки зрения и строить некоторые достаточно интересные примеры.

Список литературы

[1] Ehresmann C., Catégories et structures, Dunod, Paris 1965.

[2] Bénabou J., Introduction to bicategories, Reports of the Midwest Category Seminar, Springer, Berlin, 1967, pp. 1–77.

[3] Mac Lane S., Categories for the Working Mathematician, 2004. 352 с. ISBN 0-387-90036-5.

[4] Arutyunov A. A., Mishchenko A. S., Shtern A. I., Derivations of Group Algebras, arXiv:1708.05005.

МФТИ, Долгопрудный
E-mail: aleksandr.alekseev@frtk.ru

Несуществование графов Шилла с массивами пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ и $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Далее, $a_1 = a - b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. В В [**1**, теорема 19] классифицированы графы Шилла с $b = 3$.

Предложение 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 3$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$ или $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$.

Известно существование графа с массивом пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$ (это унитарный неизотропный граф с $q = 4$), но неизвестна единственность. Существует единственный граф с массивом пересечений $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (это граф Доро). Продолжается программа изучения графов Шилла с $b = 3$. В [**2**] найдены возможные автоморфизмы графа с массивом персечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$. В [**3**, предложение 1] доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ не существует. В работе рассматриваются графы с массивами персечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ и $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$.

Граф Шилла Γ с массивом персечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ имеет спектр $24^1, 8^{175}, -1^{224}, -4^{300}$, $v = 1 + 24 + 432 + 243 = 700$ вершин и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для двойственной 2-схемы $pG_9(27, 8)$.

Теорема 1. Граф Шилла с массивом пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ не существует.

Доказательство теоремы 1 получается с помощью изучения вложения овоидов в граф Γ_3.

Лемма. Пусть K является 7-кликой из Γ. Тогда подграф $O = a^\perp$ является овоидом графа Γ_3 для любой вершины $a \in K$. Пусть Y_i — множество вершин из $\Gamma_3 - K$, смежных в Γ_3 точно с i вершинами из K, $y_i = |Y_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) $\Gamma - K = Y_0 \cup Y_3$;

(2) Y_0 — регулярный граф степени 54 на 126 вершинах и каждая вершина из Y_0 смежна с 189 вершинами из Y_3;

(3) Y_3 — регулярный граф степени 180 на 567 вершинах, и каждая вершина из Y_3 смежна с 60 вершинами из Y_0.

По лемме число ребер между Y_0 и Y_3 равно $126 \cdot 189$ и равно $567 \cdot 60$, противоречие. Теорема 1 доказана.

Граф Шилла Γ с массивом персечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ имеет спектр $42^1, 14^{42}, 0^{210}, -7^{90}$, $v = 1 + 42 + 210 + 90 = 343$ вершины и является Q-полиномиальным.

Теорема 2. Граф Шилла с массивом пересечений $42^1, 14^{42}, 0^{210}, -7^{90}$ не существует.

В доказательстве теоремы 2 используются тройные числа пересечений [**4**].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, $r_i \le d$, то $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix}\right]$ — число вершин

$w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$. Числа $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [**4**] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей:

$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

Предложение 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, Если u, v, w — вершины, попарно находящиеся на расстоянии 3 в Γ, $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, $[122] = \alpha$, $[212] = \beta$, $[221] = \gamma$ и $[333] = \delta$, то выполняются следующие утверждения:

(1) $a_3 - [133] = [123] = [132] = c_3 - \alpha$, $a_3 - [313] = [312] = [213] = c_3 - \beta$, $a_3 - [331] = [231] = [321] = c_3 - \gamma$;

(2) $\gamma - [232] = [233] - p^3_{23} + c_3 = p^3_{33} - p^3_{23} + 2c_3 - a_3 - 1 - \alpha - \delta$, $\alpha - [223] = [323] - p^3_{23} + c_3 = p^3_{33} - p^3_{23} + 2c_3 - a_3 - 1 - \beta - \delta$, $\beta - [322] = [332] - p^3_{23} + c_3 = p^3_{33} - p^3_{23} + 2c_3 - a_3 - 1 - \gamma - \delta$;

(3) $[222] = p^3_{22} - \gamma - [223] = p^3_{22} - p^3_{23} + p^3_{33} + 2c_3 - a_3 - 1 - \alpha - \beta - \gamma - \delta$.

Для нашего графа исчезают параметры Крена $q^3_{11}, q^1_{13}, q^1_{31}$. Отсюда $\alpha = \beta = \gamma = (6\delta + 532)/35$, $\delta = 7\delta' \leq 19$. Противоречие с тем, что $6\delta' + 76$ не делится на 5. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Koolen J.H., Park J., Shilla distance-regular graphs, Europ. J. Comb. 2010, v. 31, 2064-2073.

[2] Zyulyarkina N.D., Makhnev A.A. On automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, Doklady Mathematics 2011, v. 84, N 1, 510-514.

[3] Brouwer A.E., Sumaloj S., Worawannotai C. The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, Australasian J. Comb. 2016, v. 66, 330-332.

[4] Jurisic A., Vidali J., Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3, Des. Codes Cryptogr. 2012, v. 65, 29-47.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

О пересечении A-допустимых Θ-подгрупп с ограничениями на индексы

Р. В. Бородич

В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяют раскрыть многие свойства самих групп (см. монографию [1]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ — группа автоморфизмов группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [2] будем говорить, что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

Функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

Пусть θ — подгрупповой функтор. Обозначим $\Phi_{\theta}(G, A) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G. Если в G таких подгрупп нет, то положим $\Phi_{\theta}(G, A) = G$.

Пусть θ — подгрупповой функтор. Обозначим $\Phi_{\theta_p}(G, A) = \cap M_G$, где M пробегает множество всех максимальных A-допустимых θ-подгрупп из G, индексы которых не делятся на простое число p. Если в G таких подгрупп нет, то положим $\Phi_{\theta_p}(G, A) = G$.

Теорема. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, θ — абнормально полный функтор. Тогда $\Phi_{\theta_p}(G, A)/O_p(G) = \Phi_{\theta}(G/O_p(G), A)$.*

Следствие. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и θ — абнормально полный функтор. Тогда факторгруппа $\Phi_{\theta_p}(G, A)/O_p(G)$ нильпотентна.*

Список литературы

[1] Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 144 с.

[2] Скиба А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины», Гомель
E-mail: Borodich@gsu.by

О периодических локально нильпотентных группах конечной централизаторной размерности

А. А. Бутурлакин, И. Е. Девяткова

Обозначим через $\mathfrak{M}_c$ класс всех групп, удовлетворяющих минимальному условию на централизаторы, то есть всех таких групп, в которых любая убывающая цепочка централизаторов стабилизируется за конечное число шагов. Класс $\mathfrak{M}_c$ достаточно широк и содержит, например, все абелевы группы, линейные группы над полями и конечно-порожденные группы, полученные расширением абелевых групп нильпотентными. В [**1**] Брайант доказал, что периодическая локально нильпотентная $\mathfrak{M}_c$-группа содержит нормальную нильпотентную подгруппу конечного индекса.

Следуя [**2**], мы будем говорить, что группа G имеет конечную c-размерность, если существует натуральное число n такое, что каждая строго убывающая цепочка централизаторов стабилизируется не более чем за n шагов. Такие группы являются подклассом $\mathfrak{M}_c$-групп, а значит возникает естественный вопрос о возможности уточнения результата Брайанта на случай групп конечной c-размерности. Сформулируем главный результат этой работы:

Пусть G — периодическая p-группа c-размерности k. Тогда индекс ее нильпотентного радикала ограничен в терминах p и k. Как следствие, если G периодическая локально нильпотентная группа c-размерности k, то индекс ее нильпотентного радикала ограничен в терминах k и p, где p — наибольшее простое число, такое, что $O_p(G)$ неабелева.

Пусть G — периодическая локально нильпотентная группа с минимальным условием на централизаторы. $F(G)$ — ее нильпотентный радикал. Тогда $Z(F(G)) = C_G(F(G))$.

Список литературы

[1] Bryant R. M., Groups with the minimal condition on centralizers, J. Algebra **60** (1979), 371–383.
[2] Myasnikov A. and Shumyatsky P., Discriminating groups and c-dimension, J. Group Theory 7 (2004), 135–142.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru

Нижняя оценка мощности 1-совершенного битрейда в графе Хэмминга

А. А. Валюженич

Пусть $\Sigma_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$. *Граф Хэмминга* $H(n, q)$ определяется следующим образом:

(1) вершины графа Хэмминга — это все слова длины n над алфавитом Σ_q.

(2) две вершины x и y смежны, если они отличаются ровно в одной координате.

Пусть T_0 и T_1 — непустые и непересекающиеся подмножества множества Σ_q^n. Тогда пара (T_0, T_1) называется *1–совершенным битрейдом* графа $H(n, q)$, если любой шар радиуса 1 в $H(n, q)$ либо не пересекается с T_0 и T_1, либо пересекается с каждым из множеств T_0 и T_1 ровно по одному элементу. Число $|T_0| + |T_1|$ называется *мощностью* 1-совершенного битрейда. Примером 1-совершенного битрейда в $H(n, q)$ является пара разностей $(C_1 \setminus C_2, C_2 \setminus C_1)$ двух совершенных кодов C_1 и C_2. Трейды такого вида, т. е. вложимые в 1-совершенный код, известны как «свитчинговые компоненты» 1-совершенных кодов.

В данной работе мы рассматриваем проблему поиска минимальной мощности 1–совершенного битрейда в графе Хэмминга $H(n, q)$. Для случая $q = 2$ данная проблема была полностью решена Потаповым в работе [**2**]. В работе [**1**] Кротов и Воробьёв получили нижнюю оценку на мощность 1–совершенного битрейда для случая $q \geq 3$. В данной работе мы находим минимальную мощность 1–совершенного битрейда в графе Хэмминга $H(n, q)$ для случая $n = 3m + 1$ и $q = 3$.

Теорема. *Пусть $n = 3m + 1$. Тогда минимальная мощность 1–совершенного битрейда в графе $H(n, 3)$ равна $2^{m+1} \cdot 3^m$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 18-11-00136).

Список литературы

[1] Воробьев К. В, Кротов Д. С. Оценки мощности минимального 1-совершенного битрейда в графе Хэмминга, Дискретный анализ и исследование операций, 2014, Т. 21, вып. 6, С. 3–10.

[2] Potapov V. N. On perfect 2-colorings of the q-ary n-cube. Discrete Mathematics, 2012, V. 312, N. 8, 1269-1272.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: graphkiper@mail.ru

О нормализаторах силовских подгрупп в классических группах

А. С. Васильев

Изучению силовских подгрупп уделяется особое внимание в теории конечных групп. Так строение силовских подгрупп в простых группах получено в работах Калужнина, Шевалле, Ри, Вейра, Картера и Фонга. Следующий естественный вопрос: каково строение нормализаторов силовских подгрупп.

В 2005 году А. С. Кондратьев описал нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах [**1**]. Оказалось, что во многих случаях силовская 2-подгруппа совпадает со своим нормализатором. В случае нечётного p силовская p-подгруппа в простой группе как правило не совпадает со своим нормализатором: в соответствии с классическим результатом Глаубермана и Томпсона, если силовская p-подгруппа самонормализуема при $p > 3$, то группа непроста.

В докладе будет представлено строение нормализаторов силовских p-подгрупп в некоторых классических группах для нечётных p.

Список литературы

[1] Кондратьев А. С. Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах, Матем. заметки, 78, N 3 (2005), 368–376.

НГУ, Новосибирск
E-mail: a.vasilev1@g.nsu.ru

Тройные факторизации и N-критический граф конечных групп

А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко

Все рассматриваемые группы конечны. Используются стандартные обозначения и терминология (см. [**1, 2**]). Напомним, что (p,q)-группой Шмидта называется группа Шмидта G, для которой $\pi(G) = \{p,q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p-подгруппу.

Определение. *N-критическим* графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G назовем ориентированный граф, у которого множество вершин равно $\pi(G)$ и (p,q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G имеется (p,q)-подгруппа Шмидта.

Группа G называется трижды факторизуемой, если $G = AB = BC = CA$ для некоторых ее подгрупп A, B, C. Свойства таких групп во многом зависят от свойств перемножаемых подгрупп. Кегель [**3**] (Л. С.Казарин [**4**]) показал, что группа G нильпотентна (разрешима) в случае нильпотентности (разрешимости) подгрупп A, B и C. В работе [**5**] было получено конструктивное описание всех разрешимых наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу $G = AB = BC = CA$, у которой $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и $C \in \mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть группа $G = AB = BC = CA$, где A, B и C — разрешимые подгруппы G. Тогда $\Gamma_{Nc}(A) \cup \Gamma_{Nc}(B) \cup \Gamma_{Nc}(C) = \Gamma_{Nc}(G)$.*

В [**6**] В. С. Монаховым были введены и исследованы классы групп $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{D}$, состоящие из всех групп, у которых любая подгруппа Шмидта сверхразрешима, и всех групп с несверхразрешимыми подгруппами Шмидта соответственно.

Следствие. *Пусть $G = AB = BC = CA$, где A, B и C — подгруппы G. Тогда:*

(1) *если в A, B и C любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то любая подгруппа Шмидта группы G также сверхразрешима;*

(2) *если A, B и C сверхразрешимы, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима;*

(3) *если в A, B и C любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна, то и в G любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна.*

Список литературы

[1] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[2] Distel R. Graph theory (third edition). Springer-Verlag, 2005.
[3] Kegel O. H. Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87, N 1. P. 42-48.
[4] Казарин Л. С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, N 7–8. С. 947–950.
[5] Васильев А. Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством // Вопросы алгебры. 1987. N 3. С. 3–11.
[6] Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, N 5. С. 717–722.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель
E-mail: formation56@mail.ru, mvimath@yandex.ru

Об ω-классах Шунка конечных групп

Т. И. Васильева

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения из [**1**]. Через ω обозначается некоторое непустое множество простых чисел. Согласно [**2**] группа G называется ω-примитивной, если в G имеется максимальная подгруппа M с $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Определим операции Q_ω и P_ω следующим образом:

$G \in \mathrm{Q}_\omega\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда G является гомоморфным образом H^φ некоторой $\mathfrak{F}$-группы H, причем ядро $\mathrm{Ker}\varphi$ гомоморфизма φ есть ω-группа;

$G \in \mathrm{P}_\omega\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда все ω-примитивные гомоморфные образы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$.

Отметим, если ω есть множество всех простых чисел, то Q_ω и P_ω совпадают с известными операциями на классах групп Q и P соответственно. В общем случае это не выполняется. Например, пусть $\omega = \{7\}$, $\mathfrak{F}_1 = (1, S_5)$, $\mathfrak{F}_2 = (Z_3)$, где S_5 — симметрическая группа на 5 символах и Z_3 — циклическая группа порядка 3. Если $N \simeq A_5$ — знакопеременная группа на 5 символах, то $S_5/N \in \mathrm{Q}\mathfrak{F}_1$, но S_5/N не принадлежит $\mathrm{Q}_\omega\mathfrak{F}_1$. Если G — циклическая группа порядка 9, то $O_\omega(G) = 1$ и, легко видеть, что $G \notin \mathrm{P}_\omega\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2$, но $G \in \mathrm{P}\mathfrak{F}_2$.

Определение. Непустой класс групп $\mathfrak{F}$ будем называть ω-классом Шунка, если $\mathfrak{F}$ является $\mathrm{P}_\omega\mathrm{Q}_\omega$-замкнутым. Обозначим через $b_\omega(\mathfrak{F})$ следующий класс групп:

$b_\omega(\mathfrak{F}) = (G|\ G \notin \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой неединичной нормальной ω-подгруппы N из $G)$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{F}$ — ω-класс Шунка;

(2) $\mathfrak{F} = \mathrm{P}_\omega\mathfrak{F}$;

(3) $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}_\omega\mathfrak{F}$ и $b_\omega(\mathfrak{F})$ состоит из ω-примитивных групп.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Тогда*

(1) $\mathrm{P}_\omega\mathfrak{F}$ — ω-класс Шунка;

(2) если $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}_\omega\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{P}_\omega\mathfrak{F}$ и $\mathrm{P}_\omega\mathfrak{F}$ — наименьший ω-класс Шунка, содержащий $\mathfrak{F}$.

Получены приложения ω-классов Шунка к нахождению обобщенных проекторов групп и изучению их свойств.

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, N 6. С. 1224–1239.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

E-mail: tivasilyeva@mail.ru

Точная верхняя граница рангов коммутантов конечных p-групп ранга n

Б. М. Веретенников

Пусть $k_1, \dots, k_n$ – натуральные числа, $n \geq 2$, p – простое число и $D(k_1, \dots, k_n, p)$ – число последовательностей натуральных чисел $i_1, \dots, i_k$, где $k \geq 2$, все i_j принадлежат $[1, n]$, $i_1 > i_2$, $i_2 \leq \dots \leq i_k$, причем для любого $m \in [1, n]$ число m в данной последовательности встречается не более $p^{k_m} - 1$ раз.

Теорема. *Рассмотрим класс C конечных p-групп ранга $n \geq 2$, порожденных элементами порядков $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$. Тогда число $D(k_1, \dots, k_n, p)$ является точной верхней границей рангов коммутантов групп класса C.*

Кроме того, число $p^{k_1} + \dots + p^{k_n} - n$ является точной верхней границей ступеней нильпотентности групп из класса C с элементарным абелевым коммутантом.

Заметим, что точная верхняя граница рангов коммутантов конечных p-групп получена Н. Блэкберном в [**1**] при $n = 2$ в зависимости от строения G/G'. Также отметим, что случай $p = 2$, $k_1 = \dots = k_n = 1$ рассмотрен в [**2**].

Оценка $d(G') \leq 5$ для конечных 2-групп G, порожденных тремя инволюциями, была указана еще А. Д. Устюжаниновым. Более того, в [**3**] приведен список всех неизоморфных конечных 2-групп, порожденных тремя инволюциями, с элементарным абелевым коммутантом.

Список литературы

[1] Blackburn N., On prime-power groups with two generators, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 54, No. 3, (1958), 327–337.

[2] Veretennikov B.M., On the commutator subgroups of finite 2-groups generated by involutions, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 23, No. 4, (2017), 77–84 (in Russian).

[3] Ustyuzhaninov A.D., Finite 2-groups generated by exactly three involutions, In: All-union algebr. symposium (1975) (in Russian), abstracts, part I, Gomel, (1975), 72.

Уральский федеральный университет (УрФУ), Екатеринбург
E-mail: boris@veretennikov.ru

О полиадических группоидах специального вида

А. М. Гальмак

Полиадическим группоидом специального вида мы называем универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1)+1$, $n \geq 2, s \geq 1, k \geq 2$, которая была определена в [1] на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ из S_k и n-арной операции η.

При переходе от группоидов к полиадическим группоидам возможны различные обобщения одного и того же бинарного понятия. Например, для абелевых групп основными обобщениями такого рода являются абелевы и полуабелевы l-арные группы. Э. Пост в [2] объединил абелевы и полуабелевы l-арные группы общим понятием – m-полуабелевы l-арные группы. Понятия абелевости, полуабелевости и n-полуабелевости могут быть распространены на любые l-арные группоиды.

Теорема 1. *Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает такими элементами $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, что*

$$a \neq e_{n-1}, \eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a, \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.

Если в теореме 1 положить $a = e_1$, то получим

Следствие 1. *Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами $e_1, \ldots, e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_{n-1}, \eta(e_1e_1 \ldots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}$. Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.*

Следствие 2. *Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает такими элементом a и идемпотентом e, что $a \neq e, \eta(a\underbrace{e \ldots e}_{n-1}) = a$. Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k>}$ не является n-полуабелевым.*

Так как 2-полуабелевость l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ совпадает с его абелевостью, то из теоремы 1 при $n = 2$ вытекает следующее следствие. Оно же вытекает и из следствия 2.

Следствие 3. *Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, группоид $< A, \eta >$ обладает элементом a и идемпотентом e такими, что $a \neq e, \eta(ae) = a$. Тогда $(s+1)$-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является абелевым.*

Список литературы

[1] Гальмак А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – N3. – С.35–40.

[2] Post E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol.48, N2. – P.208–350.

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев
E-mail: halm54@mail.ru

Перестановочность элементов и тотальная неассоциативность в полиадических полугруппах специального вида

А. М. Гальмак, М. В. Селькин

n-Арный группоид $< A, \eta >$ называют *тотально неассоциативным*, если в нём для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, не выполняются тождества

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{j+n-1})\mathbf{x}_{j+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}).$$

Полиадическим группоидом специального вида называется l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется (см., например, [1]) на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ и n-арной операции η, где $l = s(n-1)+1$, $n \geqslant 2$, $s \geqslant 1$, $k \geqslant 2$. Если η – бинарная операция, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [2], при этом $l = s+1$.

Теорема 1. *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ порядка $d \geqslant 2$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$,*

$$l \in \{td + r | t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, d\}.$$

Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – тотально неассоциативный, не n-полуабелевый l-арный группоид.

Следствие 1. *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, цикл σ из $\mathbf{S}_k$ длины k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$,*

$$l \in \{tk + r | t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, k\}.$$

Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – тотально неассоциативный, не n-полуабелевый l-арный группоид.

Полагая в следствии 1 $d = 2$, получим

Следствие 2. *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ порядка 2 удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, l – чётное. Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – тотально неассоциативный, не n-полуабелевый l-арный группоид.*

Полагая в теореме 1 $n = 2$, получим

Следствие 3. *Пусть неодноэлементная полугруппа A обладает единицей, σ нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка $d \geqslant 2$, l – такое же как в теореме 1. Тогда $< A^k, [\ ]_{s+1,\sigma,k} >$ – тотально неассоциативный, неабелевый $(s+1)$-арный группоид.*

Список литературы

[1] Гальмак А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – N3. – С.35–40.

[2] Гальмак А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев
E-mail: halm54@mail.ru
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

Группы с сопряженными максимальными $\mathfrak{X}$-подгруппами

В. Го, Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин

Всюду далее $\mathfrak{X}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Следуя Х.Виланду, подгруппу H конечной группы G называют *субмаксимальной $\mathfrak{X}$-подгруппой*, если существует изоморфное вложение $\phi : G \hookrightarrow G^*$ группы G в некоторую конечную группу G^*, при котором G^ϕ субнормальна в G^* и $H^\phi = K \cap G^\phi$ для некоторой максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы K группы G^* (т.е. подгруппы, принадлежащей классу $\mathfrak{X}$). Следующее утверждение решает [**1**, стр. 642, открытый вопрос к 15.4]

Теорема. *В конечной группе все максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы сопряжены тогда и только тогда, когда все субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы сопряжены.*

Кроме того, описаны все конечные группы, в которых сопряжены все (суб)максимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы, что решает [**1**, стр. 643, открытый вопрос].

Список литературы

[1] Wielandt H., Zusammengesetzte Gruppen endlicher Ordnung, Vorlesung an der Universität Tübingen im Wintersemester 1963/64. Helmut Wielandt: Mathematical Works, Vol. 1, Group theory (ed. B. Huppert and H. Schneider, de Gruyter, Berlin, 1994), 607–655.

University of Sience and Technology of China, Hefei (China)
E-mail: wbguo@ustc.edu.cn
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vdovin@math.nsc.ru
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: revin@math.nsc.ru

Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $GL(2,8)$

А. Д. Годова

В работах [**1, 2**] были описаны группы центральных единиц целочисленных групповых колец групп $GL(2,4)$ и $GL(2,5)$. Согласно [**3**] все неприводимые комплексные характеры группы $GL(2,8)$ разбиваются на 4 типа: $\chi_k,\ k \in \{0,1,\dots,6\}$ степени 1; $\theta_k,\ k \in \{0,1,\dots,6\}$ степени 8; $\eta_{m,s},\ (m,s) \in \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),$ $(0,5),(0,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),$ $(4,5),(4,5),(5,6)\}$ степени 9 и $\xi_l,\ l \in \{1,2,3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,15,19,20,21,$ $22,23,28,29,30,31,37,38,39,46,47,55\}$ степени 7.

Теорема 1. *Все неприводимые комплексные характеры группы $GL(2,8)$ разбиваются на 12 классов эквивалентности алгебраически сопряжённых характеров:*

1)	$\{\chi_0\}$;
2)	$\{\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,\chi_6\}$;
3)	$\{\theta_0\}$;
4)	$\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6\}$;
5)	$\{\eta_{1,6},\eta_{2,5},\eta_{3,4}\}$;
6)	$\{\eta_{0,1},\eta_{0,2},\eta_{0,3},\eta_{0,4},\eta_{0,5},\eta_{0,6}\}$;
7)	$\{\eta_{1,2},\eta_{2,4},\eta_{3,6},\eta_{1,4},\eta_{3,5},\eta_{5,6}\}$;
8)	$\{\eta_{1,3},\eta_{2,6},\eta_{2,3},\eta_{4,5},\eta_{1,5},\eta_{4,6}\}$;
9)	$\{\xi_{21}\}$;
10)	$\{\xi_7,\xi_{14},\xi_{28}\}$;
11)	$\{\xi_3,\xi_6,\xi_{12},\xi_{15},\xi_{30},\xi_{39}\}$;
12)	$\{\xi_1,\xi_2,\xi_4,\xi_5,\xi_{10},\xi_{11},\xi_{13},\xi_{19},\xi_{20},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{29},\xi_{31},\xi_{37},\xi_{38},\xi_{46},\xi_{47},\xi_{55}\}$.

Найдены поля характеров для каждого класса алгебраически сопряжённых характеров.

Теорема 2. *Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца группы $GL(2,8)$ равен 24.*

Список литературы

[1] Алеев Р.Ж., Исмагилова З.Ф., Карлина Н.Г. Центральные единицы целочисленного группового кольца группы $GL_2(5)$ // Алгебра и линейная оптимизация: Труды межд. семинара, посв. 90-лет. со дня рожд. С.Н. Черникова. Екатеринбург. УрО РАН, 2002. С.12–14.

[2] Aleev R.Zh., Mitin A.P., Mitina O.V. Central Unit Group of Integral Group Ring of GL(2,4) // Groups and Graphs, Algorithms and Automata. Екатеринбург. 2015. С. 32.

[3] Белоногов В.А. О малых взаимодействиях в конечных группах // Труды ИММ УрО РАН. Т. 2. 1992. С. 3–18.

Челябинский государственный университет, Челябинск
E-mail: sasha.godova97@mail.ru

Инварианты π-разрешимой группы с ограничениями на силовские подгруппы

Д. В. Грицук, А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Пусть π – некоторое подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначается через π'. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$ и π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$.

Напомним, что субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{m-1} \subset G_m = G, \qquad (1)$$

такая, что G_i нормальна в G_{i+1} для любого i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами субнормального ряда (1).

Группа называется π-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Хорошо известно, что наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

В 1968 г. Картер, Фишер и Хоукс [**1**] для π-разрешимой группы G ввели понятие нильпотентной π-длины ($l_\pi^n(G)$) как наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех субнормальных рядов группы G. В.С. Монаховым в 2006 году [**2**] для π-разрешимой группы G предложил понятие производной π-длины ($l_\pi^a(G)$) как наименьшее число абелевых π-факторов среди всех субнормальных рядов группы G.

В ряде работ Д.В. Грицука, В.С. Монахова, О.А. Шпырко получены оценки производной и нильпотентной π-длины конечной π-разрешимой группы в зависимости от строения либо силовских p-подгрупп для $p \in \pi$, либо π-холловой подгруппы.

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то G сверхразрешима. Поэтому нильпотентная длина группы G не превышает 2.

Теорема. *Пусть G — π-разрешимая группа. Если группа G обладает нормальным рядом, силовские подгруппы π-факторов которого являются циклическими, то $l_\pi(G) \leq 1$, $l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G) \leq 2$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект N Ф17М-063).

Список литературы

[1] Carter R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – V.9, N3. – P.285–313.

[2] Монахов В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, N 4. – P. 573–581.

БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест
E-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com
ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель
E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Восстановление системы попарно ортогональных латинских квадратов по частичной информации

В. Р. Данилко

В докладе рассматриваются линейные и эквивалентные им полные системы попарно ортогональных латинских квадратов. В случае квадратов порядка 3, 5 и 7 доказываются достаточные условия для однозначного восстановления таких систем, в которых часть элементов неизвестны.

Латинский квадрат порядка n — это таблица $L = (l_{ij})$ размеров $n \times n$, заполненная n элементами упорядоченного множества M таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы каждый элемент из M встречается в точности один раз.

Два латинских квадрата $L = (l_{ij})$ и $K = (k_{ij})$ порядка n называются *ортогональными*, если все n^2 упорядоченных пар (l_{ij}, k_{ij}) различны.

Тривиальная верхняя оценка на максимальную возможную мощность $N(n)$ системы попарно ортогональных латинских квадратов порядка n имеет вид $N(n) \leq n - 1$ (см., например, [**1**]). В частности, эта оценка достигается для n, равного степени произвольного простого числа. В этом случае система из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов называется *полной*. Для её построения, в частности, можно применить метод Боуза, использующий для заполнения квадратов значения многочленов вида $f(x, y) = \alpha x + y$ при ненулевом α из конечного поля порядка n. Система, построенная с помощью этого метода, называется линейной.

Системы A и B попарно ортогональных латинских квадратов называются *эквивалентными*, если найдутся перестановки строк, столбцов и элементов, действующие на все квадраты системы A одинаково и переводящие систему A в систему B.

Будем говорить, что система A определена в клетке (i, j), если для каждого квадрата $K \in A$ его элемент k_{ij} известен.

В работе реализован алгоритм для восстановления системы попарно ортогональных латинских квадратов. При помощи этого алгоритма доказана следующая теорема.

Теорема. *Если полная линейная или эквивалентная ей система попарно ортогональных латинских квадратов порядка $n \in \{3, 5, 7\}$ определена более чем в $n^2 - 2n$ клетках, то она восстанавливается однозначно.*

Список литературы

[1] Denes J., Keedwell A. D., Latin squares and their applications. New York: Academic Press, 1974. P. 158.

НГУ, Новосибирск
E-mail: v.danilko@g.nsu.ru

О неабелевых разрешимых группах конечного метабелева ранга

О. Ю. Дашкова

Д.И.Зайцевым было введено понятие F-ранга группы G [1]. Пусть G – группа, F – некоторая непустая система ее конечно порожденных подгрупп. F-рангом группы G называется такое наименьшее число r, что любая подгруппа системы F может быть порождена не более чем r элементами. В случае, когда такого числа r нет, F-ранг группы G считается бесконечным. Если F – система всех метабелевых неабелевых конечно порожденных подгрупп неабелевой группы G, то F-ранг группы G называется метабелевым. Установлено, что разрешимые неабелевы группы конечного метабелева ранга могут иметь бесконечный специальный ранг [2]. Основным результатом работы является теорема.

Теорема. *Пусть G – разрешимая неабелева группа конечного метабелева ранга, имеющая бесконечный специальный ранг, A – некоторая ее абелева подгруппа бесконечного специального ранга. Тогда A содержит такую подгруппу B конечного специального ранга, что факторгрупа A/B не имеет кручения.*

Список литературы

[1] Дашкова О.Ю. Локально почти разрешимые группы конечного неабелева ранга. Укр. мат. журн., 1990, т. 42, N 4, с. 477–482.

[2] Дашкова О.Ю. Группы конечного метабелева ранга. Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 90.1., 1990, 35 с.

Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Севастополе, Севастополь

E-mail: odashkova@yandex.ru

Об одном применении формальных групп в теории чисел

О. В. Демченко

С помощью теории Хонды, описывающей формальные группы над кольцом целых локального поля, ее автору удалось получить оригинальное доказательство квадратичного закона взаимности. В докладе этот подход обобщается на законы взаимности высших порядков.

Санкт-Петербургский госуниверситет, Санкт-Петербург
E-mail: vasja@eu.spb.ru

Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$

К. С. Ефимов, А. А. Махнев

В работе [**1**] изучены массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_t(l,t)$. В случае $c_2 = 1$ имеется всего четыре примера таких графов с $v \leq 3200$: граф Сильвестра с массивом пересечений $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$, графы с массивами пересечений $\{20, 16, 5; 1, 1, 16\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$. Автоморфизмы графов из примеров 2–4 найдены в [**1**, теорема 3] и [**2**, теорема].

С другой стороны, в [**3**] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$, $\mu = 1$ и числом вершин, не большим 4096. А.А. Махневым и М.С. Нировой предложена программа изучения автоморфизмов дистанционно регулярных графов из полученного списка.

Предложение. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с $\lambda = 2$, $\mu = 1$, имеющий не более 4096 вершин. Тогда Γ имеет один из следующих массивов пересечений:

(1) $\{21, 18; 1, 1\}$ $(v = 400)$;

(2) $\{6, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 2\}$ (Γ — обобщенный восьмиугольник порядка $(3, 1)$, $v = 160$), $\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$ (Γ — обобщенный шестиугольник порядка $(3, 1)$, $v = 52$), $\{12, 9, 9; 1, 1, 4\}$ (Γ — обобщенный шестиугольник порядка $(3, 3)$, $v = 364$), $\{6, 3, 3, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 1, 2\}$ (Γ — обобщенный двенадцатиугольник порядка $(3, 1)$, $v = 1456$);

(3) $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$ ($v = 1 + 18 + 270 + 243 = 532$, Γ_3 — сильно регулярный граф); $\{33, 30, 8; 1, 1, 30\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $\{21, 18, 12, 4; 1, 1, 6, 21\}$ ($v = 1+21+378+756+144 = 1300$, $q^4_{3,4} = 0$).

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$. Максимальный порядок клики C из Γ не больше 4. Граф с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ имеет $v = 1 + 39 + 1404 + 156 = 1600$ вершин и спектр $39^1, 7^{675}, -1^{156}, -6^{768}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10r + 26m + 12$ и $\alpha_3(g) = 80r$ или $p = 5$, $\alpha_1(g) = 65n + 10l + 10$ и $\alpha_3(g) = 200l$;

(2) Ω является n-кликой, либо $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 15l + 24 + 39m$ и $\alpha_3(g) = 120l + 36$, либо $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26m$ и $\alpha_3(g) = 80l - 8$, либо $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 10l + 26m + 14$ и $\alpha_3(g) = 80l - 16$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 10l + 39m + 1$, l сравнимо с -1 по модулю 3 и $\alpha_3(g) = 120l + 24$;

(3) Ω состоит из n вершин попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p = 3$, $n \in \{4, 7, ..., 40\}$, $\alpha_3(g) = 120l + 40 - 4n$ и $\alpha_1(g) = 15l + 30 + 39m - 6n$

(4) Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ, и либо $p = 3$ и порядки этих клик равны 1 или 4, либо $p = 2$ и порядки этих клик равны 2 или 4;

(5) Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, и $p \leq 3$.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Если $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_{5'}(G)$, то $\bar{T} = L \times M$, любая из подгрупп L, M изоморфна Z_5, A_5, A_6 или $PSp(4, 3)$.

В случае $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 40^2$ имеем $O_{5'}(G) = 1$ и этот случай реализуется, если либо
(1) $L \cong M \cong PSp(4,3)$, $|L : L_a| = |M : M_a| = 40$, либо
(2) $L \cong PSp(4,3)$, $|L : L_a| = 40$, $M \cong A_6$ и $|M_a| = 9$, либо
(3) $L \cong M \cong A_6$ и $|L_a| = |M_a| = 9$.

Список литературы

[1] Makhnev A.A., Golubyatnikov M.P., Guo Wenbin. Inverse problems in distance-regular graphs: nets, Communications in Mathematics and Statistics 2018, v 31.

[2] Махнев А.А., Падучих Д.В. Наибольший граф Мура и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$. Мальцевские чтения 2018, Тезисы докладов.

[3] Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular graphs with $\lambda = 2$, Jornal of Siberian Federal Univ. 2014, v. 7, N 2, 188-194.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Об обобщенных группах Фробениуса

А. Х. Журтов

Группа G с нетривиальной нормальной подгруппой F называется обобщенной группой Фробениуса с ядром F, если для любого элемента Fx простого порядка p из фактор-группы G/F все элементы группы G из смежного класса Fx имеют порядок p.

Очевидно, что любая конечная группа Фробениуса является и обобщенной группой Фробениуса.

В сообщении обсуждается строение конечных обобщенных групп Фробениуса. В частности анонсируется следующий результат.

Теорема. *Любой неразрешимый композиционный фактор конечной обобщенной группы Фробениуса изоморфен $L_2(q)$ или $Sz(q)$ для некоторого числа q.*

Результаты получены совместно с Д.В. Лыткиной и В.Д. Мазуровым.

Кабардино-Балкарский госуниверситет, Нальчик
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

О пересечении трех нильпотентных подгрупп в конечных группах

В. И. Зенков

В работе [**1**] Пассман доказал, что в p-разрешимой конической группе, p — простое, для силовской подгруппы P найдутся элементы x и y из G такие, что $P \cap P^x \cap P^y = O_p(G)$.

Позднее в [**2**] для любой конечной группы G и силовской p-подгруппы из G было доказано, что $P \cap P^x \cap P^y = O_p(G)$.

Эти результаты позволяют сформулировать следующую гипотезу:

для любой конечной группы G и любых ее нильпотентных подгрупп A, B и C найдутся элементы x и y из G такие, что

$$A \cap B^x \cap C^y \leq F(G). \tag{$*$}$$

Частный случай этой гипотезы для $A = B = C$ сформулирован в "Коуровской тетради" [**3**] в виде задачи 17.40.

Подтверждение этой гипотезы для разрешимых конечных групп получено в [**4**].

Теорема 1. *Пусть G — контрпример минимального порядка к гипотезе $(*)$. Тогда G — почти простая группа.*

Теорема 2. *Гипотеза $(*)$ верна.*

Список литературы

[1] Passman D. S. Groups with normal, solvable Hall p-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, no. 1. P. 99–111.

[2] Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.

[3] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с.

[4] Зенков В. И. О пересечении троек нильпотентных подгрупп в разрешимых конечных группах // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. 207–209.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: v19z52@mail.ru

О конечных простых исключительных группах лиева типа над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. Пусть $t(G)$ наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$.

В "Коуровской тетради" А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга–Кегеля. Хаги (2003) и М. А. Звездина (2013) получили такое описание в случае, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно.

Автор (2014) решил этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики.

В случае конечных простых групп лиева типа разных характеристик автором в 2016 г. получена теорема редукции. В 2017 г. автором исследованы две конечные простые группы лиева типа G и G_1 над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \geq 5$, причем одна из групп является линейной группой. Тем самым уточнен первый пункт теоремы редукции.

В 2018 г. автором рассмотрены две конечные простые группы лиева типа G и G_1 над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \leq 3$, причем одна из групп является линейной или унитарной группой.

В данной работе продолжается исследование, начатое автором в 2014 г. Мы рассматриваем две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является группой исключительного лиева типа.

Теорема. *Пусть G одна из групп $G_2(q)$, $F_4(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^2F_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$; G_1 – неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем из q_1 элементов, где q и q_1 взаимно простые числа. Если графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$;

(2) $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$;

(3) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_2(q_1)\}$, *где* $(q_1 - 1)_3 \neq 3$, $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$;

(4) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_4^{\varepsilon}(q_1)\}$, *где* $(q_1 - \varepsilon 1)_5 \neq 5$;

(5) $\{G, G_1\}$ *одна из пар* $\{G_2(q), G_2(q_1)\}$, $\{F_4(q), F_4(q_1)\}$, $\{{}^3D_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, $\{E_8(q), E_8(q_1)\}$.

Институт Математики и Механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург
E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

О перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка

Е. В. Зубей

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые обозначения и терминология стандартны и соответствуют [**1**].

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Обзор результатов о группах Шмидта и их приложениях содержится в [**2**].

В работах Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [**3**], В. Н. Князиной и В. С. Монахова [**4**] рассматривались группы, в которых силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта.

В этом направлении доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, $r > 5$. Если существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из B, то G r-разрешима.*

При $r \leq 5$ группа может быть не r-разрешимой. Примерами служат простые группы $PSL(2,7)$, $SL(2,8)$, $PSL(2,5)$.

Список литературы

[1] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа. 2006.

[2] Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Труды Укр. матем. конгресса 2001. — Киев: Институт математики НАНУ. 2002. Секция N 1. С. 81–90.

[3] Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. матем. журн. 1967. Том 8, N 4. С. 741-753.

[4] Князина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Том 16, N 3. С. 130–139.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга—Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны графу Грюнберга—Кегеля группы A_{10}

А. С. Кондратьев, Н. А. Минигулов

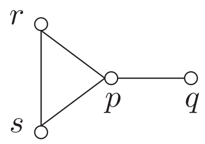
Графом Грюнберга–Кегеля (или графом простых чисел) конечной группы G называется граф $\Gamma(G)$, в котором вершинами являются все простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G есть элемент порядка pq.

В работах 2012 и 2013 гг. первый автор описал конечные группы с графами Грюнберга–Кегеля как у групп $Aut(J_2)$ (см. [**1**]) и A_{10} (см. [**2**]) соответственно. Графы Грюнберга–Кегеля этих групп как абстрактные графы изоморфны.

Нами поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны графу $\Gamma(A_{10})$.

В рамках решения этой задачи в [**3**] нами доказано, что если G – конечная неразрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ как абстрактный граф изоморфен графу $\Gamma(A_{10})$, то фактор-группа $G/S(G)$ группы G по ее разрешимому радикалу $S(G)$ почти проста, и классифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны подграфам графа $\Gamma(A_{10})$.

Пусть G – конечная неразрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ как абстрактный граф изоморфен графу $\Gamma(A_{10})$. Тогда граф $\Gamma(G)$ имеет вид



для подходящих простых чисел p, q, r, s.

В данной работе описано строение группы G в случае, когда число q делит порядок подгруппы $S(G)$.

Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 14-11-00061-П).

Список литературы

[1] Кондратьев А. С. Конечные группы с графом простых чисел, как у группы $Aut(J_2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, N 3. С. 131-138.

[2] Кондратьев А. С. Конечные группы с графом простых чисел, как у группы A_{10} // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, N 1. С. 136-143.

[3] Kondrat'ev A.S., Minigulov N.A. Finite almost simple groups whose Gruenberg-Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg-Kegel graph of the alternating group A_{10} // Siberian Electr. Math. Rep., в печати.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, nikola-minigulov@mail.ru

Усиленная версия гипотезы Симса для конечных групп с простым цоколем исключительного лиева типа

А. С. Кондратьев, В. В. Кораблева, В. И. Трофимов

В середине 1960-х годов Симс выдвинул следующую гипотезу: *порядок стабилизатора точки в конечной примитивной группе подстановок ограничен сверху функцией от длины любой орбиты этого стабилизатора на остальных точках.* С помощью классификации конечных простых групп гипотеза Симса была доказана в [**3**].

