Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

16–20 ноября 2020 г.

Тезисы докладов

Конференция проведена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(код проекта 20-01-20016)

Международный математический центр
в Академгородке

Новосибирский государственный университет

Новосибирск • 2020

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

November 16–20, 2020

Collection of Abstracts

Supported by
Russian Foundation for Basic Research
(grant 20-01-20016)

International Mathematical Center
in Akademgorodok

Novosibirsk State University

Novosibirsk • 2020

Содержание

I. Пленарные доклады

Полиномиально полные квазигруппы и их приложения

В. А. Артамонов

Конечная универсальная алгебра полиномиально (функционально) полна, если в ней любая операция является полиномиальной. Это свойство эквивалентно тому, что алгебра проста, неаффинна, и в ней имеется тернарная мальцевская полиномиальная операция. Известно также, что в конечных неодноэлементных алгебрах задача решения конечных систем полиномиальных уравнений NP-полна.

Поскольку в конечной квазигруппе имеется тернарная мальцевская операция, то для полиномиальной полноты достаточно ее простоты и неаффинности.

Пусть Q — конечная квазигруппа и L_x, R_x — операторы левого и правого умножения на элемент $x \in Q$. Через $G(Q)$ обозначим подгруппу перестановок на Q, порождаемую перестановками $L_xL_y^{-1}$, $R_xR_y^{-1}$ для всех $x, y, \in Q$.

Теорема 1. *Если группа $G(Q)$ действует в Q дважды транзитивно, то Q и все ее изотопы полиномиально полны.*

Вводится операция бипроизведения $K \bowtie Q$ двух квазигрупп K, Q, когда каждая из них действует перестановками в другой.

Теорема 2. *Если группа $G(K)$ и $G(Q)$ действуют t-транзитивно в K и в Q, то для достаточно широкого класса бипроизведений группа $G(K \bowtie Q))$ действует t-транзитивно в $K \bowtie Q$.*

На основании этой теоремы строятся серии полиномиально полных квазигрупп порядков 2^n, $n \geqslant 6$, не имеющих собственных подквазигрупп.

Таким образом, построенные квазигруппы могут использоваться для построение криптосистем аналогичных EDON80.

МГУ, Москва
E-mail: artamon@mech.math.msu.su

Степени категоричности вычислимых и пунктуальных структур

И. Ш. Калимуллин

Доклад посвящен исследованиям автора по степеням категоричности вычислимых структур, проведенных совместно с Н. А. Баженовым и М. М. Ямалеевым. Кроме того, планируется изложить результаты по степеням категоричности в примитивно рекурсивных степенях для пунктуальных структур.

Казанский федеральный университет, Казань
E-mail: ikalimul@gmail.com

Усиленная версия гипотезы Симса для конечных примитивных групп подстановок

А. С. Кондратьев

Хорошо известная гипотеза Симса для конечных примитивных групп подстановок может быть сформулирована в терминах графов следующим образом. Пусть Γ — неориентированный связный граф с множеством вершин $V(\Gamma)$, $G \leq Aut(\Gamma)$, $x \in V(\Gamma)$ и $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим через $G_x^{[i]}$ поэлементный стабилизатор в G шара радиуса i графа Γ с центром в x в естественной метрике на $V(\Gamma)$. Тогда гипотеза Симса равносильна следующему утверждению: *существует функция* $\psi : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ *такая, что если* Γ *— неориентированный связный конечный граф и* G *— его группа автоморфизмов, действующая примитивно на* $V(\Gamma)$, *то* $G_x^{[\psi(d)]} = 1$ *для* $x \in V(\Gamma)$, *где* d *— валентность графа* Γ. Справедливость гипотезы Симса была доказана П. Камероном, Ч. Прэгер, Я. Сакслом и Г. Зейцем в [2].

Докладчик и В.И. Трофимов в [1] получили следующую усиленную версию гипотезы Симса: *если* Γ *— неориентированный связный конечный граф и* G *— его группа автоморфизмов, действующая примитивно на* $V(\Gamma)$, *то* $G_x^{[6]} = 1$ *для* $x \in V(\Gamma)$. Заметим, что существуют граф Γ и его группа автоморфизмов, действующая примитивно на $V(\Gamma)$, такие, что $G_x^{[5]} \neq 1$ для $x \in V(\Gamma)$.

Теперь мы исследуем более общую *проблему описания всех пар* (Γ, G), *где* Γ *— неориентированный связный конечный граф,* G *— некоторая его группа автоморфизмов, действующая примитивно на* $V(\Gamma)$, *и* $G_x^{[2]} \neq 1$ *для* $x \in V(\Gamma)$.

В докладе обсуждаются результаты, полученные автором совместно с В.В. Кораблевой и В.И. Трофимовым по этой проблеме.

References

[1] Кондратьев А. С., Трофимов В. И., Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, 6. С. 741–743.

[2] Cameron P. J., Praeger C. E., Saxl J., Seitz G. M., On the Sims conjecture and distance transitive graphs // Bull. London Math. Soc. 1983. Vol. 15, no. 5. P. 499–506.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа

В. Д. Мазуров

Пусть M — некоторое множество групп. По определению, группа G насыщена группами из M, если любая конечная подгруппа группы G содержится в подгруппе G, изоморфной некоторому элементу множества M. В докладе планируется дать обзор последних результатов о строении периодических групп, насыщенных тем или иным множеством конечных простых групп лиева типа.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: mazurov@math.nsc.ru

Две теоремы о разрешимых и нильпотентных группах

В. А. Романьков

Представлено решение проблемы Микаеляна — Ольшанского о возможности вложения произвольной конечно порожденной разрешимой группы G ступени l в разрешимую группу H с фиксированным числом порождающих k ступени $l+1$. Доказано, что такое вложение существует для $k = 4$.

Также доказано, что проблема вхождения в подмоноид неабелевой свободной нильпотентной группы достаточно большого ранга алгоритмически неразрешима. Тем самым решена известная проблема, неоднократно явно формулируемая Лори и Стейнбергом.

ИМ СО РАН (Омский филиал), Омск
E-mail: romankov48@mail.ru

Теоретико-модельные свойства некоторых классов полигонов

А. А. Степанова

Предлагается обзор результатов, касающихся теоретико-модельных свойств таких классов полигонов, как свободные, проективные, (сильно, слабо) плоские, инъективные, регулярные, делимые полигоны, а также класса всех полигонов. Рассматриваются вопросы аксиоматизируемости, полноты, модельной полноты, примитивной нормальности, примитивной связности, стабильности и обобщенной стабильности этих классов.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stepltd@mail.ru

Координатизационные теоремы для некоторых неассоциативных алгебр

И. П. Шестаков

Координатизационные теоремы очень полезны для задач классификации.

Классическая координатизационная теорема Веддерберна утверждает, что если унитальная ассоциативная алгебра A содержит матричную подалгебру $M_n(F)$ с той же единицей, то $A = M_n(B)$ для некоторой подалгебры B. Координатизационные теоремы Джекобсона в структурных теориях альтернативных и йордановых алгебр дают аналогичные результаты для октонионов и алгебр Алберта. Различные координатизационные теоремы были доказаны для некоммутативных йордановых алгебр, для коммутативных алгебр с ассоциативными степенями, для альтернативных и йордановых супералгебр и т. д.

В нашем докладе мы рассмотрим три координатизационные теоремы:

(1) для матриц 2×2 в классе альтернативных алгебр (проблема Джекобсона);

(2) для йордановой алгебры симметрических матриц 2×2 в классе йордановых алгебр;

(3) для октонионов в классе правоальтернативных алгебр.

Университет Сан Пауло, Сан Пауло (Бразилия)
E-mail: ivan.shestakov@gmail.com

Relatively computable enumerable degrees and diagonally non-computable functions

M. M. Arslanov

In my talk I will speak about the behavior of CEA (computably enumerable in and above) degrees in various degree structures, as well as their influence on the behavior of degrees of diagonally non-computable functions.

Kazan' Federal University, Kazan'
E-mail: Marat.Arslanov@kpfu.ru

Linearly ordered small theories with continuum number of countable models

B. Baizhanov

The study of the countable spectrum of ordered theories is complicated by the existence of theories with a "fictitious" linear order: there is always a linearly ordered theory with the same number of countable models as the given (unordered) theory. Therefore, in contrast to the example of M. Rubin's work [1] on Vaught's conjecture for pure linear orders enriched with predicates, we will consider an arbitrary language, but we will introduce restrictions on the theory itself. The properties and spectrum of theories with definable linear order were studied by mathematicians as L. Mayer, M. Rubin, S.V. Sudoplatov, A. Alibek–B.S. Baizhanov–T. Zambarnaya, B.Sh. Kulpeshov and S. Maconja, P. Tanović ([2–12]).

In our talk we consider the conditions on small ordered theories assuring maximal numbers of countable non-isomorphic models. This research is based on the studying the properties linear orders defined on the classes of convex equivalence of one-formulas, classifications of one-types in (small) ordered theories. As application of obtained conditions we consider ordered theories with few number (non-maximal) of countable models of some classes ordered small theories.

References

[1] Rubin M. Theories of linear order // Israel Journal of Mathematics. Vol. 17. 1974. P. 392-443.

[2] Mayer L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // Journal of Symbolic Logic. 1988. Vol. 53, N 1. P. 146-159.

[3] Sudoplatov S.V., Kulpeshov B.Sh. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. 2017. Vol. 168, N 1. P. 129-149.

[4] Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // Annals of Pure and Applied Logic. 2018. V. 169, Issue 11. P. 1190-1209.

[5] Кулпешов Б.Ш. Гипотеза Воота для слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 24, No. 2. С. 126-151.

[6] Tanović P. Theories with constants and three countable models // Archive for Mathematical Logic. 2007. Vol. 46, No. 5-6. P. 517-527.

[7] Sudoplatov S.V. On the number of countable models of complete theories with finite Rudin-Keisler preorders // Siberian Mathematical Journal. 2007. Vol. 48, Issue 2. P. 417-422.

[8] Alibek A., Baizhanov B.S. Examples of countable models of a weakly o-minimal theory // International Journal of Mathematics and Physics. 2012. V. 3, No. 2. P. 1-8.

[9] Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian electronic mathematical reports. 2012. Volume 9. P. 161-184.

[10] Alibek A., Baizhanov B.S., Zambarnaya T.S. Discrete order on a definable set and the number of models // Математический журнал. 2014. Т. 14, N 3 (53). С. 5-13.

[11] Baizhanov B., Baldwin J.T., Zambarnaya T. Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. T. 15. C. 719-727.

[12] Moconja S., Tanović P., Stationarily ordered types and the number of countable models // Annals of Pure and Applied Logic. -2002. - Vol. 171, Issue 3.

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: baizhanov@math.kz

Equivalence relations and computable reducibility

N. A. Bazhenov

Let R and S be binary relations on the set of natural numbers ω. The relation R is *computably reducible* to S if there is a total computable function $f(x)$ such that for all $x, y \in \omega$, the conditions $(x\, R\, y)$ and $(f(x)\, S\, f(y))$ are equivalent. Computable reducibility on equivalence relations is a nice effective counterpart of Borel reducibility, which plays an important role in modern descriptive set theory. The systematic study of c-degrees, i.e. degrees induced by computable reducibility, was initiated by Yu. L. Ershov in 1970s. Remarkably, first works on computable reducibility pre-date the notion of Borel reducibility.

In the talk, we will discuss recent results on c-degrees of preorders and equivalence relations, which belong to the levels of various computability-theoretic hierarchies: hyperarithmetical, analytical, the Ershov hierarchy. We will also talk about related results in computable structure theory.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru

Learning structures

E. B. Fokina

Let $\mathcal{K}$ be a class of effectively given structures. Suppose we receive information about a structure from $\mathcal{K}$ step by step: finitely much at each step. Our goal is to determine, after finitely many steps, which structure we are observing. We formalise this setting using the ideas of algorithmic learning applied to computable structure theory. We consider the cases of computable and Σ_1^0 structures, together with the suitable notions of learning from informant and text, respectively.

Vienna University of Technology, Vienna (Austria)
E-mail: ekaterina.fokina@tuwien.ac.at

Deza graphs: Generalization of strongly regular graphs

V. V. Kabanov

A Deza graph is a simple regular graph for which the number of common neighbours of two different vertices takes just two values. Deza graphs was introduced by Erickson et al in [**2**], where the basics of Deza graph theory were founded and several new constructions were presented.

Deza graphs can be considered in terms of matrices. Suppose G is a graph with n vertices, and M is its adjacency matrix. Then G is a Deza graph with parameters (n, k, b, a) if and only if

$$M^2 = kI + aA + bB$$

for some symmetric $(0, 1)$-matrices A and B such that $A + B + I = J$, where J is the all ones matrix and I is the identity matrix.

If G is a Deza graph with M, A and B as above, then A and B are adjacency matrices of graphs, and the corresponding graphs G_A and G_B are called the *children* of G.

Deza graphs whose children are complete multipartite graphs and their complement are known as *divisible design graphs*. Divisible design graphs were studied by W. H. Haemers, H. Kharaghani and M. Meulenberg in [**3**].

We call a Deza graph with strongly regular children as a *strongly Deza graph*. Obviously, divisible design graphs are strongly Deza graphs.

We study spectral properties of strongly Deza graphs and give some new constructions of divisible design graphs and strongly Deza graphs.

This report is based on recent results obtained with Leonid Shalaginov [**5**] and Elena Konstantinova, Leonid Shalaginov [**4**] under the support of the Mathematical Center in Akademgorodok agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

References

[1] Akbari S., Ghodrati A. H., Hosseinzadeh M. A., Kabanov V. V., Konstantinova E. V., Shalaginov L. V., Spectra of Deza graphs, Linear Multilinear Algebra, DOI: 10.1080/03081087.2020.1723472.

[2] Erickson M., Fernando S., Haemers W. H., Hardy D., Hemmeter J., Deza graphs: A generalization of strongly regular graphs, J. Comb. Des., 7 (1999) 359–405.

[3] Haemers W. H., Kharaghani H., Meulenberg M., Divisible design graphs, J. Comb. Theory, Ser. A, 118 (2011) 978–992.

[4] Kabanov V. V., Konstantinova E. V., Shalaginov L., Generalised dual Seidel switching and Deza graphs with strongly regular children, accepted in *Discrete Mathematics*.

[5] Kabanov V. V., Shalaginov L. V., On divisible design Cayley graphs, The Art of Discrete and Applied Mathematics. Published online: February 2020 in the Special issue dedicated to conference “Groups and Graphs, Designs and Dynamics”, Yichang, China, 2019.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg
E-mail: vvk@imm.uran.ru

Degrees of categoricity of computable and punctual structures

I. Sh. Kalimullin

The talk is devoted to the study of degrees of categoricity of computable structures conducted jointly with N. A. Bazhenov and M. M. Yamaleev. Also results on primitive recursive degrees of punctual structures will be presented.

Kazan' Federal University, Kazan'
E-mail: ikalimul@gmail.com

Algebraic and combinatorial approaches to investigating integral graphs

E. V. Konstantinova

In this talk we review recent progress in investigating integral graphs with emphasizing to new algebraic and combinatorial methods and techniques.

A graph is integral if all eigenvalues of its adjacency matrix are integers. Classification of integral graphs was started in 1974 by F. Harary but it is still uncompleted.

We develop dual Seidel switching techniques for getting new integral connected graphs [**1**]. The dual Seidel switching is an operation of a graph Γ interchanging only non-adjacent vertices by an order two automorphism of Γ. In particular, if Γ is integral then a graph obtained from Γ by the dual Seidel switching is integral as well. We obtained two new infinite families of integral graphs applying the dual Seidel switching to the Star graphs and to the Odd graphs. Moreover, we show that this method has a natural generalization for constructing strongly Deza graphs [**5**].

We also develop spectral and combinatorial approaches to obtain eigenfunctions with non-zero eigenvalues for the Star graphs being integral Cayley graphs over the symmetric group [**2, 3**]. A remarkable connection of new eigenfunctions known as PI-eigenfunctions with the standard basis of a Specht module of the symmetric group was established. Moreover, it was shown that any PI-eigenfunction with the eigenvalue $(n-2)$ is reconstructed by its values on the second neighbourhood of a vertex, and a basis of the eigenspace was found. The last result was used in [**4**] to show that the $(n-2)$-PI-eigenfunction has the minimum cardinality of the support.

This talk is based on recent results funded by RFBR according to the research project 17-51-560008. The work is supported by Mathematical Center in Akademgorodok under agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

References

[1] Goryainov S., Konstantinova E. V., Li H., Zhao D., Integral graphs obtained by dual Seidel switching, Linear Algebra and its Applications, 604 (2020) 476–489, https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.07.010

[2] Goryainov S., Kabanov V., Konstantinova E., Shalaginov L., Valyuzhenich A., *PI*-eigenfunctions of the Star graphs, Linear Algebra and its Applications, 586 (2020) 7–27, https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.10.018

[3] Kabanov V. V., Konstantinova E. V., Shalaginov L., Valyuzhenich A., The Star graph eigenfunctions with non-zero eigenvalues, Linear Algebra and its Applications, https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.09.042

[4] Kabanov V., Konstantinova E., Shalaginov L., Valyuzhenich A., Minimum supports of eigenfunctions with the second largest eigenvalue of the Star graph, Electronic Journal of Combinatorics, 27(2) (2020) #P2.14. https://doi.org/10.37236/9147

[5] Kabanov V. V., Konstantinova E. V., Shalaginov L., Generalised dual Seidel switching and Deza graphs with strongly regular children, Discrete Mathematics, accepted.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: e_konsta@math.nsc.ru

Computable model theory over $\mathrm{HF}(\mathbb{R})$

A. S. Morozov

The talk is a survey of results on structures Σ-presentable over $\mathrm{HF}(\mathbb{R})$ — the hereditarily finite superstructure over the ordered field of the real numbers. The main problems we consider in the talk are: the existence of Σ-presentations, the number of Σ-presentations, and Σ-parameterizations of classes of structures.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: morozov@math.nsc.ru

Metric spaces and computability theory

A. Nies

A function $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is K-trivial if, up to an additive constant, each initial segment $f \upharpoonright n$ has the minimal complexity $K(n)$ in the sense of prefix-free Kolmogorov complexity K. Functions on $\mathbb{N}$ form points in Baire space with the ultrametric distance function. With Melnikov (Proc. AMS, 2013) we extended the concept of K-triviality to the setting of arbitrary computable metric spaces. Under some natural assumption on the metric space we proved that a K-trivial noncomputable point exists. We proved that a point is K-trivial if and only if is the limit of a fast converging sequence of basic points that is encoded by a K-trivial function. Very recently, the speaker together with Greenberg and Turetsky extended the theory of cost functions to the setting of computable metric spaces. This yields a dynamical characterization of K-trivial points via the speed of computable approximations.

We will also discuss work with A. Gavruskin (Lobachevskii Math. J., 2014) showing that among the metric spaces of diameter at most 1 with a distance function that is merely computably approximable from below, some object is universal for computable isometric embeddings. This is analogous to a result of the speaker with Ianovski et al. (J. Symb. Logic, 2014) that some Π^0_1 equivalence relation on $\mathbb{N}$ is universal with respect to computable many-one reductions.

The University of Auckland (New Zealand)
E-mail: andre@cs.auckland.ac.nz

Symmetrons

B. Poizat

The aim of this contribution is to investigate the symmetric structure associated to a group of finite Morley Rank without involutions.

A protosymmetron is a structure S with a binary operation $s(x, y)$, in which, when we fix $y = a$, the unary operation $s(x, a)$ is called the symmetry with center a; it satisfies the equations stating that each symmetry is an involutive automorphism of the structure fixing its center. If moreover for all $x, x' \in S$ there is a unique y, called the middle of x and x', such that $s(x, y) = x'$, then S is called a symmetron; the symmetrons form a variety in the language of symmetry and middle.

Any group G with the operation $s(x, y) = y.x - 1.y$ is a protosymmetron, which is a symmetron when each point in G has a unique square root; this is the case of groups without involutions which are finite, algebraic, or more generally of finite Morley Rank.

Needless to say, two non-isomorphic groups may have isomorphic symmetrons.

The finite (and even locally finite) symmetrons are fully described by Glauberman's Theorem.

We extend to symmetrons of finite Morley Rank some properties that are well known for groups:

— for each definable subset X of S, to be closed under symmetry is the same thing as to be closed under middle;

— S is decomposed in a unique way as a finite disjoint union of definable subsymmetrons of Morley Degree one, which we call its connected components;

— two definable connected subsymmetrons of S with non-empty intersection generate (using symmetry and middle) in a bounded way a definable connected subsymmetron of S;

— the equivalence relation "there is a definable connected subsymmetron boundedly generated by X containing x and y" partitions the definable set X into a finite number of classes.

Université Claude Bernard, Lyon-1, Lyon (France)
E-mail: poizat@math.univ-lyon1.fr

Two theorems on solvable and nilpotent groups

V. A. Roman'kov

The classical Neumann-Neumann's embedding theorem [**1**] states that every countable solvable group G of solvable length l can be embedded in a 2-generated solvable group H of length $l+2$. On the other hand, not every countable abelian group can be embedded in a 2-generated metabelian group. Indeed, the group of rationals $\mathbb{Q}$ cannot be embedded even in a finitely generated metabelian group because by Hall's theorem every metabelian group is residually finite, but $\mathbb{Q}$ is not. Thus, the parameter $l+2$ in the general case cannot be improved. The question of the possibility of embedding a finitely generated solvable group of length l in a 2- or at least k-generated (for a fixed small k) solvable group of length $l+1$ remained open. This question was explicitly posed by V.H. Mikaelian and A.Y. Olshanskii in [**2**] and by A.Y. Olshanskii in [**3**], Question 18.73. The following theorem answers this question.

Theorem 1. *Let G be a countable group such that the abelianization $G_{ab} = G/G'$ is direct product of a free abelian group and a finite group. Then G can be embedded in a 4-generated subgroup H of the Cartesian wreath product $GWr\mathbb{Z}^3$. Thus, any finitely generated solvable group G of length l can be embedded in a 4-generated solvable group H of length $l+1$. If G is finite (periodic), then H can be found also finite (periodic).*

Remind, that any finitely generated nilpotent group is embeddable in a 2-generated nilpotent group [**5**], and any polycyclic group is embeddable in a 2-generated polycyclic group [**6**].

The following theorem answers the well-known question explicitly posed by M. Lohrey and B. Steinberg (see [**4**]).

Theorem 2. *The submonoid membership problem is unsolvable for a free nilpotent group N_{rl} of class $l \geq 2$ and sufficiently large rank r.*

Acknowledgment. This research was supported by the program of basic scientific researches SB RAS I. 1.114, project 0314-2019-0004.

References

[1] Neumann B.H., Neumann H., Embedding theorems for groups. J. London Math. Soc. s1-34, No.4 (1959), 465–479.

[2] Mikaelian V. H., Olshanskii A. Yu., On abelian subgroups of finitely generated metabelian groups. J. Group Theory. 16, No.5 (2013), 695–705.

[3] The Kourovka Notebook. Unsolved problems in group theory. (Editors E. I. Khukhro and V. D. Mazurov). 19, (Russian Academy of Sciences. Siberian Branch. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia, 2018).

[4] Lohrey M., The rational subset membership problem for groups: a survey, In: Groups St Andrews 2013, Edited by C. M. Campbell, M. R. Quick, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal, Publisher: Cambridge University Press, 2015, 368–389.

[5] Roman'kov V.A., Embedding theorems for nilpotent groups, Siberian Mathematical Journal, 13, No. 4 (1972), 597–603.

[6] Roman'kov V.A., An embedding theorem for polycyclic groups, Mathematical Notes, 14, No.5 (1973), 983–984.

Sobolev Institute of Mathematics (Omsk Branch), Omsk
E-mail: romankov48@mail.ru

Multiplicative-Additive Lambek Calculus: Its complexity and its language and relational models

A. Scedrov

The Lambek calculus was introduced as a mathematical description of the syntax of natural languages. The Lambek calculus is a logical foundation of categorial grammar, a linguistic paradigm of grammar as logic and parsing as deduction. The calculus can also be viewed as a multiplicative fragment of non-commutative intuitionistic linear logic. In joint work with M. I. Kanovich and S. L. Kuznetsov, we consider the extension with the so-called additive connectives: conjunction and disjunction.

Language and relational models, or L-models and R-models, are two natural classes of models for the original Lambek calculus. Completeness w.r.t. L-models was proved by Pentus and completeness w.r.t. R-models by Andréka and Mikulás. It is well known that, because of the distributive law, adding both additive conjunction and disjunction together yields incompleteness. The product-free Lambek calculus enriched with conjunction only, however, is complete w.r.t. L-models (Buszkowski) as well as R-models (Andréka and Mikulás). The situation with disjunction turns out to be the opposite: we prove that the product-free Lambek calculus enriched with disjunction only is incomplete w.r.t. L-models as well as R-models.

The original Lambek calculus is NP-complete (Pentus), while its product-free fragment with only one implication is polynomially decidable (Savateev). It is known that the multiplicative-additive extension is PSPACE-complete (Kanovich, Kanazawa). In contrast with the polynomial-time result for the product-free Lambek calculus with one implication, we prove that the derivability problem is still PSPACE-complete even for a very small fragment $(\backslash, \wedge)$, including one implication and conjunction only. We also prove PSPACE-completeness for the $(\backslash, \vee)$ fragment, which includes only one implication and disjunction.

University of Pennsylvania, Philadelphia (USA)
E-mail: scedrov@math.upenn.edu

Primitive recursive ordered fields and some applications

V. L. Selivanov

In this joint work with Svetlana Selivanova we establish primitive recursive versions of some known facts about computable ordered fields of reals and computable reals and then apply them to some problems in linear algebra and analysis. In particular, we find a partial primitive recursive analogue of Ershov-Madison's theorem about real closures of computable ordered fields, relate the corresponding fields to the primitive recursive reals, give sufficient conditions for primitive recursive root-finding, computing normal forms of matrices, and computing solution operators of some linear systems of PDE.

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk
E-mail: vseliv@ngs.ru

Coordinatization theorems for certain non-associative algebras

I. P. Shestakov

Coordinatization Theorems are very useful for classification problems. The classical Wedderburn Coordinatization Theorem claims that if a unital associative algebra A contains a matrix subalgebra $M_n(F)$ with the same unit then $A = M_n(B)$ for a certain subalgebra B. The Jacobson Coordinatization Theorems in structure theories of alternative and Jordan algebras state similar results for octonions and Albert algebras. Various coordinatization theorems were proved for noncommutative Jordan algebras, for commutative power associative algebras, for alternative and Jordan superalgebras, etc. In our talk, we consider three coordinatization theorems:

(1) for 2×2 matrices in the class of alternative algebras (Jacobson's problem);

(2) for Jordan algebra of symmetric 2×2 matrices in the class of Jordan algebras;

(3) for octonions in the class of right alternative algebras.

IME-USP, Saõ Paulo (Brazil)
E-mail: ivan.shestakov@gmail.com

Positive equivalence relations, positive preorders, and effective inseparability

A. Sorbi

We examine the notion of effective inseparability, and how it has been recently exploited in the study of computably enumerable (or, positive) equivalence relations on the set ω of natural numbers, and computably enumerable (or, positive) pre-ordering relations on ω. This recent work relies naturally on ideas and results laid down by Prof. Ershov in the sixties and the seventies, see e.g. [**4, 3**]. An equivalence relation R on ω is *uniformly effectively inseparable* (abbreviated as *u.e.i.*) if there is a computable function $f(x,y)$ such that if $x \not R y$ then $\varphi_{f(x,y)}$ is a productive function witnessing that the pair of equivalence classes $([x]_R, [y]_R)$ is effectively inseparable. It is known [**1**] that every u.e.i. positive equivalence relation R is universal, i.e. for every postive equivalence relation S there exists a computable function f such that $(\forall x, y)[x \; S \; y \Leftrightarrow f(x) \; R \; f(y)]$. The notion of uniform effective inseparability has been recently applied to positive lattices [**2**]. If a bounded positive lattice L, with equality relation $=_L$, is such that the pair of sets $\{x : x =_L 0\}$ and $\{x : x =_L 1\}$ is effectively inseparable, then equality $=_L$ is a u.e.i. positive equivalence relation, the associated pre-ordering relation $\leq_L$ is universal with respect to the class of all positive pre-orders, and moreover $\leq_L$ is uniformly dense, i.e. there exists a computable function f such that for every a, b if $a <_L b$ then $a <_L f(a,b) <_L b$, and if $a =_L a'$ and $b =_L b'$ then $f(a,b) \equiv_L f(a',b')$. These results have applications to the study of provable implication in classical and intuitionistic formal systems of arithmetic.

References

[1] Andrews U., Lempp S., Miller J. S., Ng K. M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, J. Symbolic Logic 79 (2014), no. 1, 60–88.

[2] Andrews U., Sorbi A., Effective inseparability, lattices, and pre-ordering relations, Review of Symbolic Logic (2019), 1–28, DOI 10.1017/S1755020319000273.

[3] Ershov Yu. L., Positive equivalences, Algebra and Logic 10 (1973), no. 6, 378–394.

[4] Ershov Yu. L., Theory of numberings, Nauka, Moscow, 1977, Russian.

Department of Information Engineering and Mathematics, University of Siena, 53100 Siena (Italy)
E-mail: andrea.sorbi@unisi.it

II. Секция «Алгебраическая комбинаторика»

Обратная задача в теории графов: сильно регулярные графы без треугольников

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i,j \in \{1,2,3,...,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)=i$.

Если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по лемме 3 из [1] граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar{\Gamma}_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(l,t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{l,tc_2,l-\alpha+1;1,c_2,\alpha\}$, где $l-\alpha+1\le tc_2<l$ и $1\le c_2<\alpha$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, для которого граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф Γ_3 является сильно регулярным графом с параметрами $(v,k,0,\mu)$, неглавными собственными значениями r, $-(\mu+r)$, причем $k=(r+1)\mu+r^2$, $r\ne 1$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$.*

Найдены допустивые массивы пересечений графов Γ в следующих случаях:

(1) число вершин Γ не больше 100 000;

(2) Γ имеет нецелое собственное значение;

(3) Γ является формально самодуальным графом.

Теорема 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с нецелым собственным значением и Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников. Тогда Γ имеет массив пересечений*
$\{111,90,7;1,18,105\}$ *(спектр* $111^1, (1+2\sqrt{55})^{145}, -1^{407}, (1-2\sqrt{55})^{145}$*),*
$\{230,196,21;1,28,210\}$ *(спектр* $230^1, (5+7\sqrt{65})/2^{253}, -1^{1495}, (5-7\sqrt{65})/2^{253}$*),*
$\{335,297,21;1,33,315\}$ *(спектр* $335^1, (2+3\sqrt{111})^{536}, -1^{2479}, (2-3\sqrt{111})^{536}$*) или*
$\{2959,2814,111;1,134,2849\}$ *(спектр* $2959^1, (5+2\sqrt{4431})^{5380}, -1^{56759}$, $(5-2\sqrt{4431})^{5380}$*).*

Интересно, что для графа Γ_3 с параметрами $(88452,726,0,6)$ имеются два допустимых массива пересечений: $\{3509,3456,30;1,144,3480\}$ и $\{3509,3024,30;1,126,3480\}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований – ГФЕН Китая (проект 20-51-53013).

Список литературы

[1] Makhnev A., Nirova M. On distance-regular Shilla graphs, Matem. Zametki, 2018, v 103, N 5, 730-748.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com

О дистанционно регулярных графах с массивами пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

И. Н. Белоусов, М. П. Голубятников, А. А. Махнев

Порядок клики в дистанционно регулярном графе степени k, имеющем наименьшее собственное значение $-m$ не больше $1+k/m$. Клика K с $1+k/m$ вершинами называется кликой Дельсарта. Дистанционно регулярный граф называется *геометрическим*, если он содержит такое семейство S клик Дельсарта, что каждое ребро графа содержится в единственной клике из S.

Пусть $V = F^d$, $W = F^e$, $d \leq e$ и B — линейное пространство размерности de над полем $F = F_q$ билинейных форм f из $V \times W$ в F. Нулевое пространство f в V — это $\{v \in V \mid f(v, W) = 0\}$. Рангом формы f называется произведение коразмерностей нулевых пространств в V и W. Формы f и g смежны в графе билинейных форм $H_q(d, e)$, если ранг $f - g$ равен 1.

Граф Γ с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ реализуется как граф билинейных форм $H_2(3, e)$, когда $n = 2^e$. Графы $H_q(d, e)$ охарактеризованы массивом пересечений (Метш [1]) в случаях $q = 2, e \geq d+4$ и $q \geq 3, e \geq d+3$. Гаврилюк и Кулен рассмотрели случай $q = 2, e = d$ [2]. Таким образом, графы $H_q(3, e)$ распознаются по массиву пересечений, за исключением случаев $e \in \{4, 5, 6\}$ (случаев $n \in \{16, 32, 64\}$). Можно выдвинуть следующее предположение.

Гипотеза. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *не существует, если* n *не является степенью* 2.

В [3] отмечается, что гипотеза справедлива, если $n \geq 134$. Следующие результаты показывают, что гипотеза справедлива, если $n \geq 71$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— геометрический граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 42$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 70$ *или* $n > 60$ *и порядок коклики в окрестностях вершин графа* Γ *не больше 7, то* Γ *является геометрическим.*

Следствие. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 70$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-71-10067).

Список литературы

[1] Metsch K. On a characterization of bilinear forms graphs, Europ. J. Comb., 1999, v. 20, 293–306.

[2] Gavrilyuk A., Koolen J. A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2, Combinatorica, 2019, v. 39, N 2, 289-321.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru, mike_ru1@mail.ru

О совершенных раскрасках циркулянтных графов с двумя дистанциями

С. О. Бородин

Ранее исследовались параметры всех совершенных 2-раскрасок квадратной решетки [1], работа обобщает и расширяет известные ранее результаты. Раскраска вершин графа G называется совершенной, если все одинаково раскрашенные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения. Числа $s_{i,j}$ вершин цвета j в окружении вершины цвета i называются параметрами совершенной раскраски.

Теорема. *Пусть $C_\infty(d_1,d_2)$ бесконечный циркулянтный граф с двумя дистанциями $d_1,d_2 \in \mathbb{N}$, (d_1,d_2)=1, для каждой матрицы параметров совершенной раскраски (таблица 1) найдены наборы значений дистанций в графе при которых матрица является допустимой - т.е. существует совершенная раскраска, задающая матрицу при таком наборе дистанций (таблица 2).*

Таблица 1: Параметры, задающие совершенную раскраску

$b\backslash c$	1	2	3	4
1	A			
1	B	C		
2	D	E	F	
3	G	H	I	J

Таблица 2: Параметры дистанций

A	$4 \mid d_1$ и $2 \nmid d_2$
B	$3 \mid d_1$ и $3 \nmid d_2$
C	существует для любых дистанций $d_1 d_2$
D	$d_1 \equiv \pm 1 \mod 8$ и $d_2 \equiv \pm 3 \mod 8$
E	$5 \nmid d_i$ и $\pm d_1 \not\equiv \pm d_2 \mod 5$
F	$d_1 \equiv \pm 2 \mod 4$ и $d_2 \equiv \pm 1 \mod 4$
G	$d_1 \equiv \pm 1 \mod 5$ и $d_2 \equiv \pm 2 \mod 5$
H	$3 \nmid d_1, d_2$
I	не существует
J	$2 \nmid d_1, d_2$

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1675.

Список литературы

[1] Axenovich M. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Maths. 2003. V. 268, N 1–3. P. 31–49.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: s.borodin@g.nsu.ru

Совершенные 2-раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями $\mathbf{1, 2}, \boldsymbol{d}$

Т. А. Гринева, Е. Н. Ряполова

В работе описаны все допустимые параметры совершенных раскрасок [**1**] в два цвета бесконечного циркулянтного [**2**] графа $C_\infty(1, 2, d)$ с дистанциями $1, 2, d$. Параметры совершенной 2-раскраски такого графа однозначно определяются упорядоченной парой (b, c) внешних степеней каждого из цветов, где $1 \leq b \leq c \leq 6$. Соответственно, описание параметров сводится к определению допустимости каждой такой пары в зависимости от d. Везде в дальнейшем $n \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Совершенная 2-раскраска с параметрами (b, c) в бесконечном циркулянтном графе с тремя дистанциями $1, 2, d$ сущесвтует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) $(b, c) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$*: совершенных раскрасок не существует ни при каких d.*
(2) $(b, c) = (2, 2)$*: $d = 2n$ или $d = 3n$.*
(3) $(b, c) \in \{(1, 4), (2, 3)\}$*: $d = 5n$.*
(4) $(b, c) = (3, 3)$*: $d = 4n$ или $d = 8n \pm 3$.*
(5) $(b, c) = (2, 4)$*: $d = 3n$ или $d = 9n \pm 4$.*
(6) $(b, c) \in \{(3, 4), (2, 5), (1, 6)\}$*: $d = 7n \pm 3$.*
(7) $(b, c) = (4, 4)$*: совершенные раскраски существуют при любых d.*
(8) $(b, c) = (5, 5)$*: $d = 4n \pm 2$.*
(9) $(b, c) = (2, 6)$*: $d = 2n + 1$.*
(10) $(b, c) = (3, 6)$*: $d = 3n \pm 1$.*

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1675.

Список литературы

[1] Паршина О.Г. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискретный анализ и исследование операций. Март-апрель 2014. - Т. 21, N 2. - С. 76-83.

[2] Хорошилова Д.Б. О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискретный анализ и исследование операций - 2011. - Т. 18, N 6.-С.82-89.

Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж
E-mail: tanya438@mail.ru, jane.1947@yandex.ru

Решение систем уравнений над конечными двудольными графами

А. В. Ильев

В монографии [1] было показано, что традиционные понятия системы уравнений, алгебраического множества и координатной алгебры можно определить над любыми алгебраическими системами языка L. В ней также были предложены общие неалгоритмические методы решения различных систем уравнений.

В статье [2] математический аппарат из монографии [1] был применен в случае конкретного класса алгебраических систем – класса конечных обыкновенных графов. Произвольный конечный обыкновенный граф $G = (V, E)$, т. е. неориентированный граф без петель и кратных ребер может быть задан как алгебраическая система на конечном множестве V языка L, состоящего из бинарного иррефлексивного и симметричного предиката смежности вершин, а также предиката равенства. *Уравнением* над графом называется любая атомарная формула языка L от переменных из множества X. Если множество констант языка L пусто, то в этом случае рассматриваются только бескоэффициентные системы, состоящие из уравнений вида $E(x_i, x_j)$ и $x_i = x_j$, где $x_i, x_j \in X$. Если язык L содержит константные символы, множество которых интерпретируется как множество V вершин графа G, то такой случай называется *диофантовым*.

В настоящей работе построен полиномиальный алгоритм решения конечных систем уравнений над конечными двудольными графами, содержащий процедуру проверки совместности системы уравнений над двудольным графом и процедуру нахождения общего решения этой системы – координатного графа. Вычислительная сложность этого алгоритма составляет $O(k^2 n(k + n)^2)$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00209).

Список литературы

[1] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016. 243 с.

[2] Ильев А. В., Ремесленников В. Н. Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений // Вестник Омского университета, 2017, N 4(86). С. 26–32.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: artyom_iljev@mail.ru

Исследование совместности систем уравнений над локально конечными графами

А. В. Ильев

В работе рассматриваются локально конечные обыкновенные графы как алгебраические системы на счетном множестве V языка L, состоящего из бинарного иррефлексивного и симметричного предиката смежности вершин $E(x_i, x_j)$, а также предиката равенства $x_i = x_j$.

Ранее была предложена процедура, которая для любой конечной системы уравнений может определить ее совместность над произвольным конечным обыкновенным графом [1]. Возникает естественный вопрос, в каких случаях можно построить аналогичную процедуру для локально конечных графов.

В любой конечной системе уравнений над локально конечным графом G можно выделить конечную бескоэффициентную подсистему и определить для нее граф H, вершинами которого являются переменные, входящие в запись уравнений вида $E(x_i, x_j)$ с учетом всех равенств $x_i = x_j$.

Лемма. *Если в каждой компоненте связности графа H существует хотя бы одна переменая x, имеющая конечное множество значений в локально конечном графе G, то для исходной конечной системы уравнений можно ответить на вопрос о ее совместности над графом G.*

Поскольку любая конечная бескоэффициентная система уравнений эквивалентна некоторому экзистенциальному предложению языка L, то задача определения совместности таких систем уравнений над графами сводится к вопросу разрешимости универсальных теорий, который был исследован в статье [2]. И в силу вышеприведенной леммы для произвольных систем уравнений над локально конечными графами справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для любой конечной системы уравнений можно ответить на вопрос о ее совместности над локально конечным графом G, если класс, состоящий из всевозможных подграфов графа G, имеет рекурсивное множество минимальных запрещенных подграфов.*

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

Список литературы

[1] Ильев А. В., Ремесленников В. Н. Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений // Вестник Омского университета, 2017, N 4(86). С. 26–32.

[2] Ильев А. В. Разрешимость универсальных теорий и аксиоматизируемость наследственных классов графов // Труды института математики и механики УрО РАН, 2016, Т. 22, N 1. С. 100–111.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск
E-mail: artyom_iljev@mail.ru

О разбиениях конечного пространства на попарно неэквивалентные совершенные коды

Е. В. Горкунов, А. В. Лось

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{F}_q^n$ размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q = GF(q)$, q "— степень простого. Расстояние Хэмминга $d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$ между векторами $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ задаёт метрическую структуру в $\mathbb{F}_q^n$.

Кодом называется произвольное подмножество пространства $\mathbb{F}_q^n$. Код *линейный*, если он образует подпространство в $\mathbb{F}_q^n$. Элементы кода называются *кодовыми словами*. *Кодовое расстояние* кода равно минимальному расстоянию между его различными кодовыми словами.

Код называется *совершенным*, если шары фиксированного радиуса с центрами в его кодовых словах образуют разбиение пространства $\mathbb{F}_q^n$. Общеизвестно, что совершенные коды исчерпываются двумя кодами Голея в $\mathbb{F}_2^{23}$ и $\mathbb{F}_3^{11}$ и широким классом кодов с кодовым расстоянием 3 в произвольном конечном пространстве.

Коды $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{F}_q^n$ *эквивалентны*, если они отображаются друг в друга некоторой изометрией пространства $\mathbb{F}_q^n$. Линейный совершенный код, единственный с точностью до эквивалентности, называется кодом Хэмминга. Очевидно, что смежные классы кода Хэмминга (как и любого другого линейного) образуют разбиение пространства на совершенные коды. Естественным образом возник вопрос о нетривиальных подобных разбиениях и их свойствах.

Исследование разбиений пространства на совершенные коды способствовало продвижению в перечислении самих совершенных кодов. В [**1**] построены разбиения $\mathbb{F}_2^n$ на попарно неэквивалентные совершенные коды. В результате обобщения [**2**] этой конструкции получены разбиения $\mathbb{F}_q^n$ на попарно аффинно неэквивалентные совершенные коды. Найденная [**3**] позднее точная верхняя оценка для мощности пересечения линейных и эквивалентных им кодов позволила получить следующий результат.

Теорема. *Для любого $n = \frac{q^m-1}{q-1}$, q "— степень простого, $m \geqslant 4$, существует разбиение линейного пространства размерности n над конечным полем порядка q на попарно неэквивалентные совершенные коды.*

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00682).

Список литературы

[1] Августинович С. В., Соловьёва Ф. И., Хеден У. О разбиениях n-куба на неэквивалентные совершенные коды // Пробл. передачи инф. Т. 43, вып. 4. С. 45–50.

[2] Лось А. В., Соловьёва Ф. И. О разбиениях пространства F_q^N на аффинно неэквивалентные совершенные q-значные коды // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 425–434.

[3] Августинович С. В., Горкунов Е. В. Максимальное пересечение линейных и эквивалентных им кодов // Дискретн. анализ и исслед. опер. Т. 26, N 4. С. 5–15.

Институт математики им. С. Л. Соболева; Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: gorkunov@math.nsc.ru

Совершенные раскраски лексикографического произведения бесконечной цепи на 4-цикл

М. А. Лисицына

Пусть G и H – произвольные графы. Каждую вершину H заменим копией графа G и соединим ребрами любые две вершины из соседних копий. Описанная конструкция является лексикографическим произведением графа H на G и обозначается $H \cdot G$ [**3**].

Рассмотрим граф *бесконечной цепи* C_∞, множество вершин которого совпадает с множеством $\mathbb{Z}$, две вершины u и v смежны, если $|u - v| = 1$. Напомним, что C_4 – граф-цикл с 4 вершинами. Лексикографическое произведение $C_\infty \cdot C_4$ назовем C_4*-кратной цепью.*

Раскраска вершин заданного графа в k цветов называется *совершенной*, если для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ существует число m_{ij} такое, что у любой вершины цвета i ровно m_{ij} соседей цвета j. Матрица $M = (m_{ij})$ называется *матрицей параметров* совершенной раскраски. Объектом исследования являются совершенные раскраски C_4-кратной цепи в конечное число цветов.

Задача описания совершенных раскрасок в произвольное число цветов ранее была решена для лексикографических произведений графа C_∞ на $\overline{K_n}$, K_n и M_{2n} ([**2, 1**]), здесь n – натуральное число, а M_{2n} – граф совершенного паросочетания на $2n$ вершинах.

Построим раскраску графа $H \cdot G$ для произвольных H и G. Рассмотрим совершенную раскраску графа H в k цветов. Цвету i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ поставим в соответствие множество совершенных раскрасок графа G в цвета J_i с матрицей параметров M_i так, чтобы $J_p \cap J_q = \varnothing$ для $p \neq q$. К каждой копии G применим некоторую раскраску из предназначенного ему множества. Полученная раскраска графа $H \cdot G$ называется *дизъюнктной.* В [**2**] доказана лемма о том, что дизъюнктная раскраска лексикографического произведения графа H на G является совершенной.

Заметим, что $C_\infty \cdot C_4 = (C_\infty \cdot E) \cdot \overline{E}$, где E – граф, состоящий из одного ребра, а $\overline{E}$ – пустой граф на двух вершинах. Верна следующая теорема.

Теорема. *Совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot C_4$ исчерпываются дизъюнктными раскрасками лексикографического произведения графа $C_\infty \cdot E$ на $\overline{E}$.*

Список литературы

[1] Лисицына М. О совершенных раскрасках бесконечных цепей кратных паросочетанию [Электронный ресурс] // Тезисы докладов Международной конференции «Мальцевские чтения». (Август 19–22, 2019. Новосибирск, Россия). С. 33. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/19/maltsev19.pdf.

[2] Lisitsyna M., Avgustinovich S., Parshina O. Perfect colorings of infinite multipath graphs // E-print 2003.06803, arXiv.org, 2020.

[3] Taranenko A. Algebraic properties of perfect structures // Linear Algebra and its Applications, 607, 2020, 286–306.

Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Санкт-Петербург
E-mail: lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

Дистанционно регулярные графы и сильно регулярные графы без треугольников

А. А. Махнев

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i,j \in \{1,2,3,...,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)=i$. Граф $\Gamma_{i,j}$ определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в $\Gamma_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w) \in \{i,j\}$.

Если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по лемме 3 из [1] граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar{\Gamma}_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(l,t)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{l,tc_2,l-\alpha+1;1,c_2,\alpha\}$, где $l-\alpha+1 \le tc_2 < l$ и $1 \le c_2 < \alpha$.

Сильно регулярный граф без треугольников (см. главу 8 из [2]) является либо

(1) полным двудольным графом, либо

(2) графом Мура с параметрами $(k^2+1,k,0,1)$, $k \in \{2,3,7,57\}$ (для $k \in \{2,3,7\}$ существует единственный граф, для $k=57$ существование графа неизвестно), либо

(3) графом с $1<\mu<k$, имеющим собственные значения r, $-(\mu+r)$ и $k=(r+1)\mu+r^2$, причем μ делит $r^2(r^2-1)$, $\mu+2r$ делит $r(r+1)(r+2)(r+3)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, для которого граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников.

Теорема 1. (Белоусов И.Н., Махнев А.А., Падучих Д.В.). *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф Γ_3 является сильно регулярным графом с параметрами $(v,k,0,\mu)$, неглавными собственными значениями r, $-(\mu+r)$, причем $k=(r+1)\mu+r^2$, $r \ne 1$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$.*

Найдены массивы пересечений графов Γ в следующих случаях:

(1) число вершин Γ не больше 100 000;

(2) Γ имеет нецелое собственное значение;

(3) Γ является формально самодуальным графом.

Теорема 2. (Белоусов И.Н., Махнев А.А., Падучих Д.В.). *Если Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, c_2r, \mu+r; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$, $k=r^2+\mu(r+1)$, то Γ формально самодуален тогда и только тогда, когда $\mu=r(r-1)/2$, $c_2=(r+3)r/2$ и Γ имеет массив пересечений*

$$\{(r^2+2r-1)(r+2)/2, (r+3)r^2/2, (r+1)r/2; 1, (r+3)r/2, (r+2)(r+1)r/2\},$$

где r не сравнимо с 3 по модулю 4.

Рассмотрим теперь дистанционно регулярный граф Γ диаметра 4, для которого граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен.

Имеется единственный двудольный антиподальный граф Γ диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Gamma_{3,4}$ (см. стр. 425 из [3]). Это 4-куб с массивом пересечений $\{4,3,2,1;1,2,3,4\}$, спектром $4^1, 2^4, 0^6, -2^4, -4^1$, $v=1+4+6+4+1=16$ и $\Gamma_{3,4}$ – сильно регулярный граф с параметрами (16,5,0,2).

Теорема 3. (Махнев А.А., Падучих Д.В.). *Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Delta=\Gamma_{3,4}$. Тогда $\lambda(\Delta)=0$, $b_0=k(\Delta)-1$, $c_2=a_1+2=\mu(\Delta)$ и $b_1=k(\Delta)-\mu(\Delta)$.*

Приведем список допустимых массивов антиподальных графов Γ диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Gamma_{3,4}$ (см. стр. 421-425 из [3].

1. $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (162,21,0,3).
2. $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (352,26,0,2).
3. $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (210,33,0,6).
4. $\{36, 35, 2, 1; 1, 2, 35, 36\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (704,37,0,2).
5. $\{45, 40, 6, 1; 1, 6, 40, 45\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (392,46,0,6).
6. $\{49, 48, 2, 1; 1, 2, 48, 49\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (1276,50,0,2).
7. $\{54, 50, 5, 1; 1, 5, 50, 54\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (650,55,0,5).
8. $\{56, 45, 12, 1; 1, 12, 45, 56\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (324,57,0,12).
9. $\{75, 64, 12, 1; 1, 12, 64, 75\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (552,76,0,12).
10. $\{77, 72, 6, 1; 1, 6, 72, 77\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (1080,78,0,6).
11. $\{81, 80, 2, 1; 1, 2, 80, 81\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (3404,82,0,2).
12. $\{84, 75, 10, 1; 1, 10, 75, 84\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (800,85,0,10).
13. $\{96, 91, 6, 1; 1, 6, 91, 96\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (1650,97,0,6).
14. $\{115, 96, 20, 1; 1, 20, 96, 115\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (784,116,0,20).
15. $\{117, 112, 6, 1; 1, 6, 112, 117\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (2420,118,0,6).
16. $\{135, 128, 8, 1; 1, 8, 128, 135\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (2432,136,0,8).
17. $\{140, 126, 15, 1; 1, 15, 126, 140\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (1458,141,0,15).
18. $\{144, 125, 20, 1; 1, 20, 125, 144\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (1190,145,0,20).
19. $\{160, 147, 14, 1; 1, 14, 147, 160\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (2002,161,0,14).
20. $\{170, 162, 9, 1; 1, 9, 162, 170\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (3402,171,0,9).
21. $\{200, 189, 12, 1; 1, 12, 189, 200\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (3552,201,0,12).
22. $\{204, 175, 30, 1; 1, 30, 175, 204\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (1600,205,0,30).
23. $\{216, 196, 21, 1; 1, 21, 196, 216\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (2450,217,0,21).
24. $\{245, 216, 30, 1; 1, 30, 216, 245\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (2256,246,0,30).
25. $\{260, 243, 18, 1; 1, 18, 243, 260\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (4032,261,0,18).
26. $\{315, 288, 28, 1; 1, 28, 288, 315\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (3872,316,0,28).
27. $\{329, 288, 42, 1; 1, 42, 288, 329\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (2916,330,0,42).
28. $\{384, 343, 42, 1; 1, 42, 343, 384\}$, $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры (3906,385,0,42).

Заметим, что $AT4(p, q, r)$-граф Γ имеет сильно регулярный граф $\Gamma_{3,4}$ тогда и только тогда, когда $q = p + 2$ и $r = 2$. В [4] доказано, что $AT4(p, p + 2, 2)$-граф не существует (примеры 8, 14, 22, 27).

Следствие. (Махнев А.А., Падучих Д.В.). *Не существуют дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{56, 45, 12, 1; 1, 12, 45, 56\}$, $\{115, 96, 20, 1; 1, 20, 96, 115\}$, $\{204, 175, 30, 1; 1, 30, 175, 204\}$, $\{329, 288, 42, 1; 1, 42, 288, 329\}$.

Интересно, что сильно регулярным графам из примеров 1, 12, 17, 19, 26 отвечают допустимые массивы пересечений графов диаметра 3.

Теорема 4. Выполняются следующие утверждения:

(1) если $\Delta = \Gamma_{3,4}$ — антиокрестность вершины в графе Крейна с параметрами $((r^2 + 2r - 1)(r^2 + 3r + 1), r^3 + 2r^2, 0, r^2)$, то Γ имеет массив пересечений $\{r^3 + 2r^2 - 1, r^3 + r^2, r^2, 1; 1, r^2, r^3 + r^2, r^3 + 2r^2 - 1\}$;

(2) если $\Delta = \Gamma_{3,4}$ — пересечение антиокрестностей двух смежных вершин в графе Крейна с параметрами $((r^2 + 2r)(r^2 + 2r - 1), r^3 + r^2 - r, 0, r^2 - r)$, то Γ имеет массив пересечений $\{r^3 + r^2 - r - 1, r^3 - 1, r^2 - r, 1; 1, r^2 - r, r^3 - 1, r^3 + r^2 - r - 1\}$.

Заметим, что граф с массивом пересечений $\{r^3+2r^2-1, r^3+r^2, r^2, 1; 1, r^2, r^3+r^2, r^3+2r^2 - 1\}$ не существует (собственное значение θ_4 имеет кратность $(r^2 + 2r - 1)(r^2 + r - 1)(r + 1)/((r + 2)2r)$).

Исследование выполнено частично за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований – ГФЕН Китая (проект 20-51-53013).

Список литературы

[1] Makhnev A., Nirova M. On distance-regular Shilla graphs, Matem. Zametki, 2018, v 103, N 5, 730-748.
[2] Cameron P., Van Lint J. Designs, Graphs, Codes and their Links, Cambr. Univ. Press. London Math. Soc. Student Texts 22, 1981.
[3] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs, Berlin Heidelberg New-York, Springer-Verlag, 1989.
[4] Makhnev A., Paduchikh D. On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions, Trudy Institute of Mathematics and Mechanics, 2013, v 19, N 3, 207-214.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

К вопросу об ортогональных квазигруппах

И. П. Мишутушкин

Пусть $C(A) =< G(A);\ \lambda,\ \rho,\ \tau,\ e_\lambda,\ e_\rho >$ - кэлиан, [1], $G_\lambda(A)$, $G_\rho(A)$ группы множества группоидов с правым и левым сокращением, $Q(A) = G_\lambda(A) \bigcap G_\rho(A)$ - множество квазигрупп, $S_n =< S(A); \cdot >$ - симметрическая группа над A, S_n^n - ее прямая степень, $|A| = n$, $Aut...$ - обозначение для группы автоморфизмов.

Регулярные подстановки группоидов приводят к следующим результатам.

Теорема . $< G_\lambda(A); \lambda > \underset{isom}{\simeq} < S_n^n; \cdot >, < G_\rho(A); \rho > \underset{anti}{\simeq} < S_n^n; \cdot >$.

Теорема . *Всякая подстановка* $\alpha \in S$ *индуцирует перестановочные:*

- *автоморфизм* $\alpha_{G\lambda} \in Aut\, G_\lambda(A)$ *такой, что* $f\alpha_{G\lambda} = f\rho\alpha_\rho$*;*
- *антиавтоморфизм* $\alpha_{G\rho} \in Aut\, G_\rho(A)$ *такой, что* $f\alpha_{G\rho} = \alpha_\lambda\lambda f$.

Теорема. *Автоморфизм* $\varphi \in Aut\, S$ *индуцирует наследуемые* $((x, y \in A))$*:*

- *автоморфизм* $\varphi_{G\lambda} \in Aut\, G_\lambda(A)$ *такой, что* $f(x, y)\varphi_{G\lambda} = xR_y^f\varphi$*;*
- *антиавтоморфизм* $\varphi_{G\rho} \in Aut\, G_\rho(A)$ *такой, что* $f(x, y)\varphi_{G\rho} = yL_x^f\varphi$,

где R_y^f *- правая регулярная подстановка элемента* y *группоида* f, L_x^f *- левая регулярная подстановка элемента* x *группоида* f.

Выделим наследуемые внутренние морфизмы, для которых $f\varphi_{G\lambda} = \alpha_\lambda^\lambda\lambda f\lambda\alpha_\lambda$, $f\phi_{G\rho} = \alpha_\rho\rho f\rho\alpha_\rho^\rho$, где $\alpha \in S$, а $\forall y(y \in A) : \alpha_\lambda(x, y) = x\alpha$, $\forall x(x \in A) : \alpha_\rho(x, y) = y\alpha$ подстановочные группоиды.

Определение. Группоиды $f, g \in G_\lambda(A)$ λ-ортогональны, если $f^\lambda\lambda g \in Q(A)$, группоиды $f, g \in G_\rho(A)$ ρ-ортогональны, если $g\rho f^\rho \in Q(A)$. Группоид $f \in Q(A)$, входящий в пары λ-ортогональных и ρ-ортогональных группоидов, назовем ортоквадратом.

Теорема. *Если* $f \in Q(A)$ *ортоквадрат, то* $f^\tau, f^\lambda, f^\rho, f^{\lambda\tau}, f^{\rho\tau}$, *все образы перестановочных автоморфизмов и антиавтоморфизмов, и все образы наследуемых внутренних морфизмов также ортоквадраты.*

Определение . Множество $D(A) = \{f | f \in G(A) \& f(x, x) = x\}$ идемпотентных группоидов назовем диагональным.

Теорема. $< D(A);\ \lambda,\ \rho,\ \tau,\ e_\lambda,\ e_\rho >$ *есть подалгебра алгебры* $C(A)$.

Следствие 1. $D_\lambda(A) = D(A) \bigcap G_\lambda(A)$ *есть подгруппа группы* $G_\lambda(A)$ *с основной операцией* λ. $D_\rho(A) = D(A) \bigcap G_\rho(A)$ *есть подгруппа группы* $G_\rho(A)$ *с основной операцией* ρ.

Следствие 2. $D_\lambda(A) \underset{isom}{\simeq} S_{n-1}^n$, $D_\rho(A) \underset{anti}{\simeq} S_{n-1}^n$.

Таким образом, при исследовании вопросов, связанных с ортогональными квазигруппами, можно ограничиться диагональным множеством.

Список литературы

[1] Мишутушкин И. П. Критерий существования ортогональной к данной конечной квазигруппе. Тезисы докладов международной конференции Мальцевские чтения 2017, с. 82. Новосибирск: 2018.

ПАО «АСТ», Москва
E-mail: lachika@bk.ru

Полиномиальный метод для оценки параметров совершенных раскрасок циркулянтных графов в 2 цвета

С. М. Новиков

Циркулянтным графом с набором дистанций $d_1, ..., d_k$ называют неориентированный граф $C(d_1, ..., d_k)$, вершины которого целые числа, и для любых $x, y \in \mathbb{Z}$ количество ребер, соединяющих x и y, равно кратности вхождения числа $|x-y|$ в мультимножество $\{d_1, ..., d_k\}$.

Совершенной раскраской циркулянтного графа в 2 цвета (черный и белый) назовем раскраску, в которой у каждой черной вершины ровно b белых соседок, а у каждой белой ровно c черных соседок. Пару (b, c) называют параметрами раскраски.

В работе изучается следующий **вопрос**: при каких значениях k, b, c найдется граф $C(d_1, ..., d_k)$, который имеет совершенную раскраску в 2 цвета с параметрами (b, c)?

Похожие вопросы рассматривались, к примеру, в статьях [**1**], [**2**].

m-кратным мультитайлингом абелевой группы H с помощью "плитки" $u : H \to \mathbb{Z}$ назовем функцию $v : H \to \mathbb{Z}$ такую, что $\sum\limits_{h \in H} u(g-h)v(h) = m$ для любого $g \in H$.

Известный факт, что существование раскраски графа $C(d_1, ..., d_k)$ с параметрами (b, c) эквивалентно существованию целого $P > 0$ и раскраски с параметрами (b, c) соответствующего графа $C_P(d_1, ..., d_k)$, вершины которого - элементы $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$.

Оказывается, совершенные раскраски графа $C_P(d_1, ..., d_k)$ в 2 цвета являются частным случаем кратных мультитайлингов группы $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$. Кратные мультитайлинги же сводятся к решениям некоторых полиномиальных сравнений.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1. *Если граф $C(d_1, ..., d_k)$ имеет совершенную раскраску с параметрами (b, c), то для любого простого числа q и натурального t таких, что $\frac{b+c}{gcd(b,c)} \vdots q^t$, выполняется $b + c \leq 2k + \frac{b+c}{q^t}$.*

Отметим, из Теоремы 1 следует, что в случае 3 дистанций ($k = 3$) параметры $(5, 3)$ недопустимы (что дает ответ на один из поставленных в [**1**] вопросов) , а в случае 4 дистанций ($k = 4$) параметры $(6, 5), (7, 4), (7, 5), (8, 3)$ недопустимы.

Список литературы

[1] Хорошилова Д. Б. О циркулянтных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, N 1. С. 80-92.

[2] Паршина О. Г. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, N 2. С. 76–83.

МИЛ им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербург
E-mail: svyatoslav4@mail.ru

Совершенные 4-раскраски бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором дистанций

В. Д. Плаксина, П. А. Щербина

Граф Кэли $C_\infty(1, 2, 3, \ldots, n)$ бесконечной циклической группы, у которого совокупность порождающих является начальным отрезком натурального ряда, называется циркулянтным графом со сплошным набором дистанций. Совершенные 2-раскраски такого графа были описаны в [**1**]. Там же была высказана гипотеза о том, что все возможные длины периодов этих раскрасок в произвольное число цветов исчерпываются орбитными, а также следующими: $2n, 2n + 1$, и $2n + 2$. В [**2**] данная гипотеза была подтверждена в случае двух дистанций. В настоящей работе к этой гипотезе найден контрпример. Построены совершенные 4-раскраски в упомянутом выше графе при числе дистанций вида $n = 3k + 1$, $k > 0$ с периодом $4n + 2$. Для случая раскрасок в 3 цвета, а также для другого числа дистанций вопрос остается открытым.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1675.

Список литературы

[1] Паршина О. Г. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискретный анализ и исследование операций. Март-апрель 2014. - Т. 21, N 2. - С. 76-83.

[2] Лисицина М. А., Паршина О. Г. Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного граф с дистанциями 1 и 2 // Дискретный анализ и исследование операций - 2017. - Т. 24, N 3. - С. 20-34.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: v.plaksina@g.nsu.ru
Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Санкт-Петербург
E-mail: polinka28@mail.ru

On 2-closed quasiregular permutation groups

D. V. Churikov

Let Ω be a finite set and $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$. Denote by $\mathrm{Orb}_2(G)$ the set of all orbits of the induced action of G on $\Omega \times \Omega$. The 2-*closure* of the permutation group G is defined to be the largest subgroup $G^{(2)}$ in $\mathrm{Sym}(\Omega)$ that have the same 2-orbits as G. The group G is said to be 2-*closed* if $G^{(2)} = G$. The concept of 2-closure was introduced by H. Wielandt in the framework of the method of invariant relations, developed by him to study group actions [**1**].

A permutation group is *quasiregular* if it acts regularly on each of its orbits. In this talk we are interested in necessary and sufficient conditions for a quasiregular group to be 2-closed. An attempt to find such conditions for abelian groups (which are quasiregular) was made by A. Zelikovskii in [**2**, Corollary 5]. However, the conditions appear to be wrong and infinitely many counterexamples were found in [**3**].

Developing Zelikovskii's ideas, we obtained a criterion of the 2-closedness for quasiregular groups. A more subtle criterion for abelian permutation groups with cyclic transitive constituents is also obtained.

This is a joint work with Ilia Ponomarenko, funded by RFBR according to the research project – 18-01-00752.

References

[1] Wielandt H., Permutation Groups Through Invariant Relations and Invariant Functions, Lect. Notes Dept. Math. Ohio St. Univ., Columbus (1969).

[2] Zelikovskii A., The König problem for abelian permutation groups [in Russian], Vestsл Akad. Navuk BSSR Ser. Fлz.-Mat. Navuk, No. 5, 34–39 (1989).

[3] Grech M. and Kisielewicz A., 2-Closed Abelian Permutation Groups, Electron. Notes Discrete Math., 68, 83–88 (2018).

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: churikovdv@gmail.com

Edge-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\mu = 1$

A. L. Gavrilyuk, A. A. Makhnev, L. Yu. Tsiovkina

The current work is devoted to the problem of classification of edge-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three. This problem has been intensively studied in the class of arc-transitive graphs, however, there are some special cases that remain to be considered, including a classification of arc-transitive graphs with $\mu = 1$ (the latter condition means that any two vertices at distance two have exactly one common neighbour); besides, very little is known about antipodal distance-regular graphs of diameter three that are edge- but not arc-transitive. We investigate automorphisms and structure of antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\mu = 1$, and classify those that are arc-transitive or edge-transitive. In general, arc-transitivity or edge-transitivity of such a graph always imply 2-homogeneity of the action on the fibres that is induced by its automorphism group. This observation allows us to base our arguments on the classification of finite 2-homogeneous permutation groups.

Theorem 1. *Let Δ be a distance-regular graph with intersection array $\{\beta - 1, \alpha - 2, 1; 1, 1, \beta - 1\}$, where $s := \beta - \alpha + 1 > 1$, let A be the set of fibres of Δ, and $G = \mathrm{Aut}(\Delta)$. Denote by K and G^A the kernel and the image of the induced action of G on A, respectively. Then $\beta - 1 = cs$ and $\alpha - 2 = cs - s$ for some $c \in \mathbb{Z}$, and the following statements hold:*

(1) if G^A is a 2-homogeneous, but not 2-transitive group, then $G^A \leq A\Gamma L_1(q)$, $|A| = q \equiv 3 \pmod 4$, $\sqrt{cs + (s/2 - 1)^2} \notin \mathbb{Z}$, and either $K = 1$, $s = 2$ and $c = (q-1)/2$, or s is odd;

(2) if G^A is an almost simple 2-transitive group, then $K = 1$, $s = 2$ and $c = 2^{n-1}$, and either $Soc(G) \simeq L_2(2^n)$ and Δ is a Mathon graph, or G acts intransitively on vertices of Δ;

(3) if G^A is an affine 2-transitive group, then G acts intransitively on arcs of Δ.

Theorem 2. *Suppose Δ is an edge-transitive distance-regular graph with intersection array $\{\beta - 1, \alpha - 2, 1; 1, 1, \beta - 1\}$, let A be the set of fibres of Δ, and $G = \mathrm{Aut}(\Delta)$. Denote by K and G^A the kernel and the image of the induced action of G on A, respectively. Then either $\alpha = \beta \in \{3, 7\}$ and Δ is the second neighbourhood of a vertex in a Moore graph of valency α, or $\alpha < \beta$ and one of the following statements holds:*

(1) G^A is an almost simple 2-transitive group, $K = 1$, $Soc(G) \simeq L_2(2^n)$ and Δ is an arc-transitive Mathon graph of valency 2^n;

(2) G^A is an affine 2-homogeneous group and Δ is a half-transitive graph.

The work of L.Yu. Tsiovkina was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 20-71-00122.

Shimane University, Matsue (Japan)
E-mail: gavrilyuk@riko.shimane-u.ac.jp
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Yekaterinburg
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, l.tsiovkina@gmail.com

On codes with $d = 3$ in the coset graph of the binary Golay code

I. Yu. Mogilnykh

A code in a graph is a subset of its vertices. *The minimum distance* d of a code C is $min_{x,y\in C,x\neq y}d(x,y)$, where $d(x,y)$ is the minimum number of edges between vertices x and y. One of the main problems in coding theory is finding a code in a graph of maximum size with a given minimum distance. When we speak of the codes in Hamming graphs we use traditional parameters length n, size (dimension k if the code is linear) and minimum distance d. The *automorphism group* of a code C in a graph G is defined as the setwise stabilizer of C in the automorphism group of G.

The previous record for the size of binary code with $d = 3$ of length 23 had been $72 \cdot 2^{12}$ for almost 50 years [**2**]. In 2017 a new record was set to be $80 \cdot 2^{12}$ in [**1**] by Laaksonen and Östergård.

Let C_{23} denote the unique linear binary Golay code with parameters $n = 23$, $k = 12$, $d = 7$. By Γ_{23} we denote the *coset graph* of the binary Golay code C_{23}, i.e. the graph with the cosets of C_{23} as vertices and the pairs of cosets with vertices at Hamming distance 1 as edges. This graph is known to be distance-regular, moreover its distance-3 graph (which is denoted by $\overline{\Gamma_{23}}$) is strongly regular.

We consider the problem of finding the maximum size of a code with minimum distance 3 in the graph Γ_{23}, i.e. the size of maximum clique in the graph $\overline{\Gamma}_{23}$. Using GRAPE package for GAP [**3**] we obtained the following.

Theorem. *There is a code in the graph* Γ_{23} *with* $d = 3$, *size* 72 *and nontrivial automorphism group.*

Remark. We see that the corresponding binary code (a union of cosets of the Golay code) is of the same size $72 \cdot 2^{12}$ as the previous record [**2**]. Moreover it could be shown that this code and the code from [**2**] are inequivalent with respect to the automorphism group of the Hamming graph.

This work was funded by the Russian Science Foundation under grant 18-11-00136.

References

[1] Laaksonen A., Östergård P. R. J., Constructing error-correcting binary codes using transitive permutation groups, Discrete Applied Mathematics, V. 233, 2017, pages 65–70.

[2] Sloane N. J. A., Whitehead D. S., A New Family of Single-Error Correcting Codes, IEEE Transactions on Information Theory, V. 16, 1970, pages 717–719.

[3] Soicher L. H., GRAPE: a system for computing with graphs and groups. In Larry Finkelstein and William M. Kantor, editors, Groups and Computation, V. 11 of DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, pages 287–291. American Mathematical Society, 1993.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: ivmog84@gmail.com

On WL-rank of Deza Cayley graphs

V. Panshin, R. Bildanov

The *WL-rank* $\mathrm{rk}_{\mathrm{WL}}(\Gamma)$ of a graph Γ is defined to be the number of classes in the coherent configuration of Γ. The graph Γ is strongly regular if and only if $\mathrm{rk}_{\mathrm{WL}}(\Gamma) \leq 3$. The following generalization of the notion of a strongly regular graph was suggested in [**2**]. A k-regular graph Γ is called a *Deza* graph if there exist nonnegative integers a and b such that any pair of distinct vertices of Γ has either a or b common neighbors. A Deza graph is called *strictly* if it is non-strongly regular and has diameter 2. It is a natural question how large the WL-rank of a Deza graph can be.

In the talk we are interested in the WL-rank of Deza Cayley graphs. It is easy to check that the WL-rank of an arbitrary Cayley graph does not exceed the number of vertices of this graph. We construct a new infinite family of strictly Deza Cayley graphs for which the WL-rank is equal to the number of vertices.

The WL-rank of Deza circulant graphs, i.e. Deza Cayley graphs over cyclic groups, is studied in more detail. All strongly regular circulant graphs, i.e. all circulant graphs of WL-rank at most 3, were classified independently in [**1, 5, 6**]. We classify Deza circulant graphs of WL-rank 4. We also establish that some families of strictly Deza circulant graphs have WL-rank 5 or 6. Together with computational results [**3, 4**], this implies that every strictly Deza circulant graph with at most 95 vertices has WL-rank at most 6.

The talk is based on joint work with Dmitry Churikov and Grigory Ryabov.

References

[1] Bridges W., Mena R., Rational circulants with rational spectra and cyclic strongly regular graphs, Ars Combin., 8 (1979), 143–161.

[2] Erickson M., Fernando S., Haemers W., Hardy D., Hemmeter J., Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs J. Comb. Designs., 7 (1999), 359–405.

[3] Gavrilyuk A., Goryainov S., Shalaginov L., Proceedings of G2A2-conference, Ekaterinburg (2015), http://g2a2.imm.uran.ru/slides/plenary_talks/Goryainov.pdf.