Для конечной группы G, ее подгрупп M_1 и M_2 и любого натурального числа i по индукции определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$, полагая $(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}$, $(M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}$, $(M_1, M_2)^{i+1} = (M_2, M_1)^i_{M_1}$ и $(M_2, M_1)^{i+1} = (M_1, M_2)^i_{M_2}$. В [**1**] была установлена справедливость следующей усиленной версии гипотезы Симса: *если G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, то подгруппы $(M_1, M_2)^6$ и $(M_2, M_1)^6$ совпадают и нормальны в G.* Представляется интересной задача описания множества Π всех троек (G, M_1, M_2) таких, что G — конечная группа, M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. Решение этой задачи существенно усилит результаты из [**1**]. В [**2**] рассмотрены следующие случаи этой задачи: группа G не является почти простой группой; группа G имеет простой знакопеременный цоколь; группа G имеет простой цоколь $Soc(G)$ лиева типа и $M_1 \cap Soc(G)$ — непараболическая подгруппа в $Soc(G)$.

В работе исследован случай, когда G — группа с простым цоколем исключительного лиева типа и $M_1 \cap Soc(G)$ — параболическая подгруппа в $Soc(G)$. При этом использовалась компьютерная система GAP (см. [**4**]).

Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 14-11-00061-П).

Список литературы

[1] Кондратьев А. С., Трофимов В. И. Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, N 6. С. 741–743.

[2] Кондратьев А. С., Трофимов В. И. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I, II, III, IV // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, N 4. С. 143–152; 2016. Т. 22, N 2. С. 177–187; 2016. Т. 22, N 4. С. 163–172; 2018. Т. 24, N 3. С. 109–132.

[3] Cameron P. J., Praeger C. E., Saxl J., Seitz G. M., On the Sims conjecture and distance transitive graphs // Bull. London Math. Soc. 1983. Vol. 15, no. 5. P. 499–506.

[4] The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.9.1, 2018.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН и Уральский федеральный университет, Екатеринбург

E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, trofimov@imm.uran.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

E-mail: vvk@csu.ru

Максимальные разрешимые подгруппы нечетного индекса в симметрических группах

К. Ю. Коротицкий, Д. О. Ревин

Найдены максимальные разрешимые подгруппы нечетного индекса в симметрических группах.

Расширенной (двоичной) записью числа n будем называть разложение

$$n = \overline{b_k b_{k-1} \dots b_0} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot 2^i,$$

полученное из двоичного разложения числа n некоторой серией замен двух идущих подряд единиц на 0 и 3. С каждой расширенной записью $\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$ числа n ассоциируем *шаблон диаграммы* по следующему правилу. Первоначально шаблон состоит из $k+1$ строки, где $k = [\log_2 n]$, нумерация ведется снизу и начинается с нуля. Длина i-ой строки равна i (нулевая строка пустая). Справа от i-ой строки поставим цифру b_i из расширенной записи $\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$ и удалим строки, напротив которых стоит ноль. Определим диаграммы, соответствующие расширенной двоичной записи $n = \overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$, разбив каждую строку длины i получившегося шаблона на полоски длин 1 или 2 так, чтобы никакие две полоски длины 1 не стояли подряд. Такое разбиение строки соответствует упорядоченному разбиению $(l_1, \dots, l_t)$ числа $i = l_1 + \dots + l_t$, где $l_j \in \{1, 2\}$, и если $l_j = 1$ при некотором $j < t$, то $l_{j+1} = 2$. Шаблон, строки которого разбиты вышеописанным образом, назовем *диаграммой, представляющей число* n. Диаграмма считается *недопустимой*, если она содержит две идущие подряд строки длин $i-1$ и i, напротив которых стоят единицы и бо́льшая строка получается из меньшей добавлением справа полоски длины 1. В противном случае диаграмма считается *допустимой*. Пусть $\mathcal{D}$ — допустимая диаграмма, соответствующая расширенной записи числа $n = \overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$, в которой строка длины i, соответствующая ненулевой цифре b_i, разбита на полоски длин $(l_1, \dots, l_t)$. Сопоставим данной диаграмме некоторую подгруппу в Sym_n по следующему правилу. Со строкой длины i диаграммы свяжем сплетение $\mathrm{Sym}_{2^{l_1}} \wr \dots \wr \mathrm{Sym}_{2^{l_t}} \wr \mathrm{Sym}_{b_i}$, рассматриваемое как подгруппа в группе $\mathrm{Sym}_{b_i \cdot 2^i}$. Всей диаграмме сопоставим прямое произведение сплетений, соответствующих ее строкам и отождественное естественным образом с подгруппой в Sym_n:

$$S_{\mathcal{D}} = \prod \mathrm{Sym}_{2^{l_1}} \wr \dots \wr \mathrm{Sym}_{2^{l_t}} \wr \mathrm{Sym}_{b_i}.$$

Подгруппа $S_{\mathcal{D}}$ определена в Sym_n с точностью до сопряжения.

Теорема. *Для группы $G = \mathrm{Sym}_n$ отображение $\mathcal{D} \mapsto S_{\mathcal{D}}^G$ задает биекцию между множеством допустимых диаграмм $\mathcal{D}$, представляющих число n, и множеством классов сопряженности максимальных разрешимых подгрупп, имеющих нечетный индекс.*

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: k.korotitskii@g.nsu.ru
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: revin@math.nsc.ru

О симметрических 2-расширениях 3-мерной решетки

К. В. Костоусов

Следуя [**1**], для целого положительного числа q назовем связный граф Γ *симметрическим q-расширением* d-мерной кубической решетки Λ^d, если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка q, что имеется изоморфизм φ фактор-графа Γ/σ на решетку Λ^d. Четверка $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ при этом называется *реализацией* симметрического q-расширения Γ решетки Λ^d, а Γ называется графом этой реализации. Наряду с чисто математическим интересом, симметрические q-расширения решетки Λ^d для небольших $d \geq 1$ и $q > 1$ представляют интерес для молекулярной кристаллографии и некоторых физических теорий (см. [**2**]), особенно при $q = 2$.

Естественно рассматривать реализации симметрических q-расширений решетки Λ^d с точностью до следующей эквивалентности (см. [**3**]): реализации $R_1 = (\Gamma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $R_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ *эквивалентны*, если найдется изоморфизм графа Γ_1 на граф Γ_2, переводящий σ_1 в σ_2.

В [**3**] В.И.Трофимовым доказана конечность числа реализаций симметрических 2-расширений d-мерной решетки, с точностью до эквивалентности, для произвольного целого положительного числа d, а также предложен алгоритм для построения всех, с точностью до эквивалентности, таких реализаций.

В [**4**] был получен список всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 (162 реализации).

Реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^d естественным образом разбивается на два типв: тип I, когда лишь единичный автоморфизм графа реализации оставляет на месте все блоки реализации, и тип II, когда это свойство не выполняется.

Реализуя подход из [**3**] в компьютерной системе GAP и используя параллельные вычисления, мы нашли все, с точностью до эквивалентности, реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^3 типа I (5573 реализации).

Список литературы

[1] Trofimov V.I. Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2011. Т. 17, N 4. С. 316–320.

[2] Неганова Е.А., Трофимов В.И. Симметрические расширения графов // Изв. РАН. Сер. матем., 2014, Т. 78, N 4. С. 175–206.

[3] Трофимов В.И. Конечность числа симметрических 2-расширений d-мерной решетки и сходных с ней графов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2013. Т. 19, N 3. С. 290–303.

[4] Коновальчик Е.А., Костоусов К.В. Симметрические 2-расширения 2-мерной решетки, I, II // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН, 2016. Т. 22, N1. С. 159-179; 2017. Т. 23, N 4. С. 192-211.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: kkostousov@gmail.com

Обобщенное вложение Магнуса

А. Ф. Красников

Пусть G — свободная группа с базой $\{g_j|j \in J\}$, N — нормальная подгруппа в G. Пусть T — правый свободный $\mathbf{Z}G/N$ модуль с базой $\{t_j|j \in J\}$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi : G \to \begin{pmatrix} G/N & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$$

определяемый отображением

$$g_j \mapsto \begin{pmatrix} g_jN & 0 \\ t_j & 1 \end{pmatrix} (j \in J).$$

Тогда $\ker\varphi = [N, N]$ [**2**], т.е. гомоморфизм φ задает вложение группы $G/[N, N]$ в полупрямое произведение $(G/N)T$. Вложение φ называется вложением Магнуса.

Теорему Магнуса можно сформулировать на языке производных Фокса [**1**]: элемент группы G принадлежит $[N, N]$ тогда и только тогда, когда его производные Фокса равны нулю по модулю N.

Пусть $F = (\underset{i\in I}{*} A_i) * G$ — свободное произведение нетривиальных групп A_i $(i \in I)$ и свободной группы G с базой $\{g_j|j \in J\}$. Следуя Романовскому [**3**], обозначим через D_k $(k \in I \cup J)$ производные Фокса кольца $\mathbf{Z}(F)$.

Теорема. *Пусть F — свободное произведение нетривиальных групп A_i $(i \in I)$ и свободной группы G с базой $\{g_j|j \in J\}$, N— нормальная подгруппа в F, $v \in F$, $M =$ гр $((N \cap A_i)^F|i \in I)[N, N]$. Тогда $D_k(v) \equiv 0 \mod N$, $k \in I \cup J$, если и только если $v \in M$.*

Пусть T — правый свободный $\mathbf{Z}F/N$ модуль с базой $\{t_k|k \in I \cup J\}$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\Psi : F \to \begin{pmatrix} F/N & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$$

определяемый отображением

$$a_i \mapsto \begin{pmatrix} a_iN & 0 \\ t_i(a_iN - 1) & 1 \end{pmatrix} (a_i \in A_i,\ i \in I),\ g_j \mapsto \begin{pmatrix} g_jN & 0 \\ t_j & 1 \end{pmatrix} (j \in J).$$

Теорема показывает, что $\ker\Psi = M$, т.е. гомоморфизм Ψ задает вложение группы F/M в полупрямое произведение $(F/N)T$. При дополнительном условии $N \cap A_i = 1$ $(i \in I)$ гомоморфизм Ψ задает вложение группы $F/[N, N]$ в $(F/N)T$ [**3**].

Список литературы

[1] Fox R.H., Free differential calculus. I, Ann. of Math., 57, N 3 (1953), 547–560.
[2] Magnus W., On a theorem of Marshall Hall, Ann. of Math., 40, N 4 (1939), 764–768.
[3] Романовский Н.С., О вложении Шмелькина для абстрактных и проконечных групп, Алгебра и логика, 38, N 5 (1999), 598-612.

Омский государственный университет, Омск
E-mail: phomsk@mail.ru

Автоморфизмы некоторых конечных группоидов, порожденных некоторыми k элементами и порядком $k + k^2$

А. В. Литаврин

В данной работе изучаются группы автоморфизмов некоторых конечных группоидов $\mathfrak{A} = (V, *)$ с множеством носителем V. Как обычно, $|Q|$ – мощность множества Q и S_n – симметрическая группа перестановок конечного множества из n элементов. Для каждого подмножества $Q \subset V$ определено множество $Q * Q = \{x * y \mid x, y \in Q\}$. Если $\alpha \in S_n$ и $x \in \{1, ..., n\}$, то $\alpha(x)$ – образ элемента x под действием α. Доказана теорема

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = (V, *)$ – группоид с конечным множеством носителем V и множеством $M \subseteq V$ такими, что справедливы условия*

$$V = M \cup (M * M), \quad |M * M| = |M| \cdot |M|, \quad M \cap (M * M) = \varnothing,$$

$$V * (M * M) \subseteq M * M, \quad (M * M) * V \subseteq M * M.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для элементов из V можно ввести обозначения

$$M = \{a_1, ..., a_{|M|}\}, \quad M * M = \{b_{ij} \mid i, j = 1, ..., |M|\}$$

такие, что элементы из M и $M * M$ связаны равенствами

$$b_{ij} = a_i * a_j, \quad i, j = 1, ..., |M|;$$

2) в группе $S_{|M|}$ существует подгруппа $X(\mathfrak{A})$ такая, что для любой перестановки $\alpha \in X(\mathfrak{A})$ отображение

$$\phi_\alpha \ : \ a_i \to a_{\alpha(i)}, \quad i = 1, ..., |M|; \ \ b_{uv} \to b_{\alpha(u),\alpha(v)} \quad u, v = 1, ..., |M|$$

есть автоморфизм группоида $\mathfrak{A}$ и справедливы утверждения

$$Aut\ (\mathfrak{A}) = \{\phi_\alpha \mid \alpha \in X(\mathfrak{A})\}, \quad Aut\ (\mathfrak{A}) \cong X(\mathfrak{A}).$$

3) всякая конечная группа G будет изоморфна некоторой подгруппе H группы автоморфизмов $Aut\ (\mathfrak{A})$ для подходящего группоида $\mathfrak{A}$, удовлетворяющего условиям данной теоремы.

СФУ, Красноярск
E-mail: anm11@rambler.ru

Группы, изоспектральные простой группе $S_4(3)$

Ю. В. Лыткин

В докладе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков элементов G. Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*.

В данной работе исследуются группы, изоспектральные *нераспознаваемым по спектру* неабелевым простым группам (т. е. группам, для которых существует бесконечное число попарно не изоморфных групп, им изоспектральных). Ранее автором [**1, 2, 3, 4**] были описаны группы, изоспектральные знакопеременным группам A_6 и A_{10}, спорадической группе J_2, исключительной группе ${}^3D_4(2)$ и классическим группам $L_3(3)$ и $U_3(3)$, а также бесконечной серии групп $S_4(q)$, $q > 3$. В последнем случае ограничение на рассматриваемые числа q является существенным: группа $S_4(3)$ обладает исключительными свойствами, и для неё утвержение основной теоремы из [**4**] не верно. В частности, эта группа является одной из лишь двух неабелевых простых групп (наряду с группой $U_3(3)$), изоспектральных двойной группе Фробениуса (см. [**5, 6**]).

В связи с этим, настоящая работа посвящена исследованию групп, изоспектральных группе $S_4(3)$. Доказывается следующая

Теорема. *Пусть G — группа, изоспектральная группе $S_4(3)$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) *G является двойной группой Фробениуса. Более точно, G является расширением 3-группы A с помощью группы Фробениуса BC порядка 20;*

(2) *G содержит нильпотентную нормальную $\{2,3\}$-подгруппу K, такую, что факторгруппа G/K изоморфна группе A_5 или группе S_5.*

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект N 18–71–10007.

Список литературы

[1] Lytkin Y. V. On groups critical with respect to a set of natural numbers // Siberian electronic mathematical reports. 2013. V. 10. P. 666–675.

[2] Лыткин Ю. В. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, N 1. С. 122–128.

[3] Лыткин Ю. В. О конечных группах, изоспектральных группе $U_3(3)$ // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, N 4. С. 813–827.

[4] Lytkin Y. V. On finite groups isospectral to the simple groups $S_4(q)$ // Siberian electronic mathematical reports. 2018. V. 15. P. 570–584.

[5] Aleeva M. R. On finite simple groups with the set of element orders as in a Frobenius group or a double Frobenius group // Math. Notes. 2003. V. 73, N 3. P. 299–313.

[6] Zavarnitsine A. V. A solvable group isospectral to $S_4(3)$ // Sib. Math. J. 2010. V. 51, N 1. P. 20–24.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: jurasicus@gmail.com

О дистанционно регулярных графах с $\mu = 1$

А. А. Махнев, М. П. Голубятников

В работе [**1**] изучены массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_t(l,t)$. В случае $c_2 = 1$ имеется всего четыре примера таких графов с $v \leq 3200$.

Пример 1. Пусть Γ – граф Сильвестра с массивом пересечений $\{5,4,2;1,1,4\}$. Тогда граф Γ_3 изоморфен 6×6-решетке.

Пример 2. Пусть Γ – граф с массивом пересечений $\{20,16,5;1,1,16\}$. Тогда $v = 1+20+320+100 = 441$ и Γ имеет спектр $20^1, 6^{144}, -1^{100}, -4^{196}$. Далее, Γ_3 – псевдогеометрический граф для сети $pG_4(20,4)$сильно регулярный граф с параметрами (441,100,31,20) и неглавными собственными значениями $16, -5$.

Пример 3. Пусть Γ – граф с массивом пересечений $\{39,36,4;1,1,36\}$. Тогда $v = 1+39+1404+156 = 1600$ и Γ имеет спектр $39^1, 7^{675}, -1^{156}, -6^{768}$. Далее, Γ_3 – псевдогеометрический граф для сети $pG_3(39,3)$.

Пример 4. Пусть Γ – граф с массивом пересечений $\{55,54,2;1,1,54\}$. Тогда $v = 1+55+2970+110 = 3136$ и Γ имеет спектр $55^1, 7^{1617}, -1^{110}, -8^{1408}$. Далее, Γ_3 является 56×56-решеткой.

Автоморфизмы графов из примеров 2–4 найдены в [**1**, теорема 3], [**2**, теорема] и [**3**, теорема]. В [**1**, теорема 2] найдены бесконечные серии допустимых массивов пересечений таких графов. В случае $c_2 = 1$ имеем двупараметрическую серию $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, $m < n$. Так как окрестность любой вершины является объединением изолированных (a_1+1)-клик, то $n-m$ делит $nm-1$, и отличные от -1 неглавные собственные значения равны $n-1$, $-m-1$, а их кратности – $m^2(mn-1)(n+1)/(m+n)$, $n^2(mn-1)(m-1)/(m+n)$.

Теорема. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$. Тогда $n-m$ делит $nm-1$ и для числа $t = (nm-1)/(n-m)$ верно неравенство $nm-n+m-1 \leq t^2$.

Следствие. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$ при $n = l^3-l^2+2l-1$, $m = l^2-l+1$, $l \geq 3$ не существует, в частности, графы с массивами пересечений $\{160,144,17;1,1,144\}$, $\{714,672,43;1,1,672\}$ не существуют.

Список литературы

[1] Makhnev A.A., Golubyatnikov M.P., Guo Wenbin. Inverse problems in distance-regular graphs: nets, Communications in Mathematics and Statistics 2018, v 31.

[2] Ефимов К.С., Махнев А.А. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39,36,4;1,1,36\}$. Мальцевские чтения 2018, Тезисы докладов.

[3] Махнев А.А., Падучих Д.В. Наибольший граф Мура и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{55,54,2;1,1,54\}$. Мальцевские чтения 2018, Тезисы докладов.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, mike_ru1@mail.ru

О дистанционно регулярных графах с $\mu = 2$

А. А. Махнев, М. С. Нирова

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *частичным пространством прямых*, если любые две точки лежат не более чем на одной прямой.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с $c_2 = 2$, Δ — окрестность вершины a в Γ. Тогда любые две несмежные вершины из Δ имеют в Δ не более одного общего соседа, поэтому любое ребро из Δ лежит в единственной максимальной клике из Δ и Δ — граф коллинеарности частичного пространства прямых, имеющий обхват по крайней мере 5. Далее, Δ — регулярный граф степени a_1 на k вершинах. Броувер иНоймайер (см. [**1**, теорема 1.1]) получили следующее утверждение

Предложение. Связное частичное пространство прямых обхвата по крайней мере 5 и более чем одной прямой, в котором каждая точка имеет λ соседей, содержит $k \geq \lambda(\lambda+3)/2$ точек. Равенство выполняется только в случае $k = 5, \lambda = 2$.

С помощью предложения в [**1**] доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ и $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$ не существуют.

В [**2**] найдена бесконечная серия допустимых массивов пересечений $\{2u^2-2m^2+4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$, неглавные собственные значения, отличные от -1, равны $2m+2u-3$, $-(2u-2m+3)$, их кратности равны $(2m^2-2u^2-4m+3)(m+u)(m-u-1)^2/(2u)$, $(2m^2-2u^2-4m+3)(m+u-1)^2(m-u)/(2u)$ соответственно, и u делит $(2m^2-4m+3)m(m-1)^2$. В теореме 2 найдены новые необходимые условия существования дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{2(u^2-m^2)+4m-3, 2(u^2-m^2), (u^2-m^2)+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$.

Теорема 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{2u^2-2m^2+4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$. Тогда u делит $(2m^2-4m+3)m(m-1)^2$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) окрестность любой вершины в Γ является объединением изолированных $(4m-3)$-клик, $4m-3$ делит $16u^2-9$, $2m-1$ делит $(4u^2-3)(4u^2-1)^2$ и $1+(2u^2-2m^2+4m-3)/(2u-2m+3) \geq 4m-2$;

(2) $2u^2 > 10m^2+14m+5$.

При $m = 1$ получим массив пересечений $\{2u^2-1, 2u^2-2, u^2+1; 1, 2, u^2-1\}$, для которого выполнено утверждение (1) из заключения теоремы 2. При $m = 2$ допустимых массивов пересечений нет.

Следствие 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{2u^2-2m^2+4m-3, 2u^2-2m^2, u^2-m^2+4m-2; 1, 2, u^2-m^2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) $m \geq 3$ и в случае $m = 3$ граф с массивом пересечений $\{63, 54, 37; 1, 2, 27\}$ не существует;

(2) если $m = 4$, то графы с массивами пересечений $\{53, 40, 34; 1, 2, 20\}$, $\{143, 130, 79; 1, 2, 65\}$ не существуют;

(3) если $m = 5$, то графы с массивами пересечений $\{95, 78, 57; 1, 2, 39\}$, $\{167, 150, 93; 1, 2, 75\}$, $\{255, 238, 137; 1, 2, 119\}$ не существуют.

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{22, 16, 5; 1, 2, 20\}$ имеет $v = 1 + 22 + 176 + 44 = 243$ вершин и спектр $22^1, 7^{66}, -2^{132}, -5^{44}$. Граф $\bar{\Gamma}_2$ сильно регулярен с параметрами $(243, 66, 9, 21)$ и спектром $66^1, 3^{198}, -15^{44}$.

Теорема 2. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{22, 16, 5; 1, 2, 20\}$ не существует.

Список литературы

[1] Brouwer A.E., Sumaloj S., Worawannotai C. The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, Australasian J. Comb. 2016, v. 66, 330-332.

[2] Makhnev A.A., Golubyatnikov M.P., Guo Wenbin. Inverse problems in distance-regular graphs: nets, Communications in Mathematics and Statistics 2018, v 31.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, nirova_m@mail.ru

Граф Мура степени 57 и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Если регулярный граф степени k и диаметра d имеет v вершин, то выполняется неравенство: $v \leq 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{d-1}$. Графы, для которых это нестрогое неравенство превращается в равенство, называются графами Мура. Простейший пример графа Мура доставляет $(2d+1)$-угольник. Дамерелл [**1**] доказал, что граф Мура степени $k \geq 3$ имеет диаметр 2. В этом случае $v = k^2 + 1$, граф сильно регулярен с $\lambda = 0$ и $\mu = 1$, а степень k равна 3 (граф Петерсена), 7 (граф Хофмана-Синглтона) или 57. Существование графа Мура степени $k = 57$ неизвестно.

Юришич и Видали заметили, что существование графа Мура степени $k > 3$ равносильно существованию дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{k-2, k-3, 2; 1, 1, k-3\}$ (в случае $k = 7$ получим граф Сильвестра с массивом пересечений $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$).

В работе найдены возможнве автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$. В [**2**, лемма 4] доказано, что дистанционно регулярным граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_2 = -1$ имеет сильно регулярный граф Γ_3, причем дополнительный граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_3)$. В нашем случае граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(55, 1)$ (т.е. 56×56-решеткой).

Теорема. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 5, 7\}$ и верно одно из утверждений:

(1) Ω – пустой граф, $p = 7$, $\alpha_3(g) = 8 \cdot 49s$ и $\alpha_1(g) = 105t + 49s$;

(2) Ω является 2-кликой, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 112s - 4$ и $\alpha_1(g) = 12s + 30t - 24$;

(3) Ω содержит геодезический 2-путь и либо $p = 2$, либо $p = 5$ и Ω — граф Сильвестра с массивом пересечений $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$.

Следствие. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$. Если группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин этого графа, то $G/O_2(G)$ — расширение E_{49} с помощью 2-подгруппы из $GL_2(7)$.

Список литературы

[1] Damerell R.M., On Moore graphs, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1973, v. 74, 227-236.

[2] Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular Shilla graphs, Matem. Zametki 2018, v. 103, N 4, 558-571.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com

Об однопорожденной формации

А. П. Мехович

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология из [**1**] – [**3**]. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через $form\mathfrak{X}$ и называют формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. В частности, пишут $formG$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Всякая формация такого вида называется однопорожденной формацией (см. [**1**]). Символы c_n^ω и $\mathfrak{N}_p$ обозначают решетку всех n-кратно ω-композиционных формаций и класс всех p-групп соответственно.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M} = c_n^\omega formA$ – однопорожденная n-кратно ω-композиционная формация, A – простая группа. Тогда формация $\mathfrak{M}$ является атомом решетки c_n^ω в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) если A – ω'-группа, то $\mathfrak{M} = formA$;

2) если $|A| = p$ для некоторого $p \in \omega$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$.

Список литературы

[1] Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.

[2] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. 891 p. (De Gruyter Expo. Math.; vol. 4).

[3] Скиба А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский матем. журн. 2000. Т. 52, N 6. С. 783–797.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск
E-mail: amekhovich@yandex.ru

Конечные группы с полунормальными или абнормальными силовскими подгруппами

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [**1**].

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Группы с некоторыми полунормальными подгруппами исследовались, например, в работах [**2**]–[**7**].

Подгруппа H группы G называется абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. В симметрической группе степени 4 силовская 2-подгруппа одновременно полунормальна и абнормальна.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть в группе G каждая силовская подгруппа полунормальна или абнормальна. Тогда группа G сверхразрешима или $G = G_{r'} \rtimes G_r$ для некоторого $r \in \pi(G)$, подгруппа $G_{r'}$ сверхразрешима, а $G_r = N_G(G_r)$.*

Здесь $G_{r'} \rtimes G_r$ — полупрямое произведение нормальной r'-холловой подгруппы $G_{r'}$ и силовской r-подгруппы G_r группы G.

Следствие. *Если в группе G каждая силовская подгруппа полунормальна или абнормальна, то G имеет силовскую башню и нильпотентная длина группы G не превышает 3.*

Силовская башня у группы из следствия может быть любого типа. Подтверждением служат неабелева группа порядка 6 и знакопеременная группа порядка 12.

Список литературы

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Xiongying Su. On semi-normal subgroups of finite group // Math.J. (Wuhan). 1988. Vol. 8 (1). P. 7–9.

[3] Wang P. Some sufficient conditions of a nilpotent group // Algebra. J. 1992. Vol. 148. P. 289–295.

[4] Подгорная В. В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.–матэм. навук. 2000. N 4. С. 22–25.

[5] Монахов В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Матем. зам. 2006. Том 80, N 4. С. 573–581.

[6] Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Том 46, N 4. С. 448–458.

[7] Guo Wen Bin. Finite groups with seminormal Sylow subgroups // Acta Mathematica Sinica. 2008. Vol. 24, N 10. P. 1751–1758.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com
Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: irina.sokhor@gmail.com

О конечных группах с заданным N-критическим графом

В. И. Мурашко

Все рассматриваемые группы конечны. Используются стандартные обозначения и терминология (см. [**1, 2**]). Напомним, что (p, q)-группой Шмидта называется группа Шмидта G для которой $\pi(G) = \{p, q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p-подгруппу; N-*критическим* графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G будем называть ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$ и (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G имеется (p, q)-подгруппа Шмидта.

Целью данной работы является изучение конечных групп, степени вершин N-критического графа которых не превосходит 2. Через $\bar{\Gamma}$ будем обозначать неориентированный граф на множестве вершин $V(\Gamma)$ и в котором две вершины соединены ребром, если они были соединены в Γ. Через $d_{\bar{\Gamma}(p,q)}$ будем обозначать расстояние между вершинами p и q в $\bar{\Gamma}$ — число рёбер в кратчайшем пути из p в q. Если p и q лежат в различных компонентах связности, то $d_{\bar{\Gamma}}(p, q) = \infty$. Получен следующий результат:

Теорема. *Пусть G — группа, Γ — ориентированный граф на $\pi(G)$ и $deg_\Gamma(p) \leq 2$ для всех $p \in \pi(G)$. Тогда и только тогда $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma$, когда выполняются следующие утверждения*:

(1) *G разрешима.*

(2) *Если $(p, q), (q, p) \in E(\Gamma)$, то холлова $\{p, q\}$-подгруппа G является прямым множителем G.*

(3) *Если $(p, q), (r, p), (r, q) \in E(\Gamma)$, то холлова $\{p, q, r\}$-подгруппа G является прямым множителем G и φ-дисперсивна, где $r <_\varphi p$ и $p <_\varphi q$.*

(4) *Если $(p, q) \in E(\Gamma)$, $(q, p) \notin E(\Gamma)$ и $\nexists r : (r, p), (r, q) \in E(\Gamma)$, то всякий q-элемент группы G перестановочен со всякой силовской p-подгруппой G.*

(5) *Если $d_{\overline{\Gamma}}(p, r) \geq 2$, то всякая холлова $\{p, r\}$-подгруппа G нильпотентна.*

(6) *Если $d_{\overline{\Gamma}}(p, r) \geq 2$ и $\nexists q : (q, p), (q, r) \in E(\Gamma)$, то всякий r-элемент G перестановочен со всяким p-элементом G.*

(7) *Пусть $d_{\overline{\Gamma}}(p, r) = 2$ и $\pi = \{q \mid (q, p), (q, r) \in E(\Gamma)\} \neq \emptyset$. Тогда в G имеется нормальная холлова π-подгруппа H и $[a, b] \in H$ для любых p-элемента a и q-элемента b группы G.*

Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ Ф17РМ-063.

Список литературы

[1] Шеметков, Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[2] Distel, R. Graph theory (third edition). Springer-Verlag, 2005.

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель
E-mail: mvimath@yandex.ru

О бинарных группах Шункова

И. И. Павлюк, Ин. И. Павлюк

Предлагаются исследования периодических слабо бинарных групп Шункова, каждая собственная подгруппа которых является FC-группой. Такие группы обладают нетривиальным нормальным делителем.

Определение [**1**]. Группа G называется (*сопряженно*) q*-бинарной группой Шункова* ($q \in \pi(G)$), если для любой конечной подгруппы K в факторгруппе $N_G(K)/K$ любые два (сопряженных) элемента порядка q порождают конечную подгруппу. Если группа G — (сопряженная) q-бинарная группа Шункова относительно любого $q \in \pi(G)$, то такую группу назовем (*сопряженно*) *бинарной группой Шункова*. Если $K = \{e\}$, то такая группа — *слабо бинарная* (*сопряженная*) *группа Шункова*.

Основной результат сообщения:

Теорема. *Периодическая слабо бинарная группа Шункова, каждая собственная подгруппа которой почти* FC*-группа, не проста.*

Список литературы

[1] Павлюк И.И. О сопряженно примитивно-конечных группах с индексно сравнимыми подгруппами // В кн. “Исследования по алгебраической теории чисел и конструктивной алгебре”. — Алма-Ата: Изд-во АГПИ им. Абая, 1988. — С. 37–47.

ПГУ им. С. Торайгырова, Павлодар; НГПУ, Новосибирск
E-mail: ivan.pavlyuk@mail.ru

Мультипликативная группа поля по модулю подгруппы кручения

К. Н. Пономарев

Рассмотрим произвольное множество простых чисел P. Условимся $\mathbb{Z}_P$ обозначать пополнение аддитивной группы целых чисел элементами обратными к степеням чисел из множества P :

$$\mathbb{Z}_P = \left\{ \frac{n}{m} |\ n \in \mathbb{Z},\ m = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s},\ p_1, \dots p_s \in P,\ n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Такие группы будем называть *пополненными группами.*

Если $s = 0$, то $P = \varnothing$, считаем $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_\varnothing$.

Теорема. *Пусть K – поле алгебраических чисел, K^* его мультипликативная группа, а $T(K)$ – ее группа корней из единицы.*

Утверждается, что фактор – группа $K^*/T(K)$ изоморфна прямой сумме пополненных групп для подходящего счетного количества множеств простых чисел $P_1, P_2, \dots$:

$$K^*/T(K) \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{P_i}.$$

НГТУ, Новосибирск
E-mail: ponomaryov@ngs.ru

Стабилизирующие автоморфизмы целочисленных групповых колец

А. М. Попова, Е. В. Грачев

Мы изучаем автоморфизмы целочисленных групповых колец конечных групп с помощью теории представлений. Если $T_1(G), \cdots, T_s(G)$ — все неприводимые неэквивалентные представления G, то рассмотрим представление

$$D(G) = \{diag(T_1(g), T_2(g), ..., T_s(g)), g \in G\}$$

Очевидно, что $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[D(G)]$. Если χ_i характер представления $T_i(G)$, $Q(\chi_i)$ — поле характера χ_i, $\tau \in Aut(Q(\chi_i))$, τ' — продолжение τ до автоморфизма поля представления $T_i(G)$, то на алгебре $Q[T_i(G)]$ можно определить автоморфизм $\hat{\tau'}$ по правилу $\hat{\tau'}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau'})$.

В статье авторов "Проблема факторизации автоморфизмов целочисленных групповых колец конечных групп" [**1**] получена факторизация автоморфизмов целочисленных групповых колец конечных групп с помощью рассмотрения кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$. В частности, вводится понятие стабилизирующего автоморфизма, который на каждой клетке $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ представляет собой композицию $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$, где φ_s — сопряжение некоторой единицей s алгебры $\mathbb{Q}[T_i(G)]$. Возникает естественный вопрос: для любого ли $\tau \in Aut(\mathbb{Q}(\chi_i))$ найдется такая матрица s, что композиция $\hat{\tau'} \circ \varphi_s$ является автоморфизмом кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$? В этом случае будем говорить, что автоморфизм $\hat{\tau'}$ достраивается до автоморфизма кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$.

Прежде всего заметим, что необходимым условием существования матрицы s является совпадение Q - алгебр: $Q[T_i(G)] = Q[T_i(G)^{\hat{\tau'}}]$. Кроме того, предположим, что индекс Шура для всех представлений $T_i(G)$ равен 1. При этих условиях справедлива

Теорема. *Существует алгоритм, отвечающий на вопрос, достраивается ли изоморфизм $\hat{\tau'}$ до автоморфизма кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $i = 1, \ldots, s$*

Список литературы

[1] Попова А.М., Грачев Е.В. Проблема факторизации автоморфизмов целочисленных групповых колец конечных групп // Algebra and Model Theory 11, Новосибирск 2017, 75-80.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ampopova@ngs.ru

Группы Шункова, насыщенные прямым произведением конечных простых неабелевых групп

И. В. Сабодах, К. А. Филиппов, А. К. Шлепкин

Группа G насыщена группами из множества X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [**3**].

В работе [**2**] рассмотрены периодические группы, насыщенные группами из множества состоящего из одной группы, являющейся прямым произведением конечного числа простых неабелевых групп с тем свойством, что силовские 2-подгруппы данных групп содержат свой централизатор в указанных группах.

Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [**4**].

Пусть G – группа. Если все элементы конечных порядков из G содержаться в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается $T(G)$ [**1**].

Обозначим через A конечную простую неабелеву группу с тем свойством, что централизатор силовской 2-подгруппы S_A группы A лежит в S_A. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех конечных групп, каждая из которых является прямым произведением конечного числа групп изоморфных группе A.

Доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G – группа Шункова, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна прямому произведению групп изоморфных группе A.*

Список литературы

[1] Каргаполов П.Л., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп // М.: Наука, 1982. 288 с.

[2] Сабодах И.В. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп / И.В. Сабодах, А.А. Шлепкин // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика, 2012. Т 12. - N 2. - С. 123–126.

[3] Шлёпкин А.К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами / А.К. Шлёпкин // Математические труды, 1998. Т 1. - N 1. - С. 129–138.

[4] Шунков В.П. Об одном классе p-групп / В.П. Шунков // Алгебра и Логика, 1970. N 4. - С. 484–496.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: sabodax@mail.ru, filippov_kostya@mail.ru
Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск
E-mail: ak_kgau@mail.ru

О минимальных π-разделимых группах

З. Б. Селяева

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — его дополнение во множестве всех простых чисел. Группа называется π-группой, если она периодическая и порядок каждого ее элемента делится только на простые числа из π. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядков элементов G. Группа называется π-разделимой, если она обладает конечным нормальным рядом, каждый фактор которого является π-группой или π'-группой. Такой ряд называется π-рядом, а π-длиной π-разделимой группы называется наименьшее из возможных чисел нетривиальных π-факторов во всех рядах этой группы.

В работе изучается строение локально конечной π-разделимой группы π-длины $m \geq 2$, каждая собственная секция которой имеет π-длину, меньшую m. В частности, доказывается, что любая такая группа конечна и разрешима.

Кабардино-балкарский госуниверситет, Нальчик
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Минимальные системы образующих сплетения циклических групп

Р. В. Скуратовский

Рассмотрим класс венечноциклических групп $\Im$, введенный автором в [**1, 2**], которые имеют вид:

$$G = (\prod_{i_1=1}^{k_1} \mathbb{C}_{n_{i_1}}) \wr (\prod_{i_2=1}^{k_2} \mathbb{C}_{n_{i_2}}) \wr \ldots \wr (\prod_{i_m=1}^{k_m} \mathbb{C}_{n_{i_m}}), \ 1 \le k_i \le \infty, \ \ G \in \Im.$$

Теорема 1. *Если порядки циклических групп $\mathbb{C}_{n_i}$, $\mathbb{C}_{n_j}$ взаимно просты, для $i \neq j$, то группа $\mathbb{C}_{n_1} \wr \mathbb{C}_{n_2} \ldots \wr \mathbb{C}_{n_m}$ имеет два образующих.*

*В качестве образующих группы $\mathbb{C}_{n_1} \wr \mathbb{C}_{n_2} \ldots \wr \mathbb{C}_{n_m}$ корневой автоморфизм β_0 и направленный автоморфизм β_1 [**3**] вдоль пути l на корневом регулярном дереве T_X. Образующий β_1 представим в виде венечной рекурсии [**2, 1**]. Состояние β_2 автоморфизма β_1 также задано в виде венечной рекусии $\beta_2 = \underbrace{(\pi_{i_2}, e, ..., e, \beta_3)}_{i_1}$. В общем случае $\beta_k = \underbrace{(\pi_{i_k}, e, ..., e, \beta_{k+1})}_{i_{k-1}}$ где, $C_{i_k} = \langle \pi_{i_k} \rangle$. Последнее состояние β_m наделено другой структурой $\beta_m = (\pi_m, e, ..., e)$. Обозначим порядок автоморфизма β_i как $|\beta_i|$. Пусть группа $\wr_{j=0}^{n} C_{i_j} = \langle \beta_0, \beta_1 \rangle$ а группа $\wr_{l=0}^{m} C_{k_l} = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$.*

Теорема. *Если $(|\alpha_0|, |\beta_0|) = 1$ и $(|\alpha_1|, |\beta_1|) = 1$ или $(|\alpha_0|, |\beta_1|) = 1$ и $(|\alpha_1|, |\beta_0|) = 1$, то существует двухэлементая система образующих для группы $G = (\wr_{j=0}^{n} C_{i_j}) \times (\wr_{j=0}^{m} C_{k_j})$, где порядки i_j всех C_{i_j} а также порядки k_j всех C_{k_j} попарно взаимно-просты для $j > 1$.*

Система образующих в виде таблиц Калужнина [**3**] для $(\mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}_m)'$, где $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_m$ представлены в аддитивной форме, следующая:

$$h_1 = (1; 0, 0, ..., m-1)\,, h_2 = (0; 1, 0, ..., m-1)\,, \ \ldots, h_n = (0; 0, ..., 1, m-1)\,.$$

При этом координаты каждой таблицы удовлетворяют соотношению $h_{i1} + ... + h_{in} \equiv 0 \pmod m$.

Список литературы

[1] Скуратовский Р. В. Минимальные системы образующих для венечноциклических групп, групп автоморфизмов графов Риба и фундаментальных групп орбит некоторых функций Морса, 11 Летняя школа Алгебра, Топология, Анализ, с. 121–123, 2016.

[2] Skuratovskii R. V. Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups. Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences. (2018), no. 2, pp. 31-49. Source: https://link.springer.com/article/10.1007/s40863-018-0085-0.

[3] Grigorchuk.R., Laurent Bartholdi. Branch Groups. Handbook of algebra 3, Universitie de Genieve, 2005. P. 989-1112. https://www.math.tamu.edu/~grigorch/publications/handbook.pdf.

МАУП, Киев
E-mail: ruslan@imath.kiev.ua

О группах с энгелевыми элементами

А. И. Созутов

Элемент a произвольной группы G называется *энгелевым* [**1**, стр. 541], если для любого элемента $b \in G$ существует такое зависящее от него натуральное число $n = n(b)$, что выполняется равенство $[...[[b,a],a],...,a] = [b,{}_n a] = 1$; если при этом число n можно выбрать одно и то же для всех $b \in G$, то элемент a называется *ограниченно энгелевым* или n*-энгелевым.* Группы с энгелевыми элементами изучались многими авторами [**1**, стр. 540-544]. Элемент a называется *конечным* в группе G, если в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^b \rangle$; так, например, энгелев элемент a порядка 2 является конечным в любой группе. Отметим также, что в случае конечного энгелева элемента a все подгруппы $\langle a, a^b \rangle$ будут нильпотентными. Как доказано в [**2**], существуют двупорожденные бесконечные финитно-аппроксимируемые p-группы, состоящие из конечных энгелевых элементов. В [**3**] доказано существование двупорожденных бесконечных простых непримарных групп ограниченного четного периода, в которых каждая инволюция является конечным ограниченным энгелевым элементом, в частности при $p = 2$ получен отрицательный ответ на вопрос 11.11 а) А.В. Боровика из [**4**]. Из теорем 2, 3 этой статьи также следует отрицательный ответ на один вопрос Б.И. Плоткина, записанный в [**4**] В.В. Блудовым под номером 16.15 а). В [**4**] много вопросов о группах с энгелевыми элементами, в некоторых из них энгелевы элементы присутствуют неявно, как, например, в вопросах 6.56, 12.100, или 17.3. В отправленной в печать статье [**5**] найден ряд условий, при которых конечный энгелев элемент a группы G принадлежит ее радикалу Плоткина-Хирша $PH(G)$. Когда $C_G(a)$ — артинова группа, то G — артинова группа и $\langle a^G \rangle$ — локально нильпотентная черниковская $\pi(|a|)$-группа (теорема 3). Прямыми следствиями теорем 2, 3, 5 статьи являются основные результаты из [**6**] и теорема 2.3 из [**7**]. Другие следствия касаются упомянутых выше вопросов из Коуровской тетради.