[4] Goryainov S., Shalaginov L., Cayley-Deza graphs with less than 60 vertices, Sib. Elect. Math. Rep., 11 (2014), 268–310.

[5] Hughes D., van Lint J., Wilson R., Announcement at the Seventh British Combinatorial Conference Cambridge (1979) (unpublished).

[6] Ma S., Partial difference sets, Discrete Math., 52 (1984), 75–89.

Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: v.panshin@g.nsu.ru, ravilbildanov@gmail.com

CI-property for subsets of finite simple groups

G. K. Ryabov, A. V. Vasil'ev

Let G be a finite group. A subset X of a group G is called a *CI-subset* if for every $Y \subseteq G$ the isomorphism of Cayley digraphs $\mathrm{Cay}(G, X)$ and $\mathrm{Cay}(G, Y)$ implies that $\mathrm{Cay}(G, X)$ and $\mathrm{Cay}(G, Y)$ are *Cayley isomorphic*, i.e. there exists $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ such that $X^{\varphi} = Y$. The problems concerned with the CI-property are being actively studied in many papers during last fifty years. However, the most of the results on CI-property concerned with abelian groups.

A subset X of G is called *normal* if $X^g = X$ for every $g \in G$. We prove the following theorem.

Theorem. *If G is a simple group and X is a normal inverse-closed subset of G then X is a* CI-*subset.*

The obtained result continues the investigation of central Cayley graphs over almost simple groups started in the paper [**1**].

References

[1] Ponomarenko I., Vasil'ev A., Testing isomorphism of central Cayley graphs over almost simple groups in polynomial time, J. Math. Sci. (N.Y.), 234, No. 2 (2018), 219–236.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: gric2ryabov@gmail.com, vasand@math.nsc.ru

On a property of $\mathbb{Z}_4$-linear Reed – Muller codes

F. I. Solov'eva

Let $\mathbb{Z}_4$ be the ring of integers modulo four and $\mathbb{Z}_4^N$ be the set of all quaternary words of length N. A nonempty subset $\mathcal{C}$ of $\mathbb{Z}_4^N$ is a quaternary code and a subgroup of $\mathbb{Z}_4^N$ is called a *quaternary linear code*. The Lee weight of elements in $\mathbb{Z}_4$ is $\mathrm{w}_L(0) = 0, \mathrm{w}_L(1) = \mathrm{w}_L(3) = 1$ and $\mathrm{w}_L(2) = 2$. The Lee weight $\mathrm{w}_L(\mathbf{u})$ of a word in $\mathbb{Z}_4^N$ is the addition of the Lee weight of all its coordinates. The Lee distance $d_L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ between two words $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_4^N$ is defined as $d_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathrm{w}_L(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

A quaternary linear code being a subgroup of $\mathbb{Z}_4^N$ is isomorphic to an abelian structure of type $\mathbb{Z}_2^\gamma \times \mathbb{Z}_4^\delta$, so we have $|\mathcal{C}| = 2^\gamma 4^\delta$. Such code $\mathcal{C}$ is called *quaternary linear of type* $(N; \gamma, \delta)$ and its binary image $C = \phi(\mathcal{C})$ under the Gray map is a $\mathbb{Z}_4$*-linear code of type* $(N; \gamma, \delta)$. In [**3**] two constructions giving $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$ families of quaternary linear Reed – Muller codes for each value of m are proposed. The families are distinguished by using subindexes s from the set $\{0, \ldots, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor\}$, so for fixed m, r and s we have the code $\mathcal{RM}_s(r, m)$. One of the constructions is the quaternary Plotkin construction that generalizes the construction given in [**2**]. Let us consider it.

Let $\mathcal{RM}_s(r, m-1)$ and $\mathcal{RM}_s(r-1, m-1)$, $0 \le s \le \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor$, be any two quaternary linear $\mathcal{RM}$ codes of type $(N; \gamma^s_{r,m-1}, \delta^s_{r,m-1})$ and $(N; \gamma^s_{r-1,m-1}, \delta^s_{r-1,m-1})$ of length $N = 2^{m-2}$, size 2^{k_r} and $2^{k_{r-1}}$, code distance 2^{m-r-1} and 2^{m-r} respectively, where $k_r = \sum_{i=0}^r \binom{m-1}{i}$ and $k_{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m-1}{i}$. In [**3**] it was established that for any r and $m \ge 2$, $0 < r < m$, the code obtained by using the Plotkin construction

$$\mathcal{RM}_s(r, m) = \{(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) : \mathbf{u}_1 \in \mathcal{RM}_s(r, m-1),\ \mathbf{u}_2 \in \mathcal{RM}_s(r-1, m-1)\},$$

$0 \le s \le \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ with the exception m odd and $s = (m-1)/2$, is a quaternary linear code of type $(2N;\ \gamma^s_{r,m},\ \delta^s_{r,m})$, where $\gamma^s_{r,m} = \gamma^s_{r,m-1} + \gamma^s_{r-1,m-1}$ and $\delta^s_{r,m} = \delta^s_{r,m-1} + \delta^s_{r-1,m-1}$. The length of the code is $2N = 2^{m-1}$, the number of codewords 2^k, where $k = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$, the code distance 2^{m-r}.

Theorem. *For any r and $m \ge 2$, $0 < r < m$ and for any s, $0 \le s \le \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ with the exception m odd and $s = (m-1)/2$ there exists a basis of minimum weight codewords for the quaternary linear code $\mathcal{RM}_s(r, m)$ of type $(2N;\ \gamma^s_{r,m},\ \delta^s_{r,m})$.*

The work is supported by RFBR (grant 19-01-00682).

References

[1] MacWilliams F. J. and Sloane N. J. A., The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland Publishing Company, 1977.

[2] Solov'eva F. I., On Z4-linear codes with parameters of Reed-Muller codes, Problems of Information Transmission, V. 43. N. 1. P. 26–32, 2007.

[3] Pujol J., Rifà J. and Solov'eva F., Construction of Z4-Linear Reed-Muller Codes, IEEE Transactions of Information Theory, V. 55. N. 1. P. 99–104, 2009.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: sol@math.nsc.ru

On π-involution graphs of finite simple groups of Lie-type of even characteristic

L. Yu. Tsiovkina

Let G be a group with a G-conjugacy class X of involutions and let π be a subset of spectrum $\omega(G)$ of G. Let $gF_\pi(G,X)$ denote the graph on X, in which involutions x and y are adjacent if and only if $x \neq y$ and the order of the product xy is contained in π; we call $gF_\pi(G,X)$ by a π-*involution graph* of G. If the set π consists only of odd numbers, then the graph $gF_\pi(G,X)$ coincides with a π-local fusion graph of G. One motivation for studying such graphs is to specify the structure and permutation representations of finite simple groups, e.g. see [**1**].

In this talk, we will investigate π-involution graphs of some finite simple groups of Lie-type of even characteristic. In [**2, 3**], it was shown that for each group

$$G \in \{PSL_2(q), PSU_3(q), Sz(q)\}$$

with $q = 2^n \geq 4$, its $\{\chi(G)\}$-local fusion graph, where $\chi(G)$ denotes the associated prime number of G in the sense by Suzuki, is an antipodal distance-regular graph of diameter 3. By using this result, we will show that the following theorem is true.

Theorem. *For each group $G \in \{PSL_2(q), PSU_3(q), Sz(q)\}$ with $q = 2^n \geq 4$ and for $\pi = \omega(G) - \{2, \chi(G)\}$, the unique π-involution graph of G is a vertex-transitive Deza graph of degree $q^l(q-2)$ and diameter 2 on $(q^l+1)(q-1)$ vertices, in which the number of common neighbors of two distinct vertices equals $(q-2)^2(q^l-1)/(q-1)$ or $q^l(q-3)$, where $q^l = (|G|)_2$.*

Remark. The construction of these families of Deza graphs seems to be new.

This research was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 20-71-00122.

References

[1] Ballantyne J. Local fusion graphs of finite groups // Doctoral thesis, Manchester Inst. for Math. Sci., The University of Manchester (2011).

[2] Tsiovkina L. Yu. Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda = \mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$ // J. Algebr. Comb. 41 N 4 (2015) 1079–1087.

[3] Tsiovkina L. Yu. Arc-transitive antipodal distance-regular covers of complete graphs related to $SU_3(q)$ // Discrete Math. 340 N 2 (2017) 63–71.

IMM UB RAS, Yekaterinburg
E-mail: l.tsiovkina@gmail.com

III. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

Разработка методов извлечения информации о событиях из текстов, представленных в сети интернет

В. С. Азаубаев

Социальные сети и новостные сайты играют значительную роль[**1**] в жизни современного человека. Ежедневно пользователями генерируется огромное количество информации и метаинформации в виде текста, социальных графов, различного рода активностей и прочего. С помощью статистических и методов машинного обучения существует возможность по открытой информации анализировать тренды, динамику интереса и профиль интересов пользователей.

Существующие системы, способные производить подобный анализ либо являются результатом работы высокооплачиваемых специалистов, либо, будучи основным источником заработка крупных компаний, являются объектом коммерческой тайны. Доступ к функциям подобных систем сильно ограничен и предоставляется за отдельную плату.

Разрабатываемый в рамках данной работы программный комплекс и набор алгоритмов позволит анализировать тренды среди заданных групп населения. Для поиска трендов будут использоваться алгоритмы[**2**] обработки естественного языка и статистические методы[**3**] анализа данных. Также в будущем планируется создать корпус для обучения, тестирования и улучшения алгоритмов распознавания трендов. Реализация алгоритмов для обнаружения связей между трендами[**4**] позволит создавать более детальные описания событий.

Открытый исходный код позволит любому пользователю запускать программный комплекс на своих мощностях, создавать новые и модифицировать существующие алгоритмы распознавания событий.

Список литературы

[1] Social Media Stats Russian Federation [Electronic resource]. URL: https://gs.statcounter.com/social-media-stats/all/russian-federation.

[2] Segalovich I. A fast morphological algorithm with unknown word guessing induced by a dictionary for a web search engine // Proc. Int. Conf. Mach. Learn. Model. Technol. Appl. 2003. P. 273–280.

[3] Jicheng S., Weike L. Clustering algorithm for time series based on peak interval // Proc. - 2016 Int. Conf. Comput. Sci. Comput. Intell. CSCI 2016. 2017. P. 410–414.

[4] Власов Д., Пальчунов Д., Степанов П. Автоматизация Извлечения Отношений Между Понятиями Из Текстов Естественного Языка. 2013.

Институт Математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: vazaubaev@math.nsc.ru

Анализ тональности и распознавание эмоций для создания интеллектуального помощника

А. Н. Акатов

Интеллектуальные виртуальные помощники обретают все большую популярность. Они становятся умнее и с каждым годом их возможности увеличиваются. Однако все они далеки от идеала. Одним из наиболее актуальных направлений развития в этой сфере является очеловечивание ботов. Способоности помощника определять настроение человека и его эмоции позволят реализовать дополнительный функционал и более продуманную обратную связь, а так же увеличат удовлетворенность человека от использования.

Данная работа является частью проекта по созданию интеллектуального помощника, который может быть особенно полезен слабовидящим людям, и посвящена поиску решений распознавания эмоций. Объектом исследований являются методы анализа тональности текста. В работе рассмотренны классические подходы на основе правил, словарей и методов машинного обучения с использованием предобученных языковых моделей. Последние, согласно недавним исследованиям, позволяют эффективно решать задачи классификации эмоций, уверенно добиваясь хороших результатов.

Целью данной работы является разработка модуля для интеллектуального помощника, способного анализировать тональность и распознавать эмоции пользователя.

Для достижения этой цели были решены следующие задачи: изучены существующие алгоритмы распознавания эмоций, проведены сравнения этих алгоритмов, выбран наиболее подходящий и рассмотрены способы улучшения результатов за счет анализа затухания эмоций.

В дальнейшей работе планируется реализовать нейронную сеть для анализа тональности текста, а так же рассмотреть возможность распознавания эмоций в голосовой записи запроса пользователя.

Список литературы

[1] Клековкина М. В., Котельников Е.В. Метод автоматической классификации текстов по тональности, основанный на словаре эмоциональной лексики (рус.) // RCDL-2012, Переславль-Залесский

[2] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34-48.

[3] Пазельская А., Соловьев А. Метод определения эмоций в текстах на русском языке, Москва, 2011. С. 510 - 522.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.akatov@g.nsu.ru

О эквивалентности конечно-автоматных атрибутных политик информационной безопасности

С. А. Афонин, А. Л. Кузнецова

Одним из подходов к обеспечению безопасности современных информационных систем является атрибутная модель разграничения доступа. Решение о доступе зависит от значения самого объекта и значений некоторых объектов в его окружении. Политика доступа состоит из набора правил, опеределяющих условия доступа. Две политики эквиваленты, если их множества доступов совпадают. В данной работе доказывается разрешимость задачи проверки эквивалентности двух политик, заданных конечными автоматами специального вида.

Пусть Σ – конечный алфавит. Информационной системой назовем конечное множество *объектов* $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$, где каждый объект X_k принимает *значение* x_k из Σ^*. *Состоянием* системы назовем слово из языка $L_S = (\Sigma^*\$)^{N-1}\Sigma^*$ в алфавите $\Sigma \cup \{\$\}$, где символ \$ используется в качестве разделителя значений объектов.

Будем считать, что в системе допустимы только изменения значений объектов. Политика доступа определяется набором множеств $P = \langle A_i \subseteq L_S, i \in \{1, \ldots, N\}\rangle$. Если состояние χ принадлежит A_i, то в этом состоянии допускается изменение значения объекта X_i, то есть из $\chi = x_1\$x_2\$\ldots\$x_N$ можно перейти в состояние $\chi' = x_1\$\ldots\$x_{i-1}\$x_i'\$x_{i+1}\$\ldots\$x_N$. Такое действие назовем *допустимым* и будем обозначать как $\chi \mapsto_i \chi'$. Отношение $\mapsto_i$ естественным образом расширяется до рефлексивного и транзитивного замыкания $\mapsto_P^*$ по всем элементам политики P.

Пусть $R_P(\chi) = \{\chi' \in L_S : \chi \mapsto_P^* \chi'\}$ есть множество состояний, достижимых из χ для политики P. Состояние χ назовем *различающим* для политик $P_1 = \langle A_i^{(1)} \subseteq L_S, i \in \{1, \ldots, N\}\rangle$ и $P_2 = \langle A_i^{(2)} \subseteq L_S, i \in \{1, \ldots, N\}\rangle$, если найдется такой индекс i, что $\chi \in A_i^{(1)} \triangle A_i^{(2)}$. Политики P_1 и P_2 назовем *эквивалентными* для начального состояния χ, если множество $R_{P_1}(\chi) \cup R_{P_2}(\chi)$ не содержит различающих состояний.

Политику P назовем *автоматной*, если множества A_i регулярны.

Теорема. *Существует алгоритм проверки эквивалентности двух автоматных политик P_1 и P_2.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФИИ 18-07-01055.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: serg@msu.ru

Кластеризация многозначных логических высказываний с учетом многозначного класса моделей и мер нетривиальностей

А. А. Викентьев, В. Б. Бериков

Рассматривается одна из актуальных задач на стыке математической логики и машинного обучения – анализ логических высказываний, полученных из базы знаний информационной системы или от экспертов какой-либо предметной области. При анализе требуется найти близкие высказывания, выявить достоверные, найти нетривиальные и т.д. Разбиение множества высказываний на подмножества похожих элементов (кластеризация) позволяет проводить структурирование базы знаний и облегчает поиск высказываний, наиболее релевантных запросу. Для кластеризации знаний, построения решающих функций на основе формул-высказываний, требуется ввести расстояние между формулами. В работе высказывания записаны в виде формул n–значной логики, что позволяет учитывать их возможную неполноту. С привлечением многозначного класса моделей (переменная может входить в модель с различными значениями истинности) определяются расстояния между формулами: $\rho(\varphi,\psi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|k-l|}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right)$, где $n^{|S(\Sigma)|}$ – число всех многозначных моделей, $M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right)$ – число тех моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а ψ – $\frac{l}{n-1}$. Введены также новые меры нетривиальности, обобщающие предложенные ранее в работах [**1**]–[**3**] и имеющие вид: $I(\varphi) = \rho(\varphi, 1)$, где 1 – тождественно истинная формула. Доказано, что введенные семейства мер обладают свойствами метрики. Предложены различные методы кластеризации логических знаний и методы сравнения результатов на основе индексов качества. Рассмотрены конкретные примеры анализа высказываний для логик различной значности. Полученные результаты обобщены на случай коллективной кластеризации [**4**] на основе ансамбля метрик.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 18-07–600а.

Список литературы

[1] Vikent'ev A. A., Lbov G. S. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997. Vol.7, No 2. P. 175–183.

[2] Vikent'ev A. A., Avilov M. S. New Model Distances and Uncertainty Measures for Multivalued Logic // Lecture Notes on Computer Science. 2016. Vol. 9883. P. 89–98.

[3] Vikent'ev A., et al. Collective Distances for Clustering N-Valued Logic Formulas Representing Knowledge Base of Intellectual System // 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). 2019. IEEE.

[4] Berikov V. B. Weighted ensemble of algorithms for complex data clustering // Pattern Recognition Letters. 2014. Vol. 38. P. 99–106.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

E-mail: vikent@math.nsc.ru, berikov@math.nsc.ru

Аксиома полноты не противоречит формальной арифметике Дедекинда – Пеано

А. В. Бессонов

В большинстве работ, посвящённых теоремам Гёделя о неполноте, для формализации (не)доказуемости в арифметике Дедекинда – Пеано (PA) используется тот или иной предикат доказуемости. Какие-либо иные выразимые в смысле Гёделя (G-*выразимые*) предикаты обычно вообще не рассматриваются. Однако подобная ограниченность может приводить к ложным выводам. Например, если формализовать в PA (не)доказуемость посредством какого-либо предиката недоказуемости, т. е. предиката, истинного исключительно на номерах недоказуемых формул (не обязательно всех), то заключение второй теоремы Гёделя о неполноте (если PA непротиворечива, то PA не может доказать свою непротиворечивость) оказывается неверным (см., напр., [**1**]). Использование не-гёделевых выразительных средств приводит и к другим интересным результатам.

Рассмотрим предикат *разрешимости* $\mathrm{Solv}(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой замкнутой формулы, а y – гёделевым номером доказательства формулы с номером x или номером доказательства отрицания формулы с номером x. Этот предикат очевидно разрешим, и значит, G-выразим в PA некоторой арифметической формулой $Solv(x, y)$.

Рассмотрим формулу

$$\forall x \exists y Solv(x, y).$$

Она G-выражает то, что в PA для любой замкнутой формулы доказуема либо она, либо её отрицание, т. е. G-выражает факт полноты PA, поэтому её естественно назвать *аксиомой полноты* (CA). Основываясь на гёделевом доказательстве неполноты PA, нетрудно показать, что при тех же условиях, которые накладывает на PA сам Гёдель, CA в PA неразрешима.

Поскольку CA неразрешима, её можно присоединить к аксиомам PA, получив в результате непротиворечивую систему. Эта система, очевидно, ω-противоречива. Поэтому оригинальное гёделево доказательство неполноты (без учета модификации Б. Россера) для неё не значимо. Но даже независимо от вопроса о полноте системы PA + CA, само по себе наличие непротиворечивой теории, в которой утверждается, что любая формула разрешима в PA, в некотором смысле противоречит первой теореме Гёделя о неполноте арифметики.

Список литературы

[1] Bessonov, A., Peano arithmetic can well prove its own consistency, The Bulletin of Symbolic Logic, **22**, No. 3 (2016), 389.

Институт философии и права СО РАН,Институт философии и права, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: trt@academ.org

Разработка транслятора моделей программ и их верификация

Ю. Ю. Болдырева

В связи с тем, что информационные системы проникли во все сферы жизни, в том числе в системы, от которых напрямую зависят здоровье и даже жизнь человека, проверка моделей приобретает всё большую значимость при разработке программного обеспечения систем высокой надёжности. Обеспечение достаточно полной проверки модели системы требует наличия точного и полного описания поведения тестируемой системы. В первую очередь, важно правильно сформулировать задачу на естественном языке, чтобы потом запрограммировать данную систему. При этом для наглядности создания алгоритма используют различного рода схемы (блок-схемы, диагараммы, графы и пр.).

Зачастую, алгоритм работы системы изобретают люди, не являющиеся профессиональными программистами, и чтобы протестировать корректность ее работы, требуется закодировать схему алгоритма, и только потом протестировать написанную программу.

Для автоматизации описанных выше действий было принято решение создать веб-сервис визуального программирования. Визуальное программирование — создание компьютерной программы путём манипулирования графическими объектами вместо написания её кода. На основе проведеннного в работе [**1**] сравнительного анализа нескольких верификаторов, был выбран инструмент SPIN [**2**], который позволяет достаточно полно проверить спроектированную пользователем модель на соответствие предъявленным ей требованиям, сформулирофанным на языке линейной темпоральной логики LTL. Таким образом, мы разрабатываем веб-сервис [**3**], позволяющий создавать схемы и транслировать их в язык Promela (внутренний язык расматриваемого верификатора), используемый для автоматической верификации в SPIN.

Список литературы

[1] Болдырева Ю.Ю. Выбор средства верификации модели кофейного автомата // VI Международная научная конференция «Проблемы управления, обработки и передачи информации (УОПИ-2018)»: Саратов, 2018. С. 653-656.

[2] Spin Model Checker. The Primer and Reference Manual / Holzmann G. Addison Wesley, 2003, 608 с.

[3] Болдырева Ю.Ю. Проектирование транслятора схем на язык PROMELA//Проблемы управления в социально-экономических и технических системах. Сборник научных статей Материалы XVI Международной научно-практической конференции: Саратов, 2020. С. 3-5.

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов
E-mail: julya-11@mail.ru

О связи сложности программ и их обусловленности данными

Ф. Б. Буртыка

Классическим объектом изучения теории сложностей вычислений является зависимость числа шагов, выполняемых программой от длины входа (характер этой зависимости). Если при увеличении длины входа на s число шагов программы вырастает в количество раз, кратных s, то говорят, что программа имеет экспоненциальную вычислительную сложность.

Обозначим через $\mathcal{U}$ некоторый универсум компьютерных программ. Каждая программа $\pi \in \mathcal{U}$ вычисляет некоторую рекурсивную функцию [**1**] $F_\pi : \mathsf{dom}(\pi) \to \mathsf{ran}(\pi)$ (множество $\mathsf{dom}(\pi)$ на котором программа π корректно завершается называется её *носителем* или областью определения, а множество $\mathsf{ran}(\pi)$ называется областью значений), т.е. при подаче на вход вектора входных данных $\vec{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathsf{dom}(\pi)$ (число k называется *длиной входа*, каждый параметр x_i может принимать два или более различных значений) после выполнения программа возвращает вектор выходных данных $\vec{f} = (f_1, ..., f_n) \in \mathsf{ran}(\pi)$ (число n называется *длиной выхода*). Программы π_1 и π_2 называются эквивалентными ($\pi_1 \sim \pi_2$ в символах) если $F_{\pi_1} = F_{\pi_2}$.

Определение. *Временем работы программы назовем количество шагов (элементарных действий в выбранной модели вычислений), которые она должна выполнить до завершения (для получения результата) и обозначим время работы программы π на (векторе) входных данных $\vec{x}$ как $\mathsf{Time}[\pi(\vec{x})]$.*

Обозначим через $\mathsf{dom}_k(\pi)$ множество векторов *длины* k на которых программа π корректно завершается.

Определение. *Программа π называется обусловленной данными (зависимой по данным) при длине входа k, если её время работы зависит от исходных данных, т.е. такая что $\mathsf{Time}[\pi(\vec{x})] \neq \mathsf{Time}[\pi(\vec{y})]$ для некоторых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathsf{dom}_k(\pi)$ таких что $\vec{x} \neq \vec{y}$.*

Определение. *Программа π называется однозначно обусловленной данными (однозначно зависимой по данным) при длине входа k, если для всех $\vec{x}, \vec{y} \in \mathsf{dom}_k(\pi)$ справедливо $\vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow \mathsf{Time}[\pi(\vec{x})] \neq \mathsf{Time}[\pi(\vec{y})]$.*

Теорема. *Если при каждой длине входа программа однозначно обусловлена входными данными, то она имеет экспоненциальную вычислительную сложность.*

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции, Том 1085. Наука, 1986. 368 с.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону/Таганрог
E-mail: bbfilipp@yandex.ru

Перспективы использования цифровых двойников в бизнес-процессах

А. И. Ваганова, Д. Е. Пальчунов

Цифровой двойник (ЦД) - это цифровая копия физической системы, которая может существовать как самостоятельный объект [**1**].

Основная масса исследований и разработок ЦД сосредоточены на решении промышленных проблем: с помощью ЦД уменьшают затраты на производство, сокращают время выхода на рынок, улучшают конструктивные особенности физических систем.

В бизнес-процессах ЦД используются для повышения экономической эффективности компаний, повышения эффективности работы сотрудников, повышения устойчивости бизнеса за счет роста скорости и качества адаптации к изменениям. Цифровые двойники в бизнесе строятся на основе информационных систем, которые отслеживают действия работников, заказчиков или покупателей. Сбор знаний о процессах, происходящих внутри компании, и создание онтологий помогает улучшить сотрудничество между партнерами по бизнесу благодаря быстрому извлечению информации из большого объема экспертных знаний [**2**] [**3**].

В работе рассматриваются перспективы использования ЦД в бизнес-процессах в качестве двойника реального человека, обладающего набором определенных знаний и компетенций, для взаимодействия с другими людьми и другими цифровыми двойниками, например, с целью предоставления информации по запросу без участия своего оригинала. Для решения поставленных задач используются методы семантического моделирования [**4**].

Список литературы

[1] Grieves M. Origins of the Digital Twin Concept // Working paper, Florida Institute of Technology/NASA. 2016.

[2] Кокорев Д.С., Юрин А.А. Цифровые двойники: понятие, типы и преимущества для бизнеса // Colloquium-journal. 2019. N 10 (34).

[3] Moder P., Ehm H., Jofer E. A Holistic Digital Twin Based on Semantic Web Technologies to Accelerate Digitalization // EADTC 2019: Digital Transformation in Semiconductor Manufacturing. 2019. pp 3-13.

[4] Gumirov V.S., Matyukov P.Y., Palchunov D.E. Semantic Domain-specific Languages // In: 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, 21-27 Oct. 2019. IEEE Press, 2019. P. 0955–0960.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: vaganova.ann00@gmail.com

Разработка метода выбора оптимальных путей для создания приложения поиска авиаперелетов

А. В. Гавриленко

Авиаперевозки являются одной из важнейших отраслей в современном мире, многие государства активно поддерживают и развивают их. Согласно данным авиаперевозчиков, ежегодный мировой рост количества авиапассажиров составляет около 8%. Учитывая данный факт, у многих пассажиров возникает необходимость в поиске оптимальных маршрутов для перелетов.

Маршрут может быть оптимизирован по различным критериям – цена билета, количество пересадок, время затраченное на перелет. Данная работа посвящена разработке модели и метода выбора маршрутов для создания приложения поиска авиабилетов с учетом предпочтений пассажира и времени затраченному на прохождение процедур аэропорта (регистрация/таможня). Учитывая эти факторы приложение может предлагать пользователю более лучшие варианты перелета, чем длительный поиск по обычному расписанию авиаперевозчика.

Цель работы: разработка эффективного метода расчета маршрута перелета.

В ходе данной работы было сделано следующее:

- разработана модель для планирования авиаперелета, с ее помощью можно хранить информацию о возможных маршрутах в графах небольшого размера. Таким образом возможно выполнить предварительный расчет всех возможных перелетов (например для определенной даты), сохранять в базе данных графов и в результате получать оптимальный маршрут без длительного ожидания вычисления,
- для поиска оптимального пути между аэропортами был использован обобщенный метод Дейкстры для задач с неотрицательными векторными весами ребер [**2**].

Список литературы

[1] Дистель Р. Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 333 с.

[2] Городецкий С.Ю. Методы оптимизации на графах с векторными весами ребер: методическая разработка по курсу "Методы оптимизации". – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2004. С. 25-30.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.gavrilenko2@g.nsu.ru

Разработка методов создания смарт-контрактов и генерации текстов договоров на основе семантических моделей бизнес-процессов

А. Г. Галиева

На данный момент в процессе цифровизации экономики актуальны разработки в сфере автоматизации формализованных бизнес-процессов. Отечественными разработчиками были решены задачи создания смарт-контрактов с использованием семантических моделей бизнес-процессов [**1, 2, 3, 4**]. Помимо самой автоматизации необходимо упростить процедуру валидации смарт-контрактов, обеспечив экспертам предметной области доступ к их аудиту через взаимодействие с текстом договора.

Целью работы является разработка методов создания смарт-контрактов и генерации текстов договоров на основе семантических моделей бизнес-процессов.

В рамках этой работы была разработана программная система для создания формализованных автоматизированных контрактов, позволяющая генерировать исполняемый код смарт-контракта на основе его семантического описания, а также соответствующее представление текста договора на естественном языке, что позволит упростить и удешевить аудит смарт-контрактов.

Список литературы

[1] Галиева А. Г., Пальчунов Д. Е. Актуальные подходы в автоматизации формализации бизнес-процессов. Материалы VII Международной конференции «Знания – Онтологии – Теории» (ЗОНТ-2019), Новосибирск, 2019. С. 415.

[2] Галиева А. Г., Разработка методов автоматизированного создания смарт-контрактов на основе формализованных бизнес-процессов. Материалы 58-й международной научной студенческой конференции МНСК-2020; Информационные технологии. Новосибирск, 2020. С. 169.

[3] Galieva A. G., Palchunov D. E. Logical Methods for Smart Contract Development. In: 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, IEEE Press, 2019. P. 0881-0885.

[4] Gumirov V.S., Matyukov P.Y., Palchunov D.E. Semantic Domain-specific Languages. In: 2019 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russia, 21-27 Oct. 2019. IEEE Press, 2019. P. 0955–0960.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Σ-спецификация взаимного исключения в параллельных асинхронных программах

В. Н. Глушкова

Одна из проблем параллельного программирования состоит в запрете одновременного обращения процессов к разделяемым переменным. Это свойство (взаимного исключения) проверяется на графе Γ потока данных программы pr, который представляется списком смежных вершин и строится по $\Sigma-$спецификации языка программирования ($яп$). Семантика $яп$ задаётся многосортной моделью M из констант семейства $C = \{C_i\}_{i \in I}$ с надстройкой, порожденной из C грамматикой $G = (V, P)$; V, P -множества символов и правил; $V \subseteq I$, $I-$множество сортов. Пусть синтаксис $яп$ задаётся грамматикой G с типичными операторами и оператороми синхронизации процессов $wait$ и др. Для построения M используем теорию из $\Delta_0 T$-квазитождеств, определяемых как Δ_0-формулы [1] с префиксом вида:

$$(\forall x_1 \dot{\in} t_1) \ldots (\forall x_m \dot{\in} t_m)(y_1 \prec z_1) \ldots (y_p \prec z_p)(\varphi(\bar{x}, \bar{t}) \to \psi(\bar{x}, t))$$

$m \geq 1$, $p \geq 0$, $y_j, z_j \in < \bar{x}, \bar{t} >$, $1 \leq j \leq p$. Формулы φ (ψ) конъюнкция и дизъюнкция атомных формул вида r, (r, $f = \tau$) или их отрицаний; $r, f-$ предикатный и функциональный символы, $\tau-$ терм. Дерево вывода pr представляется списком так, что отношениям $\prec$, $\dot{\in}$ соответствуют отношения "левее" и иерархического подчинения узлов дерева. Теория интерпретируется по правилу вывода MP на списке, исходя из значений функции $Val(ps, var, 0)$ для входных переменных, $n = 0-$ значение дискретного времени-шага вычисления). Формула φ может содержать два ограниченных квантора по числу выполненных шагов вычисления и по спискам графа Γ, построенного на i-ом шаге. Пусть программа состоит из двух процессов ps_1, ps_2 и задана функция разметки l для операторов. Оператор $wait(f)$ реализован посредством ожидания по условию; $f-$булева переменная. При моделировании процессов абстрагируются от относительных скоростей операций и считают ,что на любом шаге вычисления может исполниться очередной оператор любого процесса. Граф Γ_0 (Γ_1) строится для начального значения $f = 0$ ($f = 1$). Узел графа – список вида $< k, < f, l(op_1), l(op_2) >; k_1, k_2 >$, k, k_1, k_2 – номер узла и номера смежных с ним вершин. Графы $\Gamma_j(m)$ строятся последовательно с использованием двух стеков $sk(ps_i, n)$ из операторов, подлежащих исполнению после $n-$ шагов вычисления, причем в список заносятся только новые узлы. Т.к. рассматриваются программы с конечным числом состояний, то $(\exists m)(\Gamma_j(m+1) = \Gamma_j(m) {=} \Gamma_j)$. Проблема взаимного исключения сводится к существованию в графах Γ_0 и Γ_1 полей с метками из критических секций.

Список литературы

[1] Goncharov S.S., Ershov Yu.L., Sviridenko D.I., Semantic programming. Information processing. 1986, V. 11, N 10, p. 1093–1100.

ДГТУ,Ростов-на-Дону
E-mail: lar@aaanet.ru

Разработка автоматизированных методов извлечения знаний из медицинских текстов

Т. В. Дементьева

Цель работы - разработка автоматизированного метода для извлечения и формального представления знаний из текстов медицинских документов, написанных на русском языке.

В работе решается проблема извлечения полезной информации из медицинских текстов для пополнения базы знаний облачной платформы IACPaaS. Для решения этой задачи используется метод преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов в виде фрагментов атомарных диаграмм, основанный на теории И. А. Мельчук "Смысл «=» текст" [1].

В ходе работы был модифицирован теоретико-модельный подход к решению задачи извлечения знаний [2] с учётом специфики построения предложений в медицинских текстах.

Для построения смылового дерева, в котором корень дерева - название болезни, ветви - предикаты, не концевые вершины - константы-индентификаторы, а концевые вершины - смысловые константы используется алгоритм преобразования полученных фрагментов атомрных диаграмм в двухместные предикаты [2]. Далее это дерево транслируется в машиночитаемый формат JSON [3].

Для тестирования использовались тексты медицинских статей с описанием болезней, их лечения и диагностики.

Список литературы

[1] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка / О. Г. Махасоева, Д. Е. Пальчунов // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. - 2014. - Т. 12, вып. 2. С. 64 - 73.

[2] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов / Е. О. Ненашева, Д. Е. Пальчунов // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. - 2017. - Т. 15, вып. 3. С. 55 - 60.

[3] Погодин Р. С. Автоматизированное извлечение знаний из медицинских текстов / Р. С. Погодин // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. - 2020. - 7. С. 96 - 99.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: t.dementeva@g.nsu.ru

К вопросу применения функций алгебры логики к решению оптимизационных задач

Б. Н. Дроботун

Пусть работа совокупности объектов $\mathbf{T} = \{T_1; T_2; \ldots; T_t\}$ в штатном режиме обеспечивается за счет выполнения всех базовых условий из множества $\mathbf{S} = \{S_1; S_2; \ldots; S_m\}$ и некоторых дополнительных условий из множества $\mathbf{R} = \{R_1; R_2; \ldots; R_t\}$. При этом, выполнимость только базовых условий не обеспечивает функционирование объектов $T_{i_1}; T_{i_2}; \ldots; T_{i_T} \in \mathbf{T}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq t$ в штатном режиме, а требует выполнения для каждого из них еще и некоторого дополнительного условия, выбор которого может осуществляться неоднозначно. Через $R^{(k)}_{j_1}; R^{(k)}_{j_2}; \ldots; R^{(k)}_{j_k}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{l_k} \leq n$, $l_k \in N$ обозначим дополнительные условия, каждое из которых (вместе с основными условиями) гарантирует штатный режим работы объекта T_{i_k}; $k = 1; 2; \ldots; r$.

Систему дополнительных условий, обеспечивающую (вместе с условиями из $\mathbf{S}$) штатный режим работы всех объектов совокупности $\mathbf{T}$, будем называть минимально допустимой, если удаление из нее любого условия приводит к нарушению штатного режима. Объединение множества $\mathbf{S}$ с минимально допустимой системой условий будем называть оптимальной системой.

В данной заметке дается описание теоретических предпосылок метода нахождения оптимальных систем. Отождествляя условия из $\mathbf{R}$ с переменными, рассмотрим КНФ

$$\mathbf{\Phi_T} = \bigwedge_{k=1}^{r} (R^{(k)}_{j_1} \vee R^{(k)}_{j_2} \vee; \ldots; \vee R^{(k)}_{j_k})$$

Преобразуем эту КНФ к ДНФ $\mathbf{\Phi'_T}$, равносильной $\mathbf{\Phi_T}$ [**1**].

Основные свойства функции $\mathbf{\Phi'_T}$ заключаются в следующем:

1) В каждом логическом слагаемом функции $\mathbf{\Phi'_T}$, для каждого объекта совокупности $\mathbf{T}$, функционирование которого не обеспечивается за счет выполнения только основных условий, содержится (в качестве логического сомножителя) дополнительное условие, обеспечивающее (совместно с основными условиями системы $\mathbf{S}$) штатный режим работы этого объекта;

2) Совокупность логических сомножителей каждого логического слагаемого функции $\mathbf{\Phi'_T}$ представляет собой минимально допустимую систему условий;

3) Объединение совокупности дополнительных условий каждого из логических слагаемых функции $\mathbf{\Phi'_T}$ с множеством $\mathbf{S}$ дает оптимальную систему условий.

Список литературы

[1] Васильев Ю. Л., Ветухновский Ф. Я. и др. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, Т.1. М.: Наука, 1974.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Павлодар (Казахстан)
E-mail: drobotun.nina@mail.ru

Разработка модуля поиска оптимальной последовательности действий для создания интеллектуального помощника

А. О. Зайцев

Популярность сети интернет и, как следствие, развитие IT технологий упростили жизнь человека. Появилась возможность голосовой передачи сообщений, из-за чего начали развиваться умные помощники и чат-боты. Данная работа является частью большого проекта интеллектуального помощника, создаваемого для помощи слабовидящим людям, и направлена на поиск оптимальной последовательности действий.

Поиск оптимальной последовательности действий как задача появился очень давно. Еще в 19 веке появились первые задачи поиска самого выгодного маршрута, проходящего через указанные города. Основной проблемой поиска оптимального маршрута являлись и являются ограничения.

Использование существующего алгоритма, учитывающего лишь часть ограничений, не будет достаточна для поставленной цели. Поэтому учет всевозможных ограничений позволил бы построить полную модель поиска оптимальной последовательности действий.

Целью данной работы является разработка модуля для интеллектуального помощника, выполняющего поиск оптимальной последовательности пользовательских действий с учетом ограничений [**1**].

В рамках работы были поставлены следующие глобальные задачи: определиться с технологиями, выбрать пригодный алгоритм, способный выполнять решение поставленной цели, реализация алгоритма на выбранном языке программирования, встраивание в общую системы и проверка качества результатов.

На данном этапе были решены следующие задачи: проведен анализ литературы, изучена предметную область, разработана онтологическую модель решаемой задачи [**2, 3**], определены технологии для поставленной задачи, был выбран существующий пригодный алгоритм, реализован и протестирован, проанализированы результаты его работы.

Список литературы

[1] Филипов И.И., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А., Разработка методов семантического поиска в Интернете, основанных на древоводных лингвистических шаблонах, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т.17, N 3, С.111-122.

[2] Пальчунов Д.Е., Целищев В.В., Проблема извлечения знаний в системе взаимодействия человека и компьютера: онтологии и пресуппозиции. Философия науки. 2012. N 4 (55). С. 20-35.

[3] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е., Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. С. 34–46.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.zaitsev3@g.nsu.ru

Разработка системы контекстного поиска и извлечения аргументации из текста на естественном языке

Д. К. Зулин

Добыча аргументов (Argumentation Mining) — раздел исследований машинной обработки естественного языка, сфокусированный на поиске и извлечении утверждений и оснований из текстов.

Согласно исследованиям, проведенным в 2019 и 2020 годах компанией Jumpshot, более 50 процентов поисковых запросов Google не привели к переходу на сторонние ресурсы. Это означает, что среднестатистическому пользователю не столь важна сама страница, как информация о ней. Таким образом, стал актуальным вопрос о разработках технологий, позволяющих анализировать и предоставлять краткую сводку по запросу на различные тематики.

В данной работе планируется создание системы, анализирующей новостные статьи с целью выдачи аргументов по тематике, заданной запросом пользователя. Также, для решения проблемы омонимии слов, возникающей при использовании крупных словарей будет использована модель, позволяющая классифицировать слова в зависимости от контекста их использования, что также позволит сузить поиск по сохраненным документам.

В докладе будет рассмотрена модель латентного размещения Дирихле [**1**], а также её применение в области поиска аргументации на заданную тематику для заранее определенного корпуса текстов.

Список литературы

[1] David M. Blei, Andrew Y. Ng, Michael I. Jordan. Latent Dirichlet Allocation. Journal of Machine Learning Research 3

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: d.zulin@g.nsu.ru

Формирование портрета высшего учебного заведения для рекомендательной системы «Абитуриент – Студент»

А. А. Зыкова

При выборе высшего учебного заведения абитуриент рассматривает различные критерии: наличие общежития, возможность карьерного роста, преподавательский состав и многое другое. Помочь ему сделать выбор призвана система“Абитуриент - Студент” [**1**]. Она включает в себя базу знаний [**2**] с данными из анкет для студентов и модуль статистики [**3**], который предоставляет абитуриенту краткую статистическую информацию (оценки, графики), а также подробные отзывы студентов. Помимо этого система умеет формировать портрет универститета. Под этим определением будем понимать набор фактов о тех или иных сферах жизни университета, которые более других выделяются из списка критериев. Система допускает несколько методов формирования портрета:

1. По критериям, заданным абитуриентом [**4**], наиболее интересующим его. Такой метод использует создание онтологии университетов и обращение к ней по заданным критериям абитуриента;
2. По убыванию “объективности” факта. Считаем, что факт является наиболее объективным, если он в том или ином виде встречается в списке отзывов несколько раз;
3. По убыванию актуальности фактов. Считаем, что факт является наиболее актуальным, если он помещён в список отзывов с более поздней датой, чем другие;
4. В рекламных целях. Определяя тональность отзыва, показываем абитуриенту, в первую очередь, наболее положительные или отрицательные отзывы;
5. Совмещение различных методов из пунктов 1-4.

Список литературы

[1] Зыкова А.А., Яхъяева Г.Э. Программная система «Абитуриент – Студент». Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. N 4(54), 2020.

[2] Зыкова А.А., Разработка базы знаний для программной системы «Абитуриент – Студент». Информационные технологии. 2020. С. 177-177

[3] Зыкова А.А., Разработка модуля статистики для рекомендательной системы высших учебных заведений. Знаний-Онтологии-Теории (ЗОНТ-2019). 2019. С. 421-421.

[4] Яхъяева Г.Э., Абсайдульева А.Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: azalekss@mail.ru

Дискретизация фазового портрета моделей кольцевых генных сетей

Н. Е. Кириллова

Кольцевые генные сети моделируются динамическими системами вида

$$\frac{dm_j}{dt} = -k_j m_j + f_j(p_{j-1}); \quad \frac{dp_j}{dt} = \mu_j m_j - \nu_j p_j; \quad j = \overline{1,6}, \tag{1}$$

Здесь $f_j(p_{j-1})$ — гладкие монотонно убывающие функции неотрицательного аргумента, p_j и m_j — концентрации белков и мРНК, μ_j, ν_j и k_j — положительные постоянные, $p_{j-1} = p_1$ при $j = 1$.

На основе комбинаторного анализа фазового портрета системы (1) нами были установлены условия существования циклов у ряда подобных систем других размерностей, см. [**1, 2**]. В настоящей работе, используя результаты, описанные в [**3**], мы строим инвариантную поверхность, содержащую цикл системы (1). Такая редукция размерности (в данном случае с 6 до 2) позволяет упрощать численные эксперименты с подобными моделями генных сетей.

Параллелепипед $Q = \prod_{j=1}^{j=3}([0, A_j] \times [0, B_j])$ является инвариантной областью системы (1). Здесь $A_j := f_j(0)/k_j$ и $B_j := \mu_j A_j/\nu_j$. У этой системы есть в точности одна стационарная точка S_0, см. [**1, 4**]. Разобьем область Q плоскостями, параллельными координатным плоскостям и проходящими через стационарную точку S_0 , на 2^6 более мелких параллелепипедов, которые мы будем называть блоками и нумеровать бинарными мультииндексами: $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\}$ так, что $\varepsilon_j = 0$, если в этом блоке $m_j \leq 1$ (или $p_j \leq 1$), и $\varepsilon_j = 1$, если $m_j > 1$ (или $p_j > 1$).

Стационарная точка динамической системы называется *гиперболической*, если собственные числа соответствующей матрицы линеаризации имеют положительные и отрицательные вещественные части, но не являются мнимыми.

Теорема. *Если S_0 — гиперболическая стационарная точка, то через неё проходит инвариантная поверхность, содержащая цикл системы* (1).

Подобные результаты могут быть получены и для других динамических систем, например, рассмотренных в [**1**] — 10-мерных, 18-мерных и их аналогов.

Работа поддержана РФФИ, проект 18-01-00057.

Список литературы

[1] Голубятников В.П., Кириллова Н.Е. О циклах в моделях функционирования кольцевых генных сетей // Сиб. Жур. Чистой и Прикл. Математики. 2018. Т. 18, 1, С. 54–63.

[2] Кириллова Н.Е., Минушкина Л.С. О дискретизации фазовых портретов динамических систем // Известия АлтГУ. 2019. Т. 108, 4, С. 82–85.

[3] Abraham R., Robbin J. Transversal mappings and flows. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[4] Аюпова Н.Б., Голубятников В.П., Казанцев М.В. О существовании цикла в одной несимметричной модели молекулярного репрессилятора // Сибирский журнал вычислительной математики. 2017. Т. 20, 2, С. 121–129.

Институт Математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: kne@math.nsc.ru

Определение и декомпозиция задач пользователя для создания интеллектуального голосового помощника

А. С. Кондратьев

Развитие компьютерных технологий и их проникновение во все сферы жизни привело к огромному росту числа пользователей. Кроме того, среди пользователей стали появляться незрячие и слабовидящие люди, не имеющие возможности полноценно пользоваться программами, так как большая часть информации передается визуально. Данная работа посвящена вопросу определения и декомпозиции задач пользователя для создания интеллектуального голосового помощника для данной категории пользователей.

Большую популярность обретает анализ естественного языка [**1, 2, 3**]. Основной проблемой анализа естественного языка, рассматриваемой в данной работе, является определение пользовательских задач.

Цель работы: разработать и использовать для создания интеллектуального помощника модуль определения и декомпозиции задач.

В рамках данной работы формулированы следующие задачи: изучить существующие способы анализа текста, изучить методы определения задач пользователей, определить набор необходимых технологий, сформулировать принцип построения данного модуля, реализовать программный модуль, применить полученную реализацию в качестве одного из модулей умного помощника.

В рамках работы будет рассматриваться специфическая предметная область - университет, а также специфическая категория пользователей. Однако разрабатываемый метод также можно будет применить и в других областях, и с другими пользователями.

Были решены следующие задачи: изучены способы анализа текста, методы определения задач пользователей, выбран набор необходимых технологий, сформулирован принцип построения данного модуля. В дальнейшем необходимо приступить к реализации и тестированию модуля.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е. Поиск и извлечение знаний: порождение новых знаний на основе анализа текстов естественного языка. Философия науки. 2009. 4 (43). С. 70-90.

[2] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. 3. С. 34-48.

[3] Власов Д.Ю., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. 3

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: sen.kondratev@gmail.com

Генерация рекомендаций по выбору сценариев реагирования на инциденты информационной безопасности

И. А. Краева

В сфере обеспечения информационной безопасности (ИБ) широко распространены системы класса Security Orchestration, Automation and Response (SOAR), которые используются в организациях для автоматизации процессов реагирования на инциденты ИБ, в том числе процесса выбора сценариев реагирования и их выполнения.

В существующих SOAR-системах используется метод получения рекомендаций по выбору сценариев реагирования на основе правил [**1**] - эксперты предметной области для каждого сценария реагирования задают правила, состоящие из высказываний об инцидентах ИБ, для которых сценарий может использоваться. Также есть исследования, предлагающие использование анализа прецедентов [2-5] - эксперты описывают модель прецедента, на основе которой выполняется сохранение и извлечение прецедентов из базы.

В работе предлагается оригинальный метод, не требующий привлечения экспертов предметной области, основанный на обучении представлениям [**6**] и многозначной классификации [**7**]. Вначале сиамская нейронная сеть преобразует инциденты ИБ в пространство, в котором инциденты ИБ с одинаковыми сценариями реагирования находятся близко друг к другу, с разными сценарии - далеко друг от друга. Затем полученные представления используются для многозначной классификации.

Эксперименты на наборе данных с реальными инцидентами ИБ показывают, что предлагаемый метод позволяет эффективно решать задачу генерации рекомендаций по выбору сценариев реагирования на инциденты ИБ.

Список литературы

[1] Reviews for Security Orchestration, Automation and Response solutions: URL: https://www.gartner.com/

[2] Marcelo Colome, Raul Ceretta Nunes, Luis Alvaro de Lima Silva. Case-Based Cybersecurity Incident Resolution. SEKE 2019: 253-330

[3] Жуков В.Г., Шаляпин А.А., Соколов М.М. Исследование алгоритма прецедентного анализа в задаче классификации инцидентов информационной безопасности // Вестник СибГАУ Т. 16, N 3. С. 572-579

[4] Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Применение методологии прецедентных моделей в системе риск - менеджмента, направленного на раннюю диагностику компьютерного нападения. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2012. Т.10, вып. 2. С. 106-115

[5] Головин Н.А., Савин Н.П., Яхъяева Г.Э. Применение методов машинного обучения для структурирования базы прецедентов компьютерных атак. Материалы Международной конференции «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2019), Новосибирск, 2019, с. 122-128.

[6] Mahmut Kaya, Hasan Sakir Bi?lge. Deep Metric Learning: A Survey. Symmetry 2019, 11(9).

[7] Tsoumakas, Grigorios, and Ioannis Katakis. Multi-Label Classification: An Overview. International Journal of Data Warehousing and Mining (IJDWM) 3 (2007)

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: i.kraeva@g.nsu.ru

Алгоритм анализа тавтологий в тексте

А. Д. Лебедева

Человек может допускать в письменной речи ошибки из-за невнимательности, неграмотности или забывания правил. Для устранения всех ошибок могут потребоваться колоссальные человеческие ресурсы, поэтому распространено написание веб-сервисов и программного обеспечения для упрощения работы человека [**1**]. Орфографические и грамматические ошибки имеют строгие правила, в связи с чем анализаторы этих ошибок найти достаточно легко. Но когда речь заходит о таких стилистических ошибках, как плеоназмы, тавтологии, бедность конструкций и другие, которые сложнее заметить и исправить, то затруднительно найти нужный анализатор.

Данная работа посвящена устранению распространенной стилистической ошибки — тавтологии. Тавтология может появиться в трех ситуациях: повторение словоформ, синонимичных частей речи и однокоренных слов. В рамках данной работы разработан алгоритм анализа текста с целью устранения тавтологических ошибок.

Перед началом работы алгоритма производится лемматизация текста по каждому слову и динамически строится словарь лемм [**2**]. Далее алгоритм обрабатывает вышеперечисленные ситуации. В соответствии с ситуацией выбирается пороговое расстояние, указывающее на наличие ошибки в сегменте текста, сортируется в порядке убывания количества ошибок и предлагается замена слова с использованием инструмента RuWordNet [**3**]. Также строится визуализация текста для случая с однокоренными словами.

Список литературы

[1] Яхъяева Г.Э., Абсайдульевой А.Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств.Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[2] Батура Т. В. Математическая лингвистика и автоматическая обработка текстов : учеб. пособие. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск : РИЦ НГУ, 2016. 166 с.

[3] Лукашевич Н.В. Тезаурусы в задачах информационного поиска. Изд-во Московского университета, 2011.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.lebedeva1@g.nsu.ru

Разработка интерфейса модуля нечетко-вероятносных вопросов для вероятностной вопросно-ответной системы

Е. О. Легостаева

Управление информационными рисками - сложный и важный процесс в деятельности компаний, особенно тех, которые работают с конфиденциальной информацией. Чтобы обезопаситься от компьютерных атак, можно попытаться их предсказать. Пользователям справиться с этим может помочь постановка вероятностных вопросов с целью определения и прогнозирования различных рисков, связанных с компьютерными атаками. Для того, чтобы появилась возможность дать ответы на подобные вопросы, возникает потребность в разработке информационной системы, а также алгоритмов для работы с ней, позволяющей упростить извлечение и манипулирование объемами данных, необходимыми для построения ответов.

Для решения данной проблемы в НГУ была разработана вопросно-ответная система RiskPanel, позволяющая пользователю в диалоговом режиме производить анализ различных рисков, связанных с компьютерными атаками [1]. Модуль QA-RiskPanel является вопросно-ответной системой, основанной на знаниях (knowledge based QA-system) [2]. В качестве источника знаний в системе QA-RiskPanel используется постоянно пополняемая база прецедентов компьютерных атак, что обеспечивает актуализацию прогнозирования рисков [3, 4]. Была разработана классификация вопросов модуля QA-RiskPanel. состоящая из разных вопросных типов: безусловные, условные и модальные. Данная работа посвящена моделированию и логическому представлению условного вопросного типа. Разработан веб-интерфейс модуля, позволяющий порождать условные и нечетко-условные вопросы, а также их булевы комбинации.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э., Хамутская А.А. Программная система управления информационными рисками RiskPanel. Программная инженерия. 2011. N 7. С. 29-36.

[2] Яхъяева Г.Э., Карманова А.А., Ершов А.А., Савин Н.П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей. Информационные технологии, Том 23, N 2, 2017, с. 97–106.

[3] Головин Н.А., Савин Н.П., Яхъяева Г.Э. Применение методов машинного обучения для структурирования базы прецедентов компьютерных атак. Материалы Международной конференции «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2019), Новосибирск, 2019, с. 122-128.

[4] Palchunov, D.E., Tishkovsky, D.E., Tishkovskaya, S.V., Yakhyaeva G.E. Combining logical and statistical rule reasoning and verification for medical applications. Proceedings - 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, SIBIRCON 2017, 18-22 September 2017, Novosibirsk, Russia.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: e.legostaeva@g.nsu.ru

Разработка четырехуровневой семантической модели для создания интеллектуального голосового помощника

Р. А. Лешов

По мере развития компьютерных технологий, их начинают применять во всех сферах жизни. Вместе с этим становится все больше пользователей компьютерных технологий, среди которых встречаются люди, имеющие проблемы со зрением. Ввиду того, что большая часть информации передается визуально, у таких пользователей возникают трудности с использованием программ и сервисов, не имеющих специальных средств управления для слабовидящих людей. Данная работа посвящена вопросу разработки четырехуровневой семантической модели предметной области [**1**] для создания интеллектуального голосового помощника для данной категории пользователей.

Задача построения семантической модели включает в себя спецификацию смысла ключевых понятий предметной области [**2**]. В текущее время эта задача решается, в основном, путем построения ER-диаграмм, которые отражают взаимосвязи между сущностями предметной области, но в то же время упускают такие важные факторы, как знания и прецеденты в предметной области. Разработка модели, учитывающей эти факторы, позволила бы программе лучше понимать нужды и намерения пользователя.

Цель работы: разработать и применить для создания интеллектуального помощника семантическую модель предметной области, включающую онтологическую модель, модель знаний и прецедентов [**1, 3**].

В рамках работы будет рассматриваться специфическая предметная область - университет. Тем не менее, модель будет реализована с учетом возможности ее использования и в других областях.

Были решены следующие задачи: проведен анализ литературы, изучены методы создания онтологий, описана методология исследования, разработана онтология предметной области университета.

Список литературы

[1] Найданов Ч.А., Пальчунов Д.Е., Сазонова П.А. Разработка автоматизированных методов предупреждения рисков возникновения критических состояний, основанных на анализе знаний, извлечённых из историй болезней пациентов // Сибирский научный медицинский журнал. 2016. Т. 36. 1. С. 105-113.

[2] Власов Д.Ю., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. 3. С. 23-33.

[3] Долгушева Е.В., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы порождения знаний о предпочтениях абонентов мобильных сетей // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. 2. С. 5-16.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: r.leshov@g.nsu.ru

Алгоритм Очевидности и системы САД и SAD

А. В. Лялецкий, А. А. Лялецкий

В этом, 2020-ом, году исполняется 50 лет с момента объявления академиком В. М. Глушковым в [**1**] программы работ по автоматизации поиска доказательств в математике, получившей название Алгоритм Очевидности (АО).

В рамках АО были спроектированы и реализованы русскоязычная система САД [**2**] в середине 1970-х годов и англоязычная система SAD [**3**] в начале 2000-х годов (последняя размещена на сайте "nevidal.org").

Обе системы удовлетворяют, в разной степени, основным требованиям АО: (1) входным языком системы поиска доказательств должен быть формальный язык, максимально приближенный к языкам естественных математических публикаций, (2) поиск доказательств должен проводиться системой на основе формального понятия машинной очевидности шага доказательства, (3) система должна работать с использованием базы знаний, накапливаемых по ходу развития системы, и (4) должна существовать возможность интерактивного взаимодействия системы с человеком для привлечения его к поиску доказательства.

Развитие САД было прекращено в 1992 г. после вывода из эксплуатации ЕС ЭВМ, на которых она была реализована. Что же касается системы SAD, предназначенной как для поиска доказательств, так и верификации математических текстов, то она до сих пор доступна на сайте "nevidal.org", и с ней можно проводить различные эксперименты в онлайновом режиме. Она показала достаточно неплохие результаты при верификации реальных математических текстов.

В настоящее время ведутся работы по дальнейшему развитию системы SAD. В первую очередь они ориентированы на разработку и реализацию русскоязычной и украиноязычной версий её входного языка и на создание программного инструментария, позволяющего системе SAD проводить эффективные машинные построения в классической и неклассических логиках первого порядка. Имеются наброски упомянутых версий. Что же касается инструментария, планируемого к реализации, то подход, направленный на его создание, частично отражен в [**4**].

Список литературы

[1] Глушков В.М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта. Кибернетика, No. 2, 1970, С. 3-13.

[2] Капитонова Ю. В., Вершинин К. П., Дегтярев А. И., Жежерун А. П., Лялецкий А. В. О системе обработки математических текстов. Кибернетика, No. 2, 1979, С. 48.

[3] Lyaletski A. Verchinine K., Degtyarev A., Paskevich A. System for Automated Deduction (SAD): Linguistic and deductive peculiarities. Advances in Soft Computing, V. 17, 2002, P. 413-422.

[4] Lyaletski A. Mathematical text processing in EA-style: a sequent aspect. Journal of Formalized Reasoning, V. 9, No. 1, 2016, P. 235-264.

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, Киев
E-mail: a.lyaletski@nubip.edu.ua, alyaletsky@yahoo.com

CI-CLOPE для решения задачи кластеризации категориальных данных и его параллельная реализация

А. С. Михайлов

Машинное обучение в настоящее время стремительно развивается и только набирает популярность. Анализ данных и построение моделей позволяет выделить общие связи между ними, а также классифицировать и объединять по группам.Особую роль играет кластеризация категориальных данных, в которых отсутствует численная характеристика [**1**], [**2**]. Сложность данной задачи заключается в том, что данные проходят процесс попарного сравнивания на каждой итерации, и, как следствие, падает производительность.

Существуют несколько алгоритмов для решения данной задачи. Примеры таких алгоритмов: F-Tree, LargeItem, ROCK, CLOPE. CLOPE выделяется среди других наличием преимуществ, таких как производительность, а также точность разбиения данных на группы и зависит только лишь от одного глобального критерия оценки.

Одним из плюсов данного алгоритма можно назвать автоматическое генерирование кластеров, но это также является и его недостатком в случае, когда мы точно знаем, какое количество кластеров хотим получить. Единственным способом получения другого количества кластеров - это изменение его параметра глобального критерия. Но постоянное изменение параметра требует повторного разбиения элементов, что приводит к значительному увеличению времени.

Как следствие, была построена модификация данного алгоритма для подобного типа задач CI-CLOPE [**3**]. Суть данного алгоритма состоит в объединении и разбиении кластеров, которые были получены в результате действия исходного CLOPE. Объединение кластеров осуществляется за счет попарного объединения двух кластеров и проверки значения глобальной функции стоимости. Выбирается вариант, соответствующий максимальному значению. Разбиение кластера проводится с простым разделением самого большого кластера на два равных.

Для увеличения производительности второго этапа текущая реализация была распараллелена с помощью Kotlin Coroutines, что показало значительное сокращение времени вычисления.

Список литературы

[1] Яхъяева Г.Э., Абсайдульевой А.Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[2] Баталин К.В., Яхъяева Г.Э. Система управления оценочными средствами. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2020. Т.18, N 2. С. 5–14.

[3] Михайлов А.С., Шабанов В.Ю. P-CI-CLOPE - многопоточный алгоритм кластеризации транзакционных данных // Инновации. Наука. Образование. Тольятти, 2020. N 14. С. 371–379

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.mikhailov7@g.nsu.ru

Метод частичной скулемизации в задаче поиска интуиционистского натурального вывода

О. А. Охотников

Автоматическое доказательство теорем является весьма важной областью современных исследований (см., например, [**1**]). Значительное внимание уделяется методам поиска натурального классического логического вывода, в которых используются метапеременные (см., например, [**2**]). Высокую эффективность для таких методов показало использование частичной скулемизации (см. [**3, 4**]). В данной работе мы распространяем подход на основе частичной скулемизации на интуиционистскую и минимальную логику.

Рассматриваемый метод описывается в рамках некоторой продукционной системы с метапеременными. Дедуктивные задачи этой продукционной системы формулируются с использованием частичной скулемизации. При этом скулемизируются посылки дедуктивных задач. Такая нормальная форма Скулема позволяет не терять связь с искомым интуиционистским логическим выводом. Тот же подход мы применяем для минимальной логики.

В рамках продукционной системы процесс поиска решения задачи связан с формированием дерева поиска типа И/ИЛИ. По сути, продукционная система — это формулировка некоторого алгоритма с точностью до стратегии построения дерева поиска. Зафиксировав конкретную стратегию построения дерева поиска, мы получаем некоторую реализацию так сформулированного алгоритма. Например, алгоритм [**4**] использует стратегию поиска в глубину. Для указанной продукционной системы доказаны теоремы о корректности и полноте.

Список литературы

[1] Robinson A., Voronkov A., eds. Handbook of Automated Reasoning. *Elsevier and MIT Press*, 2001.

[2] Конев Б.Ю., Жебелеан Т. Метод подъема решений для работы с метапеременными в системе THEOREMA. *Записки научных семенаров ПОМИ*, 2002, Т. 293, С. 94–117.

[3] Охотников О.А. О поиске натурального классического логического вывода с использованием частичной скулемизации. *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, 2019, Т. 23, Вып. 4, С. 39–90.

[4] Вторушин Ю.И. О поиске вывода в системе натуральной дедукции логики предикатов. *Интеллектуальные системы*, 2009, Т. 13, С. 263–288.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: oleg.okhotnikov@gmail.com

Разработка методов наполнения теории предметной области при помощи чат-ботов

А. С. Орловский, Д. Е. Пальчунов

Чат-боты применяются в различных сферах для автоматизации общения с пользователем на естественном языке [**1**] с целью сократить затраты на привлечение реальных людей. В рамках данного исследования был разработан предметно-специфичный чат-бот, задачей которого является отыскание для пользователя на основе его запроса наиболее релевантных товаров в Интернет-магазинах компьютерной техники. Программная система состоит из 4 компонентов, которые обмениваются сообщениями по протоколу HTTP:

1) Чат-бот – управляет состоянием диалога, принимает реплики пользователя и возвращает ответ после взаимодействия с остальными 3 сервисами.

2) Модуль обработки естественного языка – выполняет извлечение намерений (intents, применяется облачная служба DialogFlow) и именованных сущностей (NER, named entity recognition, применяется программный пакет Pullenti SDK) из запросов пользователя.

3) Бот для анализа сайтов – на основе извлечённых на предыдущем этапе сущностей (названий магазинов, типов и характеристиков товаров и т.д.) ищет требуемую информацию на сайтах и отправляет менеджеру онтологий запросы для синхронизации состояния. Именно на данном этапе происходит наполнение теории предметной области новыми знаниями посредством чат-бота, на основе запроса пользователя.

4) Модуль обработки онтологий – получает данные от бота для сайтов и SQWRL-запросы от модуля обработки текстов, построенные на основе извлечённых им сущностей [**2**]. База знаний предметной области хранится в формате OWL-онтологии, что позволяет автоматизировать сложный логический вывод о совместимости товаров при помощи SWRL-правил. Данный компонент реализован при помощи Java Spring Boot и OWL API.

Разработка ведётся на основе четырёхуровневой онтологической модели [**3**].

Список литературы

[1] Деревянко Д.В., Пальчунов Д.Е. Формальные методы разработки вопросно-ответной системы на естественном языке // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12. N 3. С. 34-47.

[2] Власов Д.Ю., Пальчунов Д.Е., Степанов П.А. Автоматизация извлечения отношений между понятиями из текстов естественного языка. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2010. Т. 8. N 3. С. 23-33.

[3] Найданов Ч.А., Пальчунов Д.Е., Сазонова П.А. Разработка автоматизированных методов предупреждения рисков возникновения критических состояний, основанных на анализе знаний, извлечённых из историй болезней пациентов // Сибирский научный медицинский журнал. 2016. Т. 36. N 1. С. 105-113.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.orlovskii@g.nsu.ru, palch@math.nsc.ru

Аксиоматизация классов неполных прецедентов предметных областей

Д. Е. Пальчунов

Исследуется проблема аксиоматизации классов прецедентов предметных областей. Рассматриваются неполные прецеденты, то есть, описания, содержащие лишь частичную информацию о данном прецеденте. Примерами неполных прецедентов являются истории болезней пациентов. Неполные прецеденты формализуются в виде фрагментов атомарных диаграмм. Исследуются классы неполных прецедентов, в которых различные фрагменты атомарных диаграмм, входящие в один класс, могут иметь разную сигнатуру.

Решается проблема аксиоматизации классов неполных прецедентов. Введено понятие теории класса фрагментов атомарных диаграмм, которое является обобщением понятия теории класса моделей. Исследования основаны на полученных ранее результатах по формализации прецедентов предметных областей и аксиоматизации классов алгебраических систем [1, 2], в частности, классов, содержащих системы, имеющие разную сигнатуру [3].

Определение 1. Предложение φ называется атомарным, если $\varphi = (c_1 = c_2)$ или $\varphi = P(c_1, \ldots, c_n)$, где $c_1, \ldots, c_n$ – константы.
$AS(\sigma) = \{ \varphi \in S(\sigma) \mid \varphi$ *атомарно или* $\varphi = \neg\psi$ *и* ψ *атомарно*$\}$.

Рассмотрим σ и σ_1 – две различные сигнатуры.

Определение 2. Пусть $\Delta \subseteq AS(\sigma_1)$ и $\Gamma \subseteq S(\sigma)$. Обозначим $\Delta \| \Gamma$ если $\Delta \cup \Gamma \nvdash$. Пусть $K \subseteq \wp(AS(\sigma_1))$ и $\Gamma \subseteq S(\sigma)$. Обозначим $K \| \Gamma$ если $\Delta \cup \Gamma \nvdash$ для любого $\Delta \in K$.

Определение 3. Пусть $\Delta \subseteq AS(\sigma_1)$ и $\Delta \nvdash$. Супертеорией фрагмента атомарной диаграммы Δ назовем множество
$ST(\Delta) = \{\Gamma \subseteq S(\sigma) \mid \Gamma$ *максимально со свойством* $\Delta \| \Gamma\}$.

Теорема 1. *Если* $\Delta \subseteq AS(\sigma_1), \Delta \nvdash$ *и* $T \in ST(\Delta)$, *то* T *– полная теория.*

Следствие 1. *Пусть* $\Delta \subseteq AS(\sigma_1)$ *и* T *– полная теория. Тогда* $T \in ST(\Delta)$ *равносильно* $\Delta \cup T \nvdash$.

Определение 4. $K_0 = \{ \Delta \subseteq AS(\sigma_1) \mid \Delta \nvdash\}$, пусть $K \subseteq K_0$. Супертеорией класса фрагментов атомарных диаграмм K назовем множество
$ST(K) = \{\Gamma \subseteq S(\sigma) \mid \Gamma$ *максимально со свойством* $K \| \Gamma\}$.

Мы ввели понятие теории фрагмента атомарной диаграммы и теории класса фрагментов атомарных диаграмм; эти определения являются обобщением элементарной теории модели и теории класса моделей. Сейчас мы можем определить понятие аксиоматизируемого класса фрагментов атомарных диаграмм, являющееся обобщением понятия аксиоматизируемого класса моделей.

Определение 5. Класс $K \subseteq K_0$ называется аксиоматизируемым, если пара $(K, ST(K))$ является формальным понятием формального контекста $(K_0, \mathbb{T}, \|)$, где

$$\mathbb{T} = \{ T \subseteq S(\sigma) \mid T \text{ – } \textit{теория}\}.$$

Теорема 2. $ST(K) = K'$ *в формальном контексте* $(K_0, \mathbb{T}, \|)$.

Список литературы

[1] Pal'chunov D.E. Lattices of relatively axiomatizable classes. Lecture Notes in Computer Science. 2007. T. 4390 LNAI. C. 221-239.

[2] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. Conceptual methods for identifying needs of mobile network subscribers. В сборнике: CEUR Workshop Proceedings 13. Сер. "CLA 2016 - Proceedings of the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications" 2016. С. 147-160.

[3] Palchunov Dmitry E. Axiomatization of Classes of Domain Cases Based on FCA. In: 18th Russian Conference, RCAI 2020, Moscow, Russia, October 10–16, 2020, Lecture Notes in Artificial Intelligence 12412, p. 3-14.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru

Модель распознавания эмоциональной окраски текстовых сообщений, основанная на характеристике частоты символов

И. В. Пахомов

Многие известные на данный момент модели распознавания эмоциональной окраски текстовых сообщений основаны на лексическом или синтаксическом видах анализа. Данные подходы требуют обучения модели распознавания по словарю, или набору правил рассматриваемого языка [1,2]. Такие методы могут не учитывать вызываемые излишней эмоциональностью орфографические ошибки, слэнг, формы оскорблений, а также спецсимволы, использующиеся для придания эмоциональности сообщению — смайлики (скобочки), аббревиатуры, восклицательные знаки, повторение символов и т.п.[3], либо потребовать расширения словарей.

Предлагается нейросетевая модель, классифицирующая текстовые сообщения на принадлежность некоторой эмоциональной группе, с учётом встречаемости отдельных символов и сочетания взаимного использования символов.

С помощью какого-либо стандартного метода распознавания символов определяются частоты повторяемости символов некоторого сообщения, а также вычисляется доля каждого символа среди всех символов в сообщении. Все доли встречаемости каждого символа в текстовом сообщении являются уникальной характеристикой данного сообщения. Эта частота и доли встречаемости будут являться входными данными для нейронной сети, которая уже будет определять принадлежность сообщения какой-то группе.

Данная модель позволяет не учитывать словарный состав языка и его правила (лексику и синтаксис), а позволяет основываться только на наборе символов, что позволяет учитывать неформальные виды использования языка. С другой стороны, более привычные модели распознавания, основанные на привычных методах, основанных на лексическом значении отдельных слов, обучающиеся по словарю, являются менее гибкими, тогда как данный метод предполагает обучение на некотором малом наборе готовых сообщений, обеспечивающих основной диапазон эмоций, и конструкций, их выражающих, в данном языке.

Список литературы

[1] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. N 2.

[2] Рабчевский Е. А. Автоматическое построение онтологий на основе лексико-синтаксических шаблонов для информационного поиска // Тр. 11-й Всерос. науч. конф. «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции». Петрозаводск, 2009. С. 69–77.

[3] Маслечкина С.В. Выражение эмоций в языке и речи // Вестник БГУ. 2015. N 3.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: iv-pahomov@yandex.ru

Прикладная логика мультиопераций

Н. А. Перязев

Пусть A – множество и $B(A)$ — множество всех конечных подмножеств A. Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A.

Пусть F – функциональная сигнатура с выделенными символами: нольместными o, c_i и двухместный $\cap$.

Пусть $\Re = \langle A, M\rangle$ — мультиалгебра с универсумом (носителем) A и множеством мультиопераций M, однотипных с F.

Мультиинтерпретация сигнатуры F в мультиалгебру $\Re$ определяется как отображение $\gamma : F \to M$, сохраняющее местность функционального символа и мультиоперации. Выделенные символы интерпретируются так: $\gamma(o) = \varnothing$, $\gamma(c_i)$ – одноэлементные множества, $\gamma(\cap)(a, b) = \{a\}$, если $a = b$ и $\gamma(\cap)(a, b) = \varnothing$, если $a \neq b$.