Список литературы

[1] Курош А. Г., Теория групп. М., Наука, 1967, 648 с.
[2] Созутов А.И., О ниль-радикалах в группах // Алгебра и логика, Т. 30 (1991), N 1.– С. 102-105.
[3] Мазуров В.Д., Ольшанский А.Ю., Созутов А.И., О бесконечных группах конечного периода // Алгебра и логика.– Т. 54 (2015), N 2.– С. 243-251.
[4] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 18 издание, Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2014.
[5] Созутов А.И., О группах с конечным энгелевым элементом // (статья отправлена в печать).
[6] Шунков В.П., Об одном классе p-групп // Алгебра и логика.– 1970.– Т. 9, 4.– С. 484-496.
[7] Шунков В.П., Мр-группы.– М.: Наука, 1990.

СФУ, Красноярск
E-mail: sozutov_ai@mail.ru

Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова

Пусть Γ — произвольный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E (петли и кратные ребра не допускаются), каждой вершине $v \in V$ сопоставлена некоторая группа A_v, каждому ребру $e = \{v, w\} \in E$ — группа H_e и вложения $\varphi_{ev}\colon H_e \to A_v$, $\varphi_{ew}\colon H_e \to A_w$. Обобщенным прямым произведением, соответствующим графу групп Γ, будем называть группу G, образующими которой являются образующие групп A_v $(v \in V)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп A_v $(v \in V)$, а также всевозможные соотношения вида $[a_v, a_w] = 1$ $(a_v \in A_v,\ a_w \in A_w$ $v, w \in V,\ v \neq w)$ и $h\varphi_{ev} = h\varphi_{ew}$ $(e = \{v, w\} \in E,\ h \in H_e)$. Иначе говоря, обобщенное прямое произведение G — это фактор-группа обычного прямого произведения групп A_v по нормальному замыканию множества элементов вида $(h\varphi_{ev})^{-1}(h\varphi_{ew})$.

Будем говорить, что обобщенное прямое произведение G существует, если для каждого $v \in V$ тождественное отображение порождающих группы A_v в группу G продолжается до изоморфного вложения. Имеет место

Теорема 1. *Если обобщенное прямое произведение G существует, то для каждого ребра $e = \{v, w\} \in E$ подгруппа $H_e\varphi_{ev}$ лежит в центре группы A_v и подгруппа $H_e\varphi_{ew}$ лежит в центре группы A_w. Обратное верно, если граф Γ является деревом, а также в случае, когда Γ представляет собой простой цикл длины, большей 3, и для любых двух ребер $e, f \in E$, инцидентных одной вершине $v \in V$, $H_e\varphi_{ev} \cap H_f\varphi_{fv} = 1$.*

Сформулированная теорема может быть использована при изучении аппроксимируемости некоторых известных теоретико-групповых конструкций корневыми классами групп (напомним, что класс групп $\mathcal{K}$ является корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$). В частности, с его помощью получаются следующие два утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп, P — древесное произведение конечного числа групп F_v $(v \in V)$ с центральными объединенными подгруппами. Если все группы F_v $(v \in V)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$, то группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу, X — HNN-расширение некоторой группы B с центральными связанными подгруппами. Если $B \in \mathcal{K}$, то группа X $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 18-31-00187).

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru, helenfog@bk.ru

Об абелевых подгруппах группы ограниченных подстановок

Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова

Подстановка g множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ называется ограниченной, если

$$w(g) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Изучаются подгруппы группы G всех ограниченных подстановок множества $\mathbb{N}$.

Теорема 1. *Любая счетная периодическая абелева группа изоморфно вкладывается в группу G.*

Теорема 2. *Каждая счетная свободная абелева группа изоморфна подгруппе группы G.*

Теорема 3. *Группа рациональных чисел по сложению не изоморфна никакой подгруппе группы G.*

СФУ, Красноярск
E-mail: ns7654321@mail.ru

Порождаемость групп Шевалле $E_l(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны

И. А. Тимофеенко

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней. Через $\Phi(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ обозначим присоединенную группа Шевалле типа Φ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$. Она порождается корневыми подгруппами $X_r = \{x_r(t) \mid t \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i\},\ r \in \Phi$ [**1**, следствие 3, с. 107]. Придерживаясь обозначений из [**2**], определим мономиальные и диагональные элементы соответственно

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t),$$
$$h_r(t) = n_r(t)n_r(-1),\ r \in \Phi,\ t \in \{\pm 1, \pm i\},$$
$$n_r = n_r(1),$$
$$h_r = h_r(-1).$$

Теорема. *Присоединенные группы Шевалле типа E_l над кольцом целых гауссовых чисел порождаются инволюциями α_1, α_2 и α_3 из приведенной ниже таблицы, причем $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$.*

Группа	α_1	α_2	α_3
$E_6(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$	$x_{r_1}(i)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}h_{r_2}h_{r_4}h_{r_6}$
$E_7(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$	$x_{r_1}(i)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}h_{r_3}h_{r_5}h_{r_7}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}$
$E_8(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$	$x_{r_1}(i)x_{r_1+r_2}(1)h_{r_2}$	$n_{r_2}n_{r_4}n_{r_6}n_{r_8}h_{r_5}h_{r_1}$	$n_{r_1}n_{r_3}n_{r_5}n_{r_7}h_{r_6}h_{r_2}$

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект N 18-71-10007.

Список литературы

[1] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 262 с.
[2] Carter R.W., Simple Groups of Lie Type, John Wiley and Sons, 1972.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: ivan.timofeenko@gmail.com

Об однородных кольцах и алгебрах

Е. И. Тимошенко

Для любого конечного упорядоченного набора $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ элементов из модели $\mathcal{M}$ определим множество $tp^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ формул $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ языка первого порядка $\mathcal{L}$ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ таких, что $\mathcal{M} \models \theta(a_1, \ldots, a_n)$. Модель $\mathcal{M}$ назовём логически однородной, если для любых конечных наборов элементов $\overline{a}$, $\overline{b} \in \mathcal{M}^n$ из совпадения $tp^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ и $tp^{\mathcal{M}}(\overline{b})$ следует, что эти наборы переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом модели $\mathcal{M}$.

Доказана логическая однородность целочисленных групповых колец конечно порожденных относительно свободных упорядочиваемых групп, конечно порожденных нильпотентных свободных ассоциативных колец и алгебр, конечно порожденных свободных нильпотентных алгебр Ли и колец Ли.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: eitim@gmail.com

Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с объединенными ретрактами

Е. А. Туманова

Пусть T — произвольное дерево с множеством вершин V и множеством ребер E, каждой вершине $v \in V$ сопоставлена некоторая группа A_v, каждому ребру $e = \{v, w\} \in E$ — группа H_e и вложения $\varphi_{ev}\colon H_e \to A_v$, $\varphi_{ew}\colon H_e \to A_w$. Древесным произведением групп A_v $(v \in V)$ с подгруппами $H_e\varphi_{ev}$ и $H_e\varphi_{ew}$, объединенными при помощи изоморфизмов φ_{ev} и φ_{ew} $(e = \{v, w\} \in E)$, называется группа G, образующими которой являются образующие групп A_v $(v \in V)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп A_v $(v \in V)$, а также всевозможные соотношения вида $h\varphi_{ev} = h\varphi_{ew}$ $(e = \{v, w\} \in E,\ h \in H_e)$.

В настоящей работе исследуется аппроксимируемость древесных произведений произвольным корневым классом групп. Напомним, что класс групп $\mathcal{K}$ является корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.

Основным результатом работы служит

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп, G — древесное произведение групп, определенное выше. Если все группы A_v $(v \in V)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и для каждого ребра $e = \{v, w\} \in E$ подгруппы $H_e\varphi_{ev}$ и $H_e\varphi_{ew}$ являются ретрактами в группах A_v и A_w соответственно, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Сформулированная теорема обобщает результаты работ [**1, 2**] об аппроксимируемости корневыми классами свободного произведения групп с объединенными ретрактами. Также с ее помощью может быть доказана

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу, $X = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$ — HNN-расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы B с подгруппами $H \leqslant B$ и $K \leqslant B$, связанными посредством некоторого изоморфизма $\varphi\colon H \to K$. Если подгруппы H и K являются ретрактами в группе B, то группа X $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00187).

Список литературы

[1] Азаров Д. Н., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29–42.

[2] Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Модел. и анализ информ. систем. 2013. V. 20, N 1. С. 133–137.

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: helenfog@bk.ru

Прямые произведения конечных простых неабелевых групп в периодических группах

Л. Р. Тухватулина, А. К. Шлепкин

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ [**2**]

Обозначим через $\mathfrak{N}$ – множество всех конечных простых неабелевых групп, $\mathfrak{R}$ – множество всех конечных простых неабелевых групп с тем свойством, что централизатор силовской 2-подгруппы в рассматриваемых группах содержит элемент нечетного порядка.

Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} - \mathfrak{R} = \{L_i | i \in I\}$, где I – множество индексов. Пусть $\mathfrak{Y}$ – конечное множество групп, каждая из которых является прямым произведением конечного числа групп из множества $\mathfrak{M}$. Доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G – периодическая группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{Y}$. Тогда G изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{Y}$.*

В [**1**] приведенная выше теорема доказана в классе периодических групп при условии, что множество $\mathfrak{Y}$ состоит из одной группы.

Список литературы

[1] Сабодах И.В. Группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых неабелевых групп / И.В. Сабодах, А.А. Шлепкин // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика, 2012. Т 12. - N 2. - С. 123–126.

[2] Шлепкин, А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья междунар. конф. по алгебре, 23-28 авг. 1993: Сб. тез. Красноярск, 1993.

Башкирский государственный аграрный университет, Уфа
E-mail: lyaisan_78@mail.ru
Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск
E-mail: ak_kgau@mail.ru

Критерий универсальности матрицы в подгруппе группы $UT_n(R)$ над коммутативным и ассоциативным кольцом R с единицей

Н. Г. Хисамиев, Д. А. Тусупов, С. Д. Тыныбекова, А. А. Конырханова

Элемент g группы G называется универсальным, если уравнение $[g, x] = f$ разрешимо для любого элемента f из коммутанта G' группы G.

Теорема 1. *Пусть для подгруппы H группы $UT_n(R)$ унитреугольных матриц размерности $n > 2$ над коммутативным и ассоциативным кольцом R с единицей справедливы следующие условия:*

1. Коммутант H' содержит матрицы $a^{(i)}$ и c такие, что справедливы: $a^{(i)}_{i-1,i+1} = 1$, $a^{(i)}_{i,i+2} = 0$, $1 < i < n-1$, и $c = e + e_{1,n}$.

2. Для любых матриц $g, h \in H$ найдется матрица (g, h) из H такая, что $(g, h)_{i-1,i+1} = g_{i-1,i}h_{i+1,i+2} - h_{i-1,i}g_{i+1,i+2}$, $1 < i < n-1$, содержится в H.

Тогда матрица $u \in H$ универсальна в H если и только если справедливы условия:

a) элементы $u_{i,i+1}, 1 < i < n-1$, первой побочной диагонали матрицы u обратимы в R,

b) элементы $u_{1,2}, u_{n-1,n}$ взаимно просты, т.е. найдутся элементы $r_0, r_1 \in R$ такие, что $u_{1,2}r_0 + u_{n-1,n}r_1 = 1$.

Следствие 1. *Матрица u группы $UT_n(R)$ всех унитреугольных матриц размерности $n > 2$ над коммутативным и ассоциативным кольцом с единицей 1 универсальна тогда и только тогда, когда справедливы условия: a) элементы $u_{i,i+1}, 1 < i < n-1$, первой побочной диагонали матрицы u обратимы в R, b) элементы $u_{1,2}, u_{n-1,n}$ взаимно просты, т.е. найдутся элементы $r_0, r_1 \in R$ такие, что $u_{1,2}r_0 + u_{n-1,n}r_1 = 1$.*

Теорема 2. *Существует конечно порожденная подгруппа H группы $UT_n(R)$, $n > 4$, унитреугольных матриц над коммутативным и ассоциативным кольцом R с единицей 1, имеющая универсальную матрицу u и для любой матрицы $h \in H$ верно равенство: $h_{n-1,n} = 0$.*

Пусть (K, α) — вычислимое коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей 1. Тогда существует вычислимая нумерация α^* группы $UT_n(K)$ над кольцом K.

Следствие 2. *Пусть H - вычислимо перечислимая подгруппа группы $\langle UT_n(K), \alpha^* \rangle$, где $n > 3$, такая, что справедливы условия 1 и 2 теоремы 1. Тогда множество универсальных матриц подгруппы H вычислимо перечислимо.*

Следствие 3. *Если множество обратимых элементов нумерованного кольца (K, α) вычислимо и H - вычислимо перечислимая подгруппа группы $\langle UT_n(K), \alpha^* \rangle$ такая, что справедливы условия 1,2 теоремы 1 и $h_{n-1,n} = 0$ или $h_{1,2} = 0$ для любой матрицы $h \in H$, то множество универсальных элементов подгруппы H вычислимо.*

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, Астана
E-mail: hisamiev@mail.ru, ErkeshanK@mail.ru

О существовании разрешимых холловых подгрупп

А. П. Храмова

Пусть G — конечная группа, а π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Символом $\pi(G)$ будем обозначать множество простых делителей порядка G.

В 1956 году, Ф. Холл в [**1**] предположил, что группа G разрешима если для любых $p, q \in \pi(G)$ она обладает $\{p, q\}$-холловой подгруппой. Эта гипотеза была впоследствии доказана З. Арадом и М. Вардом в [**2**] с использованием классификации конечных простых групп.

В работе доказывается обобщение этой гипотезы, которое является критерием существования разрешимой холловой подгруппы:

Теорема 1. *В G существует разрешимая π-холлова подгруппа тогда и только тогда, когда G обладает $\{p, q\}$-холловой подгруппой для любых $p, q \in \pi$.*

Первый этап доказательства теоремы заключается в сведении к случаю почти простых групп. В [**3**] Ф. Гросс получил достаточное условие существование холловой подгруппы в конечной группе. Теорема 2 является частичным аналогом этого условия.

Теорема 2. *Пусть композиционный ряд $1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_n = G$ является уплотнением главного ряда группы G. Если группа $Aut_G(G_i/G_{i-1})$ обладает разрешимой π-холловой подгруппой для любого $1 \leqslant i \leqslant n$, то и сама G обладает разрешимой π-холловой подгруппой.*

Вторым этапом является рассмотрение простых групп. Следующее предложение доказано на основе классификации холловых подгрупп конечных простых групп, полученной Ф. Гроссом, Д.О. Ревиным и Е.П. Вдовиным.

Предложение. *Пусть S — конечная простая группа, и π такое, что $|\pi \cap \pi(S)| \geqslant 3$. Группа S обладает разрешимой π-холловой подгруппой тогда и только тогда, когда в S есть $\{p, q\}$-холлова подгруппа для любых p, $q \in \pi$. Кроме того, все классы сопряжности таких подгрупп инвариантны относительно группы автоморфизмов.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 18-31-20011).

Список литературы

[1] Hall P. Theorems like Sylow's. Proc. London Math. Soc. (3) 6 (1956), 286–304.
[2] Arad Z., Ward M. New criteria of solvability of finite groups. J. Algebra 77 (1982), 234–246.
[3] Gross F. On the Existence of Hall subgroups. J. Algebra 98:1 (1986), 1–13.

НГУ, Новосибирск

Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1 и группами $L_3(2^n)$

А. А. Шлепкин

Говорят, что группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. В Коуровской тетради [2] поставлен вопрос 14.101:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничины в совокупности, сама является простой группой лиева типа?

Получен частичный ответ на этот вопрос для групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1 и групами $L_3(2^n)$. Положим

$$\mathfrak{D} = \{L_2(f), U_3(h), Sz(2^{2m+1}), Re(3^{2n+1}) | f > 3, h > 2, m \geqslant 1, n \geqslant 1\} -$$

множество всех конечных простых групп лиева типа ранга 1,

$$\mathfrak{C} = \{L_3(2^k) \mid k - \text{ не фиксированное}\},$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{D} \cup \mathfrak{C}.$$

Теорема. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$ Тогда G изоморфна одной из групп следующего множества*

$$\{L_2(F), U_3(H), Sz(P), Re(Q), L_3(R)\},$$

где F, H, P, Q, R — локально конечные поля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 18-31-00257.

Список литературы

[1] Шлепкин А.К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы, Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, 1993.

[2] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 18-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2014.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru

Периодические группы Шункова, насыщенные конечными простыми группами $L_4(2^n)$

А. А. Шлепкин, И. М. Зубаренко

Говорят, что группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [**1**]. В Коуровской тетради [**2**] поставлен вопрос 14.101:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничины в совокупности, сама является простой группой лиева типа?

В [**3, 4**] привидено решение данного вопроса для периодических групп и редакции данного вопроса для групп Шункова, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1. Естественныи шагом для полного решения вопроса 14.101 является рассмотрение групп, насыщенных группами лиева типа более высоких рангов.

Теорема. *Пусть периодическая группа Шункова G насыщена конечными группами из множества $\{L_4(2^n)\}$, где n — не фиксируется. Тогда G изоморфна $L_4(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2.*

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект N 18-71-10007.

Список литературы

[1] Шлепкин А.К., Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы, Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, 1993.

[2] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 18-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2014.

[3] Шлепкин А. А., Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1, Алгебра и логика, 57:1 (2018), 118–125; Algebra and Logic, 57:1 (2018), 81–86.

[4] Шлепкин А. А., Об одном достаточном условии существования периодической части в группе Шункова, Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика, 22 (2017), 90–105.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru, imzubarenko@mail.ru

Equitable 2-partitions of Star graphs

S. V. Avgustinovich, I. Yu. Mogilykh

A r-partition $C_1, \dots, C_r$ of the vertex set of a graph is called equitable if for any $i, j \in \{1, \dots, r\}$ a vertex from C_i has exactly A_{ij} neighbors in C_j. The matrix $A = (A_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,r\}}$ is called the quotient matrix of the partition.

The Star graph $St(n)$ is the Cayley graph of the symmetric group $Sym(n)$ with generators $\{(1, i) : i \in \{2, \dots, n\}\}$. The studies of the spectral theory of the Cayley graphs of the symmetric group are motivated by representation theory of the symmetric group. The integrality of several classes of Cayley graphs was proven in [**6**]. The eigenvalues of $St(n)$ are all integers $i, -(n-1) \leq i \leq (n-1)$ [**3**] that follows from spectra of Justys-Murphy elements. The multiplicities of the eigenvalues were studied in [**2**] and the largest nontrivial eigenvalue $n-2$ was shown to have multiplicity $(n-1)(n-2)$. In work [**5**] an explicit basis for eigenspace for eigenvalue $n-2$ is found and a reconstruction property for eigenvectors by its partial values is proven.

The star graph $St(n)$, for any $n \geq 3$ has 1-perfect code [**1**]. In other words, there is an equitable 2-partition of $St(n)$ with the quotient matrix $\begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & n-2 \end{pmatrix}$. The problem of existence of perfect codes in Hamming graphs (Cayley graphs of the elementary abelian groups) was one of the main topics in coding theory solved in 70s. Recently, the study of the codes in Cayley graphs of the symmetric group is spurred by their usage in flash memory storage[**4**].

Theorem. *1. The following matrices are feasible quotient matrices of equitable 2-partitions of $St(4)$:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

2. There is an equitable 2-partition of $St(5)$ with the quotient matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

This work was partially supported by RFBR 18-01-00353A.

References

[1] Arumugam S., Kala R. Domination parameters of star graphs. Ars. Combin. 44 (1996), 93-96.

[2] Avgustinovich S. V., Khomyakova E. N., Konstantinova E. V. Multiplicities of eigenvalues of the Star graph, SEMR, 13 (2016), 1258-1270.

[3] Chapuy G., Feray V. A note on a Cayley graph of Sym(n), arXiv:1202.4976v2 (2012), 1-3.

[4] Etzion T., Buzaglo S. Bounds on the Size of Permutation Codes With the Kendall tau-Metric, IEEE Trans. Inform. Theory 61,6 (2015), 3241-3250.

[5] Goryainov S., Kabanov V. V., Konstantinova E., Shalaginov L., Valyuzhenich A. PI-eigenfunctions of the Star graphs, February 2018. arXiv:1802.06611

[6] Revin D., Integerlity of some Cayley graphs, Abstracts of Graphs, Groups, Representations and Relations, P. 78.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: avgust@math.nsc.ru, ivmog@math.nsc.ru

On finite groups with exactly four conjugate classes of maximal subgroups

V. A. Belonogov

A finite group is called nM-group, where n is a positive integer, if it have exactly n conjugacy classes of maximal subgroups. Finite $1M$-groups are evidently primary cyclic. Finite $2M$-groups and $3M$-groups were described by G. Pazderski [**1**] and the author [**2**], respectively. The investigation of the finite $4M$-groups was begin in the paper [**3**] in which the finite simple $4M$-groups were described (they are $PSL_2(q)$ for some suitable q, $PSL_3(3)$, $PSU_3(q)$ for $q = 3$ or $q = 2^{2^m}$ ($m \in \mathbb{N}$) and $Sz(2^r)$ for an odd prime r). In this we described also the finite nonsimple $4M$-groups having no normal maximal subgroup.

In the paper [**4**], we considered the finite nonsolvable $4M$-groups G which have normal subgroups of prime index p. Here we prove (see Theorem 3) that if $\Phi(G) = 1$ then one of the following conditions holds:

(1) $G = P \times L$, where $|P| = p$ and L is a simple 3M-group;

(2) G has the unique minimal normal subgroup $S = L_1 \times \cdots \times L_t$, where $L_1, \ldots, L_t$ are isomorphic simple nonabelian groups, p and t divide $|G/S|$ and G/S is a (solvable) 1M- or 2M-group.

Now we investigate $4M$-groups of type (2) for $t = 1$, i.e., almost simple $4M$-groups. First of all, we find one infinite series of such groups.

Proposition 1. *For any prime r, there exists an almost simple $4M$-group with the socle $S \cong L_2(2^r)$, namely, the group $Aut(S) \cong P\Sigma L_2(2^r) \cong L_2(2^r).Z_r$.*

Proposition 2. *Let G be a finite almost simple group with the socle S. Suppose that S has some four G-invariant classes of maximal subgroups. Then G is not $4M$-group.*

Note that all almost simple $4M$-groups considered in [**5**] are determined in [**6**].

References

[1] Pazderski G., Über maximal Untergruppen endlicher gruppen. Math. Nachr. 26 (1964) 307–319.

[2] Belonogov V. A., Finite groups with three classes of maximal subgroups. Mat. Sbornik 131 (1986) 225–239. (Angl. transl. in: Math. USSR-Sb., 59 (1988) 223–236.

[3] Belonogov V. A., Finite groups with four classes of maximal subgroups. I. Tr. Inst. mat. mech. UrO RAN, 2017, V. 23, no. 4, 52–62.

[4] Belonogov V. A., Finite groups with four classes of maximal subgroups. II. Siberian Electr. Math. Rep. 15 (2018, 86–91.

[5] Conway J. H. [et. al.] Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press. (1985) 252 p.

[6] Belonogov V. A., Finite groups with four classes of maximal subgroups. Group theory and its applications: materials of XII school-conf. on group theory, dedicated to 65 anniversary of A. A. Makchnev. Krasnodar: Kubansky State University, 2018.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg (Russia)
E-mail: belonogov@imm.uran.ru

What do Frobenius's, Solomon's, and Iwasaki's theorems on divisibility in groups have in common?

E. K. Brusyanskaya, A. A. Klyachko, A. V. Vasil′ev

In this talk we present the result that contains as special cases the Frobenius theorem (1895) on the number of solutions to the equation $x^n = 1$ in a group, the Solomon theorem (1965) on the number of solutions in a group to a system of equations having less equations than unknowns, and the Iwasaki theorem (1985) on roots of subgroups. There are other curious corollaries of this result on groups and rings.

Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University, Moscow
E-mail: ebrusianskaia@gmail.com, klyachko@mech.math.msu.ru
Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: vasand@math.nsc.ru

Isomorphism problem for coherent configurations associated with $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups

D. V. Churikov, A. V. Vasil′ev

Let G be a permutation group on a finite set Ω. Denote the set of its 2-orbits, that is the orbits of the componentwise action of G on $\Omega \times \Omega$, by $\mathrm{Orb}_2(G)$. The pair $\mathrm{Inv}(G) = (\Omega, \mathrm{Orb}_2(G))$ is called a schurian coherent configuration associated with G. An isomorphism of colored coherent configurations $\mathcal{X} = (\Omega, S)$ and $\mathcal{X}' = (\Omega', S')$ with respect to a coloring bijection $\psi : S \to S'$ is a bijection $\varphi : \Omega \to \Omega'$ such that $s^\varphi = \{(\alpha^\varphi, \beta^\varphi) : (\alpha, \beta) \in s\} = s^\psi$ for all $s \in S$. Denote the set of all such isomorphisms by $\mathrm{Iso}(\mathcal{X}, \mathcal{X}', \psi)$. In the particular case, where $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ and $\psi = \mathrm{id}_S$ is the identity map on S, the set $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}) = \mathrm{Iso}(\mathcal{X}, \mathcal{X}, \mathrm{id}_S)$ is the automorphism group of $\mathcal{X}$. If $\mathcal{X} = (\Omega, \mathrm{Orb}_2(G))$ is associated with a permutation group G, then $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ is the so-called 2-closure of G, i. e. the largest permutation group on Ω having the same 2-orbits as G. Here we are interested in the following two problems.

2-Closure problem. Given a permutation group G on a finite set Ω, find 2-closure of G.

Isomorphism problem for schurian colored coherent configurations. Given two permutation groups G and G' on a finite set Ω and a bijection ψ between $\mathrm{Orb}_2(G)$ and $\mathrm{Orb}_2(G')$. Find the set $\mathrm{Iso}(\mathrm{Inv}(G), \mathrm{Inv}(G'), \psi)$.

In this talk we present polynomial-time algorithms to solve these problems in the case when the coherent configurations are associated with $\frac{3}{2}$-transitive groups. Recall that G is a $\frac{3}{2}$-transitive permutation group on a set Ω, if it is a non-regular transitive group with equal-sized orbits of a point stabilizer G_α on the set $\Omega \setminus \alpha$.

Theorem 1. The 2-closure problem for the $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups of degree n can be solved in time polynomial in n.

Theorem 2. The isomorphism problem for the schurian colored coherent configurations associated with $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups of degree n can be solved in time polynomial in n.

It is worth mentioning that one of the key tools of our proof is the recent classification of $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups [**1**].

The work was funded by RFBR according to the research project No 18-01-00752.

References

[1] Liebeck M.W., Praeger C.E. and Saxl J., The classification of $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups and $\frac{1}{2}$-transitive linear groups, to appear in Proc. Amer. Math. Soc., (see arXiv: 1412.3912).

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: churikovdv@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: vasand@math.nsc.ru

Reidemeister spectra of finite groups

V. E. Leshkov

Let $\varphi : G \to G$ be an automorphism of a group G. Elements $g, f \in G$ are termed $\varphi-$*twisted conjugated*, denoted by $g \sim_\varphi f$, if there exists $x \in G$ such that $g = (x\varphi)^{-1} f x$, or equivalently $(x\varphi)g = fx$. Twisted conjugation is an equivalence relation on G, its equivalence classes are called *Reidemeister classes* (or $\varphi-$*conjugacy classes*). The cardinality $R(\varphi)$ of Reidemeister classes is called *Reidemeister number of* φ. The *Reidemeister spectrum* of G is defined by

$$Spec_R(G) = \{R(\varphi) | \varphi \in Aut(G)\}.$$

We consider a new notion of the *extended Reidemeister spectrum* that includes full description of the Reidemester classes, namely, we add the information about cardinality of the set of the Reidemester classes corresponding to any given Reidemeister number. We compute the extended Reidemeister spectrum for some finite p-groups and for some infinite nilpotent groups. Also we give a description in a more general setting.

The participant was supported by a travel grant provided due to Prof. H.P. Sankappanavar.

Omsk State University, Omsk
E-mail: silverr41@gmail.com

Characterizations of simple linear groups in the class of periodic groups

D. V. Lytkina, V. D. Mazurov

Let $\mathfrak{M}$ be a set of groups. A group G is *saturated* with groups of $\mathfrak{M}$ if every finite subgroup of G is contained in a subgroup of G isomorphic to some member of $\mathfrak{M}$. For example, a simple group $L_2(P) = PSL(2,P)$ where P is a locally finite field of prime characteristic p is saturated with groups of the set $\mathfrak{M} = \{PSL(2,q), q = p^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Conjecture. Let $L = X(P)$ be a simple group of Lie type X over a locally finite field $P, \mathfrak{P}$ the set of finite subfields of P and $\mathfrak{M} = \{X(Q) | Q \in \mathfrak{P}\}$. If G is a periodic group saturated with groups of $\mathfrak{M}$ then $G \simeq X(P_0)$ for some subfield P_0 of P.

Currently this conjecture is confirmed for all groups of Lie type of Lie rank one. Moreover the following results are proved.

Theorem 1. *Let G be a periodic group saturated with the set of all finite simple symplectic groups $S_4(q)$. Then $G \simeq S_4(P)$ for some locally finite field P.*

Theorem 2. *Let G be a periodic group saturated with the set of all finite simple groups ${}^3D_4(q)$ and $G_2(q)$ over finite fields of odd characteristics. Then G is locally finite and isomorphic to ${}^3D_4(P)$ or $G_2(P)$ for some locally finite field P.*

The work is supported by the Russian Science Foundation (grant 14-21-00065).

Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk (Russia)
E-mail: daria.lytkin@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: mazurov@math.nsc.ru

Examples of finite groups recognizable by isomorphic type of Gruenberg–Kegel graph

N. V. Maslova, M. R. Zinovieva

The Gruenberg–Kegel graph (*or the prime graph*) of a finite group G is a graph whose vertex set is the set $\pi(G)$ of all prime divisors of the order of G, and two distinct vertices p and q are adjacent in $\Gamma(G)$ if and only if pq is an element order of G.

Let G and H be finite groups. We write $\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$ if $\Gamma(G)$ and $\Gamma(H)$ are isomorphic as abstract graphs. For example, $\Gamma(A_{10}) \cong \Gamma(Aut(J_2))$, but $\Gamma(A_{10}) \neq \Gamma(Aut(J_2))$.

A group G is *recognizable by Gruenberg-Kegel graph* if for any group H, the equality $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ implies the isomorphism $G \cong H$. Let us define G to be *recognizable by isomorphic type of Gruenberg-Kegel graph* if for any group H the equality $\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$ implies the isomorphism $G \cong H$.

In [**1**] A. Zavarnitsine proved that if $\Gamma(G)$ has exactly 6 connected components, then $G \cong J_4$. In particular, J_4 is recognizable by isomorphic type of Gruenberg-Kegel graph. In the present work, we provide several more examples of groups recognizable by isomorphic type of Gruenberg-Kegel graph. We prove the following theorem.

Theorem. *The groups* ${}^2G_2(27)$ *and* $E_8(q)$ *for* $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$ *are recognizable by isomorphic type of Gruenberg-Kegel graph.*

Acknowledgments. The first author is very thankful to Prof. Tatsuro Ito and Prof. Ilia Ponomarenko for discussions during the conference 2018 IWGRR in Chongqing (China) which pushed her to start this research.

References

[1] Zavarnitsine A. V., Recognition of finite groups by the prime graph, Algebra and Logic. 45:4 (2006), 220–231.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg (Russia)

E-mail: butterson@mail.ru, zinovieva-mr@yandex.ru

Relations between the additive and the multiplicative groups of a two-sided skew brace

T. Nasybullov

A skew brace $A = (A, \oplus, \odot)$ is an algebraic system with two binary algebraic operations $\oplus$, $\odot$ such that $A_\oplus = (A, \oplus)$, $A_\odot = (A, \odot)$ are groups and the equality

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \ominus a \oplus (a \odot c) \tag{1}$$

holds for all $a, b, c \in A$, where $\ominus a$ denotes the inverse to a element with respect to the operation $\oplus$. The group $A_\oplus$ is called the additive group of a skew brace A, and the group $A_\odot$ is called the multiplicative group of a skew brace A. If $A_\oplus$ is abelian, then A is called a classical brace.

Classical braces were introduced by Rump in 2007, skew braces were introduced by Guarnieri and Vendramin in 2017 in order to study set-theoretical solutions of the Yang-Baxter equation. Also skew braces are connected with biquandles and racks, so, they can be used in knot theory.

Equality (1) makes the groups $A_\oplus$ and $A_\odot$ strongly connected with each other. For example, the following problems formulated in the Kourovka notebook (Problems 19.49, 19.90) tell about some of such connections.

(1) Let A be a skew brace with left-orderable multiplicative group. Is the additive group of A left-orderable?
(2) Does there exist a skew brace with solvable additive group but non-solvable multiplicative group?
(3) Does there exist a skew brace with nilpotent multiplicative group but non-solvable additive group?

In the talk we are going to discuss connections between properties of the additive and the multiplicative groups of skew braces. We will construct examples which answer questions (1), (2) from the list above and introduce positive results concerning questions (2), (3) from the list above for so called two-sided skew braces.

KU Leuven KULAK, Kortrijk (Belgium)
E-mail: timur.nasybullov@mail.ru

Infinite family of non-schurian separable association schemes

G. K. Ryabov

An association scheme is defined to be schurian if all its basis relations are 2-orbits of an appropriate permutation group and it is defined to be separable if it is determined up to an isomorphism only by the tensor of its intersection numbers. The problems of determining whether given an association scheme is schurian and determining whether given an association scheme is separable are among the most fundamental problems in the theory of association schemes. It is known that there exist infinite families of association schemes which are: (1) schurian and separable; (2) schurian and non-separable; (3) non-schurian and non-separable. From the computer calculations it follows that there is a finite number of non-schurian separable association schemes. However, the question whether there exists an infinite family of non-schurian separable association schemes was still open. We give an affirmative answer to this question.

Theorem. *There exists an infinite family of non-schurian separable association schemes.*

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: gric2ryabov@gmail.com

1-Closed groups in the variety of 2-step nilpotent groups

S. A. Shakhova

For an arbitrary quasivariety $\mathfrak{M}$ of groups, a group G in $\mathfrak{M}$, and a subgroup H of G, introduce, following [1] and [2], a set $dom_G^{\mathfrak{M}}(H)$, which is referred to as the dominion of the subgroup H of G in the quasivariety $\mathfrak{M}$, as follows:

$dom_G^{\mathfrak{M}}(H) = \{g \in G \mid \forall M \in \mathfrak{M}\ \forall\varphi, \psi : G \to M, \text{if} \varphi\mid_H = \psi\mid_H, \text{then} \varphi(g) = \psi(g)\}$, where $\varphi, \psi : G \to M$ are homomorphisms of the group G into the group M; $\varphi\mid_H$ and $\psi\mid_H$ are the restrictions to the subgroup H of the homomorphisms φ and ψ, respectively, and $\varphi(g)$ and $\psi(g)$ are the φ - and ψ - images of g, respectively.

According to [3], a group $H \in \mathfrak{M}$ is said to be n-closed in $\mathfrak{M}$ if $dom_G^{\mathfrak{M}}(H) = H$ for every group $G = gr(H, a_1, ..., a_n)$ in $\mathfrak{M}$ containing H and generated modulo H by n appropriate elements $a_1, ..., a_n$.

It was establised in [4] that the additive group of the rationals is 1-closed in an arbitrary quasivariety of torsion-free nilpotent groups and 3-closed in an arbitrary quasivariety of 2-step nilpotent torsion-free groups. It was proved in [5] that the additive group of the rationals is 2-closed in every quasivariety of torsion-free nilpotent groups of class at most 3.

In the present paper the following theorem is proved.

Theorem. *Any group is* 1*-closed in the variety of all nilpotent groups of class at most 2.*

References

[1] Isbell J.R., Epimorphisms and dominions, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965, New York, Springer-Verlag, 1966, 232–246.

[2] Budkin A., Dominions in quasivarieties of universal algebras, Studia Logica, 78, N 1-2 (2004), 107–127.

[3] Budkin A.I., Dominions of universal algebras and projective properties, Algebra Logic, 47, N 5 (2008), 304–313.

[4] Shakhova S.A., Absolutely closed groups in the class of 2-step nilpotent torsion-free groups, Mathematical Notes, 97, N 6 (2015), 128–132.

[5] Budkin A.I., On dominions of the rationals in nilpotent groups, Siberian Mathematical Journal, 59, N 4 (2018), 598–609.

Altai State University, Barnaul (Russia)
E-mail: sashakhova@gmail.com

The Wielandt–Hartley theorem for subnormal subgroups

S. V. Skresanov

A class $\mathfrak{X}$ of finite groups is called *complete*, if it is closed under taking subgroups, homomorphic images and extensions. If X is a finite group, let $\pi(X)$ denote the set of primes dividing $|X|$.

Our main result is the following

Theorem. *Let $\mathfrak{X}$ be a compete class of finite groups and set*

$$\pi = \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \pi(X).$$

Let G be a finite group and let A be a maximal $\mathfrak{X}$-subgroup of G. If H is subnormal in G, then $N_H(H \cap A)/(H \cap A)$ is a π'-group.

A group A_1 is a *submaximal $\mathfrak{X}$-subgroup* of H if there exists an embedding of H into some finite group G, such that H is subnormal in G and $A_1 = H \cap A$ for some maximal $\mathfrak{X}$-subgroup A of G. The set of all submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups of H is denoted by $sm_{\mathfrak{X}}(H)$.

Corollary. *Let $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ be a direct product of finite groups. Then*

$$sm_{\mathfrak{X}}(H) = \{\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \mid A_i \in sm_{\mathfrak{X}}(H_i),\ i = 1 \ldots n\}.$$

The reported study was funded by RFBR according to the research project 18-31-20011.

Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: s.skresanov@g.nsu.ru

On $\mathfrak{F}_\Omega$-subgroups of finite groups

M. M. Sorokina

Considered only finite groups. Let $\mathfrak{I}$ be a class of all simple groups, Ω be a non-empty subclass of $\mathfrak{I}$. A group G is called an Ω-group if $K(G) \subseteq \Omega$ where $K(G)$ is a set of all composition factors of G. Let $\mathfrak{F}_\Omega$ be a class of all Ω-groups belonging to the class $\mathfrak{F}$. In [**1**] we defined two $\mathfrak{F}_\Omega$-subgroups in a group – an $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroup and an $\mathfrak{F}_\Omega$-projector which are the other generalization of Gaschütz‘s definitions of an $\mathfrak{F}$-covering subgroup and an $\mathfrak{F}$-projector respectively compared to the definitions from [**2**]. Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. An $\mathfrak{F}_\Omega$-subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroup of G if whenever $H \leq U \leq G$, V is a normal Ω-subgroup of U such that $U/V \in \mathfrak{F}_\Omega$ then $U = HV$; a subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}_\Omega$-projector of G if HN/N is an $\mathfrak{F}_\Omega$-maximal subgroup in G/N for every normal Ω-subgroup N of G [**1**]. If $\Omega = \mathfrak{I}$ then an $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroup (an $\mathfrak{F}_\Omega$-projector) of a group is its $\mathfrak{F}$-covering subgroup ($\mathfrak{F}$-projector). Let H be an Ω-subgroup of a group G. If ω is a set of primes such that $\pi(\Omega) \subseteq \omega$ and H is an $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroup (an $\mathfrak{F}^\omega$-projector) of the group G then H is $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroup ($\mathfrak{F}_\Omega$-projector) of G.

Recall that the class $\mathfrak{F}$ is Ω-primitively closed in $\mathfrak{X}$ if for each group $G \in \mathfrak{X}$ the following condition is satisfied: if $G/Core_G(M) \cap O_\Omega(G) \in \mathfrak{F}$ for every maximal subgroup M of G then $G \in \mathfrak{F}$ where $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{X}$ are non-empty classes of groups, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. We proved that if $\mathfrak{X}$ is an S-closed homomorph, $\mathfrak{F}$ is a non-empty Ω-primitively closed homomorph in $\mathfrak{X}$ and a group $G \in \mathfrak{X}$ has a solvable $\mathfrak{F}_\Omega$-residual Ω-subgroup then G has at least one $\mathfrak{F}_\Omega$-projector [**1**]. In the following theorems we have studied the question on including of $\mathfrak{F}_\Omega$-subgroups of a group into its $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroups and $\mathfrak{F}_\Omega$-projectors.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, $\mathfrak{F}$ be a non-empty Ω-primitively closed homomorph in $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$. Suppose that N is a nilpotent normal Ω-subgroup of G and H is a solvable $\mathfrak{F}_\Omega$-subgroup of G with $G = HN$. Then H is included into an $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroup of G.*

Theorem 2. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty Ω-primitively closed formation. Suppose that N is a nilpotent normal Ω-subgroup of a group G, $G^{\mathfrak{F}_\Omega}$ is a solvable Ω-group, L is a subgroup of G such that $G = LN$. Then there exists at least one $\mathfrak{F}_\Omega$-projector K in L and $K = H \cap L$ where H is an $\mathfrak{F}_\Omega$-projector of G.*

References

[1] Sorokina M.M. The $\mathfrak{F}_\Omega$-covering subgroups and $\mathfrak{F}_\Omega$-projectors of finite groups. Groups and Graphs, Metrics and Manifilds. Ekaterinburg, 2017. P. 96.

[2] Vedernikov V.A., Sorokina M.M. The $\mathfrak{F}$-projectors and $\mathfrak{F}$-covering subgroups of finite groups. Siberian Mathematical Journal. 2016. V. 57, N 6. P. 1224–1239.

Bryansk State University I.G. Petrovsky, Bryansk
E-mail: mmsorokina@yandex.ru

On automorphism groups of AT4$(7, 9, r)$-graphs and their local graphs

L. Yu. Tsiovkina

Let Γ be a distance-regular graph with diameter $d \geq 3$ and eigenvalues $k = \theta_0 > \theta_1 > ... > \theta_d$. Koolen, Jurišić and Terwilliger proved that the intersection numbers b_1 and a_1 of Γ satisfy the following inequality (the so-called *fundamental bound*): $(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}$. Γ is called *tight* whenever Γ is not bipartite and the equality in the fundamental bound is attained. It is known that Γ is tight if and only if each its local graph is strongly regular with non-trivial eigenvalues $-q = -1-b_1/(1+\theta_1)$ and $p = -1-b_1/(1+\theta_d)$. If $d = 4$ and Γ is antipodal and tight, then the intersection array of Γ is expressed in terms of the non-trivial eigenvalues p and $-q$ of the local graphs and the size r of its antipodal classes. In this case Γ is called an *antipodal tight graph* of diameter 4 or simply an AT4(p, q, r)-*graph*.