Определим термы в языке мультиопераций стандартным образом: любой нольместный символ сигнатуры F является термом и $f^n(t_1, ..., t_n)$ — терм, если $f^n \in F$ и $t_1, ..., t_n$ термы.

Формулы в языке мультиопераций так же определяются по индукции:
$(t_1 \subseteq t_2)$ — формула, где t_1, t_2 термы;
$(\Phi\&\Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg\Phi$ — формулы, где Φ, Ψ формулы;
$\forall x\Phi(x), \exists x\Phi(x)$ — формулы, где $\Phi(f^0)$ формула такая, что $f^0 \in F$ и в ее запись не входит x.

Значение терма t при мультиинтерпретации γ определяется так:
если $t \equiv f^0$, то $\gamma[t] = \gamma(f^0)$;
если $t \equiv f^n(t_1, ..., t_n)$, то $\gamma[t] = \bigcup\limits_{a_i \in \gamma[t_i]} \{a \mid a \in \gamma(f^n)(a_1, ..., a_n)\}$.

Истинностное значение формулы Φ при мультиинтерпретации γ определяется так:
если $\Phi \equiv t_1 \subseteq t_2$, то $\gamma[\Phi] = \dfrac{|\gamma[t_1] \cap \gamma[t_2]|}{|\gamma[t_1]|}$, при $|\gamma[t_1]| > 0$ и $\gamma[\Phi] = 1$, при $|\gamma[t_1]| = 0$;
если $\Phi \equiv \Psi_1 \vee \Psi_2$, то $\gamma[\Phi] = \max\{\gamma[\Psi_1], \gamma[\Psi_2]\}$;
если $\Phi \equiv \Psi_1 \,\&\, \Psi_2$, то $\gamma[\Phi] = \min\{\gamma[\Psi_1], \gamma[\Psi_2]\}$;
если $\Phi \equiv \neg\Psi$, то $\gamma[\Phi] = 1 - \gamma[\Psi]$;
если $\Phi = \exists x\Psi(x)$, то $\gamma[\Phi] = \sup\{\gamma[\Psi(c_i)] \mid \gamma(c_i) \in A\}$;
если $\Phi = \forall x\Psi(x)$, то $\gamma[\Phi] = \inf\{\gamma[\Psi(c_i)] \mid \gamma(c_i) \in A\}$.

Введенный язык мультиопераций имеет прикладную направленность. В докладе будет представлена система логического вывода табличного типа для определенной выше семантики языка мультиопераций.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Санкт-Петербург
E-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Разработка агрегатора электронных курсов для алгоритма рекомендаций

Т. М. Подкур

В последнее время онлайн образование становится все более актуальным [**1**], [**2**]. В сети Интернет появляются образовательные ресурсы, которые составляют конкуренцию учебным заведениям как по уровню образования [**3**], так и по востребованности среди студентов. Основной формой контента на таких ресурсах являются видеокурсы.

При поиске интересующих электронных курсов пользователь вынужден просматривать множество различных образовательных платформ. При этом каждая из них имеет свой интерфейс, классификацию тематик и параметры сортировки курсов. Данные различия существенно усложняют поиск. В результате пользователь может не найти интересующий его контент [**4**].

Для решения данной проблемы было предложено создать единый агрегатор курсов, который объединит в себе контент из нескольких образовательных платформ. Такой агрегатор будет хранить данные о курсах, а также связывать курсы и тематики отношениями. Разработанная структура позволит использовать агрегатор для алгоритма рекомендаций. На сегодняшний день агрегатор объединяет наиболее популярные платформы: Stepik, Coursera, «Смотри. Учись». На основе информации о курсах из выбранных образовательных платформ была сформирована единая сущность для курса, которая наиболее полно отражает его структуру. Разработан алгоритм автоматизированного составления единой классификации курсов, основанный на исходных тематиках выбранных платформ.

Список литературы

[1] Яхъяева Г.Э., Абсайдульевой А.Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[2] Зыкова А.А., Яхъяева Г.Э. Программная система «Абитуриент — Студент». Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. N 4(54), 2020.

[3] Баталин К.В., Яхъяева Г.Э. Система управления оценочными средствами. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2020. Т.18, N 2. С. 5–14.

[4] Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. СПб: Питер, 2000, 384 с.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: t.podkur@g.nsu.ru

Автоматизированное извлечение знаний из текстов медицинских документов

Р. С. Погодин

Работа посвящена разработке и применению теоретико-модельных методов для извлечения и формального представления знаний из текстов медицинских документов [1].

В работе решается проблема автоматизации наполнения базы знаний информацией из текстов, написанных на естественном языке.

Для решения задачи извлечения знаний используются методы преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов в виде фрагментов атомарных диаграмм [2]. Затем производится программная формализация формул в машиночитаемый формат JSON [3]. В результате работы была реализована программная система, взаимодействующая с базой знаний облачной платформы IACPaaS.

Преобразование текста в машиночитаемый формат состоит из нескольких этапов:

(1) Составление словарей.
(2) Преобразование предложений во фрагменты атомарных диаграмм.
(3) Преобразование многоместных предикатов в двуместные.
(4) Разбор однородных членов предложений в двуместных предикатах.
(5) Построение смыслового дерева.

Модули написаны на языках Java и C# и взаимодействуют между собой по протоколу HTTP. В качестве базы данных для хранения промежуточных результатов используется PostgreSQL. Экспорт инфоресурсов в IACPaaS производится по протоколу HTTP. На этапе экспорта производится дополнительная обработка дерева знаний для соответствия со схемой данных, ожидаемых облачной платформой.

Список литературы

[1] Погодин Р. С. Автоматизированное извлечение знаний из медицинских текстов / Р. С. Погодин // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. 2020. N 7. С. 96-99.

[2] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. Разработка автоматизированных методов преобразования предложений естественного языка в бескванторные формулы логики предикатов / Е. О. Ненашева, Д. Е. Пальчунов // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, вып. 3. С. 55–60.

[3] Капустина А. И., Пальчунов Д. Е. Разработка методов интеграции автоматических средств логического вывода для порождения знаний в онтологической модели. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, N 3. С. 29–42.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: ruspog@gmail.com

Разработка гибридных моделей на основе синтеза логического вывода и нейронных сетей

Д. В. Протасов

В связи с внедрением большого количества нейронных сетей в производство все чаще возникает потребность интерпретации результатов работы данных сетей в формате, воспринимаемом человеком. Однако даже рассмотрение прохождения данных по сети изнутри не способно дать четкого ответа, по какому признаку данные были обработаны на выходе именно таким, а не иным образом. Конечные пользователи нейросетей же чаще всего вовсе не знают внутреннего устройства нейронных сетей.

Один из рассматриваемых вариантов решения проблемы — использование дескрептивной логики и семантических сетей для построения логического вывода [**1, 2, 3**]. Нейронная сеть обрабатывает объекты из онтологии, после чего на основании вывода сети с помощью семантического механизма рассуждений строится логическое выражение, которое описывает объекты, попавшие в тот или иной класс.

Список литературы

[1] Корсун И.А., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы извлечения знаний о смысле понятий из текстов естественного языка. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. N 3. С. 34-48.

[2] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка онтологической модели тарифов и услуг сотовой связи, основанной на логически полных определениях понятий, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15. N 2. С. 34–46.

[3] Капустина А.И., Пальчунов Д.Е. Разработка методов интеграции автоматических средств логического вывода для порождения знаний в онтологической модели, Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, N 3. С. 29–42.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
E-mail: d.protasov@g.nsu.ru

Сбор и предобработка данных для системы предсказания лавинной опасности

Н. А. Радеев

Оценка лавинной опасности является сложной задачей, для решения которой нужно специальное образование и соответствующий опыт. Также данный процесс требует личного присутствия специалиста в месте, для которого производится оценка. А количество тестов, которые необходимо провести над снежным покровом для получения оценки приближается к сорока. Всё это делает задачу оценки лавинной опасности сложно разрешимой. С другой стороны, знание актуального значения оценки лавинной опасности по европейской шкале оценивания может помочь предпринять превентивные меры по обеспечению защиты благосостояния инфраструктуры, здоровья и жизней людей. В настоящее время системы автоматической оценки лавинной опасности не имеют повсеместного распространения и существуют лишь для единичных горных районов [**1**]. Таким образом, разработка системы автоматической оценки лавинной опасности является актуальной задачей.

Прежде, чем разрабатывать алгоритм машинного обучения, данные нужно структурировать [**2**]. В рамках данной работы выполняется сбор, очистка и приведение к рабочему виду данных, из которых в дальнейшем выделяются значимые для оценки лавинной опасности признаки. Все собранные данные были получены в одном месте на горнолыжном курорте в Швейцарии, что обеспечивает корректность их совместного использования. На этапе очистки из данных удаляются некорректные или неполные записи. Для недостающих данных о состоянии снежного покрова выполняется моделирование с помощью программного пакета для моделирования состояния снежного покрова SNOWPACK [**3**]. Приведённые к рабочему виду данные представляют собой датасет, состоящий из записей, содержащих метеорологические измерения в течение суток, отчёт о состоянии снежного покрова в этот же день и экспертную оценку лавинной опасности. На основании датасета выделяются значимые для оценки лавинной опасности признаки. Предполагается дальнейшее использование результатов работы для обучения и тестирования алгоритмов машинного и глубокого обучения.

Список литературы

[1] A. Pozdnoukhov, R.S. Purves, M. Kanevski Applying machine learning methods to avalanche forecasting. Annals of Glaciology 49 2008.

[2] Головин Н.А., Савин Н.П., Яхъяева Г.Э. Применение методов машинного обучения для структурирования базы прецедентов компьютерных атак. Материалы Международной конференции «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2019), Новосибирск, 2019, с. 122-128.

[3] Schirmer M., Lehning M., Schweizer J. Statistical forecasting of regional avalanche danger using simulated snow-cover data. Journal of Glaciology, Vol. 55, No. 193, 2009.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: rdvnkt@yandex.ru

Семантическая модель пользователя в задаче нейросетевого распознавания эмоций

О. А. Седухин

В докладе будет описана модель машинного обучения, в которой совмещается два подхода: нейронные сети и набор заранее заданных логических правил, составляющих семантическую модель пользователя. Под пользователем понимается человек, общающийся по видеосвязи. Наша задача - распознавание настроения этого человека, для этого с помощью нейронных сетей анализируются видео- и аудиопотоки. Для решения задачи будут использоваться современные работы русских и зарубежных авторов [**3, 4**] в области мультимодального глубокого обучения (то есть анализирующего сразу несколько модальностей - видео, интонацию и произносимые фразы).

Для создания модели пользователя применен теоретико-модельный подход с четырехуровневой моделью формального представления знаний [**1, 2**]: онтология, общие теоретические знания ($\forall$-предложения первого порядка), специфические знания (прецеденты, данные о конкретных пользователях [**5**]) и оценочные знания (вероятностные гипотезы нечеткой логики [**6**]).

Список литературы

[1] Найданов Ч.А., Пальчунов Д.Е., Сазонова П.А. Разработка автоматизированных методов предупреждения рисков возникновения критических состояний, основанных на анализе знаний, извлечённых из историй болезней пациентов // Сибирский научный медицинский журнал. 2016. Т. 36. 1. С. 105-113.

[2] Долгушева Е.В., Пальчунов Д.Е. Теоретико-модельные методы порождения знаний о предпочтениях абонентов мобильных сетей // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14. 2. С. 5-16.

[3] Cevher D., Zepf S., Klinger R. Towards multimodal emotion recognition in german speech events in cars using transfer learning // arXiv preprint arXiv:1909.02764 (2019).

[4] Malygina M., Artemyev M., Belyaev A., Perepelkina O. Overview of the Advancements in Automatic Emotion Recognition: Comparative Performance of Commercial Algorithms (2019) // 10.31234/osf.io/x7bvd.

[5] Palchunov D., Yakgyaeva G. Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts. CEUR Workshop Proceedings, Vol-2729, c. 69-74.

[6] Palchunov, D.E., Tishkovsky, D.E., Tishkovskaya, S.V., Yakhyaeva G.E. Combining logical and statistical rule reasoning and verification for medical applications
Proceedings - 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, SIBIRCON 2017 , 18-22 September 2017, Novosibirsk, Russia.

НГУ, Новосибирск
E-mail: o.sedukhin@g.nsu.ru

Методы подбора оптимальных тарифных планов для нескольких сим-карт абонента

Д. В. Селезнев

В настоящее время невозможно представить коммуникации людей по всему меру без использования мобильной связи и интернета. Мы используем доступ к сети Интернет для обмена и поиска нужной нам информации. В качестве инструмента доступа к сети мы зачастую применяем мобильные устройства, которые привязываем к определенному оператору сотовой связи.

На сегодняшний день рынок предлагает широкий выбор операторов сотовой связи, каждый из которых имеет множество тарифов с различными пакетами услуг. В связи с этим, пользователю нужно проанализировать достаточно большой объем информации, чтобы подобрать тариф, способный удовлетворить его потребности при минимальных затратах. Помимо этого, необходимо собрать информацию о том, с операторами какого абонента коммуницирует пользователь, с какими интернет-ресурсами обменивается информацией, и многие другие условия, которые напрямую влияют на выбор того или иного тарифного плана. Кроме того, абоненты зачастую имеют более одной сим-карты, которые, по факту, могут использоваться различными потребителями сотовых услуг.

Целью работы является анализ существующих методов подбора оптимального тарифа [1-3] и разработка новых методов с использованием автоматизированной системы сбора и обработки тарифных планов операторов сотовой связи. Необходимо рассчитать для абонента, имеющего несколько сим-карт оптимальный набор услуг для каждой сим-карты, с учетом, что они имеют различные статистики по расходам трафика. Система автоматически собирает информацию по тарифным планам с сайтов мобильных операторов, преобразовывает описание тарифов в формат, с которым работает алгоритмом подбора тарифа. Далее для каждого номера, который используется абонентом, определяется оператор и собирается детальная статистика расходов. Все эти данные передаются алгоритму, который должен будет подобрать один общий или несколько различных тарифных планов наиболее оптимальных для номеров, которые использует абонент.

Список литературы

[1] Долгушева Е. В., Пальчунов Д. Е. Теоретико-модельные методы порождения знаний о предпочтениях абонентов мобильных сетей. Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, N 2. С. 5–16.

[2] Palchunov D., Yakhyaeva G., Dolgusheva E. Conceptual Methods for Identifying Needs of Mobile Network Subscribers. CEUR Workshop Proceedings 1624, c. 147-160.

[3] Palchunov D., Yakhyaeva G. Application of Boolean-valued models and FCA for the development of ontological model. CEUR Workshop Proceedings, 1921, c. 77-87.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: d.seleznev6@g.nsu.ru

Разработка методов и алгоритмов проверки корректности экспертных знаний

В. А. Скокова

В течение последних десятилетий в рамках исследований по искусственному интеллекту сформировалось самостоятельное направление - экспертные системы, привлекающее интерес со стороны различного круга пользователей. Однако правила, содержащиеся в базе знаний экспертной системы, могут оказаться противоречивыми [**1**], [**2**]. Количество таких правил может быть достаточно большим. В связи с этим возникает задача автоматизации проверки базы экспертных знаний.

В данной работе знания представляются в виде формул, представляющих события, и их вероятностных значений, представляющие субъективную меру уверенности эксперта в их действительности [**3**], [**4**]. По множеству формул строится система линейных алгебраических уравнений с ограничениями. Несовместность полученной системы показывает противоречивость данных. В таком случае предлагается способ решения выявленного конфликта.

Список литературы

[1] Пальчунов Д.Е., Яхъяева Г.Э. Нечеткие алгебраические системы // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т.10, вып. 3. С. 75-92

[2] Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. Методы согласования знаний по компьютерной безопасности, извлечённых из различных документов // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2013. Т. 11, вып. 3. с. 63–73.

[3] Yakhyaeva G. Fuzzy model truth values. Proceedings of the 6-th International Conference Aplimat, February 6-9, 2007, Bratislava, Slovak Republic, p. 423-431.

[4] Яхъяева Г.Э., Карманова А.А., Ершов А.А., Савин Н.П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей. Информационные технологии, Том 23, N 2, 2017, с. 97–106.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: v.skokova@g.nsu.ru

Анализ противоречивых текстов естественного языка методом SoftTripletLoss

А. С. Трегубов

Задачи анализа и порождения текстов естественного языка являются достаточно сложными, и для их решения активно применяются различные подходы [**1, 2**]. В эпоху развития искуственного интеллекта данная область научной деятельности является особенно актуальной.

Данная работа посвящена вопросу поиска противоречий в текстах естественного языка. Объектом исследования являются методы анализа слабо структурированных текстовых документов с использованием нейросетевого аппарата. В связи с высокой сложностью анализа больших текстов на предмет противоречий в работе рассматривается только анализ пар коротких предложений, содержащих строго одну основную мысль. В частности, применяются метрические способы обучения нейронных сетей. Последние исследования показали, что данный подход может успешно применяться для анализа текстов [**3**].

Цель данной работы: разработать модель нейронной сети, тренируемую с помощью метрических способов обучения, способную выявлять противоречия между текстами естественного языка.

В рамках работы рассматриваются тексты из существующего массива данных, опубликованного в открытом доступе Стендфордским университетом.

Были решены следующие задачи: проведен анализ литературы, описана методология исследования, в качестве языковой модели выбрана нейронная сеть Bert, создана нейронная сеть для сравнения текстов на предмет противоречий.

Эмпирические результаты показали точность предсказаний модели в районе 0.76, что, примерно, равно точности аналогичной модели, обученной с помощью TripletLoss.

Но при той же точности, процесс обучения представленной модели оказался значительно проще. При дальнейшем развитии работы возможно применение других языковых моделей, а также изменение структуры нейронной сети.

Список литературы

[1] Пальчунов Д. Е., Филиппов И. И., Степанов П. А., Разработка методов семантического поиска в интернете, основанных на древовидных лингвистических шаблонах // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии, 17:3 (2019), 111-122

[2] Пальчунов Д. Е., Финк А. А., Разработка автоматизированных методов порождения служебных документов на естественном языке // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии, 15:3 (2017), 79–89

[3] Трегубов А.С., Neural network model for finding contradictions in natural language use using TripletLoss function // Components scientific and technological progress. 2020. N 7(49) С. 9–14

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: artem.tregubov@mail.ru

Разработка методов извлечения и обработки аргументов из текстов естественного языка, основанных на логике предикатов

Д. С. Усова

Получение аргументации - актуальная на данный момент тема, не имеющая универсального решения.

Многие существующие на данный момент решения предлагают лишь анализ синтаксической структуры предложений, при этом теряется множество важных для аргументации рассуждений вариантов использования слов. Например, могут не учитываться омонимичные слова.

Также, далеко не все существующие на данный момент решения могут предоставлять обоснование приведенному ответу. Например, проследить цепочку вывода ответа в нейронных сетях как правило невозможно.

Целью работы является разработка системы для извлечение аргументов из текстов новостных статей определенной тематики и использование извлеченных аргументов для вывода новых аргументов. Это может быть полезно в рамках доказательства или опровержения определенного утверждения.

При это аргументы в работе представляются в виде выражений логики предикатов, что дает ряд преимуществ, среди которых: возможность привести полное обоснование для представленного системой ответа, удобство логики предикатов, при этом каждый шаг доказательства интуитивно понятен.

Работа будет использовать в своей реализации предыдущие разработки работников и студентов кафедры в данной тематике.

Список литературы

[1] Махина Е. Д., Пальчунов Д. Е. Программная система для определения речевых действий в текстах естественного языка //Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2018. Т. 16. N 4.

[2] Шустова М. Разработка автоматических методов анализа аргументации, содержащейся в текстах естественного языка // Знания-Онтологии-Теории (ЗОНТ-2019). 2019. С. 442-444.

[3] Efstathiou V., Hunter A. An algorithm for generating arguments in classical predicate logic // European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. C. 119-130.

[4] Amgoud L., Cayrol C. A reasoning model based on the production of acceptable arguments // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. 2002. T. 34. N 1-3. P. 197-215.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: d.usova@g.nsu.ru

Пример применения многоагентного подхода в решении задач логистики

А. М. Федрак, А. С. Наздрюхин

Модернизация и автоматизация процессов в бизнесе в настоящее время является основой для его развития и процветания. Возросший спрос, при котором важно быстро переместить товары из точки А в точку Б, привёл к необходимости изменения сложившегося порядка в целом ряде сфер, в особенности в логистике и складском управлении. В результате проведенного сравнительного анализа решений в данной предметной области можно утверждать, что с точки зрения временных и финансовых затрат автономные решения являются более предпочтительными, в сравнении с автоматическими.

Специфика многоагентных систем[**1**] (МАС) заключается в совместном решении агентами одной общей задачи. Разделение задач происходит на основании функции агента и подразумевает взаимозаменяемость одного устройства другим того же типа с минимальным ухудшением работоспособности системы в целом. В решаемой задаче с точки зрения функциональности и отказоустойчивости оптимальной является система включающая в себя 4 типа агентов: модуль управления, роботизированная платформа, лифт, модуль погрузки-выгрузки.

В работе были рассмотрены особенности реализации централизованной и децентрализованной архитектуры системы, а также методы организации обмена сообщения между агентами[**2**] для рассмотренных архитектур. Централизованный метод общения был реализован на основании протокола MQTT, основным недостатком которого стало обязательное наличие постоянного соединения с сервером по сети. Выходом из этой ситуации стал метод формирования более обобщенной задачи, которая разделяется и направляется сразу нескольким агентам. Их агенты должны выполнить автономно вне зависимости от наличия канала связи с центральной системой управления.

На основании изученных методов расчета кратчайших путей в графах был реализован алгоритм расчета путей движения роботизированных платформ, разработаны сценарии работы и взаимодействия агентов, подобрана оптимальная аппаратная платформа для реализации решения.

В процессе сравнительного анализа разработанного решения были выявлены недостатки как централизованной, так и децентрализованной организации МАС. Оптимальным решением для данной сферы должна являться гибридная система общения между агентами в системе и автономное функционирование агентов.

Список литературы

[1] Stone P., Veloso M., Multiagent systems: A survey from a machine learning perspective, Autonomous Robots, 2000, vol. 8, no. 3, pp. 345–383.

[2] Кузнецов А. В. Краткий обзор многоагентных моделей, УБС, 2018, выпуск N 71, С. 6–44

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.fedrak@g.nsu.ru, a.nazdryukhin@g.nsu.ru

Разработка базы вопросов для рекомендательной системы AskMeSmth

М. М. Хлыбова

В настоящий момент из-за ряда факторов растет число людей, имеющих проблемы с коммуникацией. Один из подходов развить коммуникационные навыки - обсуждение различных тем, которые могут формироваться исходя из вопросов. Вопросы могут быть бытовые, актуальные, абстрактные, различаются по структуре [**1**], [**2**]. Так как с их подбором могут возникнуть различные сложности. Одним из решений данной проблемы является разработка приложения AskMeSmth, которое будет предлагать пользователям вопросы, на различные темы.

В настоящее время существуют такие системы, но основным их недостатком является ограниченное число вопросов и отсутствие какой-либо персонализации для пользователей.

Индивидуальность предлагаемых вопросов предложено решать вводом рекомендательной системы, которая строится на основе онтологической модели [**3**] и позволяет учитывать опыт похожих пользователей и уже поставленные оценки. Используется сочетание user-based и item-based подходов, алгоритм GroupLens.

Ограничение в количестве возможно предлагаемых данных решается с помощью генерации новых вопросов и соответственно пополнением ими имеющейся базы. В качестве источников вопросов взяты известные и действующие сайты с вопросами, такие как «Ответы mail.ru», «Яндекс. Кью». Алгоритм предполагает запуск периодической процедуры, которая начинает процесс парсинга, затем заполняет отдельную базу полученными новыми данными и очищает предыдущие данные, часть из которых попадает в основную базу вопросов, если удовлетворяет оценочному критерию.

Список литературы

[1] Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В., Карманова А.А. Вероятностная вопросно-ответная система в области компьютерной безопасности. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, вып. 3. с. 132–145.

[2] Яхъяева Г.Э., Карманова А.А., Ершов А.А., Савин Н.П. Вопросно-ответная система для управления информационными рисками на основе теоретико-модельной формализации предметных областей
Информационные технологии, Том 23, N 2, 2017, с. 97–106.

[3] Palchunov D., Yakhyaeva G. Application of Boolean-valued models and FCA for the development of ontological model
CEUR Workshop Proceedings, 1921, с. 77–87.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: m.khlybova@g.nsu.ru

Построение модели коллаборативной фильтрации для предоставления пользовательских рекомендаций

Д. А. Худяков

В настоящий момент рекомендательные системы широко используется в различных сферах IT-индустрии: электронная коммерция, реклама, медицина, образовательный процесс [**1**], [**2**]. Основная цель рекомендательных систем предсказание актуальных для пользователя объектов на основе его предыдущего опыта взаимодействия с приложением. Для этого используется явная и неявная информация о пользователе [**3**], проанализировав которую можно сделать вывод о его вкусовых предпочтениях.

Коллаборативная фильтрация как метод построения пользовательских рекомендаций учитывает предпочтения группы пользователей приложения для предсказания неизвестных предпочтений целевого пользователя [**4**]. Существует два подхода к разработке систем коллаборативной фильтрации - корреляционная модель и латентная модель. В случае корреляционной модели строится матрица с оценками объектов для каждого пользователя. Проблема состоит в том, что матрица сильно разрежена и возникает задача заполнения пропусков. Кроме того, такой подход требует большого объема памяти для одновременного хранения всей матрицы в оперативной памяти. В свою очередь, латентная модель предполагает построение для каждого пользователя его «профиля». Данный подход позволяет строить более точные и обоснованные рекомендации.

В рамках данной работы рассматриваются латентные модели коллаборативной фильтрации, в основе которых лежит идея о сингулярном разложении как о способе выявления латентных связей между рассматриваемыми объектами. Производится построение модели, использовать которую в дальнейшем планируется для создания рекомендательной системы социальной каталогизации книг.

Список литературы

[1] Palchunov D., Yakhyaeva G., Yasinskaya O. Software system for the diagnosis of the spine diseases using case-based reasoning. Proceedings of the International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies (SIBIRCON / SibMedInfo — 2015), 28-30 October, 2015, Novosibirsk, pp. 150-155.

[2] Баталин К.В., Яхъяева Г.Э. Система управления оценочными средствами. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2020. Т.18, N2. С. 5–14.

[3] Yakhyaeva G. Fuzzy model truth values. Proceedings of the 6-th International Conference Aplimat, February 6-9, 2007, Bratislava, Slovak Republic, p. 423-431.

[4] Yehuda Koren, Factorization meets the neighborhood: a multifaceted collaborative filtering model. Proceeding of the 14th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining (Las Vegas, Nevada, USA: ACM, 2008), 426-434.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: d.khudyakov@g.nsu.ru

Алгебраические атаки и генераторы ключевых последовательностей

С. Г. Чеканов

Поточные шифры являются одним из важнейших криптографических примитивов, которые используются в каналах связи, предполагающих высокую скорость шифрования с хорошими криптографическими характеристиками. Слабостью таких шифров является большой размер ключа, равный длине шифруемого текста, что затрудняет генерацию и распределение сеансовых ключей. Одним из возможных решений данной проблемы является генерация ключевых псевдослучайных последовательностей на основе небольшого секретного ключа. Такой подход имеет хорошее математическое описание [1, 2] и допускает удобную техническую реализацию. Как правило, это линейные рекуррентные последовательности над конечными полями или другими конечными алгебрами.

В данной работе рассмотрена математическая модель генератора ключевой последовательности, состоящая из трех регистров сдвига с обратной связью и нелинейной функции выхода над конечным полем. Построена модель генератора ключевых последовательностей для поточных шифров над конечным полем. Проведен анализ возможных атак на модельный генератор с использованием метода линеаризации и с помощью базиса Гребнера для идеалов в кольце многочленов от нескольких переменных над конечным полем. В ходе анализа было подтверждено предположение, что метод линеаризации является более эффективным при реализации атаки на генераторы с малой размерностью секретного ключа.

Для построения базиса Гребнера использовался пакет WOLFRAM MATHEMATIC. В дальнейшем предполагается оценить зависимость сложности реализации атаки на генератор от алгебраической иммунности булевых функций, которые используются для построения генератора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020 075-02-2020-1482-1.

Список литературы

[1] Armknecht, F. Algebraic attacks on certain stream ciphers. Ph.D. thesis, University Mannheim, Germany, 2006.

[2] Armknecht, F. On the existence of low-degree equations for algebraic attacks // Cryptology ePrint Archive, Report 2004/185, 2004b, http://eprint.iacr.org/.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: chekanov.sg@dvfu.ru

Разработка модели профиля пользователя для рекомендаций электронных курсов

Е. А. Шестакова

В последнее время как никогда становится актуальной задача цифровизации образования [**1**], [**2**]. Отличным средством для получения новых знаний или углубления в изучаемые ранее предметы является самообразование при помощи электронных курсов, выложенных на различных образовательных платформах. Однако огромное количество выложенных на этих платформах курсов, книг и видеоуроков, а также их постоянное изменение и расширение затрудняет поиск подходящих и действительно полезных ресурсов.

Для решения этой проблемы было предложено разработать рекомендательную систему [**3**], помогающую пользователю в подборе электронных курсов. Решение, рекомендовать пользователю определенный курс или нет, зависит от множества характеристик, например: тематики курса, уровня подготовки пользователя, длительности курса, стоимости курса, языка преподавания, авторов курса и т.п. Применение логических методов обработки информации позволяет подобрать более подходящий нуждам пользователя курс [**4**].

Для сбора и хранения информации о предпочтениях пользователя была разработана модель профиля пользователя, формирующаяся на основе выбранных вручную пользователем параметров и истории взаимодействия пользователя с другими курсами. Для актуализации значений профиля был разработан алгоритм, осуществляющий автоматическое обновление данных на основе действий пользователя. Под действием понимается любое взаимодействие пользователя с курсами или профилем собственных предпочтений. Алгоритм учитывает вес совершённого действия и коэффициент давности действия, сопоставляет данную информацию с уже содержащейся в профиле и актуализирует.

Список литературы

[1] Яхъяева Г.Э., Абсайдульевой А.Р. Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[2] Баталин К.В., Яхъяева Г.Э. Система управления оценочными средствами. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2020. Т. 18, N 2. С. 5–14.

[3] Дьяконов А.Г. Алгоритмы для рекомендательной системы: технология Lenkor, Бизнес-информатика, 2012. N 1 (19). С. 32–39.

[4] Palchunov, D.E., Tishkovsky, D.E., Tishkovskaya, S.V., Yakhyaeva G.E. Combining logical and statistical rule reasoning and verification for medical applications. Proceedings - 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, SIBIRCON 2017, 18-22 September 2017, Novosibirsk, Russia.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: shestakova637@gmail.com

Алгоритм классификации орфографических ошибок на основе алгоритма машинного обучения C4.5

Е. С. Шевчук

С развитием человечества все большему количеству людей стало необходимо писать множество текстов, что делать нужно без ошибок. Для того, чтобы их не допускать, нужно знать правила русского языка. Из-за большого количества ежедневных дел не всегда есть время на прохождение каких-либо полноценных курсов. В этом случае можно использовать анализаторы текста. Но они только исправляют ошибки, не объясняют в чем она заключается. Это ведет к заучиванию наизусть правильного написания слов, что мало эффективно в смысле повышения грамотности.

Одним из решений данной проблемы может быть изучение допущенных в тексте ошибок, подкрепленных правилами, что в дальнейшем поможет не тратить время на использование программ для проверки текстов. Из возможных способов классификации ошибок выбран алгоритм построения дерева решений C4.5 [**1**], поскольку деревья решений являются одним из наиболее эффективных инструментов интеллектуального анализа данных и предсказательной аналитики, которые позволяют решать задачи классификации [**2**]. Таким образом, в ходе данной работы были определены признаки для обучающего набора данных и набора тестирования, сформировано обучающее множество, разработан алгоритм классификации ошибок на основе алгоритма C4.5 и дополненный последующим анализом для выдачи результата пользователю в удобном для него виде.

Список литературы

[1] Quinlan J.R. C4.5 Programs for Machine Learning. Morgan Kaufmann, San Mateo, California, 1993.
[2] Breiman L., Friedman J.H., Olshen R.A., and Stone C.T. Classification and Regression Trees. Wadsworth, Belmont, California, 1984.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: e.shevchuk@g.nsu.ru

Разработка алгоритма активного обучения сверточных нейронных сетей для задачи классификации изображений.

А. С. Щербин

Человек всегда стремился научиться получать из окружающего мира информацию, которую можно было бы использовать для принятия решений. В современном мире больших данных это стремление становится еще более актуальным, так как умение извлекать информацию и принимать на ее основе решения может быть стратегическим преимуществом в бизнесе. Согласно определению Клода Шеннона [**1**] информация тесно связана с уменьшением неопределенности, что иллюстрирует связь понятия информативности данных с решаемой задачей.

Современные алгоритмы глубокого обучения, в частности сверточные нейронные сети, позволяют автоматически извлекать информацию, которая может быть полезна для задачи в процессе обучения. Но проблема информативности обучающих данных все еще остается актуальной, так как если данные не содержат в себе никакой информации - сеть не сможет ее извлечь. Основываясь на данных идеях была поставлена оптимизационная задача: выбрать из неразмеченного множества наиболее информативные примеры (в ограниченном количестве) так, чтобы качество модели на тестовых данных улучшилось максимально. Направление исследований, призванных решить эту задачу называется активным обучением [**2**]. Классические алгоритмы активного обучения основываются на уверенности модели (максимальной, разности максимальных или энтропии уверенности по всем классам).

Целью работы является разработка алгоритма активного обучения для задачи классификации изображений. В качестве модели классификации применяются сверточные нейронные сети. В ходе выполнения работы было предложено несколько алгоритмов, основанных на применении гауссовых функций для расчета степени близости примеров в признаковом пространстве и уверенности модели. Сравнение предложенных алгоритмов проведено на задаче Imagenette [**3**].

В результате исследования было показано, что применение одного из предложенных алгоритмов превосходит классические алгоритмы активного обучения.

Список литературы

[1] Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд. иностр. лит., 2002.

[2] Settles, B. Active Learning Literature Survey // Computer Science Technical Report 1648, University of Wisconsin-Madison, 2010, pp. 3-15.

[3] Набор данных Imagenette // электронный ресурс. URL: https://github.com/fastai/imagenette режим доступа: свободный. Дата обращения 15.10.20

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: a.shsherbin@g.nsu.ru

Combinatorial dynamics in gene networks models

V. P. Golubyatnikov, L. S. Minushkina

We consider 6-dimensional piecewise-linear (PL) dynamical system

$$\dot{x}_1 = L(y_3) - x_1;\ \dot{y}_k = \Gamma(x_k) - y_k;\ \dot{x}_i = L(y_{i-1}) - x_i,\ i = 2,3;\ k = 1,2,3; \tag{1}$$

as a model of gene network functioning. Here, L and Γ are decreasing, respectively, increasing step-functions of non-negative variables y_k, x_1, x_i, which characterize concentrations of proteins and mRNA in the gene network. As in [**1**], where an analogous smooth dynamical system was proposed and interpreted from biological viewpoint, the system (1) is symmetric with respect to cyclic permutations

$$(x_1, y_1) \to (x_2, y_2) \to (x_3, y_3) \to (x_1, y_1)$$

of pairs of the variables. For PL systems of the type (1), in general quite asymmetric, we have obtained necessary and sufficient conditions of existence of a cycle, see [**2**], where an invariant neighborhood W_1 of this cycle was described as well.

For the symmetric system (1), we construct now outside of the domain W_1 an invariant bounded 2-dimensional PL surface Σ with one vertex $\mathcal{E}$, 12 edges R_j, and 12 faces F_j, $j = 1, \ldots, 12$. Each of these faces F_j is contained in corresponding 6-dimensional parallelepiped D_j such that the system (1) is linear in each D_j which are bounded by hyperplanes parallel to the coordinate ones. The edges R_j are contained in some of these hyperplanes. Equations of such linear systems depend on the index j.

Combinatorial analysis of the phase portrait of the system (1) implies:

Theorem. *Trajectories of all points of Σ are piecewise-linear, with corner points on the edges R_j. These trajectories tend to $\mathcal{E}$ in a spiral way and intersect all the faces F_j and the edges R_j infinitely many times as $t \to \infty$. The surface Σ does not contain cycles.*

Similar constructions and descriptions of behavior of trajectories can be realized for PL dynamical systems of different forms and in other dimensions, see for example [**3**]. It was shown in [**4**] that phase portraits of some of these systems can contain several cycles even in low dimensions.