In this work, we consider the problem of classification of AT4(p, q, r)-graphs. Their study is motivated by the fact that almost all known non-bipartite antipodal distance-regular graphs of diameter 4 are tight. Jurišić conjectured that the family of AT4(p, q, r)-graphs is finite and consists of the following three subfamilies: (i) $q|p$ and $r \in \{2, q\}$; (ii) $p + 2 = q$ and $r \in \{2, q-1\}$; (iii) Conway-Smith graph $3.Sym(7)$ (AT4$(1, 2, 3)$), the graph $Soicher2$ (AT4$(20, 4, 3)$) and $3.Fi_{24}$-graph (AT4$(351, 9, 3)$). The case $(p, q, r) = (p, p+2, 2)$ was later ruled out by Makhnev.

One natural task in classification of AT4(p, q, r)-graphs is to describe those ones which have relatively small valency or possess large automorphism groups (for example, transitive on arcs). It can be showed that if an AT4$(p, p+2, r)$-graph is of valency at most 1000, then $p \in \{2, 3, ..., 8\}$. The graph $Soicher1$ (with intersection array $\{56, 45, 16, 1; 1, 8, 45, 56\}$) is the only AT4$(p, p+2, r)$-graph with $p = 2$ and admits an arc-transitive action of $3_2.U_4(3)$. There are no known examples of AT4$(p, p+2, r)$-graphs with $p > 2$ and $r > 2$. Tsiovkina proved that there is no arc-transitive AT4$(p, p+2, r)$-graph with $p = 5$. Here we investigate the automorphism groups of AT4$(p, p+2, r)$-graphs with $p = 7$ and of its local graphs.

Theorem 1. *Let Γ be a* AT4$(7, 9, r)$*-graph and $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Then $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 79\}$ and G acts intransitively on arcs of Γ.*

The local graphs of each AT4$(7, 9, r)$-graph are strongly regular with parameters $(711, 70, 5, 7)$. It is unknown whether a strongly regular graph with these parameters exists. We prove the following result.

Theorem 2. *Let Θ be a strongly regular graph with parameters $(711, 70, 5, 7)$ and $G = \mathrm{Aut}(\Theta)$. Then $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$ and G acts intransitively on vertices of Θ.*

Acknowledgement. This work was supported by the grant of Russian Science Foundation, project no. 14-11-00061 P.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg (Russia)
E-mail: tsiovkina@imm.uran.ru

On the prime and solvable graphs of finite simple groups

M. A. Zvezdina, A. V. Vasil′ev, M. L. Lewis, J. Mizrajani,
A. R. Moghaddamfar

We consider two types of graphs associated with finite groups. For a finite group G, denote by $\pi(G)$ the set of all prime divisors of $|G|$. The *prime graph* $\mathrm{GK}(G)$ (*solvable graph* $\mathcal{S}(G)$) of G is a graph with vertex set $\pi(G)$, in which two different vertices r and s are adjacent if and only if G has a cyclic (solvable) subgroup of order divisible by rs.

The prime and solvable graphs of finite simple groups are well studied, see, e.g., [**1**] and [**2**]. Relying on these results, we investigate splitness of these graphs. A graph is *split* if its vertex set can be partitioned into a clique and an independent set (either set can be empty). If G is an abelian simple group, then $\mathrm{GK}(G)=\mathcal{S}(G)$ is a singleton, and so is split. Let G be nonabelian. Easy calculations show that if G is an alternating group, then the graphs $\mathrm{GK}(G)$ and $\mathcal{S}(G)$ are split. Using the Atlas of finite groups, we check that the prime graph $\mathrm{GK}(G)$ of any sporadic group G is split, and that there are exactly 10 sporadic groups whose solvable graph $\mathcal{S}(G)$ is nonsplit.

Let G be a finite simple group of Lie type. Then the graph $\mathrm{GK}(G)$ is not split in most cases. However, it turns out that the *compact form* $\mathrm{GK}_{\mathrm{c}}(G)$ of this graph is split. Here by the compact form Γ_{c} of a graph Γ we mean the quotient graph $\Gamma/_{\equiv}$ w.r.t. the following equivalence relation on the vertex set V_Γ of Γ: for every $u, v \in V_\Gamma$ we put $u \equiv v$ if $u^\perp = v^\perp$, where $a^\perp$ is the ball of radius 1 with center a in Γ.

Theorem. *The graph* $\mathrm{GK}_{\mathrm{c}}(G)$ *of any finite simple group* G *is split.*

In general, the compact form $S_{\mathrm{c}}(G)$ of the solvable graph for a simple group of Lie type also splits. Nevertheless, there are examples of nonsplitness of such graphs, and due to the positive solution of the Artin conjecture on primitive roots for almost all primes [**3**], one can construct infinitely many of them.

The work was supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1., project No. 0314-2016-0001.

References

[1] Vasil'ev A.V., Vdovin E.P., An adjacency criterion in the prime graph of a finite simple group. Algebra Logic 44(6) (2005) 381–406.

[2] Amberg B., Kazarin L., On the soluble graph of a finite simple group. Comm. Algebra 41(6) (2013) 2297–2309.

[3] Heath-Brown D.R., Artin's conjecture for primitive roots. The Quarterly Journal of Mathematics 37(1) (1986) 27–38.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: maria.a.zvezdina@gmail.com

V. Секция «Теория колец»

Дикий автоморфизм свободных алгебр Ли ранга 3 над евклидовыми кольцами

А. А. Алимбаев, У. У. Умирбаев

В 1964 году П. Кон [**1**] доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли над произвольными полями являются ручными. Позже в работе [**2**] Дж. Левин обобщил этот результат для шрайеровых многообразий алгебр.

Возникает естественный вопрос об аналоге этих результатов для свободных алгебр над хорошими кольцами, например, над евклидовыми кольцами.

Пусть Φ - произвольная евклидова область и z ненулевой необратимый элемент Φ. Однако в работе [**3**] доказано, что автоморфизм

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

свободной неассоциативной алгебры и свободной коммутативной алгебры ранга два над Φ является диким. Этот автоморфизм является обобщением автоморфизма Нагаты. Метод построение этого автоморфизма не проходит для антикоммутативных алгебр, так как квадрат элемента в антикоммутативных алгебрах равен нулю. Обобщая методы построение автоморфизмов Нагаты [**4**] и Аника [**5**], нами построен дикий автоморфизм

$$\delta = (x_1 + [[zx_1 - [x_2, x_3]], x_3], x_2 + z(zx_1 - [x_2, x_3]), x_3)$$

свободной алгебры Ли ранга 3 над евклидовыми кольцами. Этот автоморфизм является аналогом автоморфизма Аника свободной ассоциативной алгебры [**5**].

Работа поддержана МОН РК (грант AP05133009).

Список литературы

[1] Cohn P.M., Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc., **56** (1964), 618–632.

[2] Lewin J., On Schreier varities of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 553–562.

[3] Алимбаев А.А., Умирбаев У.У., Автоморфизм Нагаты свободных неассоциативных алгебр ранга два над евклидовыми кольцами // Сиб. электрон. матем. изв., 14 (2017), 1279–1288

[4] Nagata M., On the automorphism group of $k[x, y]$ // Kinokuniya, Tokyo: Kyoto Univ. (Lect. in Math.), 1972.

[5] Cohn P.M., Free rings and their relation, 2nd Ed.-London: Academic Press., 1972.

Костанайский государственный педагогический университет, Костанай (Казахстан)
E-mail: alialimbayev@gmail.com
Wayne State University, Detroit, MI (USA)
E-mail: umirbaev@wayne.edu

О дифференцированиях в групповых алгебрах

А. А. Арутюнов

Известный вопрос Джонсона состоит в том, что все дифференцирования в $L_1(G)$ – являются внутренними. Это предположение было доказано В. Лозертом в 2008 году. Однако, вопрос можно поставить в более общей форме. Пусть $d : C[G] \to C[G]$ – линейное отображение, которое удовлтетворяет правилу Лейбница $d(uv) = d(u)v + ud(v)$. Конечно, мы предполагаем группу G – вообще говоря бесконечной и не коммутативной. Тогда возникает вопрос, можно ли описать все дифференцирования, а также будут ли они совпадать с внутренними.

Оказывается, что в таком случае алгебра дифференцирований гораздо богаче. В частности можно рассмотреть дифференцирования следующего вида. Пусть $z \in Z(G)$ – элемент центра, и τ – гомоморфизм в аддитивную группу комплексных чисел, то есть $\tau(xy) = \tau(x) + \tau(y)$. Тогда зададим на образующих следующее отображение

$$d_z^\tau : x \to \tau(x)xz.$$

Отображения вида d_z^τ образуют подалгебру $ZDer(G)$ в алгебре всех дифференцирований, причем никакие из таких дифференцирований не будут внутренними.

Для доказательства данного утверждения и вообще для описания алгебры дифференцирований полезно отождествить дифференцирования с характерами (комплексно-значные отображения χ множества морфизмов, с условием $\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\psi) + \chi(\phi)$ если композиция определена) на некотором группоиде.

Данная конструкция позволяет установить при каких условия дифференцирование является внутренним, и показать, что определенные выше дифференцирования, действительно не являют внутренними. При помощи подобных результатов, удается также полностью описать в комбинаторных терминах дифференцирования для некоторых конкретных примеров, например для групп, которые являются центральными коммутативными расширениями.

МФТИ, Москва
E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

Порядки в градуированных артиновых кольцах

Д. С. Баженов

Хорошо известны условия на кольцо R, необходимые и достаточные для того, чтобы его классическое кольцо частных было полупростым артиновым, простым артиновым (теоремы Голди) и артиновым (теорема Смолла). Доклад посвящён аналогам этих результатов для градуированных по группе колец. Если группа содержит элемент бесконечного порядка, то можно построить контрпример, показывающий, что непосредственный аналог теорем Голди и Смолла неверен.

Пусть $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ — градуированное по группе G ассоциативное кольцо, S — множество его однородных регулярных элементов, RS^{-1} — его классическое правое градуированное кольцо частных (существующее при выполнении условий Оре).

Теорема 1. Если группа G периодична, то следующие условия на G-градуированное кольцо R равносильны:

(1) R — gr-полупервичное правое кольцо Голди;

(2) кольцо RS^{-1} существует и вполне gr-приводимо.

Пусть далее $P^{gr}(R)$ — нижний градуированный ниль-радикал кольца R, т. е. его наименьший gr-полупервичный идеал, $\overline{R} = R/P^{gr}(R)$, $M = \{r \in R \mid \overline{r} \in S(\overline{R})\}$, $T_k^{gr} = P^{gr}(R) \cap l_R\left(P^{gr}(R)^k\right)$ $(k \in \mathbb{N})$. Назовём кольцо R правым T-gr-кольцом Голди, если R и R/T_k^{gr} — правые gr-кольца Голди для всех $k \in \mathbb{N}$.

Следующий результат — градуированный аналог теоремы Смолла.

Теорема 2. *Если группа G периодична, то следующие условия на G-градуированное кольцо R равносильны:*

(1) RS^{-1} — gr-артиново справа кольцо;

(2) R — ненильпотентное правое T-gr-кольцо Голди и $M \subseteq S$;

(3) R — ненильпотентное правое T-gr-кольцо Голди и $M = S$.

Специфика градуированных колец проявляется в доказательстве импликации (2) $\Rightarrow$ (1), в котором требуется теорема 1. Если группа G содержит элемент бесконечного порядка, то существует G-градуированное коммутативное кольцо R без нильпотентных элементов, совпадающее со своим классическим градуированным кольцом частных и не являющееся gr-артиновым.

Список литературы

[1] Баженов Д. С., Градуированные первичные кольца Голди // Вестник МГУ. 2017. Серия 1. Математика, механика. 2, с. 55–57.

[2] Канунников А. Л. Критерии выполнения теорем Голди для градуированных колец // Алгебра и логика. 2018 (в печати).

МГУ, механико-математический факультет, Москва

E-mail: trongsund@yandex.ru

Об ассоциативных алгебрах с дистрибутивной решёткой подалгебр

А. Г. Гейн

Статья О. Оре [**1**], в которой описаны группы с дистрибутивной решёткой подгрупп, стала прологом к аналогичным исследованиям в теории полугрупп [**2**], ассоциативных [**3**] и лиевых [**4**] колец и др. Однако для ассоциативных алгебр над полями вопрос оставался открытым. Решётка подалгебр ассоциативной алгебры "беднее" решётки подколец ассоциативного кольца, поэтому результаты для алгебр не могут быть получены редукцией соответствующих результатов для колец. Через A_1 обозначим алгебраическое расширение поля F, решётка подрасширений которого дистрибутивна, через A_2 — алгебру, порождённую нильэлементом индекса 2, через A_3 — алгебру, порождённую нильэлементом индекса 3. Полученное нами описание содержит

Теорема 1. *Решётка подалгебр ненулевой ассоциативной алгебры над полем F дистрибутивна тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из алгебр следующего списка: A_1, A_2, A_3, $A_1 \times A_2$, $A_1 \times A_3$, $A_2 \oplus Fe$ и $A_3 \oplus Fe$, где e — единица всей алгебры.*

Следствие. *Ассоциативная алгебра с дистрибутивной решёткой подалгебр коммутативна.*

Отметим, что любое поле, не являющееся алгебраически замкнутым, допускает расширение с дистрибутивной решёткой подрасширений. В то же время, решётка подрасширений поля, полученного присоединением к полю рациональных чисел всех кубических корней из числа 2, не дистрибутивна. Фактически вопрос о дистрибутивности решётки подрасширений решается вычислением соответствующей группы Галуа.

Список литературы

[1] Ore O., Structures and group theory. II // Duke Math. J., 4:2, 1938, 247–269.

[2] Шеврин Л. Н., Полугруппы с некоторыми типами структур подполугрупп // ДАН, 138:4, 1961, 796–798.

[3] Фрейдман П. А., Кольца с дистрибутивной структурой подколец // Матем. сб., 73 (115):4, 1967, 513–534.

[4] Гейн А. Г. Дистрибутивный закон в решётке подлалгебр // Сердика Българско математическо списание, 11, 1985, 171–179.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: a.g.geyn@urfu.ru

О стандартных подалгебрах полных матричных алгебр

А. Г. Гейн, Д. М. Таганцов

Определение 1 [1]. Элемент s решётки L называется стандартным, если для любых $x, y \in L$ выполнено равенство

$$x \wedge (y \vee s) = (x \wedge y) \vee (x \wedge s)$$

Определение 2. Подалгебра называется стандартной, если она является стандартным элементом в решетке подалгебр данной алгебры.

Г. Биркгоф [**2**] поставил проблему описания групп, обладающих собственной стандартной подгруппой (проблема 61). Она была решена С. Г. Ивановым [**3**]. Однако для ассоциативных алгебр над полем данная проблема остаётся открытой. Нами доказана следующая

Теорема. *Полная матричная алгебра над полем не содержит стандартных подалгебр, отличных от нулевой подалгебры и всей алгебры.*

Список литературы

[1] Гретцер Г., Общая теория решёток. М.: Мир, 1982.
[2] Биркгоф Г., Теория решёток. М.: Мир, 1984.
[3] Иванов С. Г., Стандартные подгруппы // Мат. записки Урал. гос. ун-та, 5:3, 1965, 49–55.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: a.g.geyn@urfu.ru, dmitriynagat@mail.ru

Операторы Роты — Бакстера, связанные с решениями классического уравнения Янга — Бакстера на простых алгебрах Мальцева

М. Е. Гончаров

Пусть M — простая конечномерная алгебра Мальцева над полем F характеристики не равной 2 и 3. Линейное отображение $R : M \to M$ называется оператором Роты — Бакстера веса λ, если для любых $a, b \in M$:

$$[R(a), R(b)] = R([R(a), b] + [a, R(b)] + \lambda[a, b]).$$

Элемент $r = \sum a_i \otimes b_i \in M \otimes M$ является решением классического уравнения Янга — Бакстера, если

$$\sum_{i,j} [a_i, a_j] \otimes b_i \otimes b_j - a_i \otimes [a_j, b_i] \otimes b_j + a_i \otimes a_j \otimes [b_i b_j] = 0. \tag{1}$$

Пусть $r = \sum a_i \otimes b_i \in M \otimes M$. В работах [**1, 2**] была показано, что если кососимметрическое (то есть $\tau(r) = -r$, где τ — морфизм перестановки) решение классического уравнения Янга — Бакстера (1), то оператор R, действующий по правилу

$$R(a) = \sum \langle b_i, a\rangle a_i, \tag{2}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — форма Киллинга на M, является оператором Роты — Бакстера веса 0. Если же r — не кососимметрическое решение уравнения Янга — Бакстера на M, то в [**3**] было установлено, что определенный в (2) оператор R будет оператором Роты — Бакстера ненулевого веса. В данной работе изучается условие, при которых уже оператор Роты-Бакстера на простой алгебре Мальцева M индуцирует решение классического уравнения Янга — Бакстера.

Теорема. *Пусть M — простая конечномерная алгебра Мальцева над полем характеристики не равной 2 и 3 и R — оператор Роты — Бакстера на M веса λ. Предположим, что $R + R^* = -\lambda id$, где R^* — оператор, сопряженный оператору R относительно формы Киллинга, а id — тождественный оператор. Тогда найдется $r = \sum a_i \otimes b_i \in M \otimes M$ — решение классического уравнения Янга — Бакстера (1) на M такое, что $R(a) = \sum\langle b_i, a\rangle a_i$ для любого $a \in M$. При этом $\tau(r) = -r$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$.*

Список литературы

[1] Белавин А. А., Дринфельд В. Г., О решениях классического уравнения Янга – Бакстера для простых алгебр Ли // Функц. анализ и его прил., 16:3 (1982), 1–29.

[2] Семенов-Тян-Шанский М. А., Что такое классическая r-матрица // Функц. анализ и его прил., 17:4 (1983), 17–33.

[3] Goncharov M. E., On Rota-Baxter operators of non-zero weight arisen from the solutions of the classical Yang-Baxter equation // Sib. El. Math. Rep., 14 (2017) 1533-1544.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: gme@math.nsc.ru

Об асимптотике в относительно свободной лиево нильпотентной алгебре

А. В. Гришин

Пусть $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ — свободная счетнопорожденная унитарная ассоциативная алгебра над полем k характеристики $\neq 2, 3$, $T^{(l)}$ — T-идеал алгебры F, порожденный длинным коммутатором $[x_1, \ldots, x_l]$ и $F^{(l)} = F/T^{(l)}$ — относительно свободная лиево нильпотентная алгебра индекса l. Пусть, далее, M_n — подпространство алгебры $F^{(l)}$, состоящее из полилинейных многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и P_n — подпространство в M_n, состоящее из собственных полилинейных многочленов.

Скажем, что функция $f(x)$ *мажорирует* функцию $g(x)$, если для некоторого числа $\gamma > 0$ и для всех достаточно больших x имеем $f(x) > \gamma g(x)$. Обозначение: $f(x) \succ g(x)$. Если $f(x) \prec g(x)$ и $f(x) \succ g(x)$ одновременно, то будем говорить, что $f(x)$ и $g(x)$ *функции одного порядка роста*. Обозначение: $f(x) \asymp g(x)$. Для алгебр $F^{(5)}$ и $F^{(7)}$ в [**1**], [**2**] доказано, что $\dim M_n \asymp 2^n n^{2m}$ и $\dim P_n \asymp n^{2m}$, где $l = 2m+3$, $m = 1$ и 2 соответственно.

Теорема. *Для любой алгебры $F^{(2m+3)}$ имеют место соотношения* $\dim M_n \succ 2^n n^{2m}$, $\dim P_n \succ n^{2m}$.

Доказательство основано на применении так называемой *расширенной алгебры Грассмана* (см. [**3**], [**4**]).

Список литературы

[1] Гришин А. В., Об аддитивной структуре и асимптотике коразмерностей c_n алгебры $F^{(5)}$ // Фундамент. и прикл. матем., **21**:1 (2016), 93–104.

[2] Гришин А. В., Об ассимптотике коразмерностей c_n в алгебре $F^{(7)}$ // Матем заметки, **104**:1 (2018), 25–32.

[3] Гришин А. В., Пчелинцев С. В., О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Матем. сб., **206**:11 (2015), 113–130.

[4] Гришин А. В., Пчелинцев С. В., Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Матем. сб., **207**:12 (2016), 54–72.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

О графах делителей нуля коммутативных конечных колец

Е. В. Журавлев, А. С. Монастырева

Пусть S – коммутативная полугруппа с нулем. Введем на S отношение эквивалентности: $\forall x, y \in S \quad x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$. Класс эквивалентности элемента $x \in S$ будем обозначать $[x]$, а соответствующее фактормножество $S/\sim$. Мы можем рассматривать фактормножество $S/\sim$ как полугруппу относительно операции $[x][y] = [xy]$. Графом делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ полугруппы $S/\sim$ будем называть граф, вершинами которого являются элементы $S/\sim$ и две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) соединяются ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $[x][y] = [0]$ (равносильно $xy = 0$). Наша цель – указать метод геометрического изображения графа делителей нуля для конечных коммутативных колец с единицей.

Пусть R – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей, $J = J(R)$ и R^* – соответственно его радикал Джекобсона и группа обратимых элементов, $F = R/J = GF(p^r)$, $F^* = F \setminus \{0\}$.

Рассмотрим случай, когда $\mathrm{char} R = 2$ и $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2/J^3 = 2$, $\dim_F J^3 = 1$, $J^4 = 0$, $R = F \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fw$, где $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w\}$ – базис J над полем F, $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2 \in J^2 \setminus J^3$, $w \in J^3$ (см. [**1**]). В работе [**2**] классифицированы с точностью до изоморфизма все кольца R указанного типа. В настоящей работе нами построены графы делителей нуля $\Gamma(S/\sim)$ всех таких колец. Далее, для примера, рассмотрим одно из колец со следующим умножением базисных элементов:

$$u_1^2 = v_2,\ u_1u_2 = u_2^2 = v_1,\ u_1v_1 = u_2v_1 = u_2v_2 = w,\ u_1v_2 = zw,$$

где z – такой элемент F, что $z + 1 \notin (F^*)^3$, $z \neq 1$ (см. [**2**], теорема 1, пункт 9).

В этом случае

$$R = [1] \bigcup_{n_i \in F\setminus\{0,1\}} [n_iu_1 + u_2] \cup [u_1] \bigcup_{k_i \in F} [u_2 + k_iv_2] \bigcup_{l_i \in F} [u_1 + u_2 + l_iv_2] \bigcup_{m_i \in F} [m_iv_1 + v_2] \cup [v_1] \cup [w] \cup [0],$$

где

$$[n_iu_1 + u_2] = F^*(n_iu_1 + u_2) + Fv_1 + Fv_2 + Fw,\ n_i \neq 0, 1,$$

$$[u_1] = F^*u_1 + Fv_1 + Fv_2 + Fw,$$

$$[u_2 + k_iv_2] = F^*(u_2 + k_iv_2) + Fv_1 + Fw,$$

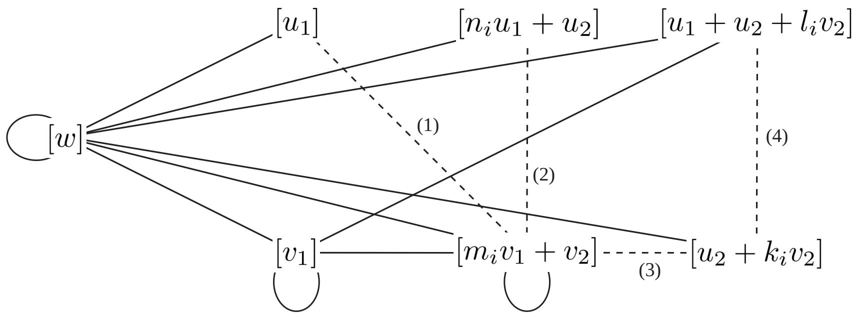
$$[u_1 + u_2 + l_iv_1] = F^*(u_1 + u_2 + l_iv_2) + F(v_1 + v_2) + Fw,$$

$$[m_iv_1 + v_2] = F^*(m_iv_1 + v_2) + Fw,$$

$$[v_1] = F^*v_1 + Fw,$$

$$[w] = F^*w,\ [0] = \{0\},\ [1] = R^*.$$

На рисунке 1 представлено геометрическое изображение графа $\Gamma(S/\sim)$, за исключением вершин [0] и [1] ([0] смежна со всеми вершинами, а [1] смежна только [0]).



$$n_i \neq 0, 1.$$

(1) если $m_i = z$;
(2) если $1 + m_i + m_i n_j + n_j z = 0$, $m_i \neq 1, z$;
(3) если $m_i = 1$;
(4) если $l_i = (1 + z)k_j$.

Рис. 1

В данном изображении вершины $[n_i u_1 + u_2]$, $[u_1 + u_2 + l_i v_2]$, $[m_i v_1 + v_2]$, $[u_2 + k_i v_2]$ это группы вершин графа $\Gamma(S/\sim)$, причем пунктирные ребра означают смежность вершин графа при выполнение некоторых условий, указанных внизу рисунка.

Список литературы

[1] Raghavendran R., Finite associative rings, Compositio Math., **21** (1969), 195–229.
[2] Zhuravlev E.V., On the classification of finite commutative local rings, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638.
[3] Bloomfield N., The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3, Communications in Algebra, **41** (2013), 765–775.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул
E-mail: evzhuravlev@mail.ru, akuzmina1@yandex.ru

Об объединении шпехтовых многообразий алгебр

И. М. Исаев

Пусть Φ — поле характеристики нуль. Многообразие $\mathfrak{M}$ линейных Φ-алгебр называется конечно базируемым, если в классе всех линейных Φ-алгебр оно выделяется конечным набором тождеств (этот набор называется базисом тождеств многообразия $\mathfrak{M}$). Многообразие $\mathfrak{M}$ называется шпехтовым [**1**], если всякое его подмногообразие конечно базируемо. Хорошо известна знаменитая теорема А. Р. Кемера о шпехтовости произвольного многообразия ассоциативных Φ-алгебр [**2**]. В то же время существуют примеры не конечно базируемых (а значит, нешпехтовых) многообразий неассоциативных Φ-алгебр [**3, 4, 5, 6, 8**]. В 1977 году Г. В. Дорофеев доказал теорему о шпехтовости многообразия, являющегося объединением двух шпехтовых многообразий [**3**]. Некоторые результаты и открытые вопросы по данной теме сформулированы в работе [**7**]. На самом деле в [**3**] доказано, что объединение двух шпехтовых многообразий удовлетворяет условию минимальности для подмногообразий и утверждается, что отсюда вытекает шпехтовость объединения. В настоящей работе доказано, что это не так. А именно, строится пример двух шпехтовых многообразий Φ-алгебр, объединение которых не является конечно базируемым (а значит, не является шпехтовым).

Пусть $A_1 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$ и $A_2 = \langle v_1, v_2, e_{11}, e_{12}\rangle_\Phi$ — четырехмерные Φ-алгебры, ненулевые произведения базисных элементов которых задаются правилом: $v_i e_{ij} = v_j$.

Рассмотрим алгебру $A_3 = \langle v_1, v_2 + e_{11}, e_{21}\rangle_\Phi$. Ясно, что A_3 — подалгебра алгебры A_1.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}_2 = \operatorname{Var} A_2$ — многообразие, порожденное алгеброй A_2, $\mathfrak{M}_3 = \operatorname{Var} A_3$ — многообразие, порожденное алгеброй A_3. Тогда $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ — шпехтовы многообразия.*

Теорема 2. *Многообразие $\mathfrak{M} = \operatorname{Var}(A_2 \oplus A_3)$ не имеет конечного базиса тождеств.*

Список литературы

[1] Specht W., Gesetze in Ringen, I, Mathematische Zeitschrift, **52**:5 (1950), 557–589.

[2] Кемер А.Р., Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр, Алгебра и логика, **26**:5 (1987), 597–641.

[3] Дорофеев Г.В., О некоторых свойствах объединения многообразий алгебр, Алгебра и логика, **16**:1 (1977), 24–39.

[4] Львов И.В., Конечномерные алгебры с бесконечными базисами тождеств, Сибирский математический журнал, **19**:1 (1978), 91–99.

[5] Мальцев Ю.Н., Парфенов В.А., Пример неассоциативной алгебры, не допускающей конечного базиса тождеств, Сибирский математический журнал, **18**:6 (1977), 1420–1421.

[6] Исаев И.М., Кислицин А.В., Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств, Алгебра и логика, **52**:4 (2013), 435–460.

[7] Шашков О.В., Объединение многообразий с ассоциативно-коммутативным пересечением ограниченного индекса, Сибирский математический журнал, **56**:3 (2015), 704–714.

[8] Полин С.В., О тождествах конечных алгебр, Сибирский математический журнал, **17**:6 (1976), 1356–1366.

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: isaev@uni-altai.ru

О почти энгелевых L-многообразиях векторных пространств

А. В. Кислицин

Пусть F — произвольное поле, E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (в этом случае будем говорить о векторном пространстве E, вложенном в ассоциативную алгебру A). Тождеством векторного пространства E назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E.

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства E, будем называть L-многообразием, порожденным пространством E, и обозначать $\mathrm{Var}_L E$. L-многообразие назовем энгелевым, если оно удовлетворяет тождеству Энгеля $[x, y, y, \ldots, y] = 0$, и почти энгелевым, если оно не является энгелевым, но всякое его собственное L-подмногообразие — энгелево.

Почти энгелевы многообразия ассоциативных колец и линейных алгебр изучены Ю. Н. Мальцевым и О. Б. Финогеновой [**1**]–[**4**]. В частности, получено описание почти энгелевых ассоциативных алгебр над произвольным полем.

Теорема. *Пусть A — алгебра над полем F и $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L A$ — почти энгелево L-многообразие, порожденное алгеброй A, рассматриваемой как векторное пространство. Тогда A совпадает с одним из следующих пространств:*

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in F \right\}.$$

Отметим, что в случае бесконечного поля F список F-алгебр, порождающих почти энгелевы многообразия, совпадает с приведенным списком векторных пространств. Если же $F = GF(q)$, то L-многообразие, порожденное пространством

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in P \right\},$$

где $\sigma \in \mathrm{Aut}P$, $\sigma \neq 1$ и поле инвариантов $F = P^{\sigma}$ является максимальным подполем в P, содержит собственное неэнгелево L-подмногообразие.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10002).

Список литературы

[1] Мальцев Ю. Н. Многообразия ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т.15, 5, С. 579–584.

[2] Мальцев Ю. Н. Почти энгелевы локально конечные многообразия ассоциативных колец // Известия вузов. Математика. 1982. 11, С. 41–42.

[3] Финогенова О. Б. Многообразия ассоциативных алгебр, удовлетворяющие тождествам Энгеля // Алгебра и логика. 2004. Т.43, 4, С. 482–505.

[4] Finogenova O. B. Characterizing non-matrix properties of varieties of algebras in the language of forbidden objects // Serdica Math. J. 2012. 38. pp. 473–496.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск; Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: kislitsin@altspu.ru

О минимальных ненулевых L-многообразиях векторных пространств

А. В. Кислицин

Пусть F — некоторое поле, E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (в этом случае будем говорить о векторном пространстве E, вложенном в ассоциативную алгебру A). Тождеством векторного пространства E назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E.

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства E, будем называть L-многообразием, порожденным пространством E, и обозначать $\mathrm{Var}_L E$. L-многообразие $\mathcal{M}$ назовем минимальным ненулевым L-многообразием (относительно включения) или атомом, если для любого L-многообразия $\mathcal{N}$ из включения $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ следует, что либо $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{N}$ — нулевое L-многообразие (т. е. L-многообразие, заданное тождеством $x = 0$).

Минимальные ненулевые многообразия изучались во многих классах алгебраических структур. Например, А. Тарский показал, что атомы в классе колец порождаются либо простым полем $GF(p)$, либо кольцом с нулевым умножением [**1**]. В настоящей работе изучается строение атомов в классе L-многообразий векторных пространств над произвольным полем.

Теорема 1. *Пусть F — бесконечное поле. L-многообразие $\mathcal{M}$ векторных пространств над полем F является атомом тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L\langle xy = 0\rangle$.*

Теорема 2. *Пусть $GF(q)$ — конечное поле из q элементов ($q = p^n$, p — простое число). L-многообразия $\mathcal{M}_1 = \mathrm{Var}_L\langle xy = 0\rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \mathrm{Var}_L\langle x - x^q = [x, y] = 0\rangle$ векторных пространств над полем $GF(q)$ являются атомами.*

Атомы в классе L-многообразий векторных пространств над конечным полем из q элементов не исчерпываются L-многообразиями $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Например, L-многообразие $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L\langle [x, y] = 0, x^4 = x, x^2 y = xy^2, x^3 + x^2 + x = 0\rangle$ является атомом в классе L-многообразий над полем $GF(2)$, отличным от $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10002).

Список литературы

[1] Tarski A., Equationally complete rings and relation algebras // Proc. Konninkl. Akad. Wetensch. 1956. Vol. 59. 1. pp. 39–46.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск; Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: kislitsin@altspu.ru

Линеаризация автоморфизмов свободных правосимметричных алгебр ранга 2

Д. Х. Козыбаев, А. С. Науразбекова

Хорошо известно, что автоморфизмы алгебры многочленов от двух переменных являются ручными [**1, 2**]. Более того, группа автоморфизмов этой алгебры допускает структуру амальгамированного свободного произведения [**2, 3**]. Аналогичные результаты также имеют место для свободных ассоциативных алгебр [**4, 5**] и свободных алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики [**6**].

Векторное пространство A над произвольным полем k называется *правосимметричной* алгеброй, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(xy)z - x(yz) = (xz)y - x(zy).$$

Пусть RS_2 – свободная правосимметричная алгебра от двух переменных над полем k произвольной характеристики.

Л. Макар-Лиманов, Д. Козыбаев, У. Умирбаев доказали, что автоморфизмы свободных правосимметричных алгебр ранга два являются ручными [**7**]. В настоящей работе показано, что группа ручных автоморфизмов алгебры RS_2 также допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Кроме того, используя эту структуру, мы доказали, что любая группа локально-конечных автоморфизмов алгебры RS_2 сопряжена либо с аффинной подгруппой либо с подгруппой треугольных автоморфизмов. Отсюда следует, что любое локально-нильпотентное дифференцирование алгебры RS_2 над полем характеристики ноль триангулируемо. Последний результат является аналогом теоремы Ренчлера [**8**].

Работа выполнена в рамках проекта AP05133009.

Список литературы

[1] Jung H.W.E., Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew. Math. 184 (1942), 161–174.

[2] Van der Kulk W., On Polynomial Rings in Two Variables // Nieuw Archief voor Wiskunde. (3) 1 (1953),33–41.

[3] Shafarevich I.R., On some infinite dimensional algebraic groups, in "Atti-Simposio Internaz. Geom. Algebrica, Roma, 1965," Edizioni Cremonese, Rome, 1967; Rend. Mat. e Appl. (5) 25 (1966), 208–212.

[4] Czerniakiewicz A.G., Automorphisms of a Free Associative Algebra of Rank 2. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 393–401; 171 (1972), 309–315.

[5] Макар-Лиманов Л., Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функцион. анализ и его прил. 4 (1970), 3, 107–108.

[6] Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U., Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra. 322 (2009), 9, 3318–3330.

[7] Kozybaev D., Makar-Limanov L., Umirbaev U., The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras // Asian-European Journal of Mathematics. 1 (2008), 243–254.

[8] Rentschler R., Operations du proupe additif sur le plan // C.R.Acad.Sci.Paris. 267 (1968), 384-387.

Институт математики и математического моделирования МОН РК; Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

E-mail: kozybayev@gmail.com, altyngul.82@mail.ru

Проектирования конечных локальных колец

С. С. Коробков

Пусть R и R' — ассоциативные кольца. Под проектированием (иначе решёточным изоморфизмом) кольца R на кольцо R' понимается изоморфизм φ решётки подколец $L(R)$ кольца R на решётку подколец $L(R')$ кольца R'. Для удобства обозначим кольцо R' как R^φ и назовём R^φ проективным образом кольца R.

Пусть R — конечное локальное кольцо, то есть конечное кольцо с единицей, для которого фактор-кольцо $R/\operatorname{Rad} R$ — поле. Общее строение конечных локальных колец хорошо известно. Согласно [**1**, теорема XIX.4] произвольное конечное локальное кольцо R представимо в виде: $R = S \oplus N$, где S — подкольцо, удовлетворяющее одному из трех условий: 1) $S = \langle e \rangle$, e — единица кольца, 2) $S = GF(p^k)$ — поле Галуа, 3) $S = GR(p^k, m)$ — кольцо Галуа, $k > 1$, $m > 1$; N — (S, S)-модуль из радикала Джекобсона $\operatorname{Rad} R$ кольца R.

Изучение решёточных изоморфизмов конечных локальных колец было начато в работах [**2**] и [**3**] и продолжено в работах [**4**] и [**5**], где было установлено, что свойство кольца быть локальным не всегда сохраняется при проектированиях колец. В данном сообщении приводятся достаточные условия, при выполнении которых проективный образ конечного локального кольца является локальным кольцом.

Теорема. *Пусть R — конечное локальное кольцо и φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда в следующих трех случаях кольцо R^φ будет локальным кольцом:*

1) $R = \langle e \rangle \oplus N$, где e — единица кольца R, $o(e) = p^k$, $p > 2$, $k > 1$, N — ненулевая аддитивная подгруппа из $J(R)$, а R^φ — кольцо с единицей;

2) $R = F \oplus N$, где $F \cong GF(p^n)$, $n > 1$, n не является степенью простого числа и не является произведением двух простых чисел, N — ненулевой нильпотентный идеал;

3) $R = S \oplus N$, где $S \cong GR(p^n, m)$, $n > 1$, $m > 1$, N — (S, S)-модуль из $J(R)$.

Список литературы

[1] McDonald B. R., Finite rings with identity, New York, Marcel Dekker, 1974.

[2] Коробков С. С., Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов, Изв. Урал. гос. ун-та, 2002, N 22, Матем. и механ., Вып. 4, 81–93.

[3] Коробков С. С., Проектирования колец Галуа, Алгебра и логика, 54, N 1 (2015), 16–33.

[4] Коробков С. С., Проектирования конечных однопорождённых колец с единицей, Алгебра и логика, 55, N 2 (2016), 192–218.

[5] Коробков С. С., Проектирования конечных коммутативных колец с единицей. Алгебра и логика, 57, N 3 (2018), 285–305.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

О полуцепности групповых колец накрытий конечных простых групп

А. В. Кухарев

Кольцо называется полуцепным, если его правый регулярный и левый регулярный модули являются прямыми суммами цепных модулей. В частности, каждое артиново полупростое кольцо является полуцепным. Имеет место вопрос, аналогичный по содержанию теореме Машке: когда групповое кольцо FG конечной группы G над полем F является полуцепным? В настоящее время ответ известен для всех p-разрешимых и всех простых групп. Например, из работы [**1**] следует, что групповое кольцо группы Судзуки $Sz(8)$ над полем характеристики 7 является полуцепным. Однако мало известно, например, о полуцепных групповых кольцах накрытий конечных простых групп.

Обозначим через p характеристику поля F. Необходимым условием полуцепности кольца FG является цикличность силовской p-подгруппы группы G. Пусть G — не p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой P. Тогда существует нормальный ряд $1 \subset O_{p'}(G) \subset K \subset G$, где K — наименьшая нормальная подгруппа в G, собственно содержащая $O_{p'}(G)$. При этом индекс $[G : K]$ взаимно прост с p и $H = K/O_{p'}(G)$ — простая группа. Из полуцепности FG следует полуцепность кольца FK, а также его фактор-кольца FH. Справедливость обратной импликации оставалась открытым вопросом. В настоящей работе получен контрпример.

Через $2.H$ обозначим двойное накрытие группы H.

Теорема. *Групповое кольцо группы $2.Sz(8)$ над любым полем характеристики, делящей порядок группы, не является полуцепным.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-71-10007).

Список литературы

[1] Burkhardt R., Über die Zerlegungszahlen der Suzukigruppen Sz(q) // J. Algebra. **59** (1979), 421–433.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: kukharev.av@mail.ru

Структура амальгамированного произведения в группе автоморфизмов свободных алгебр Ли ранга 3

Р. Ж. Наурызбаев, У. У. Умирбаев

Проблема линеаризации автоморфизмов свободных алгебр Ли ранга 3 были исследованы М.В. Шевелиным [**1**]. В конце работы [**1**] автор отмечает, что из замечаний рецензента следует следующий результат: «Группа автоморфизмов свободной алгебры Ли от трех переменных является свободным произведением с объединенной подгруппой. Точный вид сомножителей и объединенной подгруппы можно извлечь из выкладок пункта 2.3». Такое представление является прямым аналогом представления группы автоморфизмов алгебры многочленов в виде свободного произведения с объединенной подгруппой [**2**] и заслуживает более тщательного изучения.

В 1964 году П.М. Кон [**3**] доказал, что все автоморфизмы свободной алгебры Ли конечного ранга являются ручными. Следовательно, все автоморфизмы свободной алгебры Ли от двух переменых являются линейными.

Пусть L – свободная алгебра Ли от переменных x, y, z над произвольным полем k и $Aut(L)$ – группа автоморфизмов алгебры L. Обозначим через A – подгруппу линейных автоморфизмов, а через B – подгруппу всех автоморфизмов алгебры L вида

$$(\alpha x + f(y, z), \beta_1 y + \beta_2 z, \gamma_1 y + \gamma_2 z),$$

где $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in k$ и $\alpha \neq 0$. Пусть $C = A \cap B$.

Теорема. Группа автоморфизмов свободной алгебры Ли L от переменных x, y, z является свободным произведением своих подгрупп A и B объединенной по их пересечению, т.е.

$$Aut(L) = A *_C B.$$

Этот результат позволяет, в частности, доказать, что любое локально-нильпотентное дифференцирование свободной алгебры Ли от трех переменных является триангулируемым.

Работа выполнена в рамках проекта AP05133009, Институт математики и математического моделирования МОН РК.

Список литературы

[1] Шевелин М. А., Неабелевы 1-когомологии и сопряженность конечных подгрупп в некоторых расширениях // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 53, 5. С. 1166–1177.

[2] van der Kulk W., On polynomial rings in two variables // Nieuw Archief voor Wiskunde (3)1 (1953). P. 33–41.

[3] Cohn P. M., Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 56 (1964). P. 618–632.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана (Казахстан); Wayne State University, Detroit, MI (USA)
E-mail: nauryzbaevr@gmail.com, umirbaev@math.wayne.edu

Эндоморфизмы полугруппы неотрицательных матриц над линейно упорядоченными кольцами

В. В. Немиро

Пусть $\mathrm{GL}_n(R)$ — полная линейная группа над линейно упорядоченным необязательно коммутативным кольцом R с обратимой двойкой. Полугруппа $G_n(R)$ — подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В докладе будет приведено доказательство следующей теоремы о классификации эндоморфизмов полугруппы $G_n(R)$:

Теорема. *Пусть Φ — эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, $n \geqslant 3$, где R — линейно упорядоченное необязательно коммутативное кольцо с обратимой двойкой. Тогда выполнено одно из двух условий:*

- *Образом эндоморфизма является некоторая подгруппа мономиальных матриц;*
- *Существуют $M \in \Gamma_n(R)$, $b \in \mathrm{End}(R_+)$, центральная гомотетия Ω, такие что Φ совпадает с $\Phi_M \circ \Phi^b \circ \Omega$ на полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$.*

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: vlad.nemiro@gmail.com

Центральные порядки в конечномерных простых ассоциативных супералгебрах

А. С. Панасенко

Центральные порядки в простых алгебрах являются важными примерами первичных алгебр во многих классах колец. Так, все ассоциативные первичные PI алгебры исчерпываются центральными порядками в матричных алгебрах, все йордановы первичные невырожденные PI-алгебры являются центральными порядками в простых йордановых алгебрах, все альтернативные первичные невырожденные алгебры являются центральными порядками в алгебрах октонионов.

Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Ее *суперцентром* называется четная часть центра $Z = Z(A) \cap A_0$. Z_2-градуированная алгебра A называется центральным порядком в Z_2-градуированной алгебре B, если $Z^{-1}A = B$. Данное понятие так же играет важную роль. Например, при наложении некоторых условий невырожденности на четную часть, первичные неассоциативные нетривиальные альтернативные супералгебры исчерпываются центральными порядками в простых альтернативных супералгебрах.

Е.Форманек [**1**] доказал конечность над центром ассоциативной первичной PI-алгебры (т. е. центрального порядка в конечномерной простой алгебре) с нетеровым центром. Недавно было получено обобщение этого результата на альтернативные и йордановы алгебры [**2, 3**].

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть A — центральный порядок в конечномерной простой ассоциативной супералгебре и пусть Z — суперцентр A. Тогда A вкладывается в конечный Z-модуль. В частности, если Z — нетеров, то A является конечным Z-модулем.*

Работа поддержана РНФ (проект 14-21-00065).

Список литературы

[1] Formanek E., Noetherian PI-rings // Comm. Algebra, 1, N 1 (1974), 79–86.

[2] Панасенко А.С., Почти конечномерные альтернативные алгебры // Матем. заметки, 98, N 5 (2015), 747–755.

[3] Желябин В.Н., Панасенко А.С., Почти конечномерные йордановы алгебры // Алгебра и логика, принята к печати.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: a.panasenko@g.nsu.ru

О степени стандартного тождества в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$

Е. П. Петров

В работе [**1**] было показано, что всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3=2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{\sigma\in S_4}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}=0.$$

Причем эта оценка является точной.

В процессе обобщения указанного результата в работе [**2**] выяснилось, что ассоциативная нильпотентная 2-порожденная алгебра R, над полем характеристики, не равной 2, с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$ при $N>2$, удовлетворят при достаточно больших значениях числа N стандартному тождеству значительно меньшей степени, чем N.

Следующая теорема (в работе [**3**]) предоставляет алгоритм нахождения степени минимального тождества s-порожденной нильпотентной алгебры над полем характеристики, не равной двум, с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2,\ N\geq 3$, для бесконечного множества значений N определенного вида.

Теорема. *Пусть R – произвольная s-порожденная $(s\geq 2)$ нильпотентная алгебра над полем характеристики, не равной двум, с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2,\ N\geq 3$. Тогда*

1) если $s<N+2$, то R удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_T)=0$, где $T=\left\lceil\frac{(N+2)(s-1)^2+s^{m+1}-m(s-1)s-s}{m(s-1)^2}\right\rceil$ и параметр m вычисляется по формулам:

$$m=\begin{cases}\left\lfloor\log_s\dfrac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor, & \text{если } N<N^*;\\[2ex] \left\lfloor\log_s\dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor, & \text{если } N\geq N^*,\end{cases}$$

$$N^*=\frac{\left(\left\lfloor\log_s\dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor(s-1)-s\right)\cdot s^{\left\lfloor\log_s\frac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor}+s}{(s-1)^2}-2;$$

2) при любых значениях s алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_{N+2})=0$.

Замечание. Если $m\geq 3$, то для $N=\dfrac{(ms-m-s)\cdot s^m+s}{(s-1)^2}-2+mr$, где $1\leq r<s^m$, найдется такая s-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $dimR^N/R^{N+1}=2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $(T-1)$.

Список литературы

[1] Petrov E.P., Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^2/R^3=2$ // Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052–1066.

[2] Petrov E.P., Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^N/R^{N+1}=2$ // Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1153–1187.

[3] Petrov E.P., Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition $dimR^N/R^{N+1}=2$ // Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1048–1064.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: pep@email.asu.ru

Тождества йордановых алгебр пуассонова типа

А. В. Попов

Для любой супералгебры Пуассона P можно определить йорданову супералгебру $K(P)$, — так называемый дубль Кантора [**1**]. Соответствующие йордановы алгебры вида $G(K(P))$, где $G(\cdot)$ – грассманова оболочка, будем называть йордановыми алгебрами пуассонова типа. Через $\mathcal{K}Jord$ обозначим класс всех таких алгебр, а через $\overline{\mathcal{K}Jord}$ наименьшее многообразие, содержащее в себе $\mathcal{K}Jord$.

Известным результатом И. П. Шестакова [**2**] является доказательство отношения $\overline{\mathcal{K}Jord} \subseteq \overline{\mathcal{S}Jord}$, где $\overline{\mathcal{S}Jord}$ — наименьшее многообразие, содержащее все специальные йордановы алгебры.

Пусть $S[X]$ — свободная алгебра Пуассона на счетном множестве порождающих X, а $S[X]^{\#}$ — алгебра $S[X]$ с присоединенной единицей. Выделим в алгебре $G(K(S[X]^{\#}))$ подалгебру $G(K(S[X])) \oplus 1 \otimes G_1$. Полученную подалгебру обозначим $KJ(X)$. Кроме того, будем рассматривать факторалгебры $KJ_n(X)$, каждая из которых определяется дополнительным соотношением $u_1 \cdots u_{n+1} = 0$ для любых $u_1, \ldots, u_{n+1} \in S[X]$.

Введем обозначения для многообразий $\mathcal{V}_n = \mathrm{var}(KJ_n(X))$ и $\mathcal{V} = \mathrm{var}(KJ(X))$.

Утверждение. $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{V} = \overline{\mathcal{K}Jord}$.

Описание тождеств, порождающих многообразия $\mathcal{V}_n$ в конечном счете позволит описать тождества многообразия $\mathcal{V}$ и дать ответ на следующую гипотезу:

Гипотеза. *Имеет место равенство многообразий* $\overline{\mathcal{K}Jord} = \overline{\mathcal{S}Jord}$.

Часть тождеств многообразий $\mathcal{V}_n$ описывается следующими теоремами:

Теорема 1. *В многообразии* $\mathcal{V}_n$ *выполнены тождества*

$$x^{2n+2} \equiv 0, \qquad (x_1y_1)\cdots(x_{2n+1}y_{2n+1}) \equiv 0.$$

При $n = 1$ *данная пара тождеств является базисом тождеств* $\mathcal{V}_1$.

Теорема 2. *Если* $f(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0$ *— тождество многообразия* $\mathcal{V}_n$ *и* $g(y_1, \ldots, y_l) \equiv 0$ *— тождество многообразия* $\mathcal{V}_m$*, то:*

(1) *в многообразии* $\mathcal{V}_{n+1}$ *выполнены тождества:*

$$f(x_1, \ldots, x_k)(z_1z_2)(z_3z_4) \equiv 0, \qquad f(x_1, \ldots, x_k)((z_1z_2)(z_3z_4)) \equiv 0.$$

(2) *в многообразии* $\mathcal{V}_{n+m}$ *выполнены тождества:*

$$f(x_1, \ldots, x_k)g(y_1, \ldots, y_l) \equiv 0, \qquad f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(y_1, \ldots, y_l), x_{i+1}, \ldots, x_k) \equiv 0.$$

Список литературы

[1] Кантор И. Я. Йорданова и лиева супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // II Сибирская Школа (Томск) “Алгебра и Анализ” // Деп. ВИНИТИ N 30 — 1990. С. 89–125.

[2] Шестаков И. П. Квантования супералгебр Пуассона и специальность йордановых супералгебр пуассонова типа // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, N 5. С. 571–584.

УлГУ, Ульяновск
E-mail: klever176@rambler.ru

Универсальная эквивалентность частично коммутативных алгебр Ли некоторого класса

Е. Н. Порошенко

Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — неориентированный граф без петель с конечным множеством вершин A и множеством ребер E. *Частично коммутативной алгеброй Ли* над областью целостности R с единицей называется R-алгебра с множеством порождающих $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и множеством определяющих соотношений вида

$$\{[a_i, a_j] = 0 \,|\, a_i \text{ и } a_j \text{ соединены ребром}\}. \tag{1}$$

Частично коммутативную алгебру Ли, определенную графом G с множеством вершин A обозначим $\mathcal{L}(A; G)$.

Серия работ автора [**1**]–[**4**] (первая из которых в соавторстве с Е. И. Тимошенко) была посвящена изучению вопроса универсальной эквивалентности для некоторых классов частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, а именно, для частично коммутативных (метабелевых) алгебр Ли, определяющими графами которых являются деревья (конечные и бесконечные) и циклы. Цель данной работы — обобщение результатов, полученных в [**3**].

Пусть $G = \langle A; E\rangle$ — неориентированный связный граф без треугольников и квадратов, то есть граф, в котором нет циклов длины 3 и 4. Через G^* обозначим подграф графа G, порожденный всеми его невисячими вершинами.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть $G = \langle A; E\rangle$ и $H = \langle B; F\rangle$ — конечные связные графы без треугольников и квадратов. Частично коммутативные алгебры Ли $\mathcal{L}(A; G)$ и $\mathcal{L}(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда графы G^* и H^* изоморфны.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18–01–00100).

Список литературы

[1] Poroshenko E. N., Timoshenko E. I., Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras // J. Algebra, **384** (2013), 143–168.

[2] Poroshenko E. N., On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras // Comm. in Algebra, **43**, 2 (2015), 746–762.

[3] Порошенко Е. Н., Об универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли // Алгебра и логика, **56**, 2 (2017), 202–225.

[4] Порошенко Е. Н., Об универсальной эквивалентности некоторых счетно порожденных частично коммутативных структур // Сиб. мат. ж., **58**, 2 (2017), 386–398.

Новосибирский государственный технический униврееситет, Новосибирск
E-mail: auto_stoper@ngs.ru

О тождествах альтернативного монстра и алгебры Скосырского

С. В. Пчелинцев

Хорошо известно, что коммутативных альтернативных алгебрах $S[X]$ (монстр) и $Sk(X)$ (алгебра Скосырского) выполняется тождество $x^3 = 0$ (эти алгебры рассматриваются над бесконечным полем характеристики 3). В [**1**] было указано тождество $\prod_{i=1}^{4}(c, x_i, y_i) = 0$ степени 12, выполняющееся в алгебрах $S[X]$ и $Sk(X)$, где $(c, x, y) = (cx)y - c(xy)$ обозначает ассоциатор элементов c, x, y. Найдено новое тождество

$$p(a, b, x, y, z, t) := (a, b, x)(y, z, t) - (a, b, y)(z, t, x)+$$
$$(a, b, z)(t, x, y) - (a, b, t)(z, x, y) = 0$$

степени 6, выполняющееся в алгебрах $S[X]$ и $Sk(X)$. Доказана также независимость следующей системы тождеств над бесконечным полем характеристики 3: $xy - yx$, (x, y, y), x^3, $p(a, b, x, y, z, t)$, $\prod_{i=1}^{4}(c, x_i, y_i)$. Кроме того, доказано, что алгебры $Sk(X)$ и $S[X]$ неотличимы тождествами от пяти переменных.

Полученные результаты имеют непосредственное отношение к гипотезам, высказанным в работах [**1**]–[**3**].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 16-01-00756).

Список литературы

[1] Пчелинцев С. В., Изотопы альтернативного монстра и алгебры Скосырского // Сиб. матем. журн, **57**:4 (2016), 850–865.

[2] Grishkov A. N., Shestakov I. P., Commutative Moufang loops and alternative algebras // J. Algebra. **333**:1 (2011), 1–13.

[3] Pchelintsev S. V., Proper identities of finitely generated commutative alternative algebras // J. Algebra, **407** (2017), 425–440.

Финансовый университет при правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru

Простые асимметричные дубли, их автоморфизмы и дифференцирования

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков

В [**1**] были описаны указанные объекты для простых правоальтернативных супералгебр абелева типа. В частности, было доказано, что группы автоморфизмов являются абелевыми, а супералгебры дифференцирований нулевыми.

В [**2**] были описаны все конечномерные супералгебры с четной частью M_2 (алгебра матриц порядка 2), оказалось, что все они либо альтернативны, либо имеют размерность 8. Альтернативные супералгебры зависят от одного параметра и являются либо ассоциативными дублями Уолла, либо альтернативными 6-мерными супералгебрами Шестакова; не альтернативные супералгебры были названы асимметричными дублями.

Изучены изоморфизмы, автоморфизмы и дифференцирования асимметричных дублей над произвольным полем характеристики $\neq 2$. Введено понятие канонического базиса асимметричного дубля вида $B_{4|4}(w)$, зависящего от матрицы w с ненулевым следом, и указана таблица умножения однородных элементов. Показано, что дубль является правоальтернативной супералгеброй и указан критерий её простоты. Указаны основные специализации дублей $B_{4|4}(w)$ в зависимости от спектра определяющей матрицы w: жорданов, диагональный (в частности, исключительный и вырожденный) и обобщенно жорданов.

Две матрицы w и w', имеющие ненулевые следы, назовем *эквивалентными*, если существуют такие скаляр $\varepsilon \in \Phi$ и матрица $s \in \mathrm{SL}_2$, что $w' = \varepsilon^2 s^{-1} w s$. Доказано, что дубли $\mathcal{B}_{4|4}(w)$ и $\mathcal{B}_{4|4}(w')$ изоморфны тогда и только тогда, когда матрицы w' и w эквивалентны. Найдены группы автоморфизмов асимметричных дублей. Доказано,что группа автоморфизмов скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ является прямым произведением $\{\pm 1\} \times \mathrm{SL}_2$; группы автоморфизмов всех других дублей абелевы. Вычислены супералгебры дифференцирований. Доказано, что алгебра четных дифференцирований скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2$; нечетные дифференцирования имеют только вырожденные дубли, супералгебры дифференцирований которых абелевы.

Список литературы

[1] Пчелинцев С. В., Шашков О. В., Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. матем., **79**:3 (2015), 131–158.

[2] Пчелинцев С. В., Шашков О. В., Простые унитальные правоальтернативные супералгебры над алгеброй матриц порядка 2 // Алгебра и логика, (в печати).

Финансовый университет при правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru

Изоморфизмы решеток подалгебр колец непрерывных действительнозначных функций

В. В. Сидоров

Классическая теорема Гельфанда–Колмогорова [**1**] утверждает, что для любого тихоновского пространства X спектр кольца $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βX. В частности, топология произвольного компакта X определяется кольцом $C(X)$. Этот результат был распространен Хьюиттом [**2**] на действительно-компактные пространства X, называемые теперь хьюиттовскими (топологическое пространство называется хьюиттовским, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени прямой $\mathbb{R}$). Важность хьюиттовских пространств в теории колец $C(X)$ и связанных с ними алгебраических систем непрерывных функций состоит в том, что для любого топологического пространства X найдутся тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$ такие, что кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $\nu\tau C(X)$ канонически изоморфны. Хьюитт доказал, что с точностью до гомеоморфизма хьюиттовских пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$ существуют лишь тождественные изоморфизмы колец $C(X)$ и $C(Y)$.

Кольцо $C(X)$ является $\mathbb{R}$-алгеброй. Непустое подмножество A кольца $C(X)$ будет его подалгеброй, если $f+g, fg, rf \in A$ для любых $f,g \in C(X)$ и $r \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathbb{A}(C(X))$ решетку $\mathbb{R}$-подалгебр кольца $C(X)$ относительно включения. В 1997 г. Е. М. Вечтомов заметил [**3**], что в теореме Хьюитта кольцо $C(X)$ можно заменить на решетку $\mathbb{A}(C(X))$. Другими словами, для любых хьюиттовских пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ влечет гомеоморфизм пространств X и Y. Отсюда, в частности, следует, что для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ влечет изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$. Поскольку при изоморфизме колец $C(X)$ и $C(Y)$ образом подалгебры является подалгебра, обратное также верно. Существуют ли изоморфизмы решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$, которые не индуцируются изоморфизмами колец $C(X)$ и $C(Y)$?

Нами получен следующий результат.

Теорема. *Для произвольных связных компактов X и Y изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ индуцируется изоморфизмом колец $C(X)$ и $C(Y)$.*

Список литературы

[1] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах. Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. N 1. С. 11–15.

[2] E. Hewitt. Rings of real-valued continuous functions. I. Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 45–99.

[3] Е. М. Вечтомов. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства. Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 687–693.

Вятский государственный университет, Киров
E-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Вполне идемпотентные гомоморфизмы абелевых групп

А. Р. Чехлов

Пусть $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ и $H_r(f) = \Big\{\sum_i g_i f s_i \,|\, g_i \in \operatorname{Hom}(B, A), s_i \in \operatorname{Hom}(A, A)\Big\}$, $H_l(f) = \Big\{\sum_i s_i f g_i \,|\, g_i \in \operatorname{Hom}(B, A), s_i \in \operatorname{Hom}(B, B)\Big\}$, $Z(n)$ — циклическая группа порядка n, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

Гомоморфизм $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ называется:

1) *вполне идемпотентным справа* (*слева*), если $f \in fH_r(f)$ $(f \in H_l(f)f)$ (см. [**1**], [**2**]);

2) *регулярным*, если существует такой гомоморфизм $g \in \operatorname{Hom}(B, A)$, что $f = fgf$.

Всякий регулярный гомоморфизм является вполне идемпотентным как справа, так и слева.

Предложение. 1) Пусть

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \quad \text{и} \quad B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n,$$
$$A_1 \cong \ldots \cong A_n \cong B_1 \cong \bigoplus_{p\in\Pi} Z(p), \quad B_2 \cong \ldots \cong B_n \cong \prod_{p\in\Pi} Z(p),$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Pi \subseteq \mathbb{P}$ и $|\,\Pi\,| = \aleph_0$. Тогда $\operatorname{Hom}(A, B)$ содержит не регулярные вполне идемпотентные справа гомоморфизмы.

2) Пусть

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \quad \text{и} \quad B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$,

$$A_1 \cong B_1 \cong \ldots \cong B_n \cong Z(p^2), \quad A_2 \cong \ldots \cong A_n \cong Z(p).$$

Тогда $\operatorname{Hom}(A, B)$ содержит не регулярные вполне идемпотентные слева гомоморфизмы.

Список литературы

[1] Абызов А. Н., Вполне идемпотентность Hom // Известия вузов. Матем. 2011. 8. С. 3–8.

[2] Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, 7. С. 3–38.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: chekhlov@math.tsu.ru

Hochschild cohomology via Morse mathching and Anick resolution

H. AlHussein, P. Kolesnikov

Homological methods allow us to get important information about the structure of an algebra. For associative algebras, Hochschild cohomologies play an important role in structure and representation theory. Finding the Hochschild cohomology group $H^n(A, M)$ of a given algebra A with coefficients in a given A-bimodule M is often a difficult problem. In order to solve this problem one needs a long exact sequence starting from A, a resolution of A. The most natural bar-resolution is easy to construct but it is too bulky for computations. Another approach was proposed by David J. Anick in 1986 [**1**], where it was built a free resolution for associative algebra which is homotopy equivalent to the bar-resolution. The Anick resolution was also used to find Poincare Series. Computation of the differentials in the Anick resolution according to the original algorithm described in [**1**] is extremely hard. In order to make the computation easier, one may use the discrete algebraic Morse theory based on the concept of a Morse matching defined in [**3, 4**]. This concept was used in geometry first, then it became applicable in algebra. In the present work, we apply the Morse matching theory to find the Anick resolution and calculate the groups of Hochschild n-cohomologies of the Manturov group (which has applications in Dynamical Systems[**6**]), Weyl algebra and chinese algebra.

References

[1] Anick D. J., On the homology of associative algebras, Transactions of the American Mathematical Society, 1986, Vol. 296, No 2, P. 641-659.

[2] Lopatkin V., Cohomology rings of the plastic monoid algebra via a Grobner - Shirshov basis, 2017, arXiv:1411.5464v7 [math.AT].

[3] Sköldberg E., Morse theory from an algebraic viewpoint, Trans. Amer. Math. Soc., **358** (1) (2006) 115 – 129.

[4] Jöllenbeck M., Welker V., Minimal Resolutions Via Algebraic Discrete Morse Theory, Mem. Am. Math. Soc. **197** (2009).

[5] Bai Y., Chen Y., Gröbner-Shirshov Bases for the Groups G_3^2 and G_4^3, School of Mathematical Sciences, South China Normal University, (2017).

[6] Manturov V.O., Non-reidemeister knot theory and its applications in dynamical sestems, geometry, and topology, preprint (2015), arXiv:1501.05208.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: hassanalhussein2014@gmail.com

Realization of Buchberger algorithm for bicommutative and Novikov algebras

A. S. Dzhumadil'daev, K. M. Tulenbayev

An algebra $(A, \circ)$ is called *Novikov* if $a_1 \circ (a_2 \circ a_3) - (a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_3 \circ a_2) - (a_1 \circ a_3) \circ a_2$, $a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = a_2 \circ (a_1 \circ a_3)$. Bicommutative algebras are defined by the identities $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$and $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b$. Base elements of Novikov algebras and bicommutative algebras can be formed by elements that are right-bracketed products of left-bracketed elements. We write them as a sequence of rows put down each other. Rows corresponds to left-bracketed elements and columns to right-bracketed elements.

$$\begin{array}{cccccc} \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & & \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \\ \bullet & \cdots & \bullet & & & \end{array} \mapsto \begin{array}{cccccc} \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & & \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \\ \bullet & \cdots & \bullet & & & \end{array}$$

We denote $a_{i,j}$ element from Ω in ъых№ъх (i, j), at the intersection of i-th row and j-th column. The rule of filling is following:

- $a_{i,1} \geq a_{i+1,1}$, if $r_i = r_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1$.
- sequence

$$a_{n,2} \cdots a_{n,r_n} a_{n-1,2} \cdots a_{n-1,r_{n-1}} \cdots a_{1,2} \cdots a_{1,r_1}$$

is non-decreasing.

Theorem 1. *Let A be bicommutative algebra then base in terms of hooks give us Grobner-Shirshov base*

Theorem 2. *Let A be Novikov algebra then base in terms of Novikov diagrams give us Grobner-Shirshov base*

Realization of Buchberger algorithm for Novikov algebras differs from polynomial case because we need reduction to Novikov diagram from Young diagram with arbitrary filling. Realization of Buchberger algorithm for Bicommutative algebras needs new definition of S-polynomials.

References

[1] Bokut' L. A., Kolesnikov P. S., Grobner-Shirshov bases: from incipiency to nowadays", Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 7, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 272, POMI, St. Petersburg, 2000, 26–67.

[2] Dzhumadil'daev A. S., Tulenbaev K. M., Bi-commutative algebras // Uspechi Math. Nauk., 2003, No.6, 149–150. Eng. transl. Russian Math. Surv., 1196–1197.

Suleyman Demirel University, 1/1 Abylai Khan street, Kaskelen, Almaty, (Kazakhstan)
E-mail: dzhuma@@hotmail.com, tulen75@@hotmail.com

Hochschild cohomology of algebras of dihedral type

M. Filippov

Algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion types have appeared in the work of Erdmann [**1**] on the classification of group blocks of tame representation type. Since then, their Hochschild cohomology groups were studied extensively. For example, the Hochschild cohomology algebra was calculated for a family of local algebras of quaternion type in [**3**], furthermore, in [**4**] the algebra $\mathrm{HH}^*(R)$ was described for the family of local algebras of dihedral type, and in [**5**], the algebra $\mathrm{HH}^*(R)$ was described for a family of local algebras of semidihedral type.

The present paper is devoted to calculation of the Hochschild cohomology groups for algebras of dihedral type contained in the family $D(3\mathcal{R})$ (in the notation of [**1**]), hereby continuing the work of the papers above. In the calculation, we apply the approach from [**2**]. A specific feature of this approach is that, on the basis of some empirical observations, the minimal projective bimodule resolution for the discussed algebras is constructed, and then the resolution is used in the calculation of the Hochschild cohomology groups and also the multiplication in the Hochschild cohomology algebra.

The work was supported by the President's Program "Support of Young Russian Scientists" (grant MK-1378.2017.1).

References

[1] Erdmann K., Blocks of tame representation type and related algebras // Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg. 1990.

[2] Generalov A., Hochschild cohomology of dihedral type algebras. I. The family $D(3\mathcal{K})$ in characteristic 2 // St. Petersburg Math. J. 16 (2005), no. 6, 961–1012.

[3] Generalov A., Hochschild cohomology of quaternion type algebras. I. Generalized quaternion groups // St. Petersburg Math. J. 18 (2007), no. 1, 37–76.

[4] Generalov A., Hochschild cohomology of dihedral type algebras. II. Local algebras // J. Math. Sci. (N.Y.) 171 (2010), no. 3, 357–379

[5] Generalov A., Hochschild cohomology of algebras of semidihedral type. I. Group algebras of semi-hedral groups // St. Petersburg Math. J. 21 (2010), no. 2, 163–201.

Saint Petersburg state university, Saint Petersburg
E-mail: maksim-filippov-1996@list.ru

Codimension growth of central polynomials

A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev

Let A be an algebra over a field F of characteristics zero and $Z(A)$ its center. A polynomial $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ is called a central polynomial of A if $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ for any $a_1, \ldots, a_n \in A$. In case F takes only zero value, f is an identity of A whereas if f takes a non-zero value in $Z(A)$, we say that f is a proper central polynomial.

Let $P_n = P_n(x_1, \ldots, x_n)$ be the subspace of all multilinear polynomials on $x_1, \ldots, x_n$ of the absolutely free algebra $F\{X\}$. Denote by $Id(A)$ the two-sided ideal of $F\{X\}$ of all identities of A and by $Id^z(A)$ the subspace of all central polynomials of A. The value $c_n(A) = \text{codim } (P_n : P_n \cap Id(A))$ is called the nth codimension of A. It is known that in associative case the limit $exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ always exists and is a non-negative integer called the PI-exponent of A.

In 2016 A. Regev introduced the notion of central codimension $c_n^z(A)$ and proper central codimension $c_n^\delta(A)$ by setting $c_n^z(A) = \text{codim } (P_n : P_n \cap Id^z(A))$, $c_n^\delta(A) = \text{codim } (P_n \cap Id^z(A) : P_n \cap Id(A))$ (see [**1**]). In the papers [**1**], [**2**] it was proved that for any finite dimensional associative algebra A the limits $exp^\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^\delta(A)}$ and $exp^z(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^z(A)}$ also exist and are integers. Moreover, $exp^z(A) = exp(A)$ provided that $exp(A) \geq 2$.

Similar numerical invariants can be naturally defined in the more general case of non-associative algebras as well. In the present talk we announce the following result. Let W be the five-dimensional algebra with basis e_{-1}, e_0, e_1, e_2, z and with multiplication table given by $e_{-1}e_0 = e_{-1},\ e_{-1}e_1 = e_0,\ e_{-1}e_2 = e_1 = e_0e_1,\ e_0e_2 = e_2,\ e_2e_2 = z$, where all remaining products are supposed to be zero.

Theorem. *The exponents $exp(W), exp^z(W), exp^\delta(W)$ do exist but are not integers. Moreover, $exp(W) = exp^z(W) = exp^\delta(W) \approx 3.610718614$.*

The first author was partially supported by the GNSAGA of INDAM. The third author was supported by the RFBR, grant 16-01-00113.

References

[1] Regev A., Growth of the central polynomials // Comm. Algebra, 44 (2016), 4411 – 4421.

[2] Giambruno A., Zaicev M., Central polynomials and growth functions // Israel J. Math. 226 (2018), no. 1, 15–28.

Università di Palermo, Palermo (Italy)
E-mail: antonio.giambruno@unipa.it
Ulyanovsk State University, Ulyanovsk Russia(Russia)
E-mail: mishchenkosp@mail.ru
Moscow State University, Moscow (Russia)
E-mail: zaicevmv@mail.ru

On graded UJ-rings

E. Ilić-Georgijević

Recently, in [**9**], a *UJ-ring* is introduced as an associative ring R with identity 1 such that $1+J(R)=U(R)$, where $J(R)$ and $U(R)$ denote the Jacobson radical of R and the group of units of R, respectively. As it is noticed in [**9**], a ring R is a UJ-ring if and only if the set of all quasi-regular elements of R coincides with $J(R)$. This characterization motivates us to define a *graded UJ-ring* in a similar manner. We observe an S-graded ring inducing S [**6, 7, 8**], that is, a ring R whose additive group can be written as a direct sum of a family of additive subgroups of R indexed by a partial groupoid S, such that $R_sR_t \subseteq R_{st}$ whenever st is defined, and $R_sR_t \neq 0$ implies that the product st is defined. If S is cancellative, then, by [**2**], a homogeneous element x from R_s is *graded* (*right*) *quasi-regular* if and only if either s is not a nonzero idempotent element of S, or if s is a nonzero idempotent element of S, then x is a classical (right) quasi-regular element of the ring R_s. Also, if S is cancellative, the *graded Jacobson radical* $J^g(R)$ [**2**] is the largest homogeneous ideal of R all of whose homogeneous elements are graded right quasi-regular (which are then graded quasi-regular). We define an S-graded ring inducing S to be *graded UJ* if the homogeneous part of $J^g(R)$ coincides with the set of all graded quasi-regular elements of R. We give basic properties of such rings and discuss their connection to *graded nil clean rings*, which are introduced in [**5**]. Also, we examine the graded UJ-property of Morita contexts, corner rings and polynomial rings.

References

[1] Diesl A. J., Nil clean rings // J. Algebra **383** (2013), 197–211.

[2] Halberstadt E., Le radical d'un anneide régulier // C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A, Paris **270** (1970), 361–363.

[3] Ilić-Georgijević E., On graded Ω-groups // Filomat **29** (10) (2015), 2167–2183.

[4] Ilić-Georgijević E., On graded special radicals of graded rings // J. Algebra Appl. **17** (6) (2018), 1850109, 10.

[5] Ilić-Georgijević E., Şahinkaya S., On graded nil clean rings // Commun. Algebra 46 (9) (2018), 4079–4089.

[6] Kelarev A. V., On groupoid graded rings // J. Algebra **178** (1995), 391–399.

[7] Kelarev A. V., Ring constructions and applications // Series in Algebra, Vol. **9**, World Scientific, 2002.

[8] Kelarev A. V., Plant A., Bergman's lemma for graded rings // Commun. Algebra **23** (12) (1995), 4613–4624.

[9] Koşan M. T., Leroy A., Matczuk J., On UJ-rings // Commun. Algebra 46 (5) (2018), 2297–2303.

[10] Krasner M., Anneaux gradués généraux // Publications mathématiques et informatiques de Rennes, Colloque d'algèbre, Fascicule S3, (1980), 209–308.

University of Sarajevo, Faculty of Civil Engineering, Sarajevo (Bosnia and Herzegovina)
E-mail: emil.ilic.georgijevic@gmail.com

Split Hom-Leibniz color 3-algebras

I. Kaygorodov, Yu. Popov

A Lie algebra $\mathfrak{g}$ is called *split* if there exists a maximal abelian subalgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ such that

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha,$$

where for $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ the space $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}$ is called a *root space*. If $\alpha \neq 0$ is such that $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, then α is called *a root of* $\mathfrak{g}$.

The class of split Lie algebras includes, for example, classical simple finite-dimensional Lie algebras, Kac-Moody algebras, the Virasoro algebra and many others. Motivated by deep structural results on split Lie algebras with certain restrictions on the root system obtained in [**6, 5**], in the paper [**1**] A. Calderón began the study of Lie algebras over an arbitrary field and an arbitrary root system. His results were later generalized for various algebraic systems of Lie type.

We introduce and study the class of split regular *Hom*-Leibniz color 3-algebras and the class of split Leibniz color 3-algebras with an automorphism. These classes are natural extensions such previously studied classes as split Leibniz 3-algebras [**3**], split regular *Hom*-Lie color algebras [**2**], and many others. We establish a $1-1$ correspondence between the classes of split regular *Hom*-Leibniz color 3-algebras and the class of split Leibniz color 3-algebras with an automorphism and describe their structure. Particularly, we show that an algebra T of one of these two classes satisfying some additional technical conditions is of the form $T = U + \sum I_j$ with U a certain subspace of T and each I_j an ideal of T such that $[T, I_j, I_k] + [I_j, T, I_k] + [I_j, I_k, T] = 0$ for $j \neq k$.

The authors were supported by RFBR 18-31-00001 and the President's Program "Support of Young Russian Scientists" (grant MK-1378.2017.1).

References

[1] Calderón A. J., On split Lie algebras with symmetric root systems // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 118 (2008) 351–356.
[2] Cao Y., Chen L., On split regular *Hom*-Lie color algebras // Colloq. Math., 146 (2017), 1, 143–155.
[3] Calderón A.J., Sánchez-Ortega J., Split 3-Leibniz algebras // Journal of Geometry and Physics 116, (2017), 204–215.
[4] Kaygorodov I., Popov Yu., Split Regular *Hom*-Leibniz Color 3-algebras // arXiv:1807.04609, accepted in Colloq. Math.
[5] Neeb K.-H., Integrable roots in split graded Lie algebras // J. Algebra 225, 534–580 (2000).
[6] Stumme N., The structure of locally finite split Lie algebras // J. Algebra 220, 664–693 (1999).

Universidade Federal do ABC, CMCC, Santo André (Brazil), Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: ivan.kaygorodov.84@mail.ru, yuri.ppv@gmail.com

The degeneration level classification of algebras

I. Kaygorodov, Yu. Volkov

The general linear group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ acts naturally on the set of all algebras of fixed dimension n in a given variety M over a field $\mathbb{F}$ (whcih is an algebraic variety). Given A and B in M, we say that B degenerates to A if A belongs to the closure of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-orbit of B (in the Zariski topology on M). The notion of a degeneration is closely related to the notions of a contraction and of a deformation.

The notion of the level of an algebra was introduced in [**2**]. The algebra under consideration has the level n if there is a chain of n nontrivial degenerations that starts at the given algebra and there is no such a chain of length $n+1$. Roughly speaking, the level estimates the complexity of the multiplication of the given algebra. For example, the unique algebra of the level zero is the algebra with zero multiplication and an algebra has the level one if the closure of its orbit is formed by the zero algebra and the orbit itself. At this moment there are no many results about the levels of algebras. The algebras of the first level were classified in [**4**]. Associative, Lie, Jordan, Leibniz and nilpotent algebras of the level two were classified in [**1, 3**].

In our work [**5**] we try to develop a way to classify algebras of small levels. We classify all the algebras of the level 2 and give some portions of the classification of algebras of higher levels. In particular, we recover and correct the results of [**3**]. It is interesting that all the anticommutative algebras of the second level are Lie algebras and all the alternative algebras of the second level are associative.

The authors were supported by RFBR 18-31-00001 and the President's Program "Support of Young Russian Scientists" (grant MK-1378.2017.1).

References

[1] Francese J., Khudoyberdiyev A., Rennier B., Voloshinov A., Classification of algebras of level two in the variety of nilpotent algebras and Leibniz algebras // arXiv:1710.08141.

[2] Gorbatsevich V., On contractions and degeneracy of finite-dimensional algebras // Soviet Math. (Iz. VUZ), 35 (1991), 10, 17–24.

[3] Khudoyberdiyev A., The classification of algebras of level two // J. Geom. Phys., 98 (2015), 13тАУ20.

[4] Khudoyberdiyev A., Omirov B., The classification of algebras of level one // Linear Algebra and its Applications, 439 (2013), 11, 3460–3463.

[5] Kaygorodov I., Volkov Yu., The degeneration level classification of algebras // arXiv:1710.08943, accepted in Moscow Math. J.

Universidade Federal do ABC, CMCC, Santo André (Brazil), Saint Petersburg state university, Saint Petersburg

E-mail: ivan.kaygorodov.84@mail.ru, yurij.volkov.86@list.ru

Automorphisms of an enveloping ring R of a nil-triangular subalgebra of a rank two Chevalley algebra

A. V. Kazakova

A Chevalley algebra over a field K is characterized by a root system Φ and a Chevalley basis. The latter consists of elements e_r $(r \in \Phi)$ and a suitable basis for a Cartan subalgebra, see [1; § 4.4]. The subalgebra with the basis $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ is said to be nil-triangular and is denoted by $N\Phi(K)$. By the Chevalley Basis theorem, the value of $e_r * e_s$ is equal to $N_{rs}e_{r+s}$ if $r, s, r+s \in \Phi^+$ and is equal to 0 if $r+s \notin \Phi^+$. Here N_{rs} is either ± 1, or ± 2, or (for G_2-type algebras) ± 3. Let $R = (R, +, \cdot)$ be a K-algebra with the same basis. We put $e_r e_s = 0$ if $r+s \notin \Phi$. If $r, s, r+s \in \Phi^+$ and $N_{r,s} \geq 1$ then we put $e_r e_s = e_{r+s}$ and $e_s e_r = -(N_{r,s}-1)e_{r+s}$. We replace the multiplication of R by the operation $x * y = xy - yx$. We obtain a Lie algebra $R^{(-)} \simeq N\Phi(K)$. This construction of the enveloping algebra R of a Lie algebra $N\Phi(K)$ was suggested by Levchuk. For A_{n-1}-type algebras, this algebra is isomorphic to the associative algebra $NT(n, K)$ of nil-triangular $n \times n$-matrices over K. One of the main problems of our research is to find automorphisms of the enveloping ring R of a nil-triangular subalgebra $N\Phi(K)$ of a rank two Chevalley algebra over an associative-commutative ring K with unity. For A_2-type algebras, such automorphisms were described in [2]. For the remaining types (i.e., B_2 and G_2), the description is suggested below.

Theorem 1. *Let R denote an enveloping algebra of a B_2-type Lie algebra $N\Phi(K)$. Then each automorphism of R is the product of a diagonal, ring, and annihilator automorphisms, an inner automorphism of the form $x_b(K)$, and a suitable automorphism of the form*

$$\xi(d,t) : e_b \mapsto e_b, \quad e_a \mapsto e_a + de_{a+b} \quad e_{a+b} \mapsto e_{a+b}, \quad e_{2a+b} \mapsto e_{2a+b}.$$

Theorem 2. *Let R denote an enveloping algebra of a G_2-type Lie algebra $N\Phi(K)$. Then each automorphism of R is the product of a diagonal, ring, and central automorphisms, a root automorphism of the form $x_b(K)$, and a suitable automorphism of the form (where $t \in K$)*

$$\xi(t) : e_b \mapsto e_b, \quad e_a \mapsto e_a + te_{3a+b}, \quad e_{a+b} \mapsto e_{a+b} + te_{3a+2b},$$
$$e_{2a+b} \mapsto e_{2a+b}, \quad e_{3a+b} \mapsto e_{3a+b}, \quad e_{3a+2b} \mapsto e_{3a+2b}.$$

The participant was supported by a travel grant provided due to Prof. H.P. Sankappanavar.

References

[1] Carter R., Simple Groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972.

[2] Levchuk V.M., Connections between a unitriangular group and certain rings. II: Groups of automorphisms. Siberian Math. J. 24 (1983), 543–557.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: alvkazakova@gmail.com

On the Hochschild cohomologies of associative conformal algebras

P. S. Kolesnikov, R. A. Kozlov

An algebraic formalization of the properties of the operator product expansion (OPE) in 2-dimensional conformal field theory gave rise to a new class of algebraic systems, vertex operator algebras. The singular part of the OPE describes the commutator of two fields, and the corresponding algebraic structures are called conformal (Lie) algebras (or vertex Lie algebras).

Associative conformal algebras of conformal endomorphisms are of essential importance for the study of finite representations of conformal Lie algebras (Lie vertex algebras) via associative conformal envelopes of finite Lie algebras. The latter algebraic structures belong to the class of associative conformal algebras with a finite faithful representation (FFR, for short).

Since the splitting of a semisimple part plays crucial role in the study of Ado-type problems for finite Lie conformal algebras, it is reasonable to investigate the similar problem for associative conformal algebras with a FFR. A natural tool for such investigation is the computation of Hochschild cohomologies for conformal algebras.

In this work, we explicitly describe all those semisimple associative conformal algebras with a FFR that have trivial second Hochschild cohomology group relative to every conformal bimodule.

The work was supported by the Program of fundamental scientific researches of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, I.1.1, project 0314-2016-0001.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: pavelsk@math.nsc.ru
Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: KozlovRA.NSU@yandex.ru

Representations of generalizations of Jordan algebras

Yu. Popov

Noncommutative Jordan algebras were introduced by Albert. He noted that the structure theories of alternative and Jordan algebras share so many nice properties that it is natural to conjecture that these algebras are members of a more general class with a similar theory. So he introduced the variety of noncommutative Jordan algebras defined by the Jordan identity and the flexibility identity. The class of noncommutative Jordan (super)algebras turned out to be vast: for example, apart from alternative and Jordan (super)algebras it contains quasiassociative (super)algebras, quadratic flexible (super)algebras and (super)anticommutative (super)algebras. However, the structure theory of this class is far from being nice.

Representations of alternative and Jordan superalgebras are considered in various works. For example, in the paper [**2**] Martínez and Zelmanov used the Tits–Koecher–Kantor construction to describe irreducible superbimodules over superalgebras $M_{m,n}(\mathbb{F})^{(+)}$, $JP(n)$, $Josp(m, 2r)$, and Jordan superalgebras of supersymmetric bilinear forms over algebraically closed fields of characteristic 0. Some of the Martínez-Zelmanov results were generalized to the case of arbitrary characteristic $\neq 2$ [**1, 6**].

Central simple finite-dimensional noncommutative Jordan superalgebras were described by Pozhidaev and Shestakov in [**3, 4, 5**]. In this talk we will discuss the representations of these superalgebras. Our main result is the classification of all irreducible finite-dimensional representations of central simple finite-dimensional noncommutative Jordan superalgebas of degree ≥ 2 over an algebraically closed field of characteristic 0. In particular cases, we also obtain complete reducibility of modules and Kronecker factorization theorem.