Supported by RFBR, grant 18-01-00057.

References

[1] Elowitz M.B, Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators. Nature. 2000, V. 403, pp. 335–338.

[2] Golubyatnikov V.P., Minushkina L.S. Monotonicity of the Poincaré mapping in some models of circular gene networks. Journ. Appl. and Industrial Mathematics, 2019, V. 13, N 3, pp. 472–479.

[3] Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. On two classes of nonlinear dynamical systems: the four-dimensional case. Siberian Mathematical Journal, 2015, V. 56, N 2, pp. 231–236.

[4] Akinshin A.A., Golubyatnikov V.P., Golubyatnikov I.V. On some multidimensional models of gene network functioning. Journ. Appl. and Industrial Mathematics, 2013, V. 7, N 3, pp. 1–7.

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk
E-mail: vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org
Novosibirsk state university, Novosibirsk

IV. Секция «Неклассические логики»

Унификационная проблема в предтабличных модальных логиках $PM1 - PM5$

С. И. Башмаков

Логика $\mathcal{L}$ называется *табличной*, если для нее существует конечный характеристический класс конечных фреймов. Логика $\mathcal{L}$ называется *предтабличной*, если она сама не таблична, но таблично любое ее собственное расширение.

В работах Л.Л. Максимовой [**1**] и Л.Л. Эсакиа и В.Ю. Месхи [**2**] было доказано существование в точности 5-ти предтабличных расширений нормальной модальной логики $\mathcal{S}4$: $\mathbf{PM1}, \mathbf{PM2}, \ldots, \mathbf{PM5}$. В настоящем исследовании получен ряд результатов в теории унификации данных логик.

Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ *унифицируема* в $\mathcal{L}$, если существует подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i, \forall p_i \in Var(\varphi)$ такая, что $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$.

Множество всех унификаторов σ произвольной формулы φ квазиупорядочено по отношению *более общий*: если найдется подстановка τ, т.ч. $\sigma^1(p_i) \equiv \tau(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$, то $\sigma^1 \preceq \sigma$. Набор унификаторов CU формулы φ называется *полным* в $\mathcal{L}$, если для произвольного унификатора σ формулы φ найдется более общий из этого набора.

Для логик $\mathbf{PM1}, \mathbf{PM4}, \mathbf{PM5}$ доказана проективность унификации, предложено описание наиболее общего (проективного) унификатора в логиках. Для случаев $\mathbf{PM2}, \mathbf{PM3}$ описаны конечные полные наборы унификаторов, доказан финитарный тип унификации.

Список литературы

[1] Максимова Л. Л. Предтабличные расширения логики S4 Льюиса // Алгебра и логика. 1975. Т. 14. С. 28–55.

[2] Esakia L., Meskhi V. Five critical modal systems // Theoria. 1977. Vol. 43. Pp. 52–60.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: krauder@mail.ru

Логика для кросс-мировой предикации

Е. В. Борисов

В докладе представлена модальная логика первого порядка с кросс-мировой интерпретацией предикатов (cross-world predication logic, CPL). Идея кросс-мировой интерпретации предикатов состоит в том, что экстенсионалы n-местных предикатов задаются для упорядоченных n-ок миров ([**1**], [**2**]).

Язык CPL содержит в качестве термов только константы и переменные; в атомарных формулах в качестве термов допустимы только переменные.

Дефиниция (модель для языка L). *Модель для языка L - это кортеж $\langle G, R, D, I\rangle$, где $G \neq \varnothing$, $R \subseteq G^2$; D — доменная функция; I — интерпретация индивидных констант и предикатов L, такая что (i) если a — константа, то $I(a) : G \to U$, где $U = \bigcup_{x\in G} D(x)$; (ii) если Q — n-местный предикат ($n \geq 1$), то $I(Q) : G^n \to \mathcal{P}(U^n)$ ($\mathcal{P}$ - булеан); (iii) для любых w, w', $I(=)(\langle w, w'\rangle) = \{\langle x, x\rangle : x \in U\}$.*

В семантике CPL истинностное значение формулы зависит, помимо модели, возможного мира и оценки переменных, от VP-функции.

Дефиниция (VP-функция). *VP-функция - это частичная функция от индивидных переменных к возможным мирам.*

VP-функции позволяют получать кортежи миров, необходимые для применения I. В начале эвалюоации формулы в качестве VP-функции берется $\varnothing$; при обработке формул вида $(\exists x)\varphi$, $(\forall x)\varphi$ или $(\lambda x.\varphi)(t)$ относительно мира w и VP-функции f мы переходим от f к $(f - (\{x\} \times G)) \cup \{\langle x, w\rangle\}$; при обработке атомарной формулы относительно w и f мы от f переходим к $f_w = f \bigcup((Var - domf) \times \{w\})$, где Var - множество переменных L, $domf$ - домен f.

Дефиниция (истина в модели). *Пусть $M = \langle G, R, D, I\rangle$ - модель для L, $w \in G$, v - валюация переменных, f - VP-функция. Тогда:*

$M, w, f \vDash_v P(x_1, ..., x_n)$ *тттк* $\langle v(x_1), ..., v(x_n)\rangle \in I(P)(\langle f_w(x_1), ..., f_w(x_n)\rangle)$

$M, w, f \vDash_v (\exists x)\varphi$ *тттк* $M, w, (f - (\{x\} \times G)) \cup \{\langle x, w\rangle\} \vDash_{v[e/x]} \varphi$ *для некоторого существует $e \in D(w)$. Аналогично для $\forall$.*

$M, w, f \vDash_v (\lambda x.\varphi)(t)$ *тттк* $M, w, (f - (\{x\} \times G)) \cup \{\langle x, w\rangle\} \vDash_{v[e/x]} \varphi$, *где $e = v(t)$, если t - переменная, и $e = I(t, w)$, если t - константа.*

Булевы и модальные операторы не влияют на f; соответствующие пункты отличаются от стандартных только наличием «f» слева и справа от «тттк».

Теорема. *Существует метод доказательства, корректный и полный относительно семантики CPL.*

Список литературы

[1] Butterfield J., Stirling C. Predicate modifiers in tense logic // Logique et Analyse. 1987. Vol. 30. Pp. 31–50.

[2] Wehmeier K.F. Subjunctivity and cross-world predication // Philosophical Studies. 2012. Vol. 159. Pp. 107–122.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: borisov.evgeny@gmail.com

Об исчислении Ламбека с субэкспоненциалом, допускающим локальное сокращение последовательностей формул

М. В. Валинкин

Рассмотрим исчисление Ламбека [**2**] с субэкспоненциалом !, допускающим локальное сокращение последовательностей формул:

$$A \to A \text{ (ax)} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \to C}(\cdot \to) \qquad \frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A \cdot B}(\to \cdot) \qquad \frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to A \backslash B}(\to \backslash)$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \to C}(\backslash \to) \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \to C}(/ \to) \qquad \frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to B / A}(\to /)$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \to C}{\Gamma, !A, \Delta \to C}(! \to) \qquad \frac{!\Pi \to A}{!\Pi \to !A}(\to !) \qquad \frac{\Gamma, !\Pi, !\Pi, \Delta \to C}{\Gamma, !\Pi, \Delta \to C}(\text{mcontr})$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, A, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, \Delta \to C}(\text{cut}),$$

где латинскими буквами обозначены отдельные формулы, а греческими — их последовательности.

Для рассматриваемого исчисления доказаны следующие факты:

Теорема *В данном исчислении устранимо правило* (cut).

Теорема *Фрагмент данного исчисления, в котором* ! *разрешается применять только к переменным, алгоритмически разрешим.*

Теорема *Рассматриваемое исчисление неэквивалентно исчислению с нелокальным сокращением формул:*

$$\frac{\Gamma, !A, \Delta, !A, \Gamma_2 \to C}{\Gamma_1, !A, \Delta, \Gamma_2 \to C}(\text{ncontr}_1) \qquad \frac{\Gamma, !A, \Delta, !A, \Gamma_2 \to C}{\Gamma_1, \Delta, !A, \Gamma_2 \to C}(\text{ncontr}_2).$$

Теорема *Рассматриваемое исчисление эквивалентно исчислению с локальным сокращением отдельных формул и правилом (cut).*

При ослаблении данного исчисления при помощи замены правила $(\to !)$ на

$$\frac{!B \to A}{!B \to !A}(\to !_1),$$

получен результат, соотносящий это новое исчисление с R-моделями [**1**]:

Теорема *Исчисление с* $(\to !_1)$ *корректно относительно класса* R*-моделей.*

Список литературы

[1] Andréka H., Mikulás Sz. Lambek calculus and its relational semantics: completeness and incompleteness // J. Log. Lang. Inform. 1994. Vol. 3. Pp. 1–37.

[2] Lambek J. The Mathematics of Sentence Structure // Amer. Math. Monthly. 1958. Vol. 65, No. 3. Pp. 154–170.

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: mvalinkin@gmail.com

Фрагмент исчисления Ламбека с релевантной модальностью

С. М. Дудаков, Б. Н. Карлов, С. Л. Кузнецов

Исчисление Ламбека, допускающее пустые антецеденты, $\mathbf{L}^{\Lambda}$ [**2**] — это субструктурная логическая система, некоммутативный вариант линейной логики. В $\mathbf{L}^{\Lambda}$ отсутствуют структурные правила: сокращение, ослабление и перестановка.

Мы рассматриваем расширение $\mathbf{L}^{\Lambda}$ с помощью модальности !, под знаком которой разрешены структурные правила перестановки и сокращения, но не ослабления, что соответствует идее релевантной логики [**3**]. Рассмотрение такой модальности мотивировано приложениями в лингвистике [**1**].

Задача проверки выводимости для исчисления Ламбека с релевантной модальностью алгоритмически неразрешима, однако становится разрешимой, если модальность применяется только к переменным [**1**]. Мы усиливаем этот результат, развивая метод, применённый Фофановой [**4**] для случая экспоненциальной модальности, под которой также допускается правило сокращения.

Теорема. *Задача проверки выводимости в исчислении Ламбека с релевантной модальностью для секвенций, в которых модальность применяется только к формулам вида* $q_n \setminus \ldots \setminus q_1 \setminus p \,/\, r_1 \,/\, \ldots \,/\, r_m$, *алгоритмически разрешима и принадлежит классу NP. Здесь* $q_n, \ldots, q_1$, p, $r_1, \ldots, r_m$ *— переменные,* $\setminus$ *и* $/$ *— две субструктурные импликации;* $\setminus$ *правоассоциативна, а* $/$ *левоассоциативна.*

В доказательстве этой теоремы строится вспомогательное исчисление с аксиомами вида $!A_1, \ldots, !A_n; r_1, \ldots, r_k \Rightarrow s$. Эта секвенция считается аксиомой, если в контекстно-свободной грамматике, построенной по $A_1, \ldots, A_n$, существует такой вывод слова $r_1 \ldots r_k$ из стартового символа s, что в нём используется каждое из правил грамматики. Назовём указанный вид выводимости тотальной выводимостью. В [**4**] вместо тотальной выводимости использовалась обычная.

Тотальная выводимость имеет в точности нужную сложность:

Теорема. *Задача тотальной выводимости в контекстно-свободных грамматиках NP-полна.*

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00435; исследования С. Л. Кузнецова поддержаны также грантом МК-430.2019.1.

Список литературы

[1] Kanovich M., Kuznetsov S., Scedrov A. Undecidability of the Lambek calculus with a relevant modality // Proc. Formal Grammar 2015/2016, LNCS vol. 9804, Springer, 2016. Pp. 240–256.

[2] Lambek J. On the calculus of syntactic types, Structures of Language and Its Mathematical Aspects // Proc. Symposia Appl. Math., vol. 12. 1961, AMS. Pp. 166–178.

[3] Максимова Л. Л. О системе аксиом исчисления строгой импликации // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, 5. С. 59–68.

[4] Фофанова Е. М. Алгоритмическая разрешимость фрагмента исчисления Ламбека с экспоненциальной модальностью // Мальцевские чтения 2018, Новосибирск, 2018, с. 226.

ТвГУ, Тверь; МИАН, Москва
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru, bnkarlov@gmail.com, sk@mi-ras.ru

Линейная ступенчатая логика знания с универсальной модальностью $\mathcal{LTK}.sl_U$

Т. Ю. Зверева, С. И. Башмаков

Логики, компоненты которых основаны на рассуждениях о времени и знании, активно изучаются с середины XX века и в настоящий момент имеют множество приложений в информатике. Наиболее известны системы $\mathcal{LTL}$ и $\mathcal{CTL}$, являющиеся основными в теории верификации программ.

Особый интерес для исследователей на этом этапе развития теории представляют логики нетранзитивного времени, поскольку потенциально отвечают современным требованиям динамичности, недетерминированности процесса передачи информации. Рассматривается логика $\mathcal{LTK}.sl_U$ нерефлексивного нетранзитивного временного отношения, в связи с чем семантическая характеризация времени представляет собой пошаговую (step-like) процедуру. Унификация для версии этой логики без операторов знания агентов ранее изучена в [**1**], в настоящей работе получено обогащение этой логики операторами знания.

Алфавит языка $\mathcal{LTK}.sl_U$ включает следующий набор унарных модальных операторов: N — временной оператор «следующее натуральное число», $\Box_1, \ldots, \Box_n$ — операторы знаний агентов, $\Box_U$ — универсальная модальность, $\Box_e$ — оператор *Common Knowledge*. Логику определяем как множество всех формул языка $\mathcal{LTK}.sl_U$, выполнимых на соответствующем классе фреймов F.

Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется *унифицируемой* в логике $\mathcal{L}$, если существует подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ для каждой $p_i \in Var(\alpha)$, такая, что $\alpha(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$. Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ *проективна* в $\mathcal{LTK}.sl_U$, если существует унификатор τ (проективный унификатор) для формулы α, т.ч. $\Box_U \alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{LTK}.sl_U$ для всех переменных p_i формулы α [**2**].

Доказана проективность унификации в логике $\mathcal{LTK}.sl_U$ и финитная аппроксимируемость. Как следствие установлен унитарный тип унификации в $\mathcal{LTK}.sl_U$ и получено описание проективного унификатора. Исследуется вопрос характеризации логической системы $\mathcal{LTK}.sl_U$ некоторым набором общезначимых формул.

Список литературы

[1] Bashmakov S. I. Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality // J. SibFU. Mathematics and Physics. 2018. Vol. 11, No. 1. Pp. 3–9.

[2] Ghilardi S. Unification Through Projectivity // J. Logic Comput. 1997. Vol. 7, No. 6. Pp. 733–752.

Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск

E-mail: 3336259@gmail.com

Выполнимость во временной логике с мультиозначиванием, основанной на $\mathbb{Z}$

В. Р. Кияткин, А. В. Кошелева

В нашей работе мы продолжаем исследования В.В. Рыбакова, посвященных логикам с мультиозначиванием ([**1**], [**2**] и др.). Мы рассмотрели временную логику с мультиозначиванием $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ и доказали, что проблема выполнимости формул в данной логике разрешима.

Мультиозначивание — это новый подход, разработанный В.В. Рыбаковым для моделирования и интерпретации знаний и рассуждений агентов в мультиагентной системе. Главное отличие логик с мультиозначиванием от логик, язык которых содержит операторы многомодальных логик и по k операторов одного типа временных логик, заключается в интерпретации i-го логического каждого типа в формулах таких логик. В логиках с мультиозначиванием каждый индекс i связывается не с бинарным отношением R_i и (или) с одним из нескольких бинарных отношений $Next_i$, $\leqslant_i$ и т. д. на фрейме Крипке, а с i-ым означиванием V_i на выбранной модели.

Алфавит языка логики $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ задается стандартным способом и состоит из счетного множества пропозициональных переменных, скобок, логических связок, k модальных операторов $\Box_i$ и временных операторов $\{\mathcal{N}_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{U}_i \,|\, i = 1, \ldots, k\}$ (унарных операторов «NextTime» и бинарных операторов «Since» и «Untill»).

Определение. *Моделью $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ называется реляционная линейная модель с мультиозначиванием:*

$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, \leqslant, Next, V_1, \ldots, V_k \rangle .$$

Обозначим $\mathcal{K}(\mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ множество всевозможных моделей $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$.

Определение. *Логикой $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ с мультиозначиванием называется множество формул, записанных в языке этой логики и истинных на всех моделях из класса $\mathcal{K}(\mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$.*

Путем построения специального конечного класса конечных моделей, доказывается:

Теорема. *Проблема выполнимости в логике $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ разрешима.*

Как следствие получаем:

Теорема. *Логика $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{\mathbb{Z}})$ разрешима.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Красноярского краевого фонда науки (грант 18-41-240005).

Список литературы

[1] Рыбаков В. В. Временные мультиагентные логики с мультиозначиваниями // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, N 4. С. 897–911.

[2] Rybakov V. V. Multi-Agent Logics with Multi-Valuations and Intensional Logical Operations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. Pp. 243–251.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: kiyatkinvr@mail.ru, koshelevaa@mail.ru

Узнаваемость логики OdF в классе предгейтинговых логик

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Исследуются проблемы различимости и узнаваемости в предгейтинговых логиках, т.е. в расширениях минимальной логики J, удовлетворяющих аксиоме $\neg\neg(\bot \longrightarrow p)$. Эти понятия были введены в [**1**]–[**3**].

Пусть L_0 — J-логика и L — конечно аксиоматизируемая логика, содержащая L_0. Формула A *различима над логикой* L_0, если существует алгоритм, который по любой конечной системе аксиом Ax распознает, выводима ли A в L_0+Ax. Говорим, что логика L — *узнаваема над* L_0, если существует алгоритм, проверяющий по любой конечной системе аксиом Ax равенство $L_0 + Ax = L$.

Наименьшая предгейтинговая логика $\mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \longrightarrow \mathrm{p})$ и ее расширения исследовались в [**4, 5**] и других работах.

Формула $F = (\bot \longrightarrow p \vee q) \longrightarrow (\bot \longrightarrow p) \vee (\bot \longrightarrow q)$ и логика JF изучались в [**6, 7**], там было доказано, что логика JF обладает дизъюнктивным и финитно-модельным свойствами. В [**8**] установлено, что логика JF обладает интерполяционным свойством Крейга CIP. В [**5**] доказана различимость формулы F в стройных логиках. Неизвестно, различима ли F над J, и является ли логика $\mathrm{J} + F$ узнаваемой над J.

В данной работе доказывается:

Теорема. *Формула F различима над логикой* Od, *а логика* $\mathrm{OdF} = \mathrm{Od}+\mathrm{F}$ *узнаваема над Od.*

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект 0314-2019-0002 .

Список литературы

[1] Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Узнаваемые логики // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, N 2. С. 252–274.

[2] Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Сильная разрешимость и сильная узнаваемость // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 5. С. 559–581.

[3] Максимова Л. Л. Узнаваемые и различимые логики и многообразия // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 3. С. 367–374.

[4] Максимова Л. Л. Негативная эквивалентность над минимальной логикой и интерполяция // СЭМИ. 2014. Т. 11. С. 1–17.

[5] Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Узнаваемость в предгейтинговых и стройных логиках // СЭМИ. 2019. Т. 16. С. 427–434.

[6] Odintsov S. Constructive negations and paraconsistency. Series: Trends in Logic, Volume 26. Springer, Dordrecht, 2008, 242 p.

[7] Стукачева М. В. О дизъюнктивном свойстве в классе паранепротиворечивых расширений минимальной логики // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, N 2. С. 235–252.

[8] Максимова Л. Л. Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, N 5. С. 627–648.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирск
E-mail: lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru

Об α-глубине системы трехзначной логики, состоящей из одной функции Вебба

Л. В. Шабунин

В работе [**1**] М.М. Глуховым для функций k-значной логики введены понятия α-формулы, α-пополнения, α-полноты и α-базиса для α-замкнутого класса. Доказано, что при $k \geq 7$ α-полной является любая система функций из P_k, содержащая все подстановки из симметрической группы S_k подстановок множества E_k и любую одну квазигрупповую функцию.

В [**2**] приведены условия α-полноты систем функций из P_k.Показано, что при любом k в P_k отсутствуют α-полные системы, состоящие из одной функции, а в P_2 нет конечных α-полных систем. Для $k \geq 5$ построены α-базисы, состоящие из двух бинарных операций на E_k.

В [**3**] построены конечные α-полные системы для $k = 3, 4$. В [**4**] доказано, что при любом $k \geq 2$ множество функций $F \subseteq P_k$ α-замкнуто тогда и только тогда, когда F замкнуто. Для $k = 3, 4$ построены α-базисы, состоящие из двух бинарных операций на E_k. Показано, что полная система T функций из P_4, содержащая все подстановки множества E_4 и операцию сложения по модулю 4, не является α-полной, но ее α-пополнение $[T]_\alpha$ будет уже α-полной системой, т. е. $[[T]_\alpha]_\alpha = P_4$. Установлено, что если $k \geq 3$ и $F \subseteq P_k$ — полная система функций, то существует $n \geq 0$ такое, что $[F]^n_\alpha = P_k$. Здесь $[F]^0_\alpha = F$ и $[F]^{n+1}_\alpha = [[F]^n_\alpha]_\alpha$ (n=0, 1, …). Наименьшее n, для которого $[F]^n_\alpha = P_k$, называется *α-глубиной* системы F. В [**5**] приведен результат для полной системы $F \subseteq P_3$, состоящей из всех одноместных функций и операции сложения по модулю 3: $[F]_\alpha \neq P_3$ и $[[F]_\alpha]_\alpha = P_3$.

Пусть $V_3(x, y)$ — функция Вебба для трехзначной логики.

Теорема. $[[[V_3]_\alpha]_\alpha]_\alpha = P_3$.

Вопрос о равенстве $[[V_3]_\alpha]_\alpha = P_3$ остается открытым.

Список литературы

[1] Глухов М. М. Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики // Дискретная математика. 1989. Т. 1, N 1. С. 16–21.

[2] Чернышов А. Л. Условия α-полноты систем функций многозначной логики // Дискретная математика. 1992. Т. 4, N 4. С. 117–130.

[3] Шабунин А. Л. Примеры α-полных систем k-значной логики при $k = 3, 4$ // Дискретная математика. 2006. Т. 18, N 4. С. 45–55.

[4] Шабунин А. Л. Об α-суперпозиции функций k-значной логики // Сиб. матем. журнал. 2007. Т. 48, N 2. С. 441–457.

[5] Шабунин А. Л. О свойствах α-пополнений одной системы трехзначной логики // Тезисы докладов международной конф. “Мальцевские чтения”, Новосибирск, Институт математики СО РАН, 11–15 ноября 2013 г. Новосибирск, 2013. С. 56.

Чебоксары
E-mail: lvsh@mail.ru

Weak modal operators over FDE

S. A. Drobyshevich

We define a number of new modal logics over four-valued system FDE. These logics are motivated by the previously conducted study of the neighborhood semantics over FDE. The main logic defined is WBK — a modal logic with a single modal operator $\Box$ of weak necessity. This operator is axiomatized the same way as the usual necessity operator of the smallest (classical) modal logic K except all of its axioms and rules are formulated using the so-called strong implication $\Rightarrow$ in place of the usual (weak) classical implication $\to$. Strong implication is an important connective for the expansions of FDE with classical or intuitionistic implication and can be defined as $\varphi \Rightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\sim \psi \to \sim \varphi)$, where $\sim$ is *strong negation* of FDE. As a result one obtains $\Box$ in WBK is a modal operator, which is weaker than a number of known necessity operators over FDE, including that of Belnapian modal logics of S.P. Odinstov and H. Wansing and of the modal bilattice logic MBL. In fact, two different versions of this logic are investigated — one in the language of Nelson's logic N4 with truth and falsity constants and one in the full language of the bilattice logic (note that the latter language contains the former). This is due to the differences between expressive powers of two languages. Some of the consequences of these differences are pointed out.

The semantics of WBK involve frames of the form $\mathcal{W} = \langle W, R^+, R^- \rangle$, where W is the set of worlds and R^+, R^- are two four-valued binary relations on W, i.e. objects of the form $R : W^2 \to \mathcal{P}(\mathbf{2})$, where $\mathcal{P}(\mathbf{2})$ denotes the (bi)lattice of subsets of the two-element Boolean algebra. Both of this relations are used to model the necessity operator $\Box$ of WBK; R^+ corresponds to the verification condition and R^- — to the falsification condition of $\Box$. Models are of the form $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$, where $\mathcal{W}$ is a frame and v is a four-valued valuation, i.e. $v : \mathsf{Prop} \times W \to \mathcal{P}(\mathbf{2})$, where Prop denotes the set of propositional variables.

We establish the completeness result of WBK with respect to the defined semantics and obtain a number of correspondence theory results, which, in particularly, show how Belnapian modal logics and the modal bilattice logic can be expressed in our framework.

Finally, we also similarly investigate the weak possibility operator. Again, its semantics uses two four-valued binary relations to model its behavior. Interestingly, it turns out that a natural duality between two weak operators — necessity and possibility — can be expressed in the full language of the bilattice logic, but not in the smaller language of Nelson's logics.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
E-mail: drobs@math.nsc.ru

A nearly syntactic hypersequent calculus for rational Pavelka logic and its applications

A. S. Gerasimov

We consider first-order infinite-valued Łukasiewicz logic Ł∀; its expansion by rational truth constants $\bar{r}$ for all rational numbers $r \in [0,1]$, i.e., first-order rational Pavelka logic RPL∀; and the propositional fragments of these logics, Ł and RPL (see [**4**]). These are fuzzy logics that provide foundations for approximate reasoning.

We introduce an analytic hypersequent calculus GRP for RPL. The axioms of GRP are sequents of the forms $A \Rightarrow A$ and $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k \Rightarrow \bar{s}_m, \ldots, \bar{s}_m, A_1, \ldots, A_n$, where $A, A_1, \ldots, A_n$ are RPL-formulas, $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_m$ are rational numbers in the interval $[0,1]$, $k, m, n \geqslant 0$, and $\sum_{i=1}^{k}(r_i - 1) \leqslant \sum_{j=1}^{m}(s_j - 1) - n$. The inference rules of GRP are as ones of the calculus GŁ [**5**, Sec. 6.2.1] for Ł, including structural ones.

Theorem 1. *The calculus* GRP *is sound and complete.*

Then we extend the calculus GRP with the standard quantifier rules from [**5**, Sec. 8.3] to obtain a new calculus GRP∀ for RPL∀. Let GŁ∀ be the analytic hypersequent calculus for Ł∀ defined in [**5**, Sec. 8.5.2].

Proposition 2. GRP∀ *is a conservative extension of* GŁ∀.

Towards developing proof search methods for RPL∀, in [**1**] and [**2**], we introduced the following analytic hypersequent calculi for RPL∀ without structural rules: the cumulative calculus G^1Ł∀ and the noncumulative repetition-free calculus G^3Ł∀.

Theorem 3. *The calculi* GRP∀, G^1Ł∀, *and* G^3Ł∀ *prove exactly the same* RPL∀-*sentences.*

Let HRP∀ be Hájek's Hilbert-type calculus for RPL∀ (see [**4**]); and (cut) be the hypersequent cut rule for RPL∀ (see, e.g., [**5**, Def. 4.24]).

Theorem 4. HRP∀ *and* GRP∀+(cut) *prove exactly the same* RPL∀-*sentences.*

In our proof of Theorem 4, the key step is showing that axioms of GRP∀ are valid with respect to a certain algebraic semantics over so-called MV-chains contaning the rational unit interval. Now we complete our comparison of the calculi HRP∀ and G^3Ł∀+(cut) in [**3**] as follows.

Corollary 5. HRP∀ *and* G^3Ł∀+(cut) *prove exactly the same* RPL∀-*sentences.*

References

[1] Gerasimov A. S. Infinite-valued first-order Łukasiewicz logic: hypersequent calculi without structural rules and proof search for sentences in the prenex form // Siberian Advances in Mathematics. 2018. Vol. 28(2). Pp. 79–100.

[2] Gerasimov A. S. Repetition-free and infinitary analytic calculi for first-order rational Pavelka logic // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020, accepted.

[3] Gerasimov A. S. Comparing several calculi for first-order infinite-valued Łukasiewicz logic. arXiv:1812.05297, 2018.

[4] Hájek P. Metamathematics of fuzzy logic. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[5] Metcalfe G., Olivetti N., Gabbay D. M. Proof theory for fuzzy logics. Dordrecht, Springer, 2009.

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St.Petersburg
E-mail: alexander.s.gerasimov@ya.ru

Twist-structure semantics for connexive logic C

S. P. Odintsov, E. G. Kolbasenko

The term "connexive logics" introduced by S. McCall [**2**] denotes a special family of non-classical logics, which are not subsystems of classical logic. The first connexive logic with plausible semantics is logic C suggested by H.Wansing [**4**]. In [**3**], the internal algebraizability criterion was used to prove that C is algebraizable, i.e., the existence of an equivalent algebraic semantics was proved, but this semantics was not constructed. In this talk we define algebraic semantics for C in terms of twist-structures, we describe the abstract closure of this family of twist-structures in lattice-theoretical terms and prove that the obtained class of lattices forms a variety $\mathcal{V}_C$. Further, we prove that variety $\mathcal{V}_C$ provides the equivalent algebraic semantics for C in the sense of Blok and Pigozzi and establish a dual isomorphism between the lattice of C-extensions and the lattice of subvarieties of $\mathcal{V}_C$.

Many results of this talk were presented for the first time in the qualification work of the second author [**1**].

References

[1] Kolbasenko E. G. On algebraic semantics of connexive logic. Bachelor qualification work, Novosibirsk State Unjversity, 2020.

[2] McCall S. Non-classical Propositional Calculi. Ph.D. Dissertation, Oxford University, 1963.

[3] Odintsov S. P., Skurt D., Wansing H. Connexive Variants of Modal Logics over FDE. In O. Arieli, A. Zamanski (eds.) Arnon Avron on Non-Classical Logics — Between Semantics and Proof Theory, Outstanding Contributions to Logic. To appear.

[4] Wansing H. Connexive Modal Logic. In: R. Schmidt et al. (eds.) Advances in Modal Logic, Volume 5. KingтАЩs College Publications, 2005. Pp. 367тАУ-383.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk; Novosibirsk State University, Novosirsk
E-mail: odintsov@math.nsc.ru, e.kolbasenko@g.nsu.ru

Temporal logic with agents' temporal relations generated by time states

V. V. Rybakov

We consider agents' temporal logics with non-standard temporal accessibility relations. The logic is generated by models where any temporal state of any model generates its own accessibility agents' temporal relations. Thus time relations may have non-empty overlaps, so to be totally intransitive; thus the models work well for reasoning about computation, passing information and its reliability. The main mathematical problem we work is existence of algorithms for solving satisfiability problem. Main new obtained theorem stays

Theorem. *The satisfiability problem for logic T_{Ov}^{MA} is decidable.*

Some open problems are suggested.

Supported by RFFI (-RFBR) and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, research project 18-41-240005; supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Grant No. 075-02-2020-1534/1).

Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Krasnoyarsk; A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk
E-mail: Vladimir_Rybakov@mail.ru

V. Секция «Теория вычислимости»

О степенях негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами

Р. Н. Дадажанов, С. К. Жавлиев, Н. Х. Касымов

Будем говорить, что линейный порядок $\langle L; \preceq, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ с эндоморфизмами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ вычислимо (позитивно, негативно) *представим над эквивалентностью* η на множестве натуральных чисел ω, если существует такая его нумерация ν с нумерационной эквивалентностью равной η, в которой все эндоморфизмы вычислимы, а множества ν-номеров отношений равенства и порядка – разрешимы (позитивны, соответственно негативны).

Для негативной эквивалентности η обозначим через $L(\eta)$ класс всех линейных порядков с эндоморфизмами, негативно представимых над η, т.е. типов изоморфизмов таких структур, и на множестве Π всех негативных эквивалентностей на ω введем следующее бинарное отношение $\trianglelefteq_{NLO} : \eta_1 \trianglelefteq_{NLO} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2)$, которое является предпорядком на множестве Π и его симметричное замыкание $\equiv_{NLO}$ – есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на $\equiv_{NLO}$-классы эквивалентности. Частично упорядоченное множество $\langle \Pi / \equiv_{NLO}; \trianglelefteq_{NLO} \rangle$ будем называть *структурой негативной представимости* линейных порядков с эндоморфизмами, а его элементы – *степенями негативной представимости.* Будем также говорить, что порядок с эндоморфизмами представим над заданной степенью, если он представим над некоторой (а значит и над любой) эквивалентностью из этой степени.

Структуру негативной представимости разумно рассматривать контексте отсутствия степеней, содержащих эквивалентности с конечным числом смежных классов.

Теорема. *Существует негативный линейный порядок с вычислимыми эндоморфизмами, не имеющих позитивных нумераций.*

Рассмотрим хрестоматийный пример порядка с эндоморфизмом – натуральный ряд с его естественным порядком и функцией следования, т.е. $S^* = \langle \omega; \leq, s \rangle$, $s(n) = n + 1$.

Предложение. *Всякая негативная нумерация порядка с эндоморфизмом S^* является разрешимой.*

Заметим, что алгебра $S = \langle \omega; s \rangle$ (без отношения порядка) имеет неразрешимые негативные нумерации.

Следствие 1. *Существуют несравнимые степени негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами.*

Следствие 2. *Структура степеней негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами является бесконечной.*

Следствие 3. *Существует максимальная степень негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами.*

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент (Узбекистан)
E-mail: dadajonovrn@mail.ru, sarvar.javliyev@mail.ru, nadim59@mail.ru

Об определимости в структуре позитивных предпорядков

Б. С. Калмурзаев, Н. А. Баженов, С. А. Бадаев

Доклад посвящён определимым объектам структуры позитивных предпорядков с отношением вычислимой сводимости. Говорят, что бинарное отношение R вычислимо сводится к отношению S (c-сводится), если существует вычислимая функция f такая, что для любых $x, y \in \omega$ справедливо $(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$. В работе Ури Эндрюса и Андреа Сорби [**1**] установлено, что в c-структуре позитивных эквивалентностей определимы следующие объекты:

- Fin – множество всех конечных степеней позитивных эквивалентностей, т.е. $Fin = \{\deg(Id_n) : n \geq 1\}$;
- $\deg(Id)$;
- $Dark$ – множество всех тёмных степеней позитивных эквивалентностей;
- $Light$ – множество всех светлых степеней позитивных эквивалентностей;
- $Self\text{-}full$ – множество всех само-полных степеней позитивных эквивалентностей.

Через **CEP**, **Ceers**, **CELO** обозначим структуры c-степеней позитивных предпорядков, отношений эквивалентности и линейных предпорядков соответственно. Тогда справедлива следующая:

Теорема. **Ceers** *и* **CELO** *определимы в* **CEP**.

Следовательно, определимы все вышеперечисленные объекты позитивных эквивалентностей в структуре **CEP**. Кроме того, доказано, что Σ_2-фрагменты теорий структур **CEP** и **Ceers** различны.

Исследования авторов выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP08856493 «Позитивные графы и вычислимая сводимость на них как математические модели баз данных».

Список литературы

[1] Andrews U. and Sorbi A., Joins and meets in the structure of ceers, Computability, 2019, vol.8, no.3–4, p.193–241.

КазНУ имени Аль-Фараби, Алматы (Казахстан)
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru
Казахстанско-Британский технический университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: sbadaev@gmail.com

Об алгоритмической неразрешимости проблемы вложимости многообразий

А. Я. Канель-Белов, А. А. Чиликов

Задача классификации алгебраических многообразий с точностью до изоморфизма является одной из центральных задач алгебраической геометрии.

Близкой задачей является задача о вложимости многообразий. В общем виде эта задача формулируется так: *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – два многообразия. Определить, существует ли вложение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.*

Пусть многообразия заданы каким-либо конструктивным способом (например, системами уравнений и образующими). Тогда эта задача естественным образом приводит к следующей – придумать алгоритм, позволяющий по заданным многообразиям установить существование вложения (даже без его явного построения) или же отсутствие такового. Иными словами, к вопросу об алгоритмической разрешимости проблемы вложимости.

В 2018 году авторами была установлена алгоритмической неразрешимость проблемы вложимости алгебраических многоообразий над полями нулевой характеристики ([**1**], [**2**]). В частности, было установлено, что для случая многообразий над $\mathbf{R}$ проблема алгоритмически неразрешима для случая, когда $\mathcal{A}$ – аффинная прямая.

В доказательстве указанного результата существенно использовалась техника, связанная с диофантовыми уравнениями и уравнениями Пелля. В рамках этого исследования также были получены новые интересные результаты ([**3**], [**4**], [**5**]).