The author was supported by the President's Program "Support of Young Russian Scientists" (grant MK-1378.2017.1).

References

[1] Martínez C., Shestakov I., Zelmanov E., Jordan bimodules over the superalgebras $P(n)$ and $Q(n)$ // Trans. Amer. Math. Soc., **362**, 2010, 4, 2037–2051.

[2] Martínez C., Zelmanov E., Representation theory for Jordan superalgebras I // Trans. Amer. Math. Soc., **362**, 2010, 2, 815–846.

[3] Pozhidaev A., Shestakov I., Noncommutative Jordan superalgebras of degree $n > 2$ // Algebra and Logic, **49**, 2010, 1, 26–59.

[4] Pozhidaev A., Shestakov I., Simple finite-dimensional noncommutative Jordan superalgebras of characteristic 0 // Siberian Math. J., **54**, 2013, 2, 389–406.

[5] Pozhidaev A., Shestakov I., Simple finite-Dimensional modular noncommutative Jordan Superalgebras // J. Pure Appl. Algebra, 2018, DOI: 10.1016/j.jpaa.2018.07.017

[6] Shestakov I., Solarte O. F., Irreducible representations of the simple Jordan Superalgebra of Grassmann Poisson bracket // J. Algebra, **455** (2016), 291–313.

Novosibirsk State University (Russia)
E-mail: yuri.ppv@gmail.com

VI. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

О классах мультифункций, порожденных максимальными частичными ультраклонами

С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев

Пусть $A = \{0, 1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$P^{\bar{*}}_{2,n} = \{f | f : A^n \to F\}, P^{\bar{*}}_2 = \bigcup\limits_n P^{\bar{*}}_{2,n}$,

$P_{2,n} = \{f | f \in P^{\bar{*}}_{2,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$.

Функции из P_2 называют функциями алгебры логики, из $P^{\bar{*}}_2$ – мультифункциями на A.

В работе [1] описаны все максимальные частичные ультраклоны мультифункций на A. В докладе рассматривается вопрос о принадлежности мультифункций максимальным частичным ультраклонам. Например, для булевых функций аналогичная задача решалась в [2].

Компьютерный эксперимент установил, что мультифункции от трех переменных дают 91 тип функций. Исследование свойств мультифункций позволило понизить верхнюю оценку. Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема. *Число классов мультифункций, порожденных отношением принадлежности максимальным частичным ультраклонам, не менее 91 и не более 1655.*

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект N 18-31-00020.

Список литературы

[1] Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 450–474.

[2] Яблонский С.В. О суперпозициях функций алгебры логики // Математический сборник. 1952. Т. 30 (72), N 2. С. 329–348.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ
E-mail: badmaevsa@mail.ru, goran5@mail.ru

О сложности строения решеток квазимногообразий коммутативных колец

А. О. Башеева

Доклад посвящен сложности строения решетки $\mathrm{Lq}(K)$ подквазимногообразий квазимногообразия K коммутативных колец с единицей. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Для каждого из перечисленных ниже свойств в решетке* $\mathrm{Lq}(K)$ *есть континуум элементов, обладающих этим свойством:*

- неразрешимость проблемы вхождения для конечных колец:

- неразрешимость квазиэквациональной теории;

- существование рекурсивного независимого базиса квазитождеств;

- отсутствие независимого базиса квазитождеств;

- существование ω-независимого базиса квазитождеств.

Работа поддержана Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант AP05132349).

Список литературы

[1] Кравченко А. В., Нуракунов А. М., Швидефски М. В. О строении решеток квазимногообразий. I. Независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, N 6.

[2] Basheyeva A. O., Nurakunov A. M, Schwidefsky M. V. . Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. III // Siberian Electronic Math. Reports. 2017. Vol. 14. P. 252–263.

[3] Башеева А.О. Квазимногообразия коммутативных колец // Вестник КазНУ. 2018. Т. 97, N 1. P. 54–66.

Евразийский Национальный Университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: basheeva@mail.ru

Решетка формульно-определимых подквазимногообразий полных теорий квазимногообразия полных теорий

М. И. Бекенов

Пусть L — счетный язык первого порядка и K — квазимногообразие этого языка.

Пусть T_K — множество элементарных теорий всех моделей этого квазимногообразия, которое назовем квазимногообразием полных теорий этого квазимногообразия (далее квазимногообразие-т), обладающего фактически теми же свойствами замкнутости [**1**], определяющими квазимногообразия моделей [**2**].

Возьмем произведение всех теорий этого квазимногообразия-т, получим теорию из этого же квазимногообразия-т, то есть $T_1 * T_2 * \ldots = T_i$.

Теорема (Вайнштейн [**3**]). *Пусть A, B, C — три модели языка L. Если $A \equiv A * B * C$, то $A \equiv A * B$ (здесь $*$ — произведение моделей, $\equiv$ — элементарная эквивалентность моделей).*

Следствие. *Если $T_1 = T_1 * T_2 * T_3$, то $T_1 = T_1 * T_2$.*

Теорема 1. *В каждом квазимногообразии-т полных теорий существует теория T' такая, что для любой T этого квазимногообразия-т, $T * T' = T'$.*

Определение. *Пусть T_K — квазимногообразие-т, T_{K1} — его подквазимногообразие-т. Назовем T_{K1} формульно-определимым подквазимногообразием-т квазимногообразия-т T_K, если существует $T_1 \in T_{K1}$ такая, что для любой $T \in T_K$, $T * T_1 = T_1$ тогда и только тогда, когда $T \in T_{K1}$.*

Некоторые квазимногообразия-т могут не быть формульно-определимыми.

Теорема 2. *Все многообразия-т формульно-определимы.*

Теорема 3. *Пересечение формульно-определимых подквазимногообразий-т квазимногообразия-т формульно-определимо.*

Можно по известной аналогии определить решетку формульно-определимых подквазимногообразий-т любого квазимногообразия-т.

Квазимногообразие-т — алгебра с операцией произведения теорий.

Теорема 4. *Если элементарная теория этой алгебры стабильная [**2**], то формульно-определимых подквазимногообразий-т, этого квазимногообразия-т не более чем счетно.*

Данная работа осуществлялась при поддержке гранта КН МОН РК AP05132688.

Список литературы

[1] Бекенов М. И. Решетка подмногообразий многообразия полных теорий // Актуальные проблемы чистой и прикладной математики. — Алматы, 2017.

[2] Палютин Е. А. Спектр и структура моделей полных теорий // Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса. — М. : Наука, 1982. — Ч. 1. Теория моделей.

[3] Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделй. — М.: Мир,1977.

ЕНУ им.Л.Н. Гумилева, Астана (Казахстан)
E-mail: bekenov50@mail.ru

Оператор L_n на квазимногообразиях универсальных алгебр

А. И. Будкин

Пусть n — произвольное натуральное число и $\mathcal{M}$ — любой класс универсальных алгебр. Обозначим через $L_n(\mathcal{M})$ класс алгебр G таких, что для каждой n-порождённой подалгебры A алгебры G смежный класс a/θ_A $(a \in A)$ по наименьшей конгруэнции θ_A, содержащей $A \times A$, является алгеброй из $\mathcal{M}$. Мы изучаем классы $L_n(\mathcal{M})$.

Теорема 1. *Если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие универсальных алгебр, то $L_n(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием.*

Теорема 2. *Если $\mathcal{M}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие универсальных алгебр, то $L_n(\mathcal{M})$ также является многообразием.*

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{P}$ — многообразие коммутативных полугрупп. Тогда $L_1(\mathcal{P})$ не является многообразием.*

Теорема 4. *Существует конгруэнц-перестановочное многообразие универсальных алгебр $\mathcal{M}$ такое, что многообразие $L_1(\mathcal{M})$ не является конгруэнц-перестановочным.*

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

Сократимые элементы решеток многообразий полугрупп и эпигрупп

Б. М. Верников, Д. В. Скоков, В. Ю. Шапрынский

Элемент x решетки L называется *сократимым*, если для всех $y, z \in L$ из того, что $x \vee y = x \vee z$ и $x \wedge y = x \wedge z$, вытекает, что $y = z$. В [**5**] найдено полное описание коммутативных многообразий полугрупп, являющихся сократимыми элементами решетки $\mathbb{SEM}$ всех многообразий полугрупп, а в [**3**] получен аналогичный результат для решетки $\mathbb{EPI}$ всех многообразий эпигрупп (обширную информацию об эпигруппах, в том числе об их многообразиях, можно найти в [**4**]). В данной работе полностью описаны произвольные многообразия полугрупп [эпигрупп], являющиеся сократимыми элементами решетки $\mathbb{SEM}$ [соответственно $\mathbb{EPI}$]. Как и в более ранних работах [**1, 2, 3, 6**], эпигрупповой результат по формулировке почти дословно совпадает с полугрупповым, но доказательства этих результатов существенно различаются.

Через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{SL}$ мы обозначаем тривиальное многообразие и многообразие всех полурешеток соответственно, а через $\operatorname{var}\Sigma$ — многообразие полугрупп или эпигрупп, заданное системой тождеств Σ. Через S_m обозначается группа всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Положим $\mathbf{X}_{\infty,\infty} = \operatorname{var}\{x^2y \approx xyx \approx yx^2 \approx 0\}$, $\mathbf{X}_{m,\infty} = \mathbf{X}_{\infty,\infty} \wedge \operatorname{var}\{x_1x_2\cdots x_m \approx x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(m)} \mid \sigma \in S_m\}$, где $m \geq 2$, $\mathbf{X}_{m,n} = \mathbf{X}_{m,\infty} \wedge \operatorname{var}\{x_1x_2\cdots x_n \approx 0\}$, где $2 \leq m \leq n$, $\mathbf{Y}_{m,n} = \mathbf{X}_{m,n} \wedge \operatorname{var}\{x^2 \approx 0\}$, где $2 \leq m \leq n \leq \infty$.

Теорема 1. *Многообразие полугрупп* $\mathbf{V}$ *является сократимым элементом решетки* $\mathbb{SEM}$ *тогда и только тогда, когда либо* $\mathbf{V}$ *— многообразие всех полугрупп, либо* $\mathbf{V} = \mathbf{M} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{M} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{SL}\}$, *а* $\mathbf{N} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{X}_{m,n}, \mathbf{Y}_{m,n} \mid 2 \leq m \leq n \leq \infty\}$.

Теорема 2. *Многообразие эпигрупп* $\mathbf{V}$ *является сократимым элементом решетки* $\mathbb{EPI}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{V} = \mathbf{M} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{M} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{SL}\}$, *а* $\mathbf{N} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{X}_{m,n}, \mathbf{Y}_{m,n} \mid 2 \leq m \leq n \leq \infty\}$.

Список литературы

[1] Скоков Д. В. Дистрибутивные элементы решетки многообразий эпигрупп // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 723–731.

[2] Скоков Д. В. Специальные элементы некоторых типов решетки многообразий эпигрупп // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2016. Т. 22, N 3. С. 244–250.

[3] Скоков Д. В. Сократимые элементы решетки многообразий эпигрупп // Изв. вузов. Матем. 2018. N 9. С. 59–67.

[4] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. I, II // Матем. сб. 1994. Т. 185, N 8. С. 129–160; N 9. С. 153–176.

[5] Gusev S. V., Skokov D. V., Vernikov B. M. Cancellable elements of the lattice of semigroup varieties // Algebra and Discr. Math. 2018. Vol. 46, No. 1. P. 34–46.

[6] Shaprynskiĭ V. Yu., Skokov D. V., Vernikov B. M. Special elements of the lattice of epigroup varieties // Algebra Universalis. 2016. Vol. 76, No. 1. P. 1–30.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: bvernikov@gmail.com, dmitry.skokov@gmail.com, vshapr@yandex.ru

О богатых формулах в многозначных системах и новые кластеризации многозначных высказываний в логических исчислениях с использованием различных множеств моделей

А. А. Викентьев

Доклад посвящен *расширению и уточнению результатов и теорем о богатых множествах типов,* доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[1] *на случай богатых семейств типов над параметрами модели многосортной теории с $\varkappa$–компактными (насыщенными, однородными) измеримыми и вычислимыми моделями со свойством $\varkappa$-отделимости новых элементов, реализующих вычислимые типы (над малыми подмножествами модели), совместные с этими множествами, от элементов меньшей модели и наличия реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых, вычислимых (стабильных) типов или неразличимых элементов. Стабильность теорий не предполагается, а некоторые известные теоремы получаются как следствия.*

Основными инструментами доказательств являются теоремы типа компактности, развитая техника современной теории моделей, вычислимости, в частности, для логических исчислений, локальной стабильности и наличия (даже локально) подходящих компактных измеримых (в малых мощностях $\varkappa$) моделей теории со свойствами $\varkappa$-отделимости над реализациями семейств стабильных (определимых, рекурсивных) типов. Продолжено изучение конечномерных, предельных и двукардинальных моделей в классе теорий с покрытиями, введенных автором, и их обобщений. Рассмотрены вопросы определимости систем с метрикой в наследственно конечных надстройках, и о мощностях типово определимых подмножеств и их свойств двукардинальности. Интерес к этим вопросам и таким моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (нетривиальных) типов прикладной теории, логических закономерностей для кластеризации и упорядочения таких 'знаний' с помощью привлечения метрических или измеримых систем и расстояний между множествами моделей. Все это служит для введения новых метрик на классах эквивалентных формул и типов на измеримых подклассах измеримых, вычислимых (метрических) моделей, необходимых для разработки алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий и кластеризации многозначных формул-знаний в логике Лукасевича. Рассмотрены вопросы, касающиеся обобщения классического модельного подхода на класс противоречивых моделей, и не полных моделей (на которых некоторые формулы не могут быть не истинными и не ложными), заданы способы вычисления и установлены для них ранее известные свойства расстояний и меры нетривиальности (опровержимости). Найдены различные новые полные метрики, методы кластеризации по введенным метрикам для множеств формул в различных логиках, изучены различны индексы качества для сравнений и способы введения коллективных метрик. Показано, что коллективные расстояния имеют более высокие индексы кластеризаций по сравнению с другими введенными метриками. В дальнейшем планируется использование лучших кластеризаций для структуризации баз знаний. Новым шагом в приложениях наших подходов является использование различных малых конечных классов моделей,

[1] Некоторые из них вошли в диссертацию автора «Теории с покрытием и формульные подмножества», ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул, а также опубликованы в сборнике, посвященному 90–летию академика А.Д. Тайманова — «Two cardinal theorems for sets of types in stable theory», Казахстан, Алма–Ата, 2007, с. 67–69, были доложены Алма-Ате и Новосибирске — на ежегодных Мальцевских чтениях с 2006 г., в том числе к 100–летию акад. А.И. Мальцева и др.

предложенных автором доклада, и взятие по ним (в конечном числе) коллективного расстояния, которое обеспечивает эффективную и оптимальную коллективную кластеризацию данных множеств формул. Ответ на поставленный выше вопрос важен для полного учета различных расстояний для малых конечных (малых в совокупности) подклассов классов моделей, и будет использоваться в поисках лучшей из (разумных) возможных кластеризаций. В последнем предложении содержится ответ на вопрос Загоруйко-Лбова о возможности эффективного использования найденных классов метрик при теоретико-модельном и статистическом подходе в многозначном случае. *Найдены все способы задания теоретико-модельных метрик на формулах многозначной логики высказываний (при фиксированных размере N многозначной логики и классе моделей).* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 14-07-00851а, 14-7-00249а, кафедры ДМИ ММФ НГУ и АиМЛ НГТУ.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

Кластеризация многозначных логических высказываний с учетом новых расстояний по новому классу моделей и мер нетривиальностей

А. А. Викентьев

В работе рассматривается одна из актуальных задач — анализ логических высказываний из базы знаний или полученных от экспертов. При анализе требуется найти близкие высказывания, выявить достоверные, найти нетривиальные и т.д. Для кластеризации знаний, построения решающих функций на основе формул-высказываний, надо ввести расстояние между формулами. В работе высказывания записаны в виде формул n-значной логики. С привлечением теории моделей и нового класса моделей (включая противоречивые — переменная и ее отрицание могут входить в модель) определяются новые расстояния между формулами, обобщая множество возможных коэффициентов

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|k-l|}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right), \tag{1}$$

где $n^{|S(\Sigma)|}$ — количество всех моделей, $M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right)$ — тех моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а ψ — $\frac{l}{n-1}$; и также новые меры нетривиальности, обобщающие

$$I(\varphi) = \rho(\varphi, 1) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-1-k}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}\right), \tag{2}$$

где $M\left(\frac{k}{n-1}\right)$ — количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$. Доказаны многие свойства введенных семейств мер. Отдельно рассматриваем и меру пересечения моделей для рассматриваемых пар формул. В работе исследованы и доказаны свойства метрики для введенных расстояний и мер нетривиальности; они учитывают многозначность, схожи со свойствами величин в классическом случае и его обобщении с первоначальным классом моделей, как и результатов для 3–значных логик Лукасевича, и известных свойств расстояний в общем случае, отвечают на вопросы Г.С. Лбова, Н.Г. Загоруйко. Применяются для предлагаемых алгоритмов кластеризации формул и оценки меры нетривильности (опровержимости или недостоверности). Отличие в том, мера нетривиальности у всех формул не равна 0. Рассмотрены различные методы кластеризации логических знаний на основе новых расстояний и мер нетривиальности, а также методы сравнения результатов на основе введенных индексов качества кластеризации. На тот случай переносятся и подходы по коллективной кластеризации, и ее свойства. Показано применение коллективных расстояний в этом случае с использованием малых подклассов класса всех моделей. Мера значений истинности формулы на модели первого порядка может служить степенью нетривиальности (недостоверности) в многозначном случае. Полученные результаты распространяются на многозначные формулы первого порядка со свободными переменными для локально конечных многозначных теорий и с элиминацией кванторов. В классе конечных моделей результаты переносятся на многозначные формулы первого порядка. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проекты 14-07-00851а, 18-07-600а, кафедры ДМИ ММФ НГУ и АиМЛ НГТУ.

Список литературы

[1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.

[2] Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[3] Викентьев А. А, Лбов Г. С. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказ. экспертов // Доклады РАН. 1998. Т. 361, 2. С. 174–176.
[4] Викентьев А. А, Лбов Г. С. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997, Vol. 7, 2. P. 175–183.
[5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Физматлит, 2011.
[6] Викентьев А. А., Коренева Л. Н. К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты // Математические методы распознавания образов (ММРО-99), РАН ВЦ, Москва, 1999. С. 151–154.

ИМ СО РАН, НГУ и НГТУ, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

О кластеризациях формул и структуризации логических баз знаний, индексах качества и коллективных алгоритмах с помощью теории нового класса моделей и мер нетривиальности

А. А. Викентьев

В работе рассматривается одна актуальная задача — анализ логических высказываний из базы знаний и ее структуризация. При анализе требуется найти близкие высказывания, выявить достоверные, противоречивые и т.д. Для кластеризации знаний, построения решающих функций на основе знаний — логических формул, надо ввести расстояние между формулами. В работе высказывания (экспертов или базы знаний) записаны в виде формул n-значной логики. С привлечением теории моделей и нового класса конечных моделей (смешанных истинностных значений переменных) определен общий вид новых расстояний между формулами с учетом различных параметров-весов рассматриваемых моделей для всех различных истинностных значений в формулах,обобщающих известные:

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|k-l|}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right), \tag{1}$$

где $n^{|S(\Sigma)|}$ — количество всех моделей, $M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right)$ — тех моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а ψ — $\frac{l}{n-1}$; и аналогично обобщаются меры нетривиальности:

$$I(\varphi) = \rho(\varphi, 1) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-1-k}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}\right), \tag{2}$$

где $M\left(\frac{k}{n-1}\right)$ — количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$. Рассматриваем меру пересечения моделей пар формул для учета близости формулы. В работе доказаны свойства метрики для таких расстояний на классах эквивалентных формул и их мер нетривиальностей; они учитывают многозначность, схожи со свойствами аналогичных величин в случае 2-значных и 3-значных логик Лукасевича и общего случая. Отвечают на вопросы Г.С. Лбова и Н.Г. Загоруйко и используются в алгоритмах кластеризации формул из базы знаний. В классическом случае рассмотрены классы моделей, в которых допускаются в некоторых из моделей истинными противоречивые суждения, как и не выполнимость в некоторых моделях тождественно истинных формул, что делает информативными тавтологии, а противоречивые — выполнимыми на некоторых моделях. Для этих классов с теорией моделей для них перенесены многие результаты по расстояниям и мере опровержимости [1, 4] и многозначного случая. Для всех способов введенных расстояний рассмотрены различные методы кластеризации формул на основе новых расстояний и мер нетривиальности, а также методы сравнения результатов кластеризации — индексы качества, реализованы на компьютере, проведены теоретические эксперименты на модельных примерах с более 100 формулами. В общем случае по различным расстояниям и их индексу качества, вводятся новые коллективные расстояния на основе новых полученных расстояния по подклассам используемых моделей, а по ним находятся коллективные кластеризации, которые в большинстве случаев дают лучшую кластеризацию множеств формул по индексу качества. Как следствие улучшаются результаты полученные раннее совместно с Кореневой, Кабановой, Фефеловой, Авиловым и другими студентами. Найдены применения новых расстояний для структурного анализа конечных подмножеств базы знаний для упрощения работы с базой знаний. В планах автоматизация всех необходимых при этом процессов и практическое применение в конкретных задачах, например, медицины и стыковки с анализом конкретных данных в приложениях. Конечная мера значений истинности формулы на измеримой многозначной модели первого порядка может служить степенью нетривиальности (недостоверности) формулы, а различные меры подмножеств как наличие различных мер и/или экспертов с различными мерами в одной модели. Полученные выше результаты для логических исчислений высказываний распространяются на такие многозначные конечно-измеримые формулы с переменными (первого порядка). Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проект 14-07-00851a,18-07-600a, кафедры ДМИ ММФ НГУ и АиМЛ НГТУ.

Список литературы

[1] Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.

[2] Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[3] Викентьев А. А, Лбов Г. С. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказ. экспертов // Доклады РАН. 1998. Т. 361, 2. С. 174–176.

[4] Викентьев А. А, Лбов Г. С. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997, Vol. 7, 2. P. 175–183.

[5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Физматлит, 2011.

[6] Викентьев А. А., Коренева Л. Н. К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты // Математические методы распознавания образов (ММРО-99), РАН ВЦ, Москва, 1999. С. 151–154.

ИМ СО РАН, НГУ и НГТУ, Новосибирск
E-mail: vikent@math.nsc.ru

Два маленьких многообразия моноидов с большим объединением

С. В. Гусев

В работе [**3**] построены многообразия моноидов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ такие, что решетки их подмногообразий конечны, а решетка подмногообразий их объединения $\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}$ континуальна и не удовлетворяет условию максимальности. Более того, из доказательств работы [**3**] легко вытекает, что последняя решетка не удовлетворяет и условию минимальности. Тем самым показано, что в классе решеток подмногообразий многообразий моноидов конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты относительно объединения многообразий. Нами построен еще один пример многообразий $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ с указанными выше свойствами. При этом в нашем примере, в отличие от примера из [**3**], многообразие $\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}$ покрывает одно из многообразий $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Таким образом, в указанном выше классе решеток конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты еще и относительно перехода к покрывающему многообразию.

Чтобы сформулировать наш результат более точно, договоримся обозначать решетку подмногообразия $\mathbf{V}$ через $L(\mathbf{V})$ и обозначим через $\mathbf{X}$ многообразие моноидов, заданное тождествами

$$x^2y \approx yx^2,\ x^2yz \approx xyxzx,\ xzxyty \approx xzyxty,\ xtyzxy \approx xtyzyx,$$

а через $\mathbf{Y}$ — многообразие моноидов, заданное тождествами

$$x^2y \approx yx^2,\ x^2yz \approx xyxzx,\ xzxyty \approx xzyxty,\ xyzxy \approx xyzyx,\ xyzxty \approx yxzxty.$$

Решетка $L(\mathbf{X})$ является 6-элементной цепью [**2**], а решетка $L(\mathbf{Y})$ — 7-элементной цепью [**1**]. Мы показываем, что многообразие $\mathbf{X}\vee\mathbf{Y}$ покрывает многообразие $\mathbf{Y}$, а интервал $[\mathbf{X}, \mathbf{X}\vee\mathbf{Y}]$ решетки $L(\mathbf{X}\vee\mathbf{Y})$ континуален и не удовлетворяет ни условию максимальности, ни условию минимальности.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект No.1.6018.2017/8.9) и РФФИ (грант No.17-01-00551).

Список литературы

[1] Gusev S. V., Vernikov B. M. Chain varieties of monoids // Diss. Math., doi: 10.4064/dm772-2-2018 (2018), 73 pp.

[2] Jackson M. Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras // Semigroup Forum. 2005. Vol. 70. P. 154–187.

[3] Jackson M., Lee E. W. H. Monoid varieties with extreme properties // Trans. Amer. Math. Soc. 2018. Vol. 370, No. 7. P. 4785–4812.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: sergey.gusb@gmail.com

Об алгебрах бинарных изолирующих формул для архимедовых тел

Д. Ю. Емельянов

Определение [**1, 2**]. *Архимедовы тела* — выпуклые многогранники, обладающие двумя свойствами: все грани являются правильными многогранниками двух или более типов, для любой пары вершин существует симметрия многогранника, переводящая одну вершину в другую.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул (см. [**3, 4, 5**]) для теорий архимедовых тел. Алгебры описаны для 13 тел, большинство из них получены усечением правильных многогранников, с соответствующими преобразованиями таблиц Кэли из [**6**]. Отметим, что алгебры получились коммутативные.

Теорема. *Пусть T — теория некоторого архимедова тела, $\mathfrak{B}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T. Тогда алгебра $\mathfrak{B}$ задается ровно одной из следующих алгебр: алгеброй $\mathfrak{UT}$, алгеброй $\mathfrak{QO}$,алгеброй $\mathfrak{UQ}$, алгеброй $\mathfrak{UO}$, алгеброй $\mathfrak{RQO}$, алгеброй $\mathfrak{UQO}$, алгеброй $\mathfrak{PQ}$, алгеброй $\mathfrak{ID}$, алгеброй $\mathfrak{UD}$, алгеброй $\mathfrak{UI}$, алгеброй $\mathfrak{RID}$, алгеброй $\mathfrak{RUID}$, алгеброй $\mathfrak{PD}$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP05132546).

Список литературы

[1] Ашкинузе В. Г. О числе полуправильных многогранников // Матем. просв. 1957. Вып. 1. С. 107–118.

[2] Гурин А. М. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Т. 7. С. А.5–А.23.

[3] Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.

[4] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вложенных отношений эквивалентности // Algebra and Model Theory 10: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2015. P. 59–70.

[5] Емельянов Д. Ю. Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2017. P. 66–74.

[6] Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В. О детерминированных и поглощающих алгебрах бинарных формул полигонометрических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". 2017. Т. 20. С. 32–44.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

О почти детерминированных алгебрах бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий с условием симметрии

Д. Ю. Емельянов, С. В. Судоплатов

В работе рассматриваются алгебры $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул [**1, 2**] элементарных теорий $T(\mathrm{spm})$ s-полигонометрий spm и, в частности, элементарных теорий $T(\mathrm{strm})$ s-тригонометрий strm пар групп (G_1, G_2) [**3**].

Так как любая теория $T(\mathrm{spm})$ имеет единственный 1-тип p, ее алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул совпадает с моноидом $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$.

Напомним [**1, 2, 4**], что алгебра $\mathfrak{A}$ называется (*почти*) *детерминированной*, если для любых меток u и v множество $u \cdot v$ одноэлементно (конечно).

Через $c(\mathrm{spm})$ обозначается число компонент связности s-полигонометрии spm.

Теорема 1. *Алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул s-полигонометрической теории $T(\mathrm{spm})$ пары групп (G_1, G_2) детерминирована тогда и только тогда, когда $|G_1| = 1$ и $c(\mathrm{spm}) \leq 2$.*

Теорема 2. *Алгебра бинарных изолирующих формул всюду конечно определенной теории $T(\mathrm{spm})$ s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ почти детерминирована тогда и только тогда, когда группа G_1 одноэлементна или группа G_2 конечна.*

Теорема 3. *Для любой всюду конечно определенной s-полигонометрии $\mathrm{spm} = \mathrm{spm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, не имеющей многоугольников, препятствующих проективности, существует расширение $\mathrm{strm}' = \mathrm{strm}(G_1, G_2', \mathcal{P}')$ s-полигонометрии spm на некоторой плоскости $\mathcal{P}'$ такое, что алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул теории $T(\mathrm{strm}')$ почти детерминирована.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP05132546).

Список литературы

[1] Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. V. 11. P. 380–407.

[2] Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018.

[3] Судоплатов С. В. Полигонометрии групп. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011, 2013.

[4] Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В. О детерминированных и поглощающих алгебрах бинарных формул полигонометрических теорий // Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”. 2017. Т. 20. С. 32–44.

ИМ СО РАН, НГТУ, НГУ, Новосибирск
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

Примитивная нормальность класса инъективных полигонов

Е. Л. Ефремов

В работе описаны моноиды, над которыми класс всех инъективных полигонов является примитивно нормальным. Примитивно нормальные теории полигонов изучаются в [1–2]. В частности, в [1] доказывается, что класс всех полигонов над моноидом S примитивно нормален тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид; в [2] исследуются моноиды, над которыми аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов является примитивно нормальным.

Напомним некоторые понятия из теории полигонов и теории моделей. Пусть S — моноид. Под *(левым) полигоном* ${}_SA$ *над моноидом* S понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица S действует на A тождественно. Через **S-Inj** обозначим класс всех инъективных полигонов над S. Формула вида $\exists x_1 \ldots \exists x_k\,(\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n)$, где Φ_i — атомарная формула сигнатуры Σ $(i \leqslant n)$, называется *примитивной*. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула сигнатуры Σ, $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, $\bar{a}, \bar{b} \in A$ — кортежи элементов той же длины, что и $\bar{y}$, то множества $\Phi(A, \bar{a})$ и $\Phi(A, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*. Теория T сигнатуры Σ называется *примитивно нормальной*, если любые две примитивные копии либо совпадают, либо не пересекаются. Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем сигнатуры Σ называется *примитивно нормальным*, если теория всех алгебраических систем класса $\mathcal{K}$ примитивно нормальна.

Теорема. *Класс* **S-Inj** *примитивно нормален.*

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531).

Список литературы

[1] Степанова А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, N 4. С. 491–508.

[2] Птахов Д. О. Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, N 5. С. 614–624.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: efremov-el@mail.ru

Некоторые свойства допустимого обогащения йонсоновских теорий

А. Р. Ешкеев, Г. Е. Жумабекова

В данным тезисе рассмотрены некоторые свойства допустимого обогащения сигнатуры йонсоновской теории. Обогащение называется допустимым, если оно сохраняет определимость типа в любом экзистенциально замкнутом расширении.

Пусть T — произвольная йонсоновская теория на языке первого порядка сигнатуры σ, C — семантическая модель теории T. Пусть $A \subset C$, ∇-cl — подмножество в теории T, где $\nabla = \forall\exists$, $\mathrm{cl} = \mathrm{acl}$ и в то же время $\mathrm{acl} = \mathrm{dcl}$. Причем йонсоновская теория называется модулярной, если предгеометрия задаваемая оператором замыкания cl над C является модулярной. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Пусть $T_A^C = T \cup Th_{\forall\exists}(C,a)_a \in A \cup \{P(c_a)|a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$, где $\{''P \subseteq''\}$ — бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P является экзистенциально замкнутая подмодель в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$, и эта модель является определимым замыканием множества A. Понятно, что рассматриваемый набор предложений не обязательно является йонсоновской теорией, и эта теория, вообще говоря, не является полной. Причиной невыполнения условий йонсоновости является отсутствие амальгамы в некоторых случаях, т.е. существуют контрпримеры обогащения предикатом некоторых йонсоновских теорий, которые не допускают амальгаму. В случае модулярности теории будет выполняться свойство амальгамы. Поэтому рассматриваемые теории являются модулярными. Пусть T^* — центр йонсоновской теории T_A^C и $T^* = Th(C')$, где C' — семантическая модель теории T_A^C.

Theorem 1. *Пусть T — модулярная выпуклая йонсоновская теория, полная для $\forall\exists$-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T^* ω-категорична;*
(2) *T_A^C ω-категорична.*

Theorem 2. *Пусть T — модулярная выпуклая йонсоновская теория, полная для $\forall\exists$-предложений, для которого выполняется R_1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *теория T^* ω_1-категорична,*
(2) *любая счетная модель в $E_{T_A^C}$ имеет алгебраически простое расширение модели в $E_{T_A^C}$.*

Все неопределенные здесь понятия можно извлечь из [**1**].

Список литературы

[1] Ешкеев А. Р., Касыметова М. Т. Йонсоновские теории и их классы моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — 346 с.

Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова, Караганда (Казахстан)
E-mail: modth1705@mail.ru, galkatai@mail.ru

Гибриды йонсоновских теорий

А. Р. Ешкеев, Н. М. Мусина

Данный тезис отражает некоторые свойства нового понятия, как гибрид йонсоновских теорий. Мы определяем основные понятия и рамки для изучения теоретико-модельных свойств данной тематики.

Пусть T — некоторая йонсоновская теория в фиксированном языке и C — ее семантическая модель.

Определим сущность алгебраической конструкции.

Пусть $\boxdot \in \{\cup, \cap, \times, +, \oplus, \prod\limits_F, \prod\limits_U\}$, где $\cup$ — объединение, $\cap$ — пересечение, $\times$ — декартово произведение, $+$ — сумма и $\oplus$ — прямая сумма, $\prod\limits_F$ — фильтрованное и $\prod\limits_U$ — ультрапроизведение.

Следующее определение дает гибрид двух йонсоновских теорий одной сигнатуры.

Определение. Гибридом $H(T_1, T_2)$ йонсоновских теорий T_1, T_2 будет называться теория $\mathrm{Th}_{\forall\exists}(C_1 \boxdot C_2)$, если она йонсоновская. При этом алгебраическая конструкция $(C_1 \boxdot C_2)$ называется семантическим гибридом теорий T_1, T_2.

Заметим следующий факт:

Факт. Для того чтобы теория $H(T_1, T_2)$ была йонсоновской достаточно, чтобы $(C_1 \boxdot C_2) \in E_T$.

Далее объектом нашего исследования будет класс экзистенциально простых выпуклых $\forall\exists$-полных йонсоновских теорий. В рамках изучения данного класса теорий мы получили следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть T — совершенная выпуклая экзистенциально простая полная для $\forall\exists$-предложений йонсоновская теория; X_1, X_2 — $\forall\exists$-dcl-множества в теории T, где M_i=$\mathrm{dcl}(X_i) \in E_T$, $T_i = \mathrm{Th}_{\forall\exists}(M_i)$ — также совершенные выпуклые экзистенциально простые полные для $\forall\exists$-предложений йонсоновские теории; C_1, C_2 — их семантические модели соответственно. Тогда, если их гибрид $H(T_1, T_2)$ является модельно совместным с T_i, то $H(T_i)$ является совершенной йонсоновской теорией для $i = 1, 2$.*

Теорема 2. *Пусть теории T, T_1, T_2 удовлетворяют условиям теоремы 1 и T_1, T_2 ω-категоричны. Тогда их гибрид $H(T_1, T_2)$ также является ω-категоричной йонсоновской теорией.*

Все неопределенные здесь понятия можно извлечь из [**1**].

Список литературы

[1] Ешкеев А. Р., Касыметова М. Т. Йонсоновские теории и их классы моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — 346 с.

Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова, Караганда (Казахстан)
E-mail: modth1705@mail.ru, nazerke170493@mail.ru

Чистые полугруппы с центральным идемпотентом

О. В. Князев

В [**1**] делается обзор результатов и проблем, связанных с такими понятиями для универсальных алгебр как полнота, редуцированность, примарность и чистота. В этой работе, в частности, ставится задача (проблема 3.17): *описать наследственно чистые алгебры данного многообразия алгебр.* Мы изучаем наследственно чистые полугруппы в классе полугрупп с центральным идемпотентом.

Напомним некоторые определения. Полугруппы с центральным идемпотентом рассматриваются здесь как алгебры с бинарной ассоциативной операцией — умножением и нульарной операцией — выделением идемпотента, коммутирующего со всеми элементами алгебры.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с центральным идемпотентом; $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. Заметим, что класс $\mathbf{N}$ — всех полугрупп с выделенным нулем и класс $\mathbf{M}$ — всех моноидов являются подмногообразиями многообразия $\mathbf{V}$. В дальнейшем под словом "полугруппа" понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий выделенный идемпотент. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}$-*вербалом* полугруппы A. Подполугруппу B полугруппы A называют $\mathbf{X}$-*чистой* в A, если $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$. Полугруппу, у которой все подполугруппы являются $\mathbf{X}$-чистыми, называют *наследственно* $\mathbf{X}$-*чистой*.

Теорема. *Всякая полугруппа из* $\mathbf{V}$ *является как наследственно* $\mathbf{N}$-*чистой, так и наследственно* $\mathbf{M}$-*чистой полугруппой в классе всех полугрупп с центральным идемпотентом.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 181–241.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev50@rambler.ru

Стабильность и суперстабильность класса делимых полигонов

А. И. Красицкая

В работе рассматриваются вопросы, связанные со стабильностью и суперстабильностью класса делимых полигонов. Аналогичные вопросы для классов регулярных, свободных, проективных, сильно плоских полигонов и для класса всех полигонов рассмотрены в работах [**1, 2, 3**]. В частности, в [**1**] доказано, что теория любого S-полигона стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид (вполне упорядоченный моноид).

Напомним некоторые определения. Пусть S — моноид, т.е. полугруппа с единицей. Моноид S называется линейно (вполне) упорядоченным, если множество $\{Sa \mid a \in S\}$ линейно (вполне) упорядочено относительно $\supseteq$. Элемент $c \in S$ называется сократимым справа, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. Под (левым) S-полигоном ${}_SA$ понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Пусть K — класс S-полигонов. Моноид S называется K-стабилизатором (K-суперстабилизатором), если теория любого S-полигона из класса K стабильна (суперстабильна). Если K — класс всех S-полигонов, то K-стабилизатор (K-суперстабилизатор) называется стабилизатором (суперстабилизатором). Делимый S-полигон — это S-полигон ${}_SA$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$. Через S-Div обозначим класс всех делимых S-полигонов.

Теорема 1. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) *моноид S является S-*Div*-стабилизатором;*

2) *моноид S является стабилизатором;*

3) *моноид S является линейно упорядоченным моноидом.*

Теорема 2. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) *моноид S является S-*Div*-суперстабилизатором;*

(2) *моноид S является суперстабилизатором;*

(3) *моноид S является вполне упорядоченным моноидом.*

Список литературы

[1] Мустафин Т. Г. О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е. — 1988. — (Тр. АН СССР. Сиб. отд-е. Ин-т математики; Т. 8). — С. 92–107.

[2] Михалев А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, N 4. С. 107–157.

[3] Гоулд В. Михалев А. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, N 7. С. 63–110.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stasyakras@gmail.com

Изоморфизм полугрупп линейных отношений

М. И. Наумик

Пусть V — n-мерное векторное пространство над телом F, $LR_n(V)$ — мультипликативная полугруппа линейных отношений [**1, 2**]. Обозначим через $LR_n^r(V) = \{a \in LR_n(V) : rank\ a \leq r\}$. Пусть, далее, U — m-мерное векторное пространство над телом H, $LR_m(U)$ — мультипликативная полугруппа линейных отношений и $LR_m^s(U) = \{a \in LR_m(U) : rank\ a \leq s\}$.

Теорема. *Для того чтобы полугруппы $LR_n^r(V)$ и $LR_m^s(U)$ при $n \geq 2$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы $n = m$, $r = s$ и тело F было изоморфно телу H. Всякий изоморфизм φ полугруппы $LR_n^r(V)$ на полугруппу $LR_n^r(U)$ имеет вид*

$$\varphi(a) = b^{-1}a'b, \tag{1}$$

где ψ – изоморфизм F на H, $b \in LR_n^n(U)$, $rank\ b = n$ и если $(\alpha e_i, \beta e_j) \in a$, то $((\psi\alpha)e'_i, (\psi\beta)e'_j) \in a'$, e_i, e_j из базиса V, соответственно e'_i, e'_j из базиса U.

Следствие. *Всякий автоморфизм полугруппы $LR_n^r(V)$ имеет вид (1), где φ — автоморфизм, $b \in LR_n^n(V)$, $rank\ b = n$.*

Этот результат частично обобщает работу [**3**].

Список литературы

[1] Маклейн С. Алгебра аддитивных отношений // Сб. переводов. Математика. 1963. 7:6. С. 3–12.
[2] Наумик М. И. Полугруппа линейных отношений // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, N 3. С. 34–37.
[3] Глускин Л. М. О матричных полугруппах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. 22:3. С. 439–448.

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск
E-mail: naumik@tut.by

Простые суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов

В работе исследуется класс суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины n (далее K_n). Для $n \geq 3$ класс K_n содержит континуум различных элементарных теорий [**1**]. В [**1**] получена элементарная классификация алгебр из класса K_n.

Известно [**2**], что элементарная теория произвольной булевой алгебры имеет простую модель. В [**3**] показано, что имеется ровно счетное число различных элементарных теорий суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом; в [**4**] показано, что элементарная теория любой суператомной булевой алгебры с одним выделенным идеалом имеет простую модель.

Определение 1 [**1**]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй ширины* n, если под любым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$ найдется не более n атомов алгебры $\mathfrak{A}$, лежащих под ним, и любой атом алгебры $\mathfrak{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$.

Определение 2 [**1**]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *плотной*, если $\mathfrak{A} = \mathrm{sub}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, F(\mathfrak{A}))$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая в себе подалгебру $\mathfrak{B}$ и идеал Фреше $F(\mathfrak{A})$.

Теорема. *Для каждого $n \geq 3$ существует континуум суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины n, элементарные теории которых различны, имеют простые модели и не имеют счетно-насыщенных моделей.*

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. Трофимов А.В. Конечно-аксиоматизируемые суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, N 6. С. 1361–1375.

[2] Гончаров С.С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. — Новосибирск: Наука, 373 с.

[3] Пальчунов Д.Е. О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, N 3. С. 326–346.

[4] Пальчунов Д.Е. Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели // Труды Института Математики. 1993. Т. 25. С. 104–132.

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru, tr0f@mail.ru

Об одном E-предполном классе гиперфункций ранга k

В. И. Пантелеев, Л. В. Рябец

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и 2^{E_k} — множество всех подмножеств E_k. H_k — множество всех гиперфункций ранга k определяется следующим образом:

$$H_k^n = \{f \mid f : E_k^n \to 2^{E_k} \setminus \{\varnothing\}\}, \;\; H_k = \bigcup_n H_k^n.$$

Не будем различать одноэлементное множество и элемент этого множества.

Определения суперпозиции гиперфункций и оператора разветвления по предикату равенства для множества гиперфункций можно посмотреть, например, в работе [**1**].

E-замыкание множества $Q \subseteq H_k$ определяется как множество всех гиперфункций из H_k, которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства.

Функцию, которая на всех своих наборах возвращает одно и тоже множество A, будем обозначать символом A.

Теорема 1. *При любом $k \geqslant 2$ система гиперфункций $\big\{0, 1, \ldots, k-1, \{0, 1, \ldots, k-1\}\big\}$ E-полна в классе H_k.*

Следствие. *При любом $k \geqslant 2$ система гиперфункций $\big\{0, 1, \ldots, k-1, A\big\}$, где A — неодноэлементное множество, E-полна в классе H_k.*

Пусть π — некоторая перестановка на множестве E_k. Определим класс S_π^- гиперфункций следующим образом:

$$S_\pi^- = \big\{f \in H_k \mid \pi(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \cap f(\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n)) \neq \varnothing, \alpha_i \in E_k\big\},$$

где для любого множества B, являющегося подмножеством E_k, множество πB понимается как $\{\pi b \mid b \in B\}$.

Теорема 2. *Класс S_π^- замкнут относительно операций суперпозиции и разветвления по предикату равенства.*

Теорема 3. *Если перестановка π разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины p, то класс S_π^- является E-предполным в классе H_k.*

Список литературы

[1] Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 // Вестн. ИГУ, Сер. Математика. 2014. Т. 10. С. 93–105.

Иркутский государственный университет, Иркутск
E-mail: vl.panteleyev@gmail.com, riabets@rambler.ru

О компактности топологизации пополнения ретрактивно разложимой (с базой типа ω) алгебры

А. Г. Пинус

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ называется ретрактивно разложимой с базой типа ω, если $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i$, где $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_m$ для $n < m \in \omega$ и существуют гомоморфизмы ψ_n^m алгебр $\mathfrak{A}_m$ на алгебры $\mathfrak{A}_n$ (при $n < m \in \omega$) такие, что $\psi_n^m(a) = a$ для $a \in \mathfrak{A}_n$. Через ψ_n обозначим гомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебры $\mathfrak{A}_n$, продолжающие гомоморфизмы ψ_n^m (для $n < m \in \omega$). На алгебре $\mathfrak{A}$ естественным образом определяется хаусдорфова топология τ (с помощью системы окрестностей $D_n(a) = \{b \in \mathfrak{A} | \psi_n(b) = \psi_n(a)\}$ для $a \in \mathfrak{A}$ и $n \in \omega$, относительно которой σ-операции алгебры $\mathfrak{A}$ непрерывны. На алгебре $\mathfrak{A}'$ — обратном пределе обратного спектра $\langle\{\mathfrak{A}_n | n \in \mathfrak{A}\}; \{\psi_n^m | n < m \in \omega\}\rangle$, рассматриваемой как подалгебра алгебры $\prod\limits_{i\in\omega} \mathfrak{A}_n$, столь же естественно определима топология τ' (с помощью системы окрестностей $D'_n(f) = \{g \in \mathfrak{A}' \subseteq \prod\limits_{i\in\omega} \mathfrak{A}_n | \; g(n) = f(a)\}$, для $f \in \mathfrak{A}' \subseteq \prod\limits_{i\in\omega} \mathfrak{A}_n$, $n \in \omega$, совпадающая с топологией τ при ограничении ее до алгебры $\mathfrak{A}$, естественным образом отождествимой с подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}'$. При этом σ-операции алгебры $\mathfrak{A}'$ непрерывны в топологии τ', топология τ' полна, а алгебра $\mathfrak{A}$ плотна в $\mathfrak{A}'$. То есть топологическая алгебра $\mathfrak{A}'$ является пополнением топологической алгебры $\mathfrak{A}$. Вопрос о компактности алгебры $\mathfrak{A}'$ решает следующая

Теорема. *Топология τ' на алгебре $\mathfrak{A}'$ (определенная выше) компактна тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ локально конечна.*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Об изолированных точках пространств функциональных клонов

А. Г. Пинус

В работе [**1**] на совокупности F_A всех функциональных клонов на множестве A введена следующая естественная метрика: для $F_1, F_2 \in F_A$,

$$d(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = \begin{cases} \frac{1}{min\{n\in\omega | \mathfrak{F}_1^{(n)} \neq \mathfrak{F}_2^{(n)}\}}, \text{ если } \mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}_2, \\ 0, \text{ если } \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2, \end{cases}$$

превращающая совокупность F_A в метрическое пространство $\mathfrak{F}_A = \langle F_A; d\rangle$, на котором операции решетки $L_A = \langle F_A; \wedge, \vee\rangle$ функциональных клонов на A непрерывны. Здесь $F^{(n)}$ совокупность всех не более чем n-местных функций из клона F.

В работах [**1, 2**] доказано, что пространства $\mathfrak{F}_A$ полны, компактны тогда и только тогда, когда A конечно и отмечен ряд иных свойств этих пространств. Напомним, что клон называется дискриминаторным, если он содержит дискриминаторную функцию.

Имеет место

Теорема. *Для любого множества A любая окрестность любого дискриминаторного клона на A содержит изолированную точку.*

Список литературы

[1] Пинус А. Г. Размерности функциональных клонов, метрика на их совокупности // Сибирские электронные математ. известия. 2016. Т. 13. С. 366–374.

[2] Пинус А. Г. О пространствах функциональных клонов. (в печати)

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

Полигоны над верхней полурешеткой с линейной решеткой конгруэнций

А. А. Степанова, М. С. Казак

В работе изучается строение полигонов над верхней полурешеткой, решетка конгруэнций которых линейна. Изучению полигонов с заданными условиями на их решетки конгруэнций посвящено значительное количество работ. В частности, унары с дистрибутивной, модулярной решеткой конгруэнций, являющиеся цепью, полностью описаны в [**1**]. Решетки конгруэнций несвязных полигонов над полугруппами изучены в [**2**]. В работе [**3**] дана характеристика полигонов над полугруппами правых и полугруппами левых нулей, имеющих дистрибутивную решетку конгруэнций.

Пусть S — моноид. Левым S-*полигоном* (или просто *полигоном*) ${}_SA$ называется непустое множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Заметим, что совокупность всех конгруэнций полигона ${}_SA$ образует решетку относительно следующих операций:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2,$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 \text{ — наименьшая конгруэнция содержащая } \theta_1 \cup \theta_2,$$

где θ_1, θ_2 — конгруэнции полигона ${}_SA$. Эту решетку будем обозначать $\mathrm{Con}({}_SA)$. Решетка $\mathrm{Con}({}_SA)$ называется линейной, если $\theta_1 \subseteq \theta_2$ или $\theta_2 \subseteq \theta_1$ для любых $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}({}_SA)$.

В приведенной ниже теореме $(S; \leq)$ — верхняя полурешетка с минимальным элементом 1, рассматриваемая как моноид $(S; \cdot)$ с операцией $ab = \max\{a, b\}$, где $a, b \in S$.

Теорема. *Пусть S — верхняя полурешетка. Решетка конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ полигона ${}_SA$ линейна тогда и только тогда, когда $|A| \leq 2$.*

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531).

Список литературы

[1] Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Межвуз. Научн. Сб. «Упорядоченные множества и решётки». Саратов, 1978. Вып. 5. С. 11–44.

[2] Птахов Д. О., Степанова А. А. Решетки конгруэнций несвязных полигонов // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, N 1. С. 107–116.

[3] Халиуллина А. Р. Условия модулярности решетки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей // Дальневосточный математический журнал. 2015. Т. 15, N 1. С. 102–120.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stepltd@mail.ru, kazak_ms@students.dvfu.ru

Об аксиоматизируемости класса подпрямо неразложимых полигонов над группой

А. А. Степанова, Д. О. Птахов

Стандартной задачей теории моделей полигонов над моноидом S является задача описания моноидов S, алгебраически естественные классы полигонов над которыми обладают теми или иными теоретико-модельными свойствами, таким, например, как аксиоматизируемость, категоричность, полнота, стабильность и т.д. В работах [**1**]–[**4**] описаны моноиды S, классы регулярных, свободных, проективных и (сильно, слабо) плоских полигонов над которыми аксиоматизируемы. В данной работе аналогичная задача решена для класса подпрямо неразложимых полигонов.

Напомним некоторые определения. Класс K алгебраических систем сигнатуры Σ называется аксиоматизируемым, если существует множество предложений Π сигнатуры Σ такое, что алгебраическая система $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ принадлежит K в том и только том случае, когда каждое предложение из Π истинно в $\mathcal{A}$.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ сигнатуры Σ называется подпрямо неразложимой, если пересечение всех ее ненулевых конгруэнций является ненулевой конгруэнцией.

Пусть S — моноид. (Левым) полигоном ${}_SA$ над моноидом S называется множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Если G — группа и H — подгруппа G, то множество $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ с операцией $g_1(g_2H) = (g_1g_2)H$, где $g_1, g_2 \in G$, является полигоном над G. Через $SIr(S)$ обозначим класс всех подпрямо неразложимых полигонов над моноидом S.

Теорема. Пусть G — абелева группа. Класс $SIr(G)$ является аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда существует $k \in \omega$ такое, что для любой подгруппы H группы G, если группа G/H подпрямо неразложима, то $|G/H| < k$.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531).

Список литературы

[1] Gould V. Axiomatisability problems for S-systems // J. London Math. Soc. 1987. Vol. 35. P. 193–201.

[2] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S–полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т. 3, N 5. С. 583–594.

[3] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, N 1. С. 181–193.

[4] Bulman-Fleming S., Gould V., Axiomatisability of weakly flat, flat and projective acts // Communications in Algebra. 2002. Vol. 30. P. 5575–5593.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stepltd@mail.ru, ptaxov@mail.ru

О некоторых свойствах гомоморфизмов линейных слева (справа) квазигрупп

А. Х. Табаров, А. А. Давлатбеков, О. О. Комилов

В докладе найден общий вид гомоморфизма двух произвольных линейных слева (справа) квазигрупп.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется линейной слева (справа) над группой $(Q, +)$, если она имеет вид $xy = \varphi x + c + \beta y \quad (xy = \alpha x + c + \psi y)$, где $(\varphi), \psi \in \mathrm{Aut}(Q, +)$, $\beta(\alpha)$ — подстановка множества Q [**1**].

Все необходимые понятия и определения можно найти в [**2**].

Предложение 1. *Если* $\gamma\colon(Q, \cdot) \to (Q, \circ)$ — *гомоморфизм квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *на квазигруппу* $(Q, \circ)$, *то* $\gamma(e_x) = e_{\gamma x}, \quad \gamma(f_x) = f_{\gamma x}$, *где* $e_x, (f_x)$ — *правая (левая) локальная единица для элемента* x: $xe_x = x, f_x x = x$, $(\gamma x \circ e_{\gamma x} = \gamma x, f_{\gamma x} \circ \gamma x = \gamma x)$.

Элемент x квазигруппы $(Q, \cdot)$ называется правым n-ступенно идемпотентным, если $\underbrace{(...((xx)x)...)x}_{n \text{ раз}} = x$. Последнее равенство коротко обозначим через $x^{[n]} = x$.

Аналогично элемент x квазигруппы $(Q, \cdot)$ называется левым k-ступенно идемпотентным, если $\underbrace{x(...x(x))...)}_{k \text{ раз}} = x$ или в сокращенном виде ${}^{[k]}x = x$.

Пусть φ - гомоморфизм квазигруппы $(Q, \cdot)$ на квазигруппу $(Q, \circ)$, $\varphi\colon(Q, \cdot) \to (Q, \circ)$. Тогда

$$\varphi(x^{[n]}) = (\varphi(x))^{[n]},$$
$$\varphi({}^{[k]}x) =^{[k]} (\varphi(x)).$$

Доказательство легко проводится индукцией по n. Построен пример квазигруппы 5-го порядка, которая имеет левый 4-ступенно и правый 3-ступенно идемпотентные элементы.

Предложение 2. *Пусть* $(Q, \cdot)$ *и* $(Q, \circ)$ — *линейные слева над группой* $(Q, +)$ *квазигруппы* : $xy = \varphi_1 x + c_1 + \beta_1 y$, $x \circ y = \varphi_2 x + c_2 + \beta_2 y$, γ - *гомоморфизм квазигруппы* $(Q, \cdot)$ *на* $(Q, \circ)$: $\gamma(x \cdot y) = \gamma x \circ \gamma y$. *Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma = \tilde{R}_{c_2} \tilde{L}_{\varphi_2 a} \varphi_2 \theta \varphi_1^{-1} \tilde{R}_{-c_1} = \tilde{R}_{\beta_2 b} \beta_2 \theta \beta_1^{-1} = \tilde{L}_a \tilde{R}_b \theta.$$

Аналогичное утверждение верно для случая линейных справа квазигрупп.

Список литературы

[1] Табаров А. Х. Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп // Дискрет. матем. 2007. Т. 19, выпуск 2. С. 67–73.

[2] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.

Кулябский государственный университет им. А. Рудаки, Куляб; Таджикский национальный университет, Душанбе

E-mail: tabarov2010@gmail.com, akimbekd@mail.ru, okil.komilov@yandex.ru

О почти ff-универсальных квазимногообразиях

М. В. Швидефски

Установлено, что любое почти ff-универсальное квазимногообразие $\mathbf{K}$ содержит подквазимногообразие $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{K}$, содержащее континуум Q-универсальных подквазимногообразий, не имеющих независимого, но имеющих ω-независимый базис квазитождеств относительно $\mathbf{M}$. Это обобщает один результат В. Кубека и Й. Зихлера [**1**]. Доказательство этого результата использует некоторые идеи из работы А. В. Кравченко, А. М. Нуракунова и автора [**2**].

Список литературы

[1] Koubek V., Sichler J. Almost ff-universality implies Q-universality // Appl. Categor. Struct. 2009. Vol. 17. P. 419–434.

[2] Кравченко А. В., Нуракунов А. М., Швидефски М. В. Строение решеток квазимногообразий. I. Независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 2018. Т. 57.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: semenova@math.nsc.ru

О бесконечности 3-порожденных решеток с левомодулярным и дистрибутивным порождающими

М. П. Шушпанов

Напомним, элемент d решётки L называется *дистрибутивным*, если

$$\forall x, y \in L : d \vee (x \wedge y) = (d \vee x) \wedge (d \vee y).$$

Элементы модулярного типа определяются по аналогии с дистрибутивным элементом, только вместо тождества дистрибутивности используется квазитождество модулярности.

Элемент a решётки L называется *левомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x < y \to x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

Элемент a решётки L называется *правомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x < a \to x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge a.$$

Двойственно определяется коправомодулярный элемент. Легко проверить, что любой дистрибутивный элемент является коправомодулярным.

Конечность и бесконечность 3-порождённых решёток с левомодулярным порождающим исследовались в [**1**] и [**2**]. В [**3**] утверждается конечность 3-порождённой решётки с левомодулярным и стандартным (одновременно дистрибутивным и левомодулярным) порождающими. Возникает вопрос, будет ли конечной 3-порождённая решётка, среди порождающих элементов которой есть левомодулярный и дистрибутивный элементы. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Решётка, свободно порождённая тремя элементами, два из которых дистрибутивны, а третий одновременно левомодулярен и коправомодулярен, бесконечна.*

Теорема 2. *Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых одновременно дистрибутивен и правомодулярен, второй одновременно кодистрибутивен и коправомодулярен, а третий левомодулярен, бесконечна.*

Теорема 3. *Решётка, свободно порождённая тремя элементами, два из которых одновременно левомодулярны и коправомодулярны, а третий одновременно дистрибутивен и правомодулярен, бесконечна.*

Список литературы

[1] Shushpanov M. P. On 3-generated lattices with a completely modular element among generators // Algebra Univ. 2017. Vol. 78, No. 3. P. 377–387.

[2] Шушпанов М. П. О бесконечности свободной 3-порожденной решетки с одним левомодулярным порождающим // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 528–532.

[3] Гейн А. Г. О решетках с модулярными и стандартными элементами среди порождающих // Международная конференция «Мальцевские чтения»: Тезисы докладов. Новосибирск, 21-25 ноября 2016 г. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2016. С. 180.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: Mikhail.Shushpanov@gmailcom

О множествах предельных точек в алгебрах бернуллиевских распределений

А. Д. Яшунский

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — n-арная операция на множестве $\{0,1\}$, а $X_1,\dots,X_n$ — независимые в совокупности бернуллиевские случайные величины со значениями из множества $\{0,1\}$, равные 1 с вероятностями $p_1,\dots,p_n$ соответственно. Тогда $f(X_1,\dots,X_n)$ также является бернуллиевской случайной величиной, равной 1 с вероятностью q:

$$q = \sum_{f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1} \mathsf{P}\{X_1=\sigma_1\}\cdots\mathsf{P}\{X_n=\sigma_n\},$$

где $\mathsf{P}\{X_i=0\}=1-p_i$ и $\mathsf{P}\{X_i=1\}=p_i$. Тем самым каждая n-арная операция f на множестве $\{0,1\}$ *индуцирует* n-арную операцию $\hat{f}$ на отрезке $[0,1]$, находящемся во взаимно-однозначном соответствии со всевозможными бернуллиевскими распределениями. Для каждого множества B операций на $\{0,1\}$ обозначим через $\widehat{B}$ множество индуцированных операций, тогда $\langle[0,1],\widehat{B}\rangle$ — алгебра. Подалгебры таких алгебр будем называть *алгебрами бернуллиевских распределений*.

Точку $g\in[0,1]$ будем называть *предельной* для множества $G\subseteq[0,1]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такая точка $x\in G$, что $0<|g-x|<\varepsilon$. Множество предельных точек множества G будем обозначать $\lambda(G)$. Через c_0,c_1 обозначим функции, тождественно равные 0 и 1 соответственно.

Теорема 1. *Пусть $\langle G,\widehat{B}\rangle$ — алгебра бернуллиевских распределений. Положим $B'=B\setminus\{c_0,c_1\}$. Тогда $\langle\lambda(G),\widehat{B'}\rangle$ — алгебра бернуллиевских распределений.*

Обозначим через U клон унарных операций на множестве $\{0,1\}$. Теорема 1 вместе с ранее установленными свойствами конечных алгебр бернуллиевских распределений [**1**] позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\langle G,\widehat{B}\rangle$ — алгебра бернуллиевских распределений. Если $\lambda(G)$ конечно, то либо $B\subseteq U$, либо $|\lambda(G)|<2$.*

Пример алгебры со счетным множеством $\lambda(G)$ можно получить, рассматривая замыкание некоторого распределения p, $0<p<1$, относительно сигнатуры $\widehat{m}(p_1,p_2,p_3)$, где $m(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(x\wedge z)$.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН N 01 «Фундаментальная математика и ее приложения» (грант PRAS-18-01).

Список литературы

[1] Яшунский А.Д. Конечные алгебры бернуллиевских распределений // Дискрет. матем. 2018. Т. 30, N 2, С. 148–161.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва
E-mail: yashunsky@keldysh.ru

Ehrenfeuchtness of almost o-minimal theories of convexity rank 1

S. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov

The present lecture is concerned the notion of *weak o-minimality*, originally studied by D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn in [**1**]. A subset A of a linearly ordered structure M is *convex* if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $M = \langle M; =, <, \ldots \rangle$ such that any parametrically definable subset of M is a finite union of convex sets in M.

Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic.

We say that p is not *weakly orthogonal to* q if there exist an A-definable formula $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ and $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ such that $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ and $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

We say that p is not *quite orthogonal to* q if there exists an A-definable bijection $f : p(M) \to q(M)$. We say that a weakly o-minimal theory is *quite o-minimal* if the notions of weak and quite orthogonality of 1-types coincide.

We say that p is not *almost orthogonal to* q if there is an A-definable formula $\phi(x, y)$ such that for any $a \in p(M)$ $\phi(a, M) \neq \emptyset$ and there are $b_1, b_2 \in q(M)$ with $b_1 < \phi(a, M) < b_2$. We say that a weakly o-minimal theory is *almost o-minimal* if the notions of weak and almost orthogonality of 1-types coincide.

In [**2**] the Vaught's conjecture for o-minimal theories was solved. Recently in [**3**] this conjecture was solved for quite o-minimal theories. From the above works it follows that any o-minimal or quite o-minimal theory has either continuum of countable models, or exactly $6^l 3^m$ countable models for non-negative integers l and m.

The convexity rank of a formula with one free variable was introduced in [**4**]. In particular, a theory has convexity rank 1 if there is no parametrically definable equivalence relation with an infinite number of infinite convex classes.

Theorem 1. *Any almost o-minimal theory of convexity rank 1 having less than* 2^ω *countable models is quite o-minimal.*

Corollary 2. *Any almost o-minimal theory of convexity rank 1 having less than* 2^ω *countable models is Ehrenfeucht.*

References

[1] Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. Vol. 352. P. 5435–5483.

[2] Mayer L. L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. 1988. Vol. 53. P. 146–159.

[3] Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. 2017. Vol. 168. P. 129–149.

[4] Kulpeshov B. Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63. P. 1511–1528.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, International Information Technology University, Almaty (Kazakhstan)

E-mail: sayan-5252@mail.ru, b.kulpeshov@iitu.kz

On the shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice

V. A. Baransky, T. A. Senchonok

A *partition* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ is a sequence of non-negative integers (the parts) in non-increasing order $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ with a finite number of non-zero elements [**1**]. A *weight* of λ is the sum of parts, denoted by $\mathrm{sum}(\lambda)$. A partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ *dominates* a partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, denoted by $\lambda \geq \mu$, if $\lambda_1 \leq \mu_1$, $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \mu_1 + \mu_2$, $\dots$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$, $\dots$. All partitions of all integers form the lattice NPL with respect to $\geq$ (see, [**2**] and [**3**]).

We define two types of *elementary transformations* of the lattice NPL [**3**]. The first one is a box transference, the second one is a box destroying.

Let $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k, \dots)$ be a partition, $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$, $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$, $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$ and $i < j$. We say that the partition

$$\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_k, \dots)$$

is obtained from λ by the *box transference*.

Let $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k, \dots)$ be a partition and $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$. We say that the partition

$$\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_k, \dots)$$

is obtained from λ by the *box destroying*.

Note that $\lambda \geq \mu$ in NPL iff μ is obtained from λ by a finite sequence of elementary transformations [**3**].

Let λ and μ be two partitions such that $\lambda \geq \mu$. The *height* of λ over μ is the number of transformations in a shortest sequence of elementary transformations which transforms λ to μ, denoted by $\mathrm{height}(\lambda, \mu)$.

Theorem. *Let $\lambda \geq \mu$ and $C = \mathrm{sum}(\lambda) - \mathrm{sum}(\mu)$. Then*

$$\mathrm{height}(\lambda, \mu) = \sum_{j=1, \lambda_j > \mu_j}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j - \mu_j|.$$

We found also an algorithm that builds some useful shortest sequences of elementary transformations from λ to μ.

References

[1] Andrews G. The theory of partitions. — London: Addison-Wesley, 1976; Moscow: Nauka, 1982. P. 256.

[2] Brylawski T. The lattice of integer partitions // Discrete Mathematics. 1973. Vol. 6 P. 210–219.

[3] Baransky V. A., Koroleva T. A., Senchonok T. A. O reshetke razbieniy naturalnogo chisla // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2015. Vol. 21(3). P. 30–36.

Ural Federal University, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: Tatiana.Senchonok@urfu.ru

The lattice of varieties of implication semigroups

S. V. Gusev, H. P. Sankappanavar, B. M. Vernikov

In [**4**], the second author introduced and examined a new type of algebras as a generalization of De Morgan algebras. These algebras are of type $(2, 0)$ with a binary operation $\to$ and a nullary operation 0 satisfying the identities

$$(x \to y) \to z \approx [(z' \to x) \to (y \to z)']' \quad \text{and} \quad 0'' \approx 0$$

where $\mathbf{u}'$ means $\mathbf{u} \to 0$. Such algebras are called *implication zroupoids*. The class of all implication zroupoids is a variety denoted by **IZ**. It seems very natural to examine the lattice of its subvarieties. One of important and interesting subvarieties of **IZ** is the class of all associative implication zroupoids, that is algebras from **IZ** satisfying the identity

$$(x \to y) \to z \approx x \to (y \to z).$$

Such algebras are called *implication semigroups*. The variety **IS** of all implication semigroups and several its subvarieties already appeared in the literature (see [**1, 2, 3**]). In particular, the location of these varieties in a partially ordered set of some subvarieties of **IZ** were studied in [**3**].

The main result of the present work gives a complete description of the subvariety lattice of the variety **IS**. In particular, we prove that this lattice consists of 16 elements and is non-modular. In [**4**, Problem 5], the second author has raised the question as to whether the lattice **IZ** is distributive. Our result gives the negative answer to this question.

References

[1] Cornejo J. M., Sankappanavar H. P. On derived algebras and subvarieties of implication zroupoids // Soft Computing. 2017. Vol. 21. P. 6963–6982.

[2] Cornejo J. M., Sankappanavar H. P. On implicator groupoids // Algebra Universalis. 2017. Vol. 77. P. 125–146.

[3] Cornejo J. M., Sankappanavar H. P. Implication zroupoids and identities of associative type // Quasigroups and Related Systems. 2018. Vol. 26. P. 13–34.

[4] Sankappanavar H. P. De Morgan algebras: New perspectives and applications // Sci. Math. Jpn. 2012. Vol. 75. P. 21–50.

Ural Federal University, Ekaterinburg (Russia)
E-mail: sergey.gusb@gmail.com
State University of New York, New Paltz (USA)
E-mail: sankapph@newpaltz.edu, bvernikov@gmail.com

On dual Horn formulas

A. V. Kravchenko

Dual Horn formulas were introduced in [**1**].

The original motivation was the idea of representing a context free grammar as a set of elementary axioms such that production rules become dual Horn sentences. In addition, the authors of [**1**] introduced the notion of a dual reduced product and characterized dual Horn formulas in terms of preservation under this construction. In [**2**], another similar notion, the dual direct product, was introduced.

We suggest a series of assertions connecting axiomatizability by special sentences (including infinitary and dual Horn ones) and closedness under class operators. Some of them can be regarded as "dualisations" of known results for Horn formulas (in particular, quasi- and anti-identities).

References

[1] Areces C., Becher, V., Ferro S. Characterization results for d-Horn formulas // In: Cavedon, L., Blackburn, P., Braisby, N., Shimojima, A. (eds.) Logic, Language and Computation. — SCLI Publications, Stanford, 2000. P. 49–66.

[2] Badia, G., Marcos, J. On classes of structures axiomatizable by universal d-Horn sentences and universal positive disjunctions // Algebra Universalis. 2018. Vol. 79, No. 2. Art. 41.

IM SB RAS, NSU, and NSTU, Novosibirsk (Russia)
E-mail: a.v.kravchenko@mail.ru

The countable spectrum of weakly o-minimal theories of finite convexity rank

B. Sh. Kulpeshov

The present lecture is concerned the notion of *weak o-minimality*, originally studied by D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn in [**1**]. A subset A of a linearly ordered structure M is *convex* if for any $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $M = \langle M; =, <, \ldots \rangle$ such that any parametrically definable subset of M is a finite union of convex sets in M.

Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say that p is not *weakly orthogonal to* q if there exist an A-definable formula $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ and $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ such that $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ and $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$. We say that p is not *quite orthogonal to* q if there exists an A-definable bijection $f : p(M) \to q(M)$. We say that a weakly o-minimal theory is *quite o-minimal* if the notions of weak and quite orthogonality of 1-types coincide.

In [**2**] the Vaught's conjecture for o-minimal theories was solved. Recently in [**3**] this conjecture was solved for quite o-minimal theories. From the above works it follows that any o-minimal or quite o-minimal theory has either continuum of countable models, or exactly $6^l 3^m$ countable models for non-negative integers l and m.

In [**5**] B.S. Baizhanov and A. Alibek have constructed for every ordinal κ with $4 \leq \kappa \leq \omega$ examples of weakly o-minimal theories having exactly κ countable models. Recently in [**6**] the Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 was solved. Here we present the following theorem:

Theorem 1. *Let T be a weakly o-minimal theory of finite convexity rank in a countable language. Then exactly one of the following possibilities holds:*

(1) *T is countably categorical;*

(2) *T is Ehrenfeucht, namely T has k countable models, where $3 \leq k < \omega$;*

(3) *T has ω countable models;*

(4) *T has 2^ω countable models.*

References

[1] Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. 2000. Vol. 352. P. 5435–5483.

[2] Mayer L. L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. 1988. Vol. 53. P. 146–159.

[3] Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. 2017. Vol. 168. P. 129–149.

[4] Kulpeshov B. Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63. P. 1511–1528.

[5] Alibek A., Baizhanov B. S. Examples of countable models of a weakly o-minimal theory // International Journal of Mathematics and Physics. 2012. Vol. 3, No. 2. P. 1–8.

[6] Alibek A., Baizhanov B. S., Kulpeshov B. Sh., Zambarnaya T. S. VaughtTs conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // Annals of Pure and Applied Logic, 2018. Vol. 169. P. 1190-Ц1209.

International Information Technology University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

On ranks for families of all theories of given languages

N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov

We describe ranks $\mathrm{RS}(\cdot)$ [**1**] for families $\mathcal{T}_\Sigma$ of all theories of given languages Σ.

Theorem 1. *For any language Σ either $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma)$ is finite, if Σ consists of finitely many 0-ary and unary predicates, and constant symbols, or $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, otherwise.*

The proof of the theorem uses the following assertions on ranks $\mathrm{RS}(\cdot)$ and degrees $\mathrm{ds}(\cdot)$ for families of theories.

Proposition 1. *If Σ is a language of 0-ary predicates then either $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = 1$ with $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^n$, if Σ consists of $n \in \omega$ symbols, or $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, if Σ has infinitely many symbols.*

Proposition 2. *If Σ is a language of 0-ary and unary predicates, with at least one unary symbol P, then either $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^k$ with $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^m$, if Σ consists of $k \in \omega$ unary symbols and $m \in \omega$ 0-ary predicates, or $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, if Σ has infinitely many symbols.*

Proposition 3. *If Σ is a language of constant symbols then either $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = 1$ with $\mathrm{ds}(\mathcal{T}_\Sigma) = P(n)$, where $P(n)$ is the number for partitions of n-element sets, if Σ consists of $n \in \omega$ symbols, or $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, if Σ has infinitely many symbols.*

Proposition 4. *If Σ is a language of 0-ary and unary predicates, and constant symbols, then either $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma)$ is finite, if Σ consists of finitely many symbols, or $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, if Σ has infinitely many symbols.*

Besides, e-minimal [**2**] families $\mathcal{T}_\Sigma$ are described:

Theorem 2. *For any language Σ the family $\mathcal{T}_\Sigma$ is e-minimal if and only if $\Sigma = \emptyset$ or Σ consists of one constant symbol.*

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP05132349, AP05132546) and by Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 17-01-00531).

References

[1] Sudoplatov S. V. On ranks for families of theories and their spectra // International Conference “Mal’tsev Meeting”, November 19Ц23, 2018, Collection of Abstracts. — Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, 2018.

[2] Sudoplatov S. V. On approximations of theories // International Conference “Mal’tsev Meeting”, November 19Ц23, 2018, Collection of Abstracts. — Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, 2018.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: nur_24.08.93@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

On 3-generated lattices with standard and distributive elements among generators

K. E. Raboy

In [**1**] a 3-generated lattice is proved to be distributive if two of its generators are standard. It means that such lattice has at most 18 elements. There is also an example of a nonmodular lattice generated by three elements, one of which is standard, and the other two are distributive. We have proved the following theorem.

Theorem. *Let L be a 3-generated lattice. If one generator of L is standard and the other two are distributive then L contains not more than 21 elements.*

It should be noted that the estimate in Theorem is sharp.

The autor wishes to express his gratitude to A. G. Gein for the problem formulation and useful discussions.

The participant was supported by a travel grant provided due to Prof. H.P. Sankappanavar.

References

[1] Grätzer G., Schmidt E. T., Standard ideals in lattices. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 12 (1961), 17–86.

Ural Federal University, Yekaterinburg
E-mail: raboyk@mail.ru

On approximations of theories

S. V. Sudoplatov

We study approximations of theories both in general context and with respect to some natural classes of theories. Some kinds of approximations are considered, connections with finitely axiomatizable theories and their e-spectra [**1**] are found.

Let $\mathcal{T}$ be a class of theories in a predicate language L and T be a L-theory, $T \notin \mathcal{T}$. The theory T is called *$\mathcal{T}$-approximated*, or *approximated by $\mathcal{T}$*, or *$\mathcal{T}$-approximable*, or a *pseudo-$\mathcal{T}$-theory*, if for any formula $\varphi \in T$ there is $T' \in \mathcal{T}$ such that $\varphi \in T'$. If T is $\mathcal{T}$-approximated then $\mathcal{T}$ is called an *approximating family* for T, and theories $T' \in \mathcal{T}$ are *approximations* for T.

Theorem 1. *A theory $T \notin \mathcal{T}$ is $\mathcal{T}$-approximated if and only if $T \in \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$.*

Theorem 2. *For any theory T the following conditions are equivalent:*

(1) T is approximable;

(2) T is $\overline{\mathcal{T}} \setminus \{T\}$-approximated, where $\overline{\mathcal{T}}$ is the set of all theories of given language;

(3) T is not finitely axiomatizable.

Let λ be a cardinality, $\mathcal{T}$ be a family of theories. A theory T is called $(\lambda, \mathcal{T})$-*approximable*, or λ-*approximable* (λ-*approximated*) by $\mathcal{T}$, if T is $\mathcal{T}'$-approximable for some $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ with $|\mathcal{T}'| = \lambda$. A theory T is called λ-*approximable* if T is $(\lambda, \mathcal{T})$-approximable for some $\mathcal{T}$.

Theorem 3. *For any theory T the following conditions are equivalent:*

(1) T is λ-approximable for some λ;

(2) T is ω-approximable;

(3) the language $L(T)$ is finite and T does not contain a $L(T)$-complete sentence, or $L(T)$ is infinite.

Theorem 4. *A family $\mathcal{T}$ of theories contains an approximating subfamily if and only if $\mathcal{T}$ is infinite.*

A family $\mathcal{T}$ is *single-valued*, or *e-categorical*, if e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{T}) = 1$. An infinite family $\mathcal{T}$ is called *e-minimal* if for any sentence $\varphi \in \Sigma(T)$, $\mathcal{T}_\varphi$ is finite or $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ is finite.

Theorem 5. *A family $\mathcal{T}$ is e-minimal if and only if it is e-categorical.*

Theorem 6. *Any E-closed family $\mathcal{T}$ with finite e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{T}) > 0$ is represented as a disjoint union of e-categorical families $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$.*

The research is partially supported by Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 17-01-00531), and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546).

References

[1] Sudoplatov S. V. Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics". 2018. Vol. 24. P. 65–84.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

On ranks for families of theories and their spectra

S. V. Sudoplatov

We define ranks and degrees for families of theories, similar to Morley rank and degree [**1**], and the notion of totally transcendental family of theories. Bounds for e-spectra with respect to ranks and degrees are found. It is shown that the ranks and the degrees are preserved under E-closures $\mathrm{Cl}_E(\cdot)$ [**2**]. The criteria for totally transcendental families in terms of cardinality of E-closure and of the value of e-spectrum, for a countable language, are proved.

For the empty family $\mathcal{T}$ of theories we put the rank $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=-1$, for finite nonempty families $\mathcal{T}$ we put $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=0$, and for infinite families $\mathcal{T}$ — $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\geq 1$. For a family $\mathcal{T}$ and an ordinal $\alpha=\beta+1$ we put $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ if there are pairwise inconsistent $\Sigma(\mathcal{T})$-sentences φ_n, $n\in\omega$, such that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\varphi_n})\geq\beta$, $n\in\omega$, where $\mathcal{T}_\varphi=\{T\in\mathcal{T}\mid\varphi\in T\}$. If α is a limit ordinal then $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ if $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\geq\beta$ for any $\beta<\alpha$. We put $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=\alpha$ if $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ and $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\not\geq\alpha+1$. If $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\geq\alpha$ for any α, we put $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=\infty$. A family $\mathcal{T}$ is called *e-totally transcendental*, or *totally transcendental*, if $\mathrm{RS}(\mathcal{T})$ is an ordinal.

Theorem 1. *For any family $\mathcal{T}$ either $|\mathrm{RS}(\mathcal{T})|\leq\max\{\omega,|\Sigma(\mathcal{T})|\}$ or $\mathcal{T}$ is not e-totally transcendental.*

If $\mathcal{T}$ is e-totally transcendental, with $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=\alpha\geq 0$, we define the *degree* $\mathrm{ds}(\mathcal{T})$ of $\mathcal{T}$ as the maximal number of pairwise inconsistent sentences φ_i such that $\mathrm{RS}(\mathcal{T}_{\varphi_i})=\alpha$.

Clearly, if $\mathrm{ds}(\mathcal{T})$ exists then it is equal to some $n\in\omega\setminus\{0\}$.

Theorem 2. *For any infinite family $\mathcal{T}$, e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{T})$ is finite if and only if $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=1$. If $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=1$ then e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{T})=\mathrm{ds}(\mathcal{T})$.*

Theorem 3. *If $\mathrm{RS}(\mathcal{T})\geq 2$ then e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{T})\geq\omega$, witnessed both by some disjoint neighbourhoods $\mathcal{T}_{\varphi_n}$, $n\in\omega$, and by some additional accumulation points.*

Theorem 4. *For any family $\mathcal{T}$, $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=\mathrm{RS}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}))$, and if $\mathcal{T}$ is nonempty and e-totally transcendental then $\mathrm{ds}(\mathcal{T})=\mathrm{ds}(\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}))$.*

Theorem 5. *For any family $\mathcal{T}$ with $|\Sigma(\mathcal{T})|\leq\omega$ the following conditions are equivalent:* (1) $|\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})|=2^\omega$, (2) e-$\mathrm{Sp}(\mathcal{T})=2^\omega$, (3) $\mathrm{RS}(\mathcal{T})=\infty$.

The research is partially supported by Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 17-01-00531), and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132546).

References

[1] Morley M. Categoricity in Power // Transactions of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 114, No. 2. P. 514–538.

[2] Sudoplatov S. V. Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics". 2018, Vol. 24. P. 65–84.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Piecewise monotonicity for unary functions definable in ordered dense groups of Morley o-rank 1

V. V. Verbovskiy

We consider the class of ordered groups whose elementary theory is o-stable accordingly to the following definition. The aim of this research is to investigate properties of definable unary functions.

Definition (B. Baizhanov, V. Verbovskiy).

(1) An ordered structure $\mathcal{M}$ is *o-stable in* λ if for any $A \subseteq M$ with $|A| \leq \lambda$ and for any cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ there are at most λ 1-types over A which are consistent with the cut $\langle C, D\rangle$.

(2) A theory T is *o-stable in* λ if every model of T is. Sometimes I write T is o-λ-stable.

(3) A theory T is *o-stable* if there exists an infinite cardinal λ in which T is o-stable.

Definition.

(1) We say that Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ inside a cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ is equal to or greater than 1 and write $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi)\geq 1$ for this, if $\{\phi(x)\}\cup\langle C, D\rangle$ is consistent.

(2) $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha+1$ if there are infinitely many pairwise inconsistent formulae $\psi_i(x)$ such that $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}\big(\phi(x)\wedge\psi_i(x)\big) \geq \alpha$.

(3) If α is a limit ordinal, then $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ if $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \beta$ for all $\beta < \alpha$.

(4) $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ if $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ and $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \ngeq \alpha+1$.

(5) A theory T has Morley o-rank at most α if for any its model $\mathcal{M}$ any cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ Morley o-rank $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(x = x) \leq \alpha$.

Fact. *If a theory T has Morley o-rank α for some ordinal α, then T is o-ω-stable.*

We say that an ordered group $\mathcal{M}$ contains *boundedly many definable convex subgroups* if there is a cardinal λ, such that in any group which is elementary equivalent to $\mathcal{M}$ the number of convex definable subgroups does not exceed λ. Otherwise we say that $\mathcal{M}$ has *unboundedly many definable convex subgroups*.

Theorem. *Let G be an ordered group, whose elementary theory has Morley o-rank 1. Assume that G has boundedly many definable convex subgroups. Then any definable unary function is piecewise monotone, where pieces need not to be convex.*

The research is supported by the grant of MES of RK for the project AP05132688 “Relative stability”.

Kazakh British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: viktor.verbovskiy@gmail.com

On hyperassociative algebras

M. A. Yolchyan

The binary algebra $(Q;\Sigma)$ is called hyperassociative, if it satisfies the following hyperidentity of associativity [**1**]:

$$X(x, Y(y,z)) = Y(X(x,y), z). \qquad (ass_1)$$

In this talk we characterize the structure of hyperassociative algebras. In particular, we prove the following result: If (Q, Σ) is an idempotent and hyperassociative algebra, then the relation

$$\theta^* = \{(x,y) \in Q \times Q \mid X(x, X(y,x)) = x, X(y, X(x,y)) = y; \forall X \in \Sigma\}$$

is the congruence relation of the algebra (Q, Σ); moreover, each operation of the corresponding quotient algebra is semilattice operation and the equivalence classes are rectangular (and idempotent) semigroups.

References

[1] Movsisyan Yu. M. Hyperidentities in algebras and varieties // Uspekhi Mat. Nauk. 1998. Vol. 53, No. 1. P. 61–114; Russian Math. Surveys. 1998. Vol. 53, No. 1. P. 57–108.

Yerevan State University, Yerevan (Armenia)
E-mail: marlen.yolchyan94@gmail.com

On free left n-trinilpotent trioids

A. V. Zhuchok, Y. A. Kryklia

Recall that a nonempty set T equipped with three binary associative operations $\dashv$, $\vdash$, and $\perp$ satisfying the following eight axioms:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$
$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z),$$
$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z),$$
$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$$

for all $x,\ y,\ z\ \in\ T$, is called a trioid [1].