Вышеуказанные результаты будут представлены в рамках доклада.

Работа была поддержана Российским Научным Фондом, Грант N 17-11-01377.

Список литературы

[1] Канель-Белов А. Я., Чиликов А. А. Об алгоритмической неразрешимости проблемы вложимости алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики. Матем. заметки, 2019, 106:2, 307–310.

[2] Канель-Белов А. Я., Чиликов А. А. Об алгоритмической неразрешимости проблемы вложимости алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики, (2018), https://arxiv.org/pdf/1812.01883.pdf, 2018.

[3] Kollár, J., Pell surfaces, (2019), https://arxiv.org/pdf/1906.08818.pdf, 2019.

[4] Kollár, J., Pell surfaces. Acta Math. Hungar. 160, 478–518 (2020).

[5] А. А. Чиликов, И. Ефремов, В. Зверик, Н. Хомич. Комбинаторное доказательство упрощенной теоремы Коллара об уравнениях Пелля. Матем. заметки, 2020, 107:5, 796–800

BIU, МФТИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана
E-mail: kanelster@gmail.com, chilikov@passware.com

О T_1–отделимых нумерациях подпрямо неразложимых алгебр

Н. Х. Касымов, А. С. Морозов, И. А. Ходжмуратова

Здесь под *нумерациями алгебры* A эффективной сигнатуры мы понимаем такие отображения из ω на A, относительно которых все операции A равномерно вычислимы; разрешимость равенства не постулируется. Пусть T_i — одна из стандартных топологических аксиом ($i \leqslant 4$), и ν — нумерация алгебры A. Назовём ν *T_i–отделимой (T_i–вычислимо отделимой),* если топология на A, порождённая её ν–перечислимыми подмножествами, удовлетворяет аксиоме T_i. Назовём ν *T_0–эффективно отделимой,* если существует вычислимое семейство ν–в. п. множеств, осуществляющих T_0–отделимость в этой топологии. Под *трансляцией* алгебры мы понимаем унарную термальную операцию с параметрами.

Алгебра называется *трансляционно полной,* если всякая упорядоченная пара её различных элементов переводится в любую другую упорядоченную пару различных элементов подходящей трансляцией и *трансляционно предполной,* если некоторая пара её различных элементов трансляционно достижима из любой другой пары различных элементов.

Теорема. *Всякая T_2–отделимая нумерация трансляционно предполной алгебры является негативной.*

Теорема. *Существует T_1–отделимо нумерованная подпрямо неразложимая алгебра не являющаяся негативной.*

Следствие.

(1) *Существует подпрямо неразложимая алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, обладающая T_1–отделимой не негативной нумерацией.*

(2) *Существует трансляционно предполная алгебра, обладающая T_1–отделимой не негативной нумерацией.*

Предложение. *Пусть $M = (\omega; f)$ — алгебра с одной трёхместной операцией, определённой как* $f(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y \\ x, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$ *и ν — её нумерация. Тогда*

(1) *Если M содержит непустое собственное ν–перечислимое подмножество, то нумерация ν разрешима. В частности, всякая T_1–отделимая нумерация алгебры M является разрешимой.*

(2) *Алгебра M проста и не трансляционно предполна.*

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент (Узбекистан)
E-mail: nadim59@mail.ru
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: morozov@math.nsc.ru
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент (Узбекистан)
E-mail: indiraazatovna@mail.ru

О сложности проблемы эквивалентности хорновским формулам

Н. Т. Когабаев

Возможность формального представления утверждений и гипотез в виде хорновских формул часто является важным условием в различных системах автоматического доказательства теорем. Так, например, в [**1**] предложен алгоритмический метод, который по любой первопорядковой формуле Φ синтезирует нетривиальную гипотезу Ψ для выводимости формулы $\Psi \to \Phi$, при этом предполагается, что $\neg\Phi$ допускает представление в виде хорновской формулы.

В связи с этим возникает естественный вопрос о разрешимости проблемы существования хорновской формулы, логически эквивалентной данной.

В настоящей работе мы рассматриваем формулы сигнатуры арифметики $\sigma_0 = \langle +, \cdot, s, \leqslant, 0\rangle$ и изучаем алгоритмическую сложность следующих множеств

$$E_{id} = \{n \in \omega \mid n \text{ — гёделевский номер предложения } \Phi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \text{ и существует тождество } \Psi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \text{ такое, что } \Phi \equiv \Psi\},$$

$$E_{qid} = \{n \in \omega \mid n \text{ — гёделевский номер предложения } \Phi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \text{ и существует квазитождество } \Psi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \text{ такое, что } \Phi \equiv \Psi\},$$

$$E_{\forall} = \{n \in \omega \mid n \text{ — гёделевский номер предложения } \Phi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \text{ и существует } \forall\text{-предложение } \Psi \text{ сигнатуры } \sigma_0 \text{ такое, что } \Phi \equiv \Psi\}.$$

Мы доказываем, что множества E_{id}, E_{qid} и $E_{\forall}$ не разрешимы. Более того, справедлива следующая

Теорема. *Каждое из множеств E_{id}, E_{qid} и $E_{\forall}$ является m-полным Σ^0_1-множеством.*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00300).

Список литературы

[1] Васильев С. Н., Метод синтеза условий выводимости хорновских и некоторых других формул, Сиб. матем. ж., 38, N 5 (1997), 1034–1046.

Институт математики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: kogabaev@math.nsc.ru

Ленточный и полный ресурсы машин Тьюринга

И. В. Латкин

Предлагается наряду с временной и ёмкостной сложностью машин Тьюринга рассматривать ещё и дополнительные меры сложности. Это безусловно помогает восприятию при ознакомлении с основами теории сложности. Например, при первом знакомстве с теоремами о линейном сжатии и ускорении у многих возникает большое недоумение: как подобное может быть вообще? Захотели и моментально сжали и/или ускорили вычисления в любое количество раз.

После ознакомления с идеей доказательства недоумение во многом рассеивается, но некоторая неудовлетворённость остаётся. Отметим, что это чувство отчасти оправдано. Напомним, что сжатие в c раз достигается посредством «склеивания» c ячеек на ленте машины в одну и переработкой программы машины таким образом, чтобы она могла работать с такими «объединёнными» клетками. При этой переделке приходится существенно увеличивать внешний (ленточный) алфавит: он возрастает с m до m^c символов. Увеличивается также и число внутренних состояний машины с r до $r \cdot c^k$, если машина имеет k лент. А как хорошо известно, реальное расширение рабочего алфавита — вещь очень затратная.

Определение. *Пусть машина Тьюринга T имеет ёмкостную сложность $s(n)$, где n — длина входа, числа m, r и k — те же, что и выше. Тогда величина $res_T(n) = m \cdot s(n)$ называется ленточным, а $Res_T(n) = m \cdot r \cdot s(n)$ — полным ресурсом, потребляемым машиной T.*

Теперь теорема о линейном сжатии приобретает следующий вид.

Теорема. *Пусть k-ленточная машина Тьюринга T имеет ёмкостную сложность $s(n)$, число внутренних состояний r и распознаёт язык $L(T)$, записанный в алфавите A, при $|A| = m$. Тогда для всякого целого $c > 1$ можно переписать программу T в программу M так, что машина M будет распознавать «тот же» язык $L(T)$ (точнее его аналог в расширенном алфавите A^c) с ёмкостной сложностью $\lceil s(n)/c \rceil$, но ленточный ресурс у M возрастёт в m^{c-1}/c раз, а полный — в $m^{c-1} \cdot c^{k-1}$ раз, где $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее чем x.*

После этого уже вполне естественно воспринимается тезис о целесообразности исследования сложностных проблем без учёта некоторых деталей, тем более, что многоленточные машины Тьюринга являются хотя и наилучшей абстрактной моделью реальных ЭВМ, но не соответствуют им полностью.

Кроме того, автор надеется, что введённые понятия окажутся полезными не только с точки зрения методики преподавания, но и смогут быть применены при теоретических исследованиях, например, при уточнении месторасположения проблем в иерархии по сложности их решения, или при поиске комплексной меры сложности задач, которая бы учитывала не только временную и/или ёмкостную сложность, но также и сложность программ у машин, решающих задачу.

Восточно-Казахстанский технический университет, Усть-Каменогорск (Казахстан)
E-mail: lativan@yandex.ru

Вычислимые линейные порядки, обогащённые отношениями $S^n_{\mathcal{L}}$, вычислимая категоричность и спектры этих отношений

Я. А. Михайловская

В данной работе рассматриваются вычислимые линейные порядки, в сигнатуру которых добавлены некоторые дополнительные отношения. Эти отношения обозначаются как $S^n_{\mathcal{L}}$ и задаются следующим образом:
$S^n_{\mathcal{L}}(x,y) \leftrightharpoons (x <_{\mathcal{L}} y)\&(|(x,y)_{\mathcal{L}}| \leq n)\&(|(x,y)_{\mathcal{L}}|$ и n имеют одну чётность),
здесь $(x,y)_{\mathcal{L}} = \{z \mid x <_{\mathcal{L}} z <_{\mathcal{L}} y\}$.

Теорема 1. *Пусть вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ имеет бесконечно много блоков длины 2 и для нечётного n отношение $S^n_{\mathcal{L}}$ вычислимо. Тогда существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{R}$ такой, что $\mathcal{R} \cong \mathcal{L}$, $S^n_{\mathcal{R}}$ вычислимо, но $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ не вычислимо изоморфны, то есть вычислимый линейный порядок $(\mathcal{L}, S^n_{\mathcal{L}})$ не вычислимо категоричен.*

Следствие 1. *Вычислимый линейный порядок $(\mathcal{L}, S^1_{\mathcal{L}})$ вычислимо категоричен тогда и только тогда, когда $\mathcal{L} \in \Delta(\{k\eta | k < \omega\} \cup \{\omega, \omega*, \omega + \omega*\})$ и $\mathcal{L}$ содержит лишь конечное число блоков длины 2.*

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{L}$ – вычислимый линейный порядок, в котором выполнено следующее условие: для любого элемента $x \in L$ найдутся элементы a, $b \in L$ такие, что $S^n_{\mathcal{L}}(a,b)$ истинно и $x <_{\mathcal{L}} a$. Пусть A – невычисимое в.п. множество такое, что $S^n_{\mathcal{L}} \leq_T A$. Тогда существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}$ такой, что $S^n_{\mathcal{M}} \equiv_T A$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{L}$ – вычислимый линейный порядок, в котором выполнено следующее условие: для любого элемента $x \in L$ найдутся элементы $x_0 <_{\mathcal{L}} ... <_{\mathcal{L}} x_{n+1} \in L$ такие, что $S^n_{\mathcal{L}}(x_0, x_{n+1})$ истинно и $x <_{\mathcal{L}} x_0$. Пусть A – невычислимое $(n+1)$-в.п. множество такое, что $S^n_{\mathcal{L}} \leq_T A$. Тогда существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}$ такой, что $S^n_{\mathcal{M}} \geq_T A$.*

Теорема 3. *Если вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ не является η-схожим, то спектр отношения $S^n_{\mathcal{L}}$ замкнут наверх в в.п. степенях.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект 20-31-70012

Список литературы

[1] Chubb J., Frolov A., Harizanov V. Degree spectra of the successor relation of computable linear orderings // Archive for Mathematical Logic, 2009, vol. 48, no.1, pp. 7–13.

[2] Frolov A. N. Presentations of the successor relationof computable linear ordering // Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2010, vol. 54, no.7, pp.64–74.

[3] Moses M. Recursive linear orders with recursive successivities // Annals of Pure and Applied Logic, 1984, vol. 27, pp. 253–264.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: yana.michailovskaya@yandex.ru

Вычислимые вполне разложимые абелевы группы

Д. А. Тусупов, С. Д. Тиныбекова, Н. Г. Хисамиев

В [**2**] введено понятие эффективно вполне разложимой абелевой группы. Счетная абелева группа A *вполне разложима*, если $A = \bigoplus\{A_i | i \in \omega\}$, где A_i- подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Если существует такая конструктивная нумерация ν группы A, что в (A, ν) найдется вычислимо перечислимая последовательность элементов $a_i \in A_i$, то группу A назовем *эффективно вполне разложимой.* Рассмотрим следующий класс вполне разложимых групп. Пусть $p_0, p_1, \ldots$ некоторая последовательность простых чисел, $\mathbb{Q}(p_i)$ — аддитивная группа рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями p_i и

$$A = \bigoplus\{\mathbb{Q}(p_i) | i \in \omega\} \tag{1}$$

Характеристикой $\chi(A)$ группы A назовем множество

$$\chi(A) = \{< p, k > | \exists i_1 \ldots \exists i_k (p_{i_1} = \cdots = p_{i_k} = p)\} \tag{2}$$

В [**2**] доказана следующая

Теорема 1. *Абелева группа $A = \bigoplus\{\mathbb{Q}(p_i) | i \in \omega\}$ эффективно вполне разложима тогда и только тогда, когда ее характеристика $\chi(A)$, принадлежит классу $\sum_2^{(0)}$ арифметической иерархии.*

В данном сообщении доказана

Теорема 2. *Абелева группа A, определенная равенством (1) вычислима тогда и только тогда, когда ее характеристика, определенная равенством (2), принадлежит классу $\sum_3^{(0)}$ арифметической иерархии.*

Из теорем 1, 2 вытекает

Следствие. *Существует вычислимая вполне разложимая абелева группа, которая не эффективно вполне разложима.*

Исследование частично поддержано Комитетом по науке в Министерство образования и науки Республики Казахстан (Грант AP05132349).

Список литературы

[1] Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск. Научная книга. 1999, с. 345.
[2] Хисамиев Н. Г., Крыкпаева А. А. Эффективно вполне разложимые абелевы группы. Сибирский математический журнал, 1997, т. 38, N 6, стр. 1410–1412.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева; АО Международная финансовая академия, Нур-Султан
E-mail: tussupov@mail.ru, hisamiev@mail.ru

Некоторые свойства верхней полурешетки вычислимых семейств

М. Х. Файзрахманов

В докладе рассматривается верхняя полурешетка вычислимых семейств вычислимо перечислимых множеств относительно операции теоретико-множественного включения, впервые изученная А Н. Дегтевым (1991). Будут изложены результаты об определимости в ней идеала конечных семейств, рассмотрены вопросы о существовании атомов и коатомов факторполурешетки по этому идеалу, сделан обзор некоторых ее естественных подклассов и их свойств.

Работа проведена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение 075-02-2020-1478).

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

About universal pairs in Ershov hierarchy

N. Bazhenov, M. Mustafa, S. Ospichev

In this paper we investigate m-universality of computable families of sets. This concept was introduced in [**1**], where an example of m-universal pair of disjoint computable enumerable sets was constructed. Here we generalize this result to the case of Ershov hierarchy.

For any pairs of sets (A_1, A_2) and (B_1, B_2), we say that (A_1, A_2) is *m-reducible* to (B_1, B_2) ($(A_1, A_2) \leqslant_m (B_1, B_2)$), if there is a total computable function f such that $x \in A_i \Leftrightarrow f(x) \in B_i$ for all $x \in \omega$ and $i = 1, 2$.

For any ordinal notation $a \in \mathcal{O}$, a pair (B_1, B_2) with $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, we will call *Σ_a^{-1}-m-universal*, if $B_1, B_2 \in \Sigma_a^{-1}$ and $(A_1, A_2) \leqslant_m (B_1, B_2)$ for any $A_1, A_2 \in \Sigma_a^{-1}$ with $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Theorem 1. *For any ordinal notation $a \in \mathcal{O}$ of non zero ordinal, there is Σ_a^{-1}-m-universal pair.*

Note, that m-reducibility of disjoint pairs is closely related to the concept of *sm*-reducibility, that was developed in [**2, 3, 4**]:

The pair of disjoint sets (A_1, A_2) *sm-reducible* to the pair of disjoint sets (B_1, B_2), if there is a total computable function f such that $f(A_1) \subseteq B_1$ and $f(A_2) \subseteq B_2$. It is easy to see, that m-reducibility entails *sm*-reducibility.

Corollary 2. *For any ordinal notation $a \in \mathcal{O}$ of non zero ordinal, there is Σ_a^{-1}-sm-universal pair.*

References

[1] Muchnik A. A., Isomorphism of systems of recursively enumerable sets with effective properties, Tr. Mosk. Mat. Obs., 7, GIFML, Moscow, 1958, 407–412

[2] Ershov Y. L., Theory of numberings, Nauka, Moscow (1977), in Russian

[3] Dvornikov S. G., Lattice of separation-degrees. 7th All-union math.logic conf., Novosibirsk, IM, 1984, p.55.

[4] Dvornikov S. G., Rybina T. V., Denseness properties of the lattice of separation-degrees, Siberian Math. J., 31:1 (1990), 52–57

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: bazhenov@math.nsc.ru, ospichev@math.nsc.ru
Nazarbayev University, Nur-Sultan (Kazakhstan)
E-mail: manat.mustafa@nu.edu.kz

A family of total functions without universal numberings

A. A. Issakhov, U. B. Ostemirova

Let F be a family of functions. If for any finite sub-function of f there exists a function $g \in F$ distinct from f, which extends this finite sub-function, then the function f is called a limit point of the family F. Limit point of F need not be in F.

It is known that if A is an arbitrary set and F is an $A-$computable family of total functions that contains at least one limit point, then F has no universal $A-$computable numbering (even relative to reducibility via $A-$computable functions), [**1**].

Note that if an arbitrary finite $A-$computable family F of total functions, where Turing degree of the set A is hyperimmune-free, then F has an $A-$computable universal numbering, [**2**]. If an $A-$computable family F of total functions contains at least two elements, where A is a hyperimmune set, then F has no $A-$computable universal numbering,[**3**]. At the same time we know that there exists an infinite $A-$computable family F of total functions, where Turing degree of the set A is hyperimmune-free, such that F has an $A-$computable universal numbering.

Theorem. *There exists an infinite $A-$computable family F of total functions, where Turing degree of the set A is hyperimmune-free, such that F does not contain a limit point and has no $A-$computable universal numbering.*

References

[1] Badaev S. A. and Issakhov A. A., Some absolute properties of $A-$computable numberings, Algebra and Logic, vol. 57 (2018), no. 4, pp. 275–288.

[2] Issakhov A. A., Hyperimmunity and $A-$computable universal numberings, AIP Conference Proceedings, vol. 1759, 020106 (2016); doi: 10.1063/1.4959720.

[3] Issakhov A. A., $A-$computable numberings of the families of total functions, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 22 (2016), no. 3, p. 402.

School of Mathematics and Cybernetics, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: a.isakhov@kbtu.kz, asylissakhov@gmail.com, uuldanaustemir@gmail.com

On a semilattice of degrees of computable metrics

R. A. Kornev

Necessary definitions and notations can be found in [**1, 2**]. We view Polish spaces as topological spaces $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$, where W is a distinguished countable dense subset of X and $\nu\colon \omega \to W$ is its numbering. Given a Polish space $\mathbf{X}$, denote by $M(\mathbf{X})$ the set of all complete metrics on X compatible with the topology τ. Every metric $\rho \in M(\mathbf{X})$ induces a Cauchy representation δ_ρ of X that is generated by quickly converging sequences of elements of W. For metrics $\rho_1, \rho_2 \in M(\mathbf{X})$, we say that ρ_1 is *computably reducible* to ρ_2, written as $\rho_1 \leq_c \rho_2$, if $\delta_{\rho_1} \leq_c \delta_{\rho_2}$. Relation $\leq_c$ is a preordering on $M(\mathbf{X})$. Factorizing by the equivalence relation $\equiv_c$, we obtain the ordering $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ of c-degrees of metrics in $M(\mathbf{X})$. Ordering of c-degrees of computable elements of $M(\mathbf{X})$ is denoted by $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$.

In the talk, we discuss the following three properties of $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$. Firstly, this ordering forms a lower semilattice. Secondly, if for a computable metric $\rho \in M(\mathbf{X})$ there is a computable limit point in the space (X, ρ, W, ν), then there exists a computable metric $\rho' <_c \rho$, i. e., $\deg_c(\rho)$ is not minimal in $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$. Thirdly, under the same assumption on a computable metric ρ, there exists a computable metric $\widehat{\rho}$ such that $\{\deg_c(\rho), \deg_c(\widehat{\rho})\}$ has no upper bound in $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$; thus, $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ is not upward directed, is not an upper semilattice and has no greatest element.

References

[1] Kreitz Ch., Weihrauch K., Theory of representations, Theoret. Comput. Sci., 38: 35–53, 1985.
[2] Weihrauch K., Computable Analysis. An Introduction, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: kornevrus@gmail.com

Index Sets and the Existence of Computable Copies

M. V. Korovina, O. V. Kudinov

We propose a criterion of m-completeness for tuples of Σ^0_1 and Σ^0_2–subsets of ω. It turns out that the established result is useful for applications. Among others we report on the following:

- The real closed fields of polynomial time computable real numbers and $\mathcal{E}_n$-computable real numbers do not have computable copies, where $\mathcal{E}_n$ is a level in Grzegorczyk hierarchy of all primitive recursive functions, $n > 2$.
- **Definition** *Let* $K_1, \ldots, K_n$ *be classes of c.e. sets and* $A_i = \mathrm{Ix}(K_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *be their index sets. We say that these classes and the corresponding index sets are in general position if*

$$\forall I \subseteq \{1, \ldots, n\} \bigcap_{i \in I} K_i \not\subseteq \bigcup_{j \notin I} K_j.$$

This is equivalent to $\forall I \subseteq \{1, \ldots, n\} \bigcap_{i \in I} A_i \not\subseteq \bigcup_{j \notin I} A_j$.

We state that if all $A_1, \ldots, A_n$ are in generale position then n-tuple $(A_1, \ldots, A_n)$ is m-complete in the class of all n-tuples of c.e. sets.

O.V.Kudinov was supported by the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. 0314-2019-0002), RFBR project no. 20-01-00300a and RFBR- JSPS project no. 20-51-5000. M.V.Korovina was supported by the state contract of the IIS SBRAS (project no. 0317-2019-0003) and RFBR-JSPS project no. 20-51-5000.

References

[1] Arslanov, M. M., A local Theory of Degrees of Unsolvability and Δ^0_2-sets, Kazan University Press, 1987. (in Russian)

[2] Ershov, Yu. L., Theory of numberings. E.R. Griffor, ed., Handbook of Computability Theory. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1999, pp. 473–503.

[3] Ershov, Yu. L. and Goncharov S. .S., Constructive models, Siberian School of Algebra and Logic, Consultants Bureau, New York, 2000.

[4] Grzegorczyk A., Some classes of recursive functions, Rozprawy Mathemaczne IV, Warszawa, 1953.

A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, SbRAS, Novosibirsk
E-mail: rita.korovina@gmail.com
Sobolev Institute of Mathematics, SbRAS, Novosibirsk
E-mail: kud@math.nsc.ru

Boolean algebras autostable relative to n-constuctivization

M. N. Leontyeva

It is independently proven in [**1**] and [**2**] that Boolean algebra is autostable if and only if it has a finite number of atoms. In [**3**] it is proved that Boolean algebra is autostable relative to strong constructivizations if it is isomorphic to a direct product of a finite number of simple models. In this work we study autostability of Boolean algebras with respect to n-constructivizations. Boolean algebra *is autostable relative to n-constructivizations* if it has n-computable representation and any two of it's n-computable representations are computably isomorphic. For $n = 0$, the description is obtained in [**1**] and [**2**]. For $n = 1$ and $n = 2$, the description is published by Remmel in his chapter in [**4**]. This paper gives a complete description of Boolean algebras autostable relative to n-constructivizations for all natural numbers n.

Theorem. *Let $n \in \omega$. Boolean algebra $\mathcal{A}$ is autostable relative to n-constructivizations iff $\mathcal{A}$ is isomorphic to a direct product of finite number of simple models with elementary characteristics*

- $(i, 1, 0)$, $(i, 0, 1)$ *and* $(j, 1, 0)$, $(j, 0, 1)$, $(j, \infty, 0)$ *for* $j < i$ *if* $n = 4i$.
- $(j, 1, 0)$, $(j, 0, 1)$, $(j, \infty, 0)$ *for* $j \leq i$ *if* $n = 4i + 1$.
- $(i + 1, 1, 0)$ *and* $(j, 1, 0)$, $(j, 0, 1)$, $(j, \infty, 0)$ *for* $j \leq i$ *if* $n = 4i + 2$ *or* $n = 4i + 3$.

Proposition. *Each autostable relative to n-constructivizations Boolean algebra has strong constructivization, moreover each n-constructivization of such Boolean algebra is strong constructivisation.*

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR according to the research project N 20-01-00300.

References

[1] Goncharov S. S., Dzgoev V. D., Autostability of models, Algebra and Logic 19, 28–37 (1980).

[2] Remmel J. B., Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras, The Journal of Symbolic Logic 46, no. 3, 1981, 572–594.

[3] Palchunov D. E., Trofimov A. V., Turko A. I. Autostability relative to strong constructivizations of Boolean algebras with distinguished ideals, Siberian Mathematical Journal, 2015, 56, no.3, 490–498.

[4] Handbook of Boolean algebras, Elsevier, 1989.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia), Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)
E-mail: margarita.leontyeva@gmail.com

VI. Секция «Теория групп»

Круговые единицы сравнимые с 1 по модулю 2 для 2-круговых полей

Р. Ж. Алеев, А. Д. Годова, О. В. Митина

Под 2 *-круговым полем* понимается круговое поле, полученное присоединением примитивного корня из 1 степени 2^m для некоторого $m \geqslant 2$, обозначается $\mathbf{Q}_{2^m}$.

Пусть $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка 2^n. Пусть α — примитивный корень из 1 степени 2^n. Пусть χ — характер группы G с условием $\chi(x) = \alpha$. Как в определении 1 в [**1**], обозначим через $u(\lambda)$ локальный элемент, соответствующий характеру χ и элементу $\lambda \in \mathbf{Q}_{2^n}$. Из [**2**] следует, что нормализованная группа единиц $V(\mathbf{Z}G)$ целочисленного группового кольца группы G содержит подгруппы W и W_1, прямое произведение $W \times W_1$ которых является подгруппой конечного индекса группы $V(\mathbf{Z}G)$. Причём W изоморфна подгруппе нормализованной группы единиц $V(\mathbf{Z}\langle x^2 \rangle)$ целочисленного группового кольца подгруппы $\langle x^2 \rangle$ группы G, а

$$W_1 = \left\{ u(\beta) \mid \beta \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha + \alpha^{-1}]), \beta \equiv 1 \pmod 2 \right\},$$

где $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha+\alpha^{-1}])$ — группа единиц кольца $\mathbf{Z}[\alpha+\alpha^{-1}]$. В работе Синнота [**3**] определена подгруппа $K(\alpha)$ круговых единиц группы единиц $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha])$ кольца $\mathbf{Z}[\alpha]$. Из [**4**] следует, что $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha]) = K(\alpha)$ для $n \leqslant 8$.

Для любого целого j положим $d_j = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j}$.

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 4$. *При введённых ранее обозначениях имеем*

(1) $K(\alpha) = \langle \alpha \rangle \times D(\alpha)$, *где* $D(\alpha) = \prod_{l=0}^{2^{n-2}-2} \langle d_{2l+1} \rangle$,

(2) $W_1 = \langle x^{2^{n-1}} \rangle \times V_1$, *где* $V_1 = \{u(\beta) \mid \beta \in D(\alpha), \beta \equiv 1 \pmod 2\}$ *при* $n \leqslant 8$,

(3) *при* $n \leqslant 7$ *единица* $\beta \in D(\alpha)$ *и* $\beta \equiv 1 \pmod 2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\beta \in \langle d_1^{2n-2} \rangle \times \prod_{l=1}^{2^{n-3}-1} \langle d_{2l+1} d_{2l+1}^{-1} d_{2^{n-1}-(2l+1)} \rangle \times \prod_{k=1}^{n-3} \prod_{l=0}^{2^{n-3-k}-1} \langle d_{2l+1}^{-2^k} d_{2^{n-1}-(2l+1)}^{2^k} \rangle.$$

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление 211 от 16.03.2013), соглашение 02.A03.21.0011, и при частичной поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ 14.Z50.31.0020).

Список литературы

[1] Алеев Р. Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды, Т.3,1, 2000, 3–37.

[2] Алеев Р. Ж., Митина О. В., Ханенко Т. А. Нахождение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32 // Челяб. физ.-мат. журн., Т.1, 4, 2016, С. 30–55.

[3] Sinnott W. On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field // Ann. of Math. 1978. Vol. 108, N 1. P. 107–134.

[4] Miller J. C. Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem // Acta Arithmetica. 2014. Vol. 164, N 4. P. 381–397.

Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинский госуниверситет, Челябинск
E-mail: aleevrz@susu.ru, sashka_1997_godova55@mail.ru, ovm@csu.ru

Многообразия степенных MR-групп

М. Г. Амаглобели

Понятие степенной R-группы (R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей) было введено Р. Линдоном в [**1**]. В [**2**] А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников определили новую категорию $\mathfrak{M}_R$, добавив ещё одну аксиому. Это уточнение представляет естественное обобщение понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В честь авторов этой статьи группы с этой аксиомой в [**3**] названы MR-группами (R-кольцо).

Ключевой операцией в категории $\mathfrak{M}_R$ является операция тензорного пополнения G^R для любой MR-группы G, введенная в [**2**], которая обобщает на некоммутативный случай понятие тензорного расширения кольца скаляров для модулей. Группу G назовем **точной** относительно кольца R, если каноническое отображение $G \to G^R$ является вложением. В [**4**] и [**5**] исследовалось понятие точности тензорного пополнения и доказана точность для достаточно широкого класса групп и широкого класса колец. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений на языке групповых конструкций.

В категории $\mathfrak{M}_R$ стандартным способом вводятся понятия многообразия MR-групп, вербальной подгруппы и тензорного пополнения в многообразии. Отметим, однако, существенное отличие изучаемого случая от классического. Во-первых, понятие многообразия расслаивается в зависимости от кольца скаляров. Во-вторых, вербальная подгруппа, вообще говоря, не порождается значениями слов, определяющих многообразие. К счастью, функтор тензорного пополнения связывает слои многообразий по различным кольцам скаляров. В [**6**] получены следующие результаты.

Теорема 1.

1) *R-коммутант MR-группы G как вербальная MR-подгруппа порождается коммутатором $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$;*
2) *если R-поле, то R-коммутант MR-группы G как вербальная MR-подгруппа порождается α-коммутатором $(x,y)_\alpha = y^{-\alpha}x^{-\alpha}(xy)^\alpha$, $\alpha \neq 0, 1$ (если $\alpha = -1$, то $(x,y)_{-1} = [y^{-1}, x^{-1}]$).*

Теорема 2. *Пусть W_R – многообразие MR-групп, заданное множеством слов W, $R \subseteq S$-кольца, $G \in W_R$. Тогда тензорное S-пополнение G^S_W относительно многообразия W_S существует, причём $G^S_W \cong G^S/W(G^S)$.*

Теорема 3. *Существует взаимно-однозначное соответствие между решеткой абелевых многообразий степенных MR-групп и решёткой двусторонних идеалов кольца R.*

Список литературы

[1] Lyndon R. C., Groups with parametric exponents. Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960), 518–533.

[2] Мясников А. Г., Ремесленников В. Н., Степенные группы. I. Основы теории и тензорные пополнения. Сиб. мат. журн. 35 (1994), N 5, 1106–1118.

[3] Amaglobeli M. G., Remeslennikov V. N., Free nilpotent R-groups of class 2. (Russian) Dokl. Akad. Nauk 443 (2012), no. 4, 410–413; translation in Dokl. Math. 85 (2012), no. 2, 236–239.

[4] Amaglobeli M. G., The tensor completion functor in categories of exponential MR-groups. (Russian) Algebra Logika 57 (2018), no. 2, 137–148; translation in Algebra Logic 57 (2018), no. 2, 89–97.

[5] Amaglobeli M., Exponential MR-groups: faithful R-completion. Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk 486 (2019), no. 2, 11–14.

[6] Амаглобели М. Г., Многообразия степенных MR-групп. Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления 290 (2020), N 1, 1–4.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси (Грузия)
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

Конечные группы с Φ-простыми максимальными подгруппами

Е. Н. Бажанова, В. А. Ведерников

Рассматриваются лишь конечные группы. Группа G называется Φ-*простой*, если $G/\Phi(G)$ является простой группой. В работе [1] исследованы конечные группы, в которых каждая максимальная подгруппа проста или нильпотентна (2-нильпотентна), а также приведен следующий вопрос: «Каковы неабелевы главные факторы конечной неразрешимой группы, у которой всякая максимальная подгруппа простая или p-нильпотентная (p-разложимая) для некоторого фиксированного $p \in \pi(G)$?».

В настоящем сообщении получено обобщение результатов работы [1], а также частично получен ответ на поставленный в работе [1] вопрос.

Теорема 1. *Пусть $p \in \{2,3\}$ и G – p-неразложимая группа. В группе G каждая максимальная подгруппа p-разложима или Φ-проста тогда и только тогда, когда G является pd-группой Шмидта.*

Теорема 2. *Пусть $r \in \{2,3\}$, $q = p^s$, p — простое число и G не является r-нильпотентной группой. Если в группе G каждая максимальная подгруппа r-нильпотентна или Φ-проста, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) G – r-замкнутая группа Шмидта для любого $r \in \{2,3\}$;

(2) $r = 2$ и G обладает нормальным рядом $1 \leq \Phi(G) < L < G$, причем $L/\Phi(G) \cong L_2(q)$, $q = p^s \geq 4$, p – простое число, $s \geq 1$, $p^{2s} - 1 \equiv 0(mod16)$ и $G/\Phi(G) \cong PGL_2(q)$;

(3) $r = 2$, $G/\Phi(G) \cong L_2(3^{2k+1})$, $k \geq 1$;

(4) $r = 2$, $G/\Phi(G) \cong L_2(5^{2k+1})$, $k \geq 1$;

(5) $r = 2$, $G/\Phi(G) \cong L_2(p^{2k+1})$, $p > 5$, $k \geq 1$ и $p^{2s} - 1 \equiv 0(mod16)$;

(6) $r = 2$, $G/\Phi(G) \cong L_2(p^{2k+1})$, $p > 7$, $k \geq 0$, $p^{2s} - 1 \not\equiv 0(mod16)$, $p^{2s} - 1 \equiv 0(mod5)$.

Следствие 2.1. *Пусть $r \in \{2,3\}$, $q = p^s$, p — простое число и G не является r-нильпотентной группой. В группе G каждая максимальная подгруппа r-нильпотентна или проста тогда и только тогда, когда выполняется одно из утверждений (1), (2)–(6) с $\Phi(G) = 1$ из теоремы 2.*

Следствие 2.2. *В 3-ненильпотентной группе G каждая максимальная подгруппа 3-нильпотентна или Φ-проста тогда и только тогда, когда G является 3-замкнутой $3d$-группой Шмидта.*

Список литературы

[1] Монахов В. С., Тюнянов В. Н. О конечных группах с заданными максимальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, N 3. С. 553–561.

ГАОУ ВО МГПУ, Москва
E-mail: deminaenmf@yandex.ru, vavedernikov@mail.ru

Об орбитах D_π-подгруппы в конечной группе

И. Н. Белоусов, В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Если π-холловы подгруппы в G сопряжены и каждая π-подгруппа из G лежит в некоторой π-холловой подгруппе группы G, то группа G называется D_π-группой, а подгруппа H с отмеченным свойством — D_π-подгруппой. Рассмотрим действие подгруппы H на классе G-сопряженных с H подгрупп.

В случае, когда $\pi = \{p\}$, в [**1**] было доказано, что в простой неабелевой группе $H \cap H^g = 1$ для некоторого $g \in G$ и в случае, когда G — группа лиева типа над полем характеристики p, существует точно одна орбита под действием H на множестве $\{H^g | g \in G, H \cap H^g = 1\}$. Если же p отлично от характеристики поля, то число орбит не обязательно равно 1. Если G необязательно простая, то в [**2**] доказано, что $H \cap H^x \cap H^y = O_p(G)$ для некоторых элементов $x, y \in G$. Можно рассматривать действие подгруппы H сопряжением на множестве пар $\{H, H^g\}$, где $g \in G$. Здесь уже число орбит не менее трех.

В общем случае в работе [**3**] был поставлен вопрос: верно ли, что $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$ для любых π и D_π-подгруппы H из G? Второй автор построил контрпример к этой гипотезе, в котором группа G изоморфна расширению группы $L_2(27)$ с помощью группы, порожденной ее полевым автоморфизмом порядка 3. Заметим, что в группе $L_2(27)$ $D_{\{3,13\}}$-подгруппа H действует транзитивно на множестве пар $\{H^x, H^y\}$, где $H \cap H^x \cap H^y = 1$.