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. By Ω denote the signature of a trioid. Let $x_1, \ldots, x_n$ be individual variables. By $P(x_1, \ldots, x_n)$ we will denote the set of terms of algebras of the signature Ω having the form $x_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} x_n$ with parenthesizing, where $\circ_1, \ldots, \circ_{n-1} \in \Omega$. A trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ will be called left trinilpotent if for some $n \in \mathbb{N}$, any $x \in T$ and any $p(x_1, \ldots, x_n) \in P(x_1, \ldots, x_n)$ the following identities hold:

$$p\,(x_1, \ldots, x_n) * x = p\,(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad p\,(x_1, \ldots, x_n) \vdash x = x_1 \vdash \ldots \vdash x_n,$$

where $* \in \{\dashv, \perp\}$. The least such n we shall call the left trinilpotency index of $(T, \dashv, \vdash, \perp)$. For $k \in \mathbb{N}$ a left trinilpotent trioid of left trinilpotency index $\leq k$ is said to be left k-trinilpotent. Right k-trinilpotent trioids are defined dually.

The notion of a left (right) trinilpotent trioid is an analog of the notion of a left (right) nilpotent semigroup [2] and a left (right) dinilpotent dimonoid [3]. It is clear that operations of any left (right) 1-trinilpotent trioid coincide and it is a left (right) zero semigroup. The class of all left (right) n-trinilpotent trioids forms a subvariety of the variety of trioids. A trioid which is free in the variety of left (right) n-trinilpotent trioids will be called a free left (right) n-trinilpotent trioid. If ρ is a congruence on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ such that $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ is a left (right) n-trinilpotent trioid, we say that ρ is a left (right) n-trinilpotent congruence.

We construct a free left (right) n-trinilpotent trioid and characterize the least left (right) n-trinilpotent congruence on a free trioid. We also consider separately free left (right) n-trinilpotent trioids of rank 1 and describe the automorphism group of the free left (right) n-trinilpotent trioid.

References

[1] Loday J.-L., Ronco M. O., Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. 2004. Vol. 346. P. 369–398.

[2] Schein B. M. One-sided nilpotent semigroups // Uspekhi Mat. Nauk. 1964. Vol. 19, No. 1. P. 187–189 (in Russian).

[3] Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V. Free left n-dinilpotent dimonoids // Semigroup Forum. 2016. Vol. 93, No. 1. P. 161–179. doi: 10.1007/s00233-015-9743-z.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Starobilsk (Ukraine)
E-mail: zhuchok.av@gmail.com, krivorotko.yana@gmail.com

Endotopism semigroups of partial equivalences

Yu. V. Zhuchok, E. A. Toichkina

Let X be an arbitrary nonempty set and $\rho \subseteq X \times X$. An ordered pair (φ, ψ) of transformations φ and ψ of a set X is called an *endotopism* [**1**] of ρ if for all $a, b \in X$ the condition $(a, b) \in \rho$ implies $(a\varphi, b\psi) \in \rho$. The set of all endotopisms of ρ is a semigroup with respect to the componentwise multiplication operation. This semigroup is called the *endotopism semigroup* of the relation ρ and it is denoted by $Et(X, \rho)$.

We denote by $HEt(X, \rho)$ (respect., $LEt(X, \rho)$, $QEt(X, \rho)$, $SEt(X, \rho)$ and $At(X, \rho)$) the set of all half-strong endotopisms (respect., locally strong endotopisms, quasi-strong endotopisms, strong endotopisms and autotopisms) of ρ (see, e.g., [**2**]).

For every nonempty $\rho \subseteq X \times X$ the following sequence of inclusions holds:

$$Et(X, \rho) \supseteq HEt(X, \rho) \supseteq LEt(X, \rho) \supseteq QEt(X, \rho) \supseteq SEt(X, \rho) \supseteq At(X, \rho).$$

With this sequence we associate a sequence of numbers $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, where $s_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, ..., 5\}$. We put $s_i = 0$ if the semigroups involved in the ith inclusion in the chain above coincide, and $s_i = 1$ otherwise. For example, $s_2 = 0$ indicates that $HEt(X, \rho) = LEt(X, \rho)$, and $s_5 = 1$ means that $SEt(X, \rho) \neq At(X, \rho)$. The integer $\sum_{i=1}^{5} s_i 2^{i-1}$ is called the *endotype* (or the *endotopism type*) of ρ relative to its endotopisms and it is denoted by $Ettype(X, \rho)$.

A binary relation ρ on X is called a *partial equivalence* [**3**] if it is symmetric and transitive. We denote the set of all equivalences on X and the set of all partial equivalences on X by $Eq(X)$ and $PEq(X)$, respectively. Equivalence relations of $PEq(X) \setminus Eq(X)$, $|X| \geq 2$, we call as *strict partial equivalences* on X.

We find all possible values of the endotype of an arbitrary strict partial equivalence relative to its endotopisms. For a strict partial equivalence α on X, we describe its endotopisms of all types and study different properties of the semigroup $Et(X, \alpha)$.

The publication is based on the research provided by the grant support of the State Fund For Fundamental Research (project F83/43909).

References

[1] Popov B. V. Semigroups of endotopisms of μ-ary relations // Uch. Zap. Leningrad. Gos. Ped. Inst. im. A. I. Gertsena. 1965. Vol. 274. P. 184–201 (In Russian).

[2] Zhuchok Yu. V., Toichkina E. A. The endotopism semigroups of an equivalence relation // Sb. Math. 2014. Vol. 205, No. 5. P. 646–662.

[3] Dudek V. A., Trokhimenko V. S. Menger algebras of multiplace functions // Chişinău: S.n., 2006 (Centrul Ed. USM). 237 p. (In Russian).

Luhansk Taras Shevchenko National University, Starobilsk (Ukraine)
E-mail: zhuchok.yu@gmail.com, toichkina.e@gmail.com

VII. Секция «Неклассические логики»

Вопросы унификации в предтабличных расширениях $\mathcal{S}4$

С. И. Башмаков

Унификационная проблема представляет собой возможность преобразовать формулу в теорему после замены переменных [**1**]. Будем говорить, что формула $\varphi(p_1,\dots,p_s)$ *унифицируема* в $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда существует подстановка (*унификатор*) $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ для каждой p_i такая, что $\varphi(\sigma_1,\dots,\sigma_s) \in \mathcal{L}$.

Унификатор σ формулы $\varphi(p_1,\dots,p_s)$ назовем *более общим* чем σ^1 в $\mathcal{L}$ ($\sigma^1 \preceq \sigma$), если существует подстановка σ^2 такая, что для любой переменной $p_i \in Var(\varphi)$: $\sigma^1(p_i) \equiv \sigma^2(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$. Набор унификаторов CU формулы φ называется *полным* в $\mathcal{L}$, если для любого унификатора σ формулы φ найдется $\sigma_1 \in CU$: $\sigma \preceq \sigma^1$.

Подстановка τ называется *проективным унификатором* для $\alpha(p_1,\dots,p_s)$ в $\mathcal{L}$, если выполняются оба следующих условия:

(1) $\tau(\alpha) \in \mathcal{L}$ (т.е. τ – унификатор для α);

(2) $\Box\alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$ для любой переменной $p_i \in Var(\alpha)$.

Исследуется унификация в предтабличных расширениях модальной логики $\mathcal{S}4$, описанных Л. Л. Максимовой [**2, 3**], Л.Л. Эсакиа и В.Ю. Месхи [**4**]. Довольно изученными в этой связи являются логики **PM1** и **PM5** из набора, т. к. унификация в соответствующих им известных системах $\mathcal{S}4.3$ и $\mathcal{S}5$ соответственно рассматривалась в работах В.В. Рыбакова и В. Джика — в частности, последним была доказана ее проективность в обеих системах [**5, 6**]. Проблемы унификации для случаев **PM2**, **PM3** и **PM4** остаются открытыми.

В докладе рассматриваются вопросы проективности, типа унификации в логиках, полных наборов и *основных* (*граунд*) унификаторов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта N 18-41-240005, а также Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

Список литературы

[1] Rybakov V. V., Best unifiers in transitive modal logics, Studia Logica, 2011, 99, 321–336.
[2] Максимова Л. Л., Предтабличные расширения логики S4 Льюиса, Алгебра и логика, 1975, 14, 28–55.
[3] Maksimova L., LC and its pretabular relatives, J. Michael Dunn on Information Based Logics. Outst. Contrib. to Logic Vol. 8, Springer, 2016, 81–91.
[4] Esakia L., Meskhi V., Five critical modal systems, Theoria, 1977, 43, 52–60.
[5] Dzik W., Wojtylak P., Projective unification in modal logic, Logic J. IGPL, 2012, 20, 121–153.
[6] Dzik W., Unitary Unification of S5 Modal Logic and its Extensions, Bull. Sect. Logic, 2003, 32, 19–26.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: krauder@mail.ru

О полноте фрагмента исчисления Ламбека с операциями итерации и пересечения относительно реляционных моделей

С. Л. Кузнецов

Исчисление Ламбека [**1**] описывает атомарную теорию частично упорядоченных полугрупп с делениями и задаётся аксиомами $A \to A$, $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$ и $A \cdot (B \cdot C) \to (A \cdot B) \cdot C$ и следующими правилами вывода:

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C} \qquad \frac{A \cdot B \to C}{A \to B / C} \qquad \frac{A \to B / C}{A \cdot B \to C} \qquad \frac{A \cdot B \to C}{B \to A \backslash C} \qquad \frac{B \to A \backslash C}{A \cdot B \to C}$$

(Здесь A, B, C обозначают формулы, построенные из переменных операциями умножения $(\cdot)$ и двух делений $(\backslash, /)$; $\to$ соответствует частичному порядку.)

Естественный пример полугрупп с делением дают так называемые *реляционные модели* (R-модели): пусть на множестве W задано транзитивное бинарное отношение $U \subseteq W \times W$, тогда его подмножества образуют полугруппу с делениями. Для R-моделей верна теорема о полноте [**2**]: утверждение $A \to B$ доказуемо в исчислении Ламбека тогда и только тогда, когда оно истинно в любой R-модели.

В R-моделях рассмотрим также пересечение $(\cap)$ и транзитивное замыкание, или положительную итерацию Клини $(^+)$. Им соответствуют правила:

$$\frac{A \to B_1 \quad A \to B_2}{A \to B_1 \cap B_2} \qquad \frac{A_i \to C}{A_1 \cap A_2 \to C} \qquad \frac{\big(A_i \to B\big)_{i=1}^{n}}{A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \to B^+} \qquad \frac{\big(A^n \to B\big)_{n=1}^{\infty}}{A^+ \to B}$$

Упомянутая ранее теорема о полноте [**2**] распространяется также на расширение $\cap$. Для расширения $\cap$ и $^+$ предлагается следующий частичный результат:

Теорема. *Если в формулы A и B операция $^+$ входит только в комбинациях вида F/E^+ и $E^+\backslash F$ («итерация только в знаменателях»), то утверждение $A \to B$ доказуемо в исчислении Ламбека с операциями итерации и пересечения тогда и только тогда, когда оно истинно во всех R-моделях.*

Ограниченность результата фрагментом с итерацией только в знаменателях мотивировано тем, что целиком исчисление относительно R-моделей неполно — $(s/(p \wedge q)) \wedge (s/(p \wedge q \cdot q^+)) \wedge (s/(p \cdot p^+ \wedge q)) \wedge (s/(p \cdot p^+ \wedge q \cdot q^+)) \to s/(p^+ \wedge q^+)$ (вариант контрпримера из [**3**]) истинно во всех R-моделях, но не доказуемо.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда N 16-11-10252.

Список литературы

[1] Ламбек И., Математическое исследование структуры предложений, Математическая лингвистика: сборник переводов. М.: Мир, 1964, 47–68.

[2] Andréka H., Mikulás Sz., Lambek calculus and its relational semantics: completeness and incompleteness, Journal of Logic, Language, and Information, 1994, 3, 1–37.

[3] Kuznetsov S. *-continuity vs. induction: divide and conquer, Advances in Modal Logic, 2018, 12, College Publications, London, 439–510.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
E-mail: skuzn@inbox.ru

Интерполяционное свойство в расширениях Od

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Исследуется проблема интерполяции в расширениях минимальной логики Йохансона J.

Известно, что сама логика J и наиболее важные ее расширения обладают интерполяционным свойством CIP [**1**]. Проблема интерполяции полностью решена для класса стройных J-логик [**2**], включающего в себя суперинтуиционистские и негативные логики. В частности, доказано, что существует лишь конечное число стройных логик с интерполяционными свойством CIP и ограниченным интерполяционным свойством IPR. Все эти логики описаны, и доказаны их узнаваемость и разрешимость свойств CIP и IPR на классе стройных логик.

В то же время неизвестно, конечно или бесконечно число расширений логики J со свойством CIP, и проблема интерполяции над логикой J еще далека от своего решения.

Вводится новая серия алгебр Йохансона $G_{m,n}$ и рассматриваются вложения этих алгебр. Получен ряд необходимых условий для того, чтобы J-логика имела свойство CIP:

Лемма. *1. Пусть L имеет IPR. Если $G_{m,0}, G_{1,n} \in V(L)$ при $m, n > 0$, то $G_{m,n} \in V(L)$.*
2. Пусть L имеет IPR. Если $G_{1,k} \in V(L)$, $k \geq 3$, то $G_{1,2(k-1)} \in V(L)$.
3. Пусть L имеет IPR. Если $G_{1,2} \in V(L)$, то $G_{1,3} \in V(L)$.
4. Пусть L имеет IPR. Если $G_{1,2} \in V(L)$, то $G_{1,n} \in V(L)$ для всех $n \geq 0$.
5. Пусть L имеет CIP. Если $G_{3,0} \in V(L)$, то $G_{m,0} \in V(L)$ для всех $m \geq 1$.

Используя полученные критерии, мы исследуем свойство CIP в конечнослойных J-логиках. Напомним, что семейство J-логик разбивается на слои с помощью формул $\pi_0 = p_0$, $\pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \longrightarrow \pi_n)$[**3**]. L – логика *конечного слоя* (или *конечнослойная логика*), если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного слоя* в противном случае. Мы ограничимся предгейтинговыми логиками, т.е. расширениями логики $\mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \longrightarrow p)$. Доказана

Теорема. *Существует лишь конечное число конечнослойных предгейтинговых логик со свойством* CIP.

Список литературы

[1] Максимова Л. Л., Юн В. Ф., Расширения минимальной логики и проблема интерполяции, СибМатЖ, 2018, 59(4), 863–878.

[2] Максимова Л. Л., Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках, СибМатЖ, 2012, 53(5), 1048–1064.

[3] Максимова Л. Л., Юн В. Ф., Слои над минимальной логикой, Алгебра и логика, 2016, 55(4), 449–464.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru; yun@math.nsc.ru

Алгоритмическая разрешимость фрагмента исчисления Ламбека с экспоненциальной модальностью

Е. М. Фофанова

Расширение исчисления Ламбека $!\mathbf{L}^*$ получается из версии исчисления Ламбека $\mathbf{L}^*$ [**1**], в которой разрешены пустые левые части последовательностей, за счёт его расширения с использованием экспоненциальной модальности (основываясь на линейной логике Жирара [**2**]). Формулы в $!\mathbf{L}^*$ построены из набора переменных ($\mathbf{Var} = \{p, q, r, \dots\}$) с использованием трёх двуместных связок, $\cdot$, $/$, $\backslash$ и одноместной связки $!$.

Его аксиомы имеют вид $A \to A$, а правила таковы:

$$\frac{\Gamma \to A \;\; \Delta_1,\, B,\, \Delta_2 \to C}{\Delta_1,\, B/A,\, \Gamma,\, \Delta_2 \to B}(/\to); \quad \frac{\Gamma,\, A \to B}{\Gamma \to B/A}(\to/) \text{ и аналогично } (\backslash \to), (\to \backslash);$$

$$\frac{\Gamma,\, A,\, \Delta \to C}{\Gamma,\, !A,\, \Delta \to C}(! \to); \quad \frac{!A_1, ..., !A_n \to B}{!A_1, ..., !A_n \to !B}(\to !)$$

$$\frac{\Delta_1\; !A,\, \Gamma,\, \Delta_2 \to C}{\Delta_1,\, \Gamma,\, !A,\, \Delta_2 \to C}(\mathrm{perm}_1); \quad \frac{\Delta_1,\, \Gamma,\, !A,\, \Delta_2 \to C}{\Delta_1,\, !A,\, \Gamma,\, \Delta_2 \to C}(\mathrm{perm}_2)$$

$$\frac{\Delta_1,\, !A,\, !A,\, \Delta_2 \to C}{\Delta_1,\, !A,\, \Delta_2 \to C}(\mathrm{contr}); \quad \frac{\Gamma,\, \Delta \to C}{\Gamma,\, !A,\, \Delta \to C}(\mathrm{weak}).$$

Проблема выводимости для $!\mathbf{L}^*$ алгоритмически неразрешима. Канович и др. [**3**] наряду с $!\mathbf{L}^*$ рассмотрели исчисление без (weak). Для обоих исчислений они показали неразрешимость даже в случае, когда ! применяется только к формулам глубины вложенности делений не более 2 (более точно — $(p/(q/r))$ и $((p/q)/r)$).

Но если мы разрешим применять ! только с переменными, проблема выводимости оказывается разрешима и принадлежит к классу NP (т.е., может быть решена с помощью недетерминированного полиномиального алгоритма) [**3**].

Промежуточный случай глубины 1 оставался открытой задачей.

Теорема. *Проблема выводимости для исчисления Ламбека с экспоненциальной модальностью и ограничением 1 на глубину !-формул (под ! разрешаются формулы вида $q_n\backslash \dots \backslash q_1 \backslash p/r_1/\dots/r_m$) алгоритмически разрешима.*

Выражаю благодарность своему научному руководителю Кузнецову Степану Львовичу за советы и ценные замечания при работе.

Список литературы

[1] Lambek J., On the calculus of syntactic types, Structure of Language and Its Mathematical Aspects, Proc. Symposia Appl. Math., 1961, 12, AMS, 166–178.

[2] Girard J.-Y., Linear logic, Theor. Comput. Sci., 1987, 50(1), 1–102.

[3] Kanovich M., Kuznetsov S., and Scedrov A., Undecidability of the Lambek calculus with a relevant modality, Proc. Formal Grammar 2015/2016, LNCS vol. 9804, Springer, 2016, 240–256.

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: evgeniya.f.20.02@yandex.ru

Иррефлексивная модальность на цепи типа ω и полнота по П. С. Новикову

А. Д. Яшин, А. Г. Макаров

Изучаются расширения суперинтуиционисткой *логики Даммета* ($\equiv LC$ [**1**]) в языке, содержащем, помимо стандартных связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\leftrightarrow$, дополнительную одноместную связку $\varphi(\cdot)$; понятие формулы соответственно расширяется.

φ-Логикой называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int, замкнутое относительно правил модус поненс и подстановки, и содержащее формулу $(p \leftrightarrow q) \to (\varphi(p) \leftrightarrow \varphi(q))$ (*аксиома замены для φ*). φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативной над LC*, если для любой формулы B, не содержащей φ, из $B \in \mathcal{L}$ следует $B \in LC$.

φ-Логика $\mathcal{L}$ называется *полной по П.С. Новикову*, если для любой формулы $B \notin \mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L} + B$ неконсервативна над LC [**2**].

Связка φ интерпретируется в моделях Крипке как *иррефлексивная модальность*:

$$x \Vdash \varphi(A) \rightleftharpoons \forall y > x (y \Vdash A).$$

Рассматриваем бесконечную цепь типа ω (упорядоченное множество натуральных чисел), снабжённую иррефлексивной модальностью, и порождаемую ею φ-логику $\mathcal{L}(\omega)$.

Теорема. *φ-Логика $\mathcal{L}(\omega)$ является полным по П.С. Новикову расширением логики Даммета, и определяет новую одноместную связку в LC по П.С. Новикову.*

Замечание. В [**5**] установлена полнота по П.С. Новикову φ-логики $\mathcal{LC}$ класса всех конечных цепей с иррефлексивной модальностью.

При этом $\mathcal{L}(\omega)$ и $\mathcal{LC}$ несовместимы над LC [**4**].

В [**3**] показана, как минимум, счётность семейства пополнений по П.С. Новикову логики LC в языке с дополнительной одноместной связкой.

Список литературы

[1] Dummett M., A propositional calculus with denumerable matrix, J. Symb. Logic, 1959, 24(1), 97–106.

[2] Сметанич Я.С., Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией, ДАН СССР, 1959, 139(2), 309–312.

[3] Яшин А.Д., Иррефлексивная модальность как новая логическая связка в логике Даммета, Сиб. матем. журнал, 2014, 55(1), 228–234.

[4] Яшин А.Д., Макаров А.Г., Иррефлексивная модальность, логика Даммета и континуальные цепи, Сиб. матем. журнал, 2018, 59(2), 468–476.

[5] Yashin A.D., Dummett logic, Irreflexive modality and Novikov Completeness, In: S. Odintsov (ed.), Larisa Maksimova on Implication, Interpolation, and Definability. Outstanding Contribution to Logic. Vol.15, Heidelberg (Germany), Springer, 2018, 309–337.

Удмуртский университет, Ижевск; МГППУ, Москва
E-mail: yashin.alexandr@ya.ru, magrus87@gmail.com

Modal logic with the difference modality of topological T_0-spaces

R. E. Aghamov

This talk is about topological semantics of modal logics. Several interpretations of the modal box as an operator over a topological space are possible. Namely diamond-as-closure-operator and diamond-as-derivation-operator have been pioneering in the semantics of modal logic as far back as in 1944, in the celebrated paper of McKinsey and Tarski (cf. [**2**]). They showed that **S4** is the logic of all topological spaces and the logic of any metric dense-in-itself separable space is **S4**. This remarkable result also demonstrates a relative weakness of the interior operator interpretation to distinguish interesting topological properties.

The second interpretation gives more expressive power but also has its limitations. T_0 and local T_1 separation axioms became expressible (cf. [**1**], [**3**]). We can increase expressible power by adding universal or difference modalities.

We will deal with the difference modality (or modality of inequality) $[\neq]$, interpreted as "true everywhere except here". The expressive power of this language in topological spaces has been studied by Gabelaia in [**4**], the author presented axiom that defines T_0 spaces.

First we give basic information, definitions and results from the theory of modal logics and general topology that are necessary for the exact formulation of the main results.

Theorem. *$S4DT_0$ has the finite model property.*

Theorem. *The logic* $\mathbf{S4DT_0}$ *is complete with respect to topological T_0-spaces.*

References

[1] Bezhanishvili G., Esakia L. and Gabelaia D, Some results on modal axiomatization and definability for topological spaces, Studia Logica, 2005, 81, 325–355.

[2] McKinsey J.C.C., Tarski A., The algebra of topology, Annals of Mathematics, 1944, 45(1), 141–191.

[3] Esakia L., Weak transitivity a restitution, Logical investigations, 2001, 8, 244–245 (in Russian).

[4] Gabelaia D., Modal definability in topology, Master's thesis, University of Amsterdam, ILLC, 2001.

Higher School of Economics, Moscow
E-mail: agamov@phystech.edu

A uniform take on (positive) FDE-based modal logics

S. A. Drobyshevich

There have been some interest recently for modal logics based on the first-degree entailment system FDE. Some of such systems include S. Odintsov's and H. Wansing's Belnapian modal logic BK and it variants, L. Goble's system $KN4$, modal billatice logic MBL, G. Priest's system K_{FDE} as well as systems over Nelson's logics $N4$ and $N3$. It turns out a lot of these logics are not that different from the standpoint of modal operators themselves, yet are fairly hard to compare due to differences in non-modal languages as well as axiomatics and semantics there are presented in. To address this problem we develop a uniform framework for positive FDE-based modal logics in such a way that depends on non-modal connectives as little as possible. On the level of syntax we make use of the original system of FDE — formulated as single-antecedent single-consequent sequent calculus in the language $\{\wedge, \vee, \sim\}$; on the level of semantics we will use Kripke-style relational models.

FDE-based modal logics are four-valued, which means that every connective is (semantically) defined by two conditions we call *assertion condition* and *rejection condition*. Thus, typical satisfaction clauses for $\Box$ over FDE (with $R^+_\Box$ and $R^-_\Box$ perhaps being equal) are the following:

$$\mu, x \vDash^+ \Box\varphi \iff \forall y\ (xR^+_\Box \Longrightarrow \mu, y \vDash^+ \varphi);$$
$$\mu, x \vDash^- \Box\varphi \iff \exists y (xR^-_\Box \text{ and } \mu, y \vDash^- \varphi).$$

In the proposed framework instead of conflating these two conditions we introduce two separate types of modal operators: a $\forall^+$*-operator* is the one satisfying the first condition; a $\exists^-$*-operator* satisfies the second one; a *full necessity* satisfies both. Similarly, we introduce $\exists^+$*-operators*, $\forall^-$*-operators* and *full possibility* operators. One of the main advantages of the proposed framework is that we can work with assertion conditions and rejections conditions of modal operators in a modular way.

To summarize, first, we show, how a number of non-modal connectives can be added FDE both on the level of axiomatics and on the level of semantics, including logical constants *true*, *false*, *neither* and *both*, bilattice operators $\oplus$ and $\otimes$, weak $\to_i$ and strong $\Rightarrow_i$ intuitionistic implications, as well as their classical counterparts. Second, we axiomatize systems $FDE(X;Y)$, where X is a set of non-modal operators from the list above and Y is a selection of modal operators of considered types, and obtain corresponding completeness results. Observe that the completeness result is proved differently depending on whether one of intuitionistic implications is present in X. Finally, we obtain some correspondence theory results to show, which axioms should be added to force pairs of accessibility relations to coincide.

The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 18-501-12019).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: drobs@math.nsc.ru

A repetition-free hypersequent calculus for first-order rational Pavelka logic with an expanded notion of an axiom

A. S. Gerasimov

First-order infinite-valued Łukasiewicz logic Ł∀ and its expansion by rational truth constants, first-order rational Pavelka logic RPL∀, are among the fundamental mathematical fuzzy logics and can be used to formalize approximate reasoning.

We continue our investigation aimed at developing proof search methods for RPL∀. Starting from a hypersequent calculus GŁ∀ [**6**, Section 8.5.2] for Ł∀ with structural rules, in [**1, 2**] we obtained a hypersequent calculus G^3Ł∀ for RPL∀. The last calculus has no structural rules, all its rules are height-preserving G^3Ł∀-invertible and are repetition-free in the sense that designations of multisets of formulas are not repeated in any premise of the rules. These features of G^3Ł∀ make it suitable for bottom-up proof search. In [**3**] we showed that G^3Ł∀ is a conservative extension of GŁ∀.

What it means for a hypersequent $\mathcal{H}$ to be an axiom of G^3Ł∀ is defined using only sequents of $\mathcal{H}$ containing neither connectives nor quantifiers. In [**4**] we introduced a calculus G^3_eŁ∀ whose rules are the same as ones of G^3Ł∀ and whose axioms are defined using all sequents of a hypersequent under consideration. Because of this expanded notion of an axiom, some G^3_eŁ∀-proofs are shorter than any G^3Ł∀-proofs of the same hypersequents.

Now we establish that each axiom of G^3_eŁ∀ is provable in G^3Ł∀, and thus the two calculi prove exactly the same hypersequents. We also obtain several consequences of these assertions.

Some technique used in our proof of the above assertions allows us to correct alleged proofs of Theorem 8.48 in [**6**] and Theorem 6.1.11 in [**5**], which give a necessary and sufficient condition for a prenex Ł∀-formula to be valid in terms of provability in GŁ∀. It follows that a similar theorem holds for G^3_eŁ∀.

References

[1] Gerasimov A. S., Proof search for non-prenex sentences of rational first-order Pavelka logic, Int. Conf. “Mal’tsev Meeting 2016”: Collection of Abstracts, Novosibirsk, 2016, p. 220.

[2] Gerasimov A. S., A repetition-free hypersequent calculus for first-order rational Pavelka logic, Submitted.

[3] Gerasimov A. S., Comparison of some hypersequent calculi for infinite-valued first-order Lukasiewicz logic, Int. Conf. “Mal’tsev Meeting 2017”: Collection of Abstracts, Novosibirsk, 2017, p. 176.

[4] Gerasimov A. S., On proof search for first-order infinite-valued Lukasiewicz logic, All-Russian Conf. “Algebra and Theory of Algorithms”: Collection of Abstracts, Ivanovo, 2018, pp. 142–144.

[5] Metcalfe G., Proof theory for mathematical fuzzy logic, P. Cintula, P. Hájek, C. Noguera (eds.), Handbook of mathematical fuzzy logic, Vol. 1, London, College Publications, 2011, pp. 209–282.

[6] Metcalfe G., Olivetti N., Gabbay D.M., Proof theory for fuzzy logics, Dordrecht, Springer, 2009.

Saint Petersburg
E-mail: alexander.s.gerasimov@ya.ru

Lambek calculus enriched with multiplexing

M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov

Within (commutative) linear logic [**1**], an informal semantics of the exponential $!A$ is to provide "*any (possibly zero) number of copies of A*," which is guaranteed by *contraction*: $!A \vdash !A \otimes !A$, *dereliction*: $!A \vdash A$, and *weakening*: $!A \vdash 1$.

In [**3**] the contraction rule is replaced by a weaker rule, the 'multiplexing" rule:

$$!A \vdash A \otimes A \otimes \cdots \otimes A.$$

In the non-commutative case, here we propose an extension of Lambek calculus [**4**] with *the multiplexing rule*, where $!A$ is interpreted as: "*any positive number of copies of A, each delivered at once to an appropriate place*":

$$\mathbf{L}! \ \frac{\Sigma, \Phi_0, \ A, \Phi_1, A, \Phi_2, .., A, \Phi_k \vdash B}{\Sigma, \ !A, \ \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, .., \Phi_k \vdash B} \ \underline{(k \geq 1)} \qquad \qquad \mathbf{R}! \ \frac{A \vdash C}{!A \vdash !C}$$

We borrow the rule $\mathbf{R}!$ from light linear logic [**2**].
Our main results are:

(a) In contrast to [**6**], here we prove that the Lambek calculus with multiplexing provides Lambek's non-emptiness restriction, cut elimination, and substitution.

(b) The calculus is undecidable, even with formulas of bounded nesting implications.

(c) If we bound k within the multiplexing rule $\mathbf{L}!$ with a fixed constant k_0, the calculus becomes decidable, in NEXPTIME, at most.

(d) The calculus can be used for complex and compound clauses in linguistics. Namely, in our calculus, grammatical phrases like "Mary that Peter met" and "Mary that met Peter" and "John likes eggs and Mary cheese" are provable, whereas ungrammatical phrases like "Mary that Peter met John" and "John eggs and Mary likes cheese" are not.

In closing, our extension of Lambek calculus has no weakening, no exchange, no contraction, but it does have multiplexing, it provides Lambek's non-emptiness restriction, cut elimination, substitution, and techniques for linguistic applications [**7**].

References

[1] Girard J.-Y., Linear logic, Theor. Comput. Sci., 1987, 50(1), 1–101.
[2] Girard J.-Y., Light linear logic, Inform. and Comput., 1998, 143(2), 175–204.
[3] Lafont Y., Soft linear logic and polynomial time, Theor. Comput. Sci., 2004, 318(1-2), 163–180.
[4] Lambek J., The mathematics of sentence structure, Amer. Math. Monthly, 1958, 65(3), 154–170.
[5] Kanovich M., Kuznetsov S., Nigam V., and Scedrov A., Subexponentials in non-commutative linear logic, Math. Struct. in Comp. Science, 2018, doi:10.1017/S0960129518000117.
[6] Kanovich M., Kuznetsov S., Scedrov A., Reconciling Lambek's restriction, cut-elimination, and substitution in the presence of exponential modalities, 2016, CoRR abs/1608.02254.
[7] Morrill G., Categorial grammar: logical syntax, semantics, and processing, Oxford Univ. Press, 2011.

UCL, London (UK); MIRAS, Moscow (Russia); UPenn, Philadelphia (USA); NRU HSE, Moscow
E-mail: m.kanovich@ucl.ac.uk; skuzn@inbox.ru; scedrov@math.upenn.edu

Characterization for some tabular Ext(GL)

I. A. Markovskaya

In the article [**1**], A.V. Chagrov proved the fact that the axiomatization problem for consistent tabular normal modal logics is algorithmically unsolvable. At the same time, a finite axiomatizability was proved for a number of normal modal and the tabular superintuitionistic logics [**2**]. For the case of Gödel-Löb logic ($\mathcal{GL}$), it is possible to construct fairly simple axiomatizations, at least for the logics given by not very large frames.

Formally, the Gödel-Löb logic is given by a set of axioms [**3**], which includes 10 axioms of classical logic (A1-A10), the axiom of logic $\mathcal{K}$, associated with the modal connective $\Box$:

(A11) $\Box(x \to y) \to (\Box x \to \Box y)$

and also the axiom that extends the logic $\mathcal{K}4$ to $\mathcal{GL}$:

(A12) $\Box(\Box x \to x) \to \Box x$.

The listed axioms are considered relatively to 3 inference rules: modus ponens, Gödel's rule and the rule of substitution.

In this work we investigate the extensions of the modal Gödel-Löb logic, given by the closed frame classes of depth 3 and width 3, and proposed their characterizations by modal formulas. The report will announce the results that already received, and also some further research.

The participant was supported by a travel grant provided due to Prof. H.P. Sankappanavar.

References

[1] Chagrov A.V. Algoritmicheskaya problema aksiomatizacii tablichnoy normal'noy modal'noy logiki Logical Investigations. 2002. N. 9. p.251–263 (in Russian).

[2] Chagrov A., Zacharyaschev M. Modal Logic, Oxford University Press. 1997. 624 p.

[3] Rybakov V.V. Admissible logical inference rules, Elsevier Sci. Publ. 1997. 616 p.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: mark.i.a@mail.ru

On algebraic semantics for Fisher Servi's version of BK

S. P. Odintsov

Fisher Servi [**1**] defined an intuitionistic modal logic FS with the help of standard translation $ST_x(\cdot)$ from modal to first order language: a formula φ belongs to FS iff $ST_x(\varphi)$ is a tautology of the first order intuitionistic logic. In a similar way, Odintsov and Wansing [**2**] defined a Fisher Servi's version $\mathsf{BK}^{\mathsf{FS}}$ of Belnapian modal logic as a set of all formulas φ such that the standard translation $ST_x(\varphi)$ is a tautology of the first order Belnap-Dunn logic. The logic $\mathsf{BK}^{\mathsf{FS}}$ was axiomatized in [**2**] and characterized semantically via relational models with two accessibility relations and two valuation functions.

The algebraic semantics for $\mathsf{BK}^{\mathsf{FS}}$ can be defined in terms of twist structures. Let $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, \neg, \Box, \blacksquare \rangle$ be a bimodal algebra. The full fs-twist structure over $\mathcal{A}$ is an algebra

$$\mathcal{A}_{\mathsf{fs}}^{\bowtie} = \langle A \times A, \vee, \wedge, \rightarrow, \bot, \sim, \Box, \Diamond \rangle, \text{ where}$$

$$(a,b) \wedge (c,d) = (a \wedge c, b \vee d), \quad (a,b) \vee (c,d) = (a \vee c, b \wedge d),$$

$$(a,b) \rightarrow (c,d) = (\neg a \vee c, a \wedge d), \quad \bot = (0,1), \quad {\sim}(a,b) = (b,a),$$

$$\Box(a,b) = (\Box a, \neg\Box\neg b), \quad \Diamond(a,b) = (\neg\Box\neg a, \blacksquare b),$$

where 0 and 1 are the least and the greatest elements of the Boolean algebra $\langle A, \vee, \wedge, \neg \rangle$.

An *fs-twist structure over* a bimodal algebra $\mathcal{A}$ is a subalgebra $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}_{\mathsf{fs}}^{\bowtie}$ such that its projection $\pi_1\mathcal{B}$ onto the first coordinate is A.

For a set of formulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, the relation $\Gamma \models_{\mathsf{fs}}^{\bowtie} \varphi$ holds if for every fs-twist structure $\mathcal{B}$ and a $\mathcal{B}$-valuation v, we have $\pi_1 v(\varphi) = 1$ whenever $\pi_1 v(\psi) = 1$ for all $\psi \in \Gamma$.

One can prove that $\mathsf{BK}^{\mathsf{FS}}$ is strongly complete w.r.t the semantical consequence $\models_{\mathsf{fs}}^{\bowtie}$. Moreover, the class $\mathcal{V}_{\mathsf{FS}}$ of algebras isomorphic to fs-twist structures over bimodal algebras forms a variety, and this variety $\mathcal{V}_{\mathsf{FS}}$ provides an *equivalent algebraic semantics* for the consequence relation $\vdash_{\mathsf{FS}}^{*}$ with the *defining equation* $p \rightarrow \bot = \bot$ and the *equivalence formula* $(p \leftrightarrow q) \wedge ({\sim}p \leftrightarrow {\sim}q)$.

The investigation presented in the talk was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-501-12019-DFG-a)

References

[1] Fischer Servi G., Axiomatizations for some intuitionistic modal logics, Sem. Mat. Universi. Politec. Torino, 1984, 42, 179–194.

[2] Odintsov S. P. and Wansing H., Disentangling FDE-Based Paraconsistent Modal Logics, Studia Logica, 2017, 105, 1221–1254.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: odintsov@math.nsc.ru

Logical Connectives for some FDE-based modal logics

D. Skurt

In this presentation, we will study the notion of functional-completeness or, better, the class of definable connectives, for some FDE-based modal logics. This is along the lines of previous work by McCullough [**1**] and Wansing [**4**], where results about the class of definable connectives were given with respect to intuitionistic logic and various constructive modal logics with strong negation.

For many-valued logics the notion of functional-completeness is well understood. Given a many-valued logic and a finite set of n-ary truth-function, if every possible n-ary truth-function of the logic in question can be obtained by finite compositions of the given set of truth-functions, this set is called functional complete. However, for relational semantics as for FDE-based modal logics, the truth and falsity conditions are given in terms of metalogical verification and falsification clauses, not in terms of truth-functions. Our strategy for obtaining results about the definable connectives is therefore somewhat different from that for many-valued logic. We will first restrict the class of expressible metalogical verification and falsification conditions, and then show that within this restricted class all metalogically expressible truth- and falsity conditions can be expressed by object language formulas of the respective logics.

The talk is organized as follows. First, we will recall the semantical definitions of the systems **KFDE**, **KN4**, $\mathbf{BK}^{\Box-}$, $\mathbf{BK}^{\Box}$, **BK**, and $\mathbf{BK}^{\Box+\Box-}$, $\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}_{bl}$, **MBL**, cf. [**2**]. Then we will proof the following theorem:

Theorem. *In the class of* L*-regular connectives, where* $\mathsf{L} \in \{\mathbf{KFDE}, \mathbf{KN4}, \mathbf{BK}^{\Box-}, \mathbf{BK}^{\Box}, \mathbf{BK}, \mathbf{BK}^{\Box+\Box-}, \mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}_{bl}, \mathbf{MBL}\}$ *the respective sets of connectives are functional complete. I.e., if an* n*-ary* ($n \geq 1$) *connective* $\bigstar$ *is defined by means of an* L*-regular metalogical formula* $\overline{\varphi}$ *, then there is an* L*-formula* A *such that the following holds:* $\overline{\varphi} \leftrightarrow\!\!\!\!\!\leftrightarrow w \Vdash^{+} A$ *(and* $\overline{\neg\varphi} \leftrightarrow\!\!\!\!\!\leftrightarrow w \Vdash^{-} A$*).*

Finally, we will give some remarks about the difference between our result about functional completes and other well-known results for the non-modal language fragment of extensions of FDE, see for example [**3**].

References

[1] McCullough D. P., Logical Connectives for Intuitionistic Propositional Logic, Journal of Symbolic Logic, 1971, 36(1), 15–20.

[2] Odintsov, S. P., and Wansing H., Disentangling FDE-based Paraconsistent Modal Logics, Studia Logica, 2017, 105(6), 1221–1254.

[3] Omori H., Generalizing Functional Completeness in Belnap-Dunn Logic, Studia Logica, 2015, 103(5), 883–917.

[4] Wansing H., Logical Connectives for Constructive Modal Logic, Synthese, 2006, 150(3), 459–482.

Ruhr-University Bochum, Bochum (Germany)
E-mail: daniel.skurt@rub.de

Truth constants vs truth values in Belnap–Dunn modal logics

S. O. Speranski

This is joint work with Sergei P. Odintsov.

We shall be concerned with the modal logic BK — which is based on the Belnap–Dunn four-valued matrix, and can be viewed as being obtained from the least modal logic K by adding 'strong negation'; see [**3**]. Although all four values 'truth', 'falsity', 'neither' and 'both' are employed in its Kripke semantics, only the first two of these are expressible as terms. We show that expanding the original language of BK to include constants for 'neither' or/and 'both' leads to quite unexpected results: adding one of these constants has the effect of excluding the respective value at the level of BK-extensions. In particular, if we add both of them, then the corresponding lattice of extensions turns out to be isomorphic to that of K-extensions. An essential role in obtaining these results is played by the technique developed earlier in [**2**]. Please see [**1**] for more details and further references.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 18-501-12019).

References

[1] Odintsov S. P., and Speranski S. O., Belnap–Dunn modal logics: truth constants vs. truth values, Review of Symbolic Logic, 2018, Conditionally accepted (minor revision). 20 p.

[2] Odintsov S. P., and Speranski S. O., The lattice of Belnapian modal logics: special extensions and counterparts, Logic and Logical Philosophy, 2016, 25(1), 3–33.

[3] Odintsov S. P., and Wansing H., Modal logics with Belnapian truth values, Journal of Applied Non-Classical Logics, 2010, 20 (3), 279–301.

St. Petersburg State University, Saint Petersburg
E-mail: katze.tail@gmail.com

On Contra-classical variants of Nelson logic N4 and its classical extension

H. Wansing, H. Omori

In two recent papers [**1, 2**], Norihiro Kamide introduces unusual variants of Nelson's paraconsistent logic and its classical extension. Kamide's systems, **IP** and **CP**, are unusual insofar as double negations in these logics behave as intuitionistic and classical negations respectively. In this paper we present Hilbert-style axiomatizations of both **IP** and **CP**. The axiom system for **IP** is shown to be sound and complete with respect to a four-valued Kripke semantics, and the axiom system for **CP** is characterized by four-valued truth tables. Moreover, we note some properties of **IP** and **CP**, and emphasize that these logics are unusual also because they are contra-classical and inconsistent but non-trivial. We point out that Kamide's approach exemplifies a general method for obtaining contra-classical logics, and we briefly speculate about a linguistic application of Kamide's logics.

References

[1] Kamide N., Paraconsistent double negation that can simulate classical negation, In: Proceedings of the 46th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2016), 2016, 131–136.

[2] Kamide N., Paraconsistent double negations as classical and intuitionistic negations, Studia Logica, 2017, 105(6), 1167–1191.

Department of Philosophy I, Ruhr-University Bochum, Germany; School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Japan.

E-mail: Heinrich.Wansing@rub.de; hitoshiomori@gmail.com

VIII. Авторский указатель