Из описания [**3**] D_π-подгрупп в простых знакопеременных группах следует, что $\pi = \{p\}$, поэтому ввиду отмеченного выше результата из [**2**] число таких орбит не менее 3.

В данной работе нами доказана

Теорема. *Пусть G — конечная простая спорадическая группа и H — ее D_π-подгруппа. Тогда при действии H на множестве пар $\{H^x, H^y\}$, для которых $H \cap H^x \cap H^y = 1$, существует не менее двух орбит.*

Открытым является вопрос о том, верно ли, что на самом деле в этом случае $H \cap H^g = 1$ для некоторого g из G. Это верно для знакопеременных групп и неверно для групп лиева типа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 20-01-00456.

Список литературы

[1] Мазуров В. Д., Зенков В. И. О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т 35, N 4. С. 424–432.

[2] Зенков В. И. Пересечение нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, N 1. С. 1–92.

[3] Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Теоремы силовского типа // УМН. 2011. Т. 66, N 5. С. 3–46.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: i_belousov@mail.ru, v1i9z52@mail.ru

О пересечении Θ-подгрупп с ограничениями на индексы в группах с операторами

Р. В. Бородич, М. В. Селькин, Е. Н. Бородич, Р. А. Кучеров

В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяют раскрыть многие свойства самих групп (см. монографию [1]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ — группа автоморфизмов группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе (см. [2]).

Обозначим через $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп. Если в G абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп нет, то положим $\Delta(G, A) = G$. В случае единичности группы операторов подгруппа $\Delta(G, A)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ [3].

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$ и группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N — нормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

Литература

1. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. — Мн.:Беларуская навука, 1997. — 144 с.

2. Бородич, Р. В. Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами/ Р. В. Бородич, Е. Н. Бородич, М. В. Селькин. Проблемы физики, математики и техники. 2015. N 2(23). — С. 33-39.

3. Gaschütz W. *Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen* // Math. Z. 1953. Bd. 58. S. 160–170.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: Borodich@gsu.by

О независимой аксиоматизируемости квазимногообразий нильпотентных групп без кручения

А. И. Будкин

Для любого класса $\mathcal{N}$ и любого множества квазитождеств Σ через $Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma)$ обозначим класс всех групп из $\mathcal{N}$, в каждой из которых истинны все формулы из Σ. Будем говорить, что класс $\mathcal{M}$ определяется в классе $\mathcal{N}$ системой квазитождеств Σ, если $\mathcal{M} = Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma)$. В этом случае Σ называется базисом квазитождеств класса $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$.

Множество Σ квазитождеств называется независимым в $\mathcal{N}$, если для любого собственного подмножества $\Sigma' \subset \Sigma$ имеет место строгое включение $Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma) \subset Mod_{\mathcal{N}}(\Sigma')$.

В [1] доказано, что свободная 2-нильпотентная группа ранга 2 не имеет независимого базиса квазитождеств в классе групп без кручения. До сих пор других неабелевых квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп без кручения, порождённых конечно порождённой группой и не имеющих независимого базиса квазитождеств в классе групп без кручения, известно не было. В данной работе доказана бесконечность множества таких квазимногообразий.

Теорема. *Множество квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп без кручения, порождённых конечно порождённой группой и не имеющих независимых базисов квазитождеств в классе групп без кручения, бесконечно.*

Список литературы

[1] Fedorov A. N., Quasi-identities of a free 2-nilpotent group, Mathematical Notes, 40:5 (1986), 837–841.

Алтайский госуниверситет, Барнаул
E-mail: budkin@math.asu.ru

Площадь треугольника и биссектрисы

А. А. Бутурлакин, С. С. Пресняков, Д. О. Ревин, С. А. Савин

Используются стандартные обозначения для элементов треугольника на евклидовой плоскости. Известны формула Герона и ее аналоги, выражающие площадь такого треугольника через его стороны

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = (a+b+c)/2$ — полупериметр треугольника, через медианы

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)}$$

и через высоты

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right)}.$$

Естественный вопрос: можно ли выразить площадь треугольника в радикалах через его биссектрисы? При этом известно [**1, 2**], что для любых действительных чисел $l_a, l_b, l_c > 0$ существует и единственный треугольник с биссектрисами l_a, l_b, l_c. Основываясь на результатах Х. Вольфа [**3**] и Б.Л. Ван дер Вардена [**4**], мы покажем, что не существует общей формулы, выражающей в радикалах площадь треугольника через его биссектрисы. Более того, площадь треугольника с биссектрисами 1, 2 и 3 не выражается в радикалах через рациональные числа. Отметим, что в литературе есть ошибочное указание [**5**, стр. 335], что выражение площади в радикалах через биссектрисы найдено в 1843 году фон Ренте-Финком [**6**].

Работа выполнена при поддержке программы I.1.1 фундаментальных исследований СО РАН, проект 0314-2019-0001 и гранта РФФИ 20-51-00007 Бел_а.

Список литературы

[1] Mironescu P. and Panaitopol L., The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths, Amer. Math. Monthly 101 (1994), 58–60.

[2] Жуков А., Акулич И., Однозначно ли определяется треугольник? Квант, 2003, N1, 29–31.

[3] Wolff H. , Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, J. Reine Angew. Math. 177 (1937), 134–151.

[4] Van der Waerden B. L., Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, J. Reine Angew. Math. 179 (1938), 65–68.

[5] Dinca G. and Mawhin J., A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisectorlengths, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 17 (2010), 333–341.

[6] von Renthe Finck A., Versuch der Auflösung der Aufgabe Nr. 12. im 6ten Bande S. 214 dieses Journals: Aus den drei, die Winkel eines geradlinigen Dreiecks halbirenden Scheitellinien den Inhalt desselben zu finden, Crelle's J. (J. Reine u. Angew. Math.), 26 (1843) N3, 273–276.

ИМ СО РАН, Новосибирск; СПбГУ, Санкт-Петербург
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru, st084870@student.spbu.ru
НГУ, Новосибирск; НГТУ, Новосибирск
E-mail: revin@math.nsc.ru, semen.savin.02@gmail.com

О регулярных орбитах конечных примитивных разрешимых групп

А. С. Васильев, Е. П. Вдовин, Й. Янг

Орбита группы называется регулярной, если централизатор её точки тривиален, или, эквивалентно, порядок этой орбиты равен порядку группы. Пусть конечная разрешимая группа G действует на векторном пространстве V точно, неприводимо и квазипримитивно. Тогда G содержит характеристическую подгруппу E, являющуюся прямым произведением экстраспециальных p-групп для различных простых p. Введём обозначение $e = \sqrt{|E/Z(E)|}$. В работах [**1**], [**2**] Янг доказал, что в случаях $e = 5, 6, 7$ или $e \geq 10$ и $e \neq 16$ у группы G существует регулярная орбита на пространстве V. В докладе будут рассмотрены случаи $e = 2, 3, 4, 8, 9, 16$.

Работа А. С. Васильева и Е. П. Вдовина поддержана грантом РНФ N 19-11-00039, работа Й. Янга - грантом NSFC (No: 11671063) и грантом от Simons Foundation (No 499532, YY).

Список литературы

[1] Yang Y., Regular orbits of finite primitive solvable groups, J. Algebra 323 (2010), 2735-2755.
[2] Yang Y., Regular orbits of finite primitive solvable groups, II, J. Algebra 341 (2011), 23-34.

Новосибирский государственный университет, Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: vasilalex@math.nsc.ru, vdovin@math.nsc.ru
Texas State University (USA)
E-mail: yang@txstate.edu

О минимальном числе порождающих элементов коммутантов конечных p-групп

Б. М. Веретенников

Всюду ниже $d(G)$ – минимальное число порождающих группы G.

Еще в работе [**1**] Н. Блэкберн доказал, что если в конечной p-группе G фактор-группа G/G' изоморфна $Z_{p^m} \times Z_{p^n}$, то $d(G') \leq (p^m - 1)(p^n - 1)$ и это неравенство не улучшаемо.

В [**2**] принципиально решен вопрос о наибольшем значении $d(G')$ в классе конечных p-групп, порожденных элементами любых заданных порядков. Однако компактной формулы получено не было.

В данном сообщении такая формула предлагается. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $n \geq 2$ и $k_1, \ldots, k_n$ – целые положительные числа. Тогда если конечная p-группа G порождается n элементами порядков $p^{k_1}, \ldots, p^{k_n}$, соответственно, то*

$$d(G') \leq (n-1)p^{k_1+\cdots+k_i+\cdots+k_n} - \sum_{i=1}^{n} p^{k_1+\cdots+\widehat{k_i}+\cdots+k_n} + 1,$$

где "крышка" над k_i означает, что в сумме n слагаемых $k_1 + \cdots + k_n$ слагаемое k_i отсутствует, и данное неравенство не улучшаемо.

Список литературы

[1] Blackburn N., On prime-power groups with two generators, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 54, No. 3, (1958), 327–337.

[2] Veretennikov B. M., The strict upper bound of ranks of commutator subgroups of finite p-groups, Siberian Electronic Mathematical Reports, 16 (2019), 1885-1900 (in Russian).

Уральский федеральный университет (УрФУ), Екатеринбург
E-mail: boris@veretennikov.ru

Конечные подгруппы относительно свободных n-крученых групп

Г. Г. Геворгян, А. Л. Геворгян

Группа называется n-крученой группой, если она имеет систему определяющих соотношений вида $r^n = 1$ для некоторых элементов r и для любого ее элемента a конечного порядка выполняется соотношение $a^n = 1$ (см. [**1**]). Класс n-крученых групп достаточно обширна. Нетрудно заметить, что свободные группы любого ранга m, а также свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ являются n-кручеными группами для любого натурального n. Помимо этих групп групп n-кручеными являются также свободные группы многообразия, удовлетворяющего тождеству $[x, y]^n = 1$, свободные группы известных бесконечно базируемых многообразий С.И.Адяна, n-периодичесие произведения любого семейства n-крученых групп и т.д. ($n \geq 1003$ – нечетное) Некоторые другие группы, которые, по сути, являются n-кручеными, были построены и изучены в работах С.И.Адяна, А.Ю.Ольшанского, С.В.Иванова, И.Г.Лысенка, В.С.Атабекяна и других авторов. Отметим, что для каждого ранга $m > 1$ и для любого нечетного $n \geq 1003$ множество неизоморфных относительно свободных n-крученых групп ранга m континуально. Нами доказана

Теорема. *Любая конечная подгруппа каждой относительно свободной n-крученой группы является циклической группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Список литературы

[1] Adian S. I. and Atabekyan V. S., n-Torsion groups. Journal of Contemporary Mathematical Analysis 54 (6), 319-327 (2019).

Ереванский гос. университет, Ереван (Армения)
E-mail: gevorgyan512@gmail.com

О ненильпотентных группах, в которых любые две строго n-максимальные подгруппы перестановочны для $n = 2, 3$

Ю. В. Горбатова

Все рассматриваемые группы конечны. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной подгруппой* группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее. n-Максимальная подгруппа группы G называется *строго n-максимальной*, если она не является n-максимальной подгруппой ни в одной собственной подгруппе группы G.

Ранее Ю.В. Луценко (Горбатовой) и А.Н. Скибой в работе [**1**] было получено точное описание ненильпотентных групп, любые две n-максимальные подгруппы которых перестановочны для $n = 2, 3$. Развивая данный результат, в настоящей работе приводится точное описание ненильпотентных групп, в которых любые две строго n-максимальные подгруппы перестановочны для $n = 2, 3$.

Лемма. *Пусть $P = [H]C_p$, где H — элементарная p-группа, $|C_p| = p$ и любые две строго 2-максимальные подгруппы из P перестановочны. Тогда P — абелева группа.*

Теорема 1. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;

(2) любые две 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны;

(3) любые две строго 2-максимальные подгруппы группы G перестановочны.

Используя теорему 1 и теорему 3.1 [**1**], была доказана эквивалентность строения ненильпотентных групп, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны, а также ненильпотентных групп, в которых любые две строго 3-максимальные подгруппы перестановочны. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(2) любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны;

(3) любые две строго 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны.

Список литературы

[1] Луценко (Горбатова) Ю. В., Скиба А. Н., Го В. О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, N 6. С. 1255-1268.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Брянский филиал), Брянск
E-mail: g.julia32@yandex.ru

О периодических матрицах с круговыми коэффициентами

А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля

Пусть $\mathbb{Q}_{ab}$ — максимальное абелево расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, совпадающее по теореме Кронекера — Вебера с полем, получающимся присоединением к $\mathbb{Q}$ всех корней из единицы (максимальное круговое расширение). Рассматриваются периодические элементы группы $GL_n(\mathbb{Q}_{ab})$ и приводится алгоритм, выясняющий является ли данная диагонализируемая матрица периодической. Находится набор собственных значений этой матрицы (спектр) и ее порядок в группе $GL_n(\mathbb{Q}_{ab})$. Проведены компьютерные эксперименты.

Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru, liliya-kinder@mail.ru

О рациональности и строгой вещественности унитреугольной группы над полем характеристики 2

О. А. Дубина

Периодическую группу G назовем рациональной, если для любых $x, y \in G$ из равенства $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ следует сопряженность x и y в G. Группу G назовем строго вещественной, если каждый ее нетривиальный элемент сопряжен со своим обратным некоторой инволюцией из G. Я. Н. Нужиным в Коуровской тетради был записан следующий вопрос ([1], вопрос 16.76): в каких группах лиева типа над полем характеристики 2 максимальные унипотентные подгруппы строго вещественны?

Из [2] известно, что группа унитреугольных матриц $UT_n(GF(2))$ рациональна, если $n \leq 6$, и не является вещественной при$n \geq 13$. В работах [3]-[5] была установлена строгая вещественность групп $UT_n(K)$ при $n \leq 7$ над любым полем K характеристики 2. Наконец, в [4] доказана рациональность и строгая вещественность $UT_n(K)$ при $n \leq 8$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть $G = UT_n(K)$, K — поле характеристики 2. Если $n \leq 10$, то группа G' является строго вещественной и рациональной группой.*

Список литературы

[1] Коуровская тетрадь // Новосибирск. ИМ СО РАН. 2006.

[2] Isaacs I. M., Karagueuzian D., Conjugacy in groups of upper triagular matrices // J. Algebra. 1998. Vol. 202, P. 704–711.

[3] Газданова М. А., О строгой вещественности группы унитреугольных матриц размерности 6×6 над полем характеристики 2 // Algebra and Model Theory. Vol. 5. Novosibirsk: NSTU. 2005. P. 44–53.

[4] Газданова М. А., Нужин Я. Н., О строгой вещественности унипотентных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2 // Сиб. матем. журнал. Т. 47 (2006), No 5. С. 1031–1051.

[5] Газданова М. А., О строгой вещественности группы унитреугольных матриц размерности 7×7 над полем характеристики 2 // Вестник КрасГУ. 2006. N 7, С. 43-53. (физ.-мат. науки)

[6] Дубина О. А., Колесников С. Г., Манагарова Н. С. Строгая вещественность и рациональность групп унитреугольных матриц порядка ≤ 8 над полями характеристики 2 // Тр.ИММ УрО РАН, Т.22. (2016), N 1, С.71-83.

СФУ, Красноярск
E-mail: ks.e@mail.ru

Автоморфизмы группы Герстена

Ф. А. Дудкин, Е. А. Шапорина

В 2007 году О. В. Богопольский, А. Мартино и Э. Вентура [1] описали группы внешних автоморфизмов всех бесконечных циклических расщепляемых расширений свободной группы ранга 2

$$M_\varphi = F_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}.$$

В 1994 году С.Герстен [2] исследовал действие группы

$$G = F_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid t^{-1}at = a, t^{-1}bt = ba, t^{-1}ct = ca^2 \rangle$$

на $CAT(0)$ пространствах. Он доказал, что группа, действующая на односвязном геодезическом метрическом $CAT(0)$ пространстве собственно и кокомпактно изометриями, не может содержать группу G в качестве подгруппы. Группа G теперь называется группой Герстена. Геометрические и групповые свойства этой группы изучаются в работах Дж. Баттона, Н. Брэди, Д. Вайса и других исследователей.

Авторы [1] пишут, что некоторые идеи их работы могут быть использованы и для больших рангов. В данной работе мы доказываем и используем лемму о неподвижных элементах из [1] для описания автоморфизмов группы Герстена.

Другие утверждения работы [1] нам не удалось напрямую применить для описания автоморфизмов группы Герстена. Пришлось искать новые подходы. Основной результат представленной работы изложен в следующей теореме.

Теорема. $Out(G) \cong (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^3) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

Первый автор выполнил работу при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

Список литературы

[1] Bogopolski O., Martino A., Ventura E., The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2, Comm. Alg., 35(5), 2007, 1675-1690.

[2] Gersten S. M., The automorphism group of a free group is not a CAT(0) group, Proc. Amer. Math. Soc., 121(4), 1994, 999–1002.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

E-mail: DudkinF@gmail.com, grambergea@gmail.com

О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса

Б. Е. Дураков, А. И. Созутов

Группа G *насыщена группами из множества групп* $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Группу G называем *группой Фробениуса с дополнением* H *и ядром* F, если: 1) F и H — собственные подгруппы группы G и $G = F \leftthreetimes H$; 2) (G, H) — пара Фробениуса, т.е. $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$; 3) $G \setminus F^{\#} = \bigcup H^g$. Элемент a называется *конечным* в группе G, если все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$ $(g \in G)$ конечны. Группа, в которой каждый элемент простого порядка конечен, называется *слабо сопряженно бипримитивно конечной.* Группа, все сечения которой по конечным подгруппам (включая единичную) слабо сопряженно бипримитивно конечны, называется *сопряженно бипримитивно конечной*, или *группой Шункова.* Говорят, что смешанная группа G обладает *периодической частью* $T(G)$, если все элементы конечных порядков в G составляют подгруппу $T(G)$.

Теорема 1. *Периодическая слабо сопряженно бипримитивно конечная группа, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса.*

В многочисленных работах, посвященных группам с условиями насыщенности, доказывается либо локальная конечность исследуемой группы, либо существование периодической части в исследуемой группе Шункова. В связи с этим отметим, что группы из теоремы 1 не обязаны быть локально конечными. Заметим также, что подгруппа $\Omega_1(H)$ дополнения Фробениуса группы из теоремы 1 локально конечна и вложима в группу регулярных автоморфимов абелевой группы.

Теорема 2. *Группа Шункова, насыщенная конечными группами Фробениуса, обладает периодической частью.*

В данных исследованиях роль естественных ограничений играли вопросы, решения которых нашими методами исследований невозможны. *Существует ли простые периодические группы, все максимальные локально конечные подгруппы которых являются (локально) конечными группами Фробениуса? Существуют ли периодические группы с недополняемой нормальной сильно изолированной абелевой подгруппой? Существуют ли периодические группы Фробениуса с абелевым ядром и простым неабелевым дополнением?, ... с простым неабелевым ядром?*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-71-10017).

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: durakov96@gmail.com, sozutov_ai@mail.ru

Обобщенные группы Фробениуса

А. Х. Журтов

Конечная группа G называется *обобщной группой Фробениуса с ядром* F, если F — собственная нетривиальная нормальная подгруппа группы G и для любого простого p и произвольного элемента Fx порядка p факторгруппы G/F все элементы из G, принадлежащие смежному классу Fx, являются p-элементами. Любая группа Фробениуса, а также любая пара Камины (см. [1]) является обобщённой группой Фробениуса. В [2] описаны обобщённые группы Фробениуса, совпадающие со своим коммутантом, в частности, показано, что ядра таких групп нильпотентны. В [3] доказана разрешимость обобщённой группы Фробениуса с ядром нечётного индекса.

Следующая теорема описывает строение обобщённой группы Фробениуса с неразрешимым ядром.

Теорема. *Обозначим через* $\Delta(q)$ *подгруппу группы автоморфизмов конечной простой группы* $L_2(q)$, *порождённую её группой внутренних автоморфизмов и автоморфизмом* $\phi\delta$, *где* ϕ *и* δ *— это порождающие соответственно группы полевых и диагональных автоморфизмов группы* $L_2(q)$.

Если G *— конечная обобщённая группа Фробениуса с неразрешимым ядром* F, *то* $|G : F| = 2$ *и* $G/\operatorname{Sol}(F)$ *изморфна* $\Delta(q)$, *где* $q = 3^{2^l}$ *для некоторого натурального* l. *Здесь* $\operatorname{Sol}(F)$ *обозначает наибольшую разрешимую нормальную подгруппу группы* F.

Результат получен совместно с Д. В. Лыткиной и В. Д. Мазуровым. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19–01–00507.

Список литературы

[1] Lewis M. T., Camina groups, Camina pairs, and generalization, in: Sastry N. and Yadav M. K.(eds.), Group theory and computation, Singapore, Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2018, 41—174.

[2] Вэй С., Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Конечные группы, близкие к группам Фробениуса, Сиб. матем. ж., 60, No. 5 (2019), 1035—1040.

[3] Wei X., Guo W. B., Lytkina D. V., Mazurov V. D., Zhurtov A. Kh., Solubility of finite generalized frobenius groups with the kernel of odd index, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 55, No. 1 (2020), 67—70.

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

О коммутативном центре луп Муфанг

А. В. Заварницин

Лупой называется множество с бинарной операцией, обладающей единичным элементом и такой, что операторы умножения справа и слева на любой элемент лупы являются биекциями. Лупа, в которой выполнено тождество

$$(xy)(zx) = (x(yz))x,$$

называется *лупой Муфанг*. Известно, что лупы Муфанг *диассоциативны*, т.е. всякая подлупа, порождённая парой элементов являются группой. *Коммутативным центром* лупы Муфанг M называется множество

$$\mathrm{C}(M) = \{c \in M \mid cx = xc \text{ для всех } x \in M\}.$$

Известно, что $C(M)$ является подлупой в M, и долгое время стоял открытым вопрос, является ли эта подлупа нормальной. С. Гагола опубликовал в [1] доказательство того, что вопрос решается положительно. Однако, совместно А.Н. Гришковым, мы строим в [2] две бесконечные серии луп Муфанг, в которых коммутативный центр не является нормальной подлупой, опровергая тем самым результат С. Гаголы.

Первая серия задаётся явной полиномиальной формулой умножения над произвольным полем характеристики 3. Эта серия содержит конечную лупу порядка 3^{11}. Вторая серия является частным случаем утроения луп Муфанг периода 3. Мы показываем, что по любой лупе Муфанг M периода 3, которая не удовлетворяет тождеству $[[x, y], z] = 1$, можно построить лупу Муфанг $\mathrm{M}(M, 3)$, у которой коммутативный центр не является нормальной подлупой. В частности, существует пример $\mathrm{M}(\mathrm{B}(3, 3), 3)$ порядка 3^8, где $\mathrm{B}(3, 3)$ — свободная 3-порождённая группа Бернсайда периода 3.

Таким образом, основным результатом является

Теорема. *В лупах Муфанг коммутативный центр, вообще говоря, не является нормальной подлупой.*

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН I.1.1., проект 0314-2019-0001.

Список литературы

[1] Gagola III S. M. , A Moufang loop's commutant, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **152**, N2 (2012) 193–206.

[2] Grishkov A. N., Zavarnitsine A. V., Moufang loops with nonnormal commutative centre, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (2020) (DOI: 10.1017/S0305004119000549)

ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
E-mail: zav@math.nsc.ru

О пересечениях π-холловых подгрупп в конечных D_π-группах

В. И. Зенков

Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Если π-холловы подгруппы в G сопряжены и каждая π-подгруппа из G лежит в некоторой G-сопряженной к π-холловой подгруппе группы G, то группа G называется D_π-группой.

Пусть $\pi = \{p\}$ и $H \in Syl_p(G)$. В [**1**] было доказано, что $H \cap H^g = 1$ некоторого $g \in G$, если G — простая неабелева группа. Если G необязательно проста, то в [**2**] доказано, что $H \cap H^x \cap H^y = O_p(G)$ для некоторых элементов $x, y \in G$.

В общем случае в работе [**3**] была поставлена проблема 7.3: верно ли, что в любой D_π-группе G имеем $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$ для любых π и холловой π-подгруппы H из G?

Для π-разрешимой группы G эта проблема была решена положительно и независимо в [**4**] и [**5**]. Однако справедлива следующая

Теорема. *Пусть q — степень простого числа, $q \equiv 3 \pmod 4$, $\pi = \pi(q(q-1)/2)$, $t \in \pi$ и G — естественное полупрямое произведение группы $L_2(q^t)$ на группу, порожденную ее полевым автоморфизмом порядка t. Тогда $H \cap H^x \cap H^y \neq 1$ для холловой π-подгруппы H группы G и любых элементов x и y из G.*

Теорема дает отрицательные ответы как на упомянутую выше проблему 7.3, так и на ее аналог: вопрос 18.31 из [**6**].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 20-01-00456.

Список литературы

[1] Мазуров В. Д., Зенков В. И. О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т 35, N 4. С. 424–432.

[2] Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. матем. 1996. Т. 2, N 1. С. 1–92.

[3] Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Теоремы силовского типа // УМН. 2011. Т. 66, N 5. С. 3–46.

[4] Vdovin E. P. Regular orbits of solvable linear p*-groups // Сиб. электрон. матем. изв. 2007. Т. 4, С. 345–360.

[5] Dolfi S. Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. V. 300, N 1. P. 135–142.

[6] Коуровская тетрадь.Нерешенные вопросы теории групп. 19 изд., дополн., ред. Мазуров В. Д., Хухро Е. И., Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2019.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: v1i9z52@mail.ru

Несуществование спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

М. Хаги [**1**] исследовала конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у спорадической группы. А. В. Заварницин [**2**] изучил конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп J_4, $G_2(7)$ или ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1} > 3$.

Мы рассматриваем следующую задачу: может ли конечная группа с графом Грюнберга–Кегеля как у конечной простой неабелевой группы иметь композиционный фактор, изоморфный простой спорадической группе. В рамках этой задачи мы получили следующий результат.

Теорема. *Пусть $H = A_{n-1}(q)$ – конечная простая линейная группа, $7 \leq n \neq 8, 9, 10$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – ее композиционный фактор. Тогда S не изоморфен простой спорадической группе.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта 20-51-53013.

Список литературы

[1] Hagie M., The prime graph of a sporadic simple group. Comm. Algebra. 31(9) (2003) 4405–4424.

[2] Заварницин А. В., О распознавании конечных групп по графу простых чисел. Алгебра и логика. 45(4) (2006) 390–408.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Бесконечная конечно определенная полугруппа с тождеством $x^4 = 0$

И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов

Проблемы бернсайдовского типа внесли огромный вклад в развитие современной алгебры. Вопрос о локальной конечности групп с тождеством $x^n = 1$ был решен отрицательно в знаменитых работах П. С. Новикова и С. И. Адяна.

Все имеющиеся примеры бесконечных периодических групп бесконечно определены. В частности, вопрос о существовании конечно определенной бесконечной периодической группы открыт как для ограниченной так и для неограниченной экспоненты. В кольцах и полугруппах вопросы бернсайдовского типа затрагивают объекты с нильсвойством: в которых каждый элемент в некоторой степени равен нулю. Также открытой остается проблема В.Н.Латышева о существовании конечно определенного бесконечного нилькольца. В настоящее время известно мало примеров конечно определенных алгебраических объектов с бернсайдовскими свойствами. Интересен метод, позволяющий получать такие конструкции.

Доклад посвящен построению конечно определенной бесконечной нильполугруппы, удовлетворяющей тождеству $x^4 = 0$. Эта конструкция отвечает на проблему, поставленную Л. Н. Шевриным и М. В. Сапиром. Изначально полученная экспонента 9 улучшена до 4.

Построение состоит из трех этапов. 1 этап: строится последовательность комплексов, представляющих собой несколько склееных между собой 4-циклов.

2 этап: вершины и ребра комплексов кодируются буквами конечного алфавита. Словам полугруппы будут соответствовать кодировки путей на комплексах. Определяющим соотношениям отвечают локальные эквивалентности двух путей длины 2. Кроме того, вводятся мономиальные соотношения.

3 этап: строится алгоритм, приводящий произвольное слово к канонической форме. Каждое слово локально представляет собой кодировку пути на комплексе. Соотношения локально меняют путь, оставляя неизменными его концы и длину.

От комплекса нужны следующие свойства: 1. Равномерная эллиптичность. Любой путь можно достаточно сильно шевелить локальными преобразованиями; 2. Локальная конечность. Все семейство комплексов допускает раскраску вершин и ребер в конечное множество цветов (букв). 3. Детерминированность. Если известны цвета ребер и вершин вдоль пути, длины соединяющего противоположные вершины некоторого квадрата, то однозначно вычисляются и цвета ребер и вершин вдоль парного к нему пути. 4.Апериодичность. Кодировки путей на комплексе не содержат периодических слов периода 4.

В итоге ненулевым словам в полугруппе соответствуют кратчайшие пути на комплексах. Кодировки некратчайших и невозможных путей, приводятся к нулю, при этом остается бесконечное множество неэквивалентных ненулевых путей. Данная работа была проведена с помощью Российского Научного Фонда, грант 17-11-01377.

МФТИ, Москва, Bar-Ilan University
E-mail: ivanov-pogodaev@mail.ru

Полная система инвариантов многомерного кубика Рубика

Р. Д. Исаев

С момента изобретения кубика Рубика прошло более 40 лет, однако он продолжает привлекать внимание как обычных любителей головомок, так и математиков. Этот математический объект обладает рядом особенностей, объяснения которым находит теория конечных групп. Например, известно, что не из любого состояния головоломки поворотами слоёв можно прийти к собранному виду. Помимо теории групп, эта головоломка представляет интерес и для теории алгоритмов, в частности, на данный момент все ещё остаётся открытым вопрос об оценке сложности оптимального алгоритма сборки.

Относительно недавно появились обобщения классических проблем кубика Рубика на многомерный случай. Как оказалось, у многомерного кубика Рубика появляются новые типы элементов и новые эффекты, с ними связанные. Таким образом, изучение кубика Рубика приводит к следующим двум проблемам:

- Описание полной системы инвариантов многомерного кубика Рубика с произвольной длиной ребра
- Поиск оптимального алгоритма сборки и оценка его сложности

На данный момент ни одна из них не была полностью решена.

Полная система инвариантов трёхмерного кубика Рубика с произвольной длиной ребра описана в статье [**5**], там же приведены достаточные и необходимые условия для осуществления правильной сборки кубика Рубика. В решении многомерной проблемы успехи менее значительные. В статье [**4**] описан кубик Рубика с ребром длины 3 в произвольной размерности. Достижения в проблеме поиска оптимального алгоритма были совершены лишь для стандартного кубика Рубика при помощи ЭВМ. В случае с большей длиной ребра получены некоторые оценки. Например, в работе [**3**] описан алгоритм со сложностью $O(\frac{k^2}{log\, k})$, где k - длина ребра.

Автору статьи удалось описать полную систему инвариантов кубика Рубика произвольной размерности n и с произвольной длиной ребра k:

Теорема. *Полная система инвариантов кубика Рубика:*

$$\begin{cases} C \in \mathbb{Z}_2, \ k = 1 \ (mod\ 2) \\ O \in \overline{G}_{rot}/[\overline{G}_{rot}, \overline{G}_{rot}] \\ P \in \mathbb{Z}_{(n-s)2^{n-s}+1} \\ B \in \mathbb{Z}_{\frac{(2n)!}{2^{n-1}n!}}, \ k = 1 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

где для каждого класса кубиков определён свой инвариант O и P, а C и B – единственны.

Также рассматриваются оценки сложности алгоритма сборки. Теоретический алгоритм, который необходим для доказательства полноты системы, не является оптимальным. Он основан на идее разделения сборки на этапы, в течение каждого из которых (кроме первого) переставляются и ориентируются элементы одного и того же типа.

Выражаю благодарность А. Я. Канель-Белову и академику А. Л. Семёнову за помощь в постановке задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, М.: Наука, 1982.
[2] Материалы ЛКТГ, Кубик Рубика и проблема Хигмана, 2008, https://www.turgor.ru/lktg/2008/2.
[3] Kaleem A., Kaleem A., On Algorithms for Solving the Rubik's Cube, 2020 https://arxiv.org/pdf/2007.10829.pdf

[4] Levashev V., Generalization of Rubik's cube group to n-dimensional case, 2019, https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218216520400064
[5] Bonzio S., Loi A., Peruzzi L., On the nxnxn Rubik's Cube, 2017, to appear on Mathematica Slovaca.

Москва
E-mail: einsteinewton@mail.ru

К вопросу о σ-субнормальности силовской подгруппы в конечной группе

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова

В работе рассматриваются только конечные группы.

Известный критерий Виландта о субнормальности подгруппы в конечной группе инициировал следующий вопрос, предложенный А. Н. Скибой:

Верно ли, что подгруппа H σ-субнормальна в G, если H σ-субнормальна в $< H, x >$ для любого элемента $x \in G$?

Концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы, базируется на следующих определениях.

Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно непересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Группа G является *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$.

В данной работе поставленный выше вопрос анализируется в случае, когда H — силовская подгруппа группы G.

Теорема 1. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и G — группа, каждый неабелев композиционный фактор которой является либо знакопеременной, либо спорадической группой. Силовская подгруппа P группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда P σ-субнормальна в $< P, x >$ для любого элемента $x \in G$.*

Теорема 2. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Если $p \in \{2, 3\}$, то силовская p-подгруппа P группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда P σ-субнормальна в $< P, x >$ для любого элемента $x \in G$.*

Ключом к доказательству теорем 1 и 2 является результат, устанавливающий специальное строение минимального контрпримера, что позволяет редуцировать доказательство к классификации простых неабелевых групп.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
E-mail: sfkamornikov@mail.ru
Международный университет "МИТСО", Гомель (Беларусь)
E-mail: vtutanov@gmail.com
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Москва
E-mail: ol-shem@mail.ru

Нахождение 2-транзитивных групп преобразований с подгруппами параллельных переносов

Р. А. Клевцов

Исследована задача о нахождении всех локальных дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов пространства $\mathbb{R}^3$ [**1**]. Согласно [**2, 3**] такие группы Ли преобразований задают феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3,2). Отметим, что полная классификация таких геометрий на данный момент не известна.

Основным результатом работы является список всех локальных дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов пространства $\mathbb{R}^3$. Данная классификация основывается на следующих утверждениях, полученных в работе.

1. Найден критерий дважды транзитивности группы преобразований в терминах функциональной матрицы (A_i^j), соответсвующей алгебре Ли операторов $X_i = \partial_i$, $Y_i = A_i^j \partial_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

2. Доказано, что матрицы связности T_i, соответствующие операторам $X_i = \partial_i$, в силу условия дважды транзитивности, составляют абелеву алгебру Ли.

Список литературы

[1] Gorbatsevich V. V. Extension of transitive actions of Lie groups // Izv. Math. 2017. Vol. 81, No 6. C. 1143-1154. DOI: https://doi.org/10.4213/im8506

[2] Михайличенко Г. Г. Групповая симметрия физических структур. - Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.

[3] Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2,2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3,2) // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2018. Т. 28, No 3. C. 305-327. DOI: https://doi.org/10.20537/vm180304

Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: shikus@yandex.ru

О конечной группе с холлово субнормально вложенными подгруппами Шмидта

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и терминология стандартны. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в [**1**].

Ранее в различных работах исследовались группы с ограничениями на подгруппы Шмидта. Например, в [**2**]-[**3**] изучены группы с субнормальными подгруппами Шмидта, а в [**4**] — с холловыми подгруппами Шмидта.

Подгруппа H группы G называется холлово субнормально (нормально) вложенной в G, если существует субнормальная (нормальная) подгруппа K в G такая, что $H \le K$ и H является холловой подгруппой в K, т. е. $(|H|, |K:H|) = 1$. Очевидно, что каждая холлова подгруппа и каждая субнормальная (нормальная) подгруппа будут холлово субнормально (нормально) вложенными. Группы с холлово нормально вложенными подгруппами Шмидта метанильпотентны [**5**].

Теорема. *Если в конечной группе G каждая подгруппа Шмидта холлово субнормально вложена, то G разрешима, $l_p(G) = 1$ для всех $p \in \pi(G)$, фактор-группа $G/F(G)$ метабелева и все силовские подгруппы в $G/F(G)$ абелевы.*

Пример. Группа $S = \langle a, b \mid a^3 = b^4 = e,\ a^b = a^{-1}\rangle$ является группой Шмидта. Группа $G = [E_{5^2}]S$ из голоморфа элементарной абелевой группы E_{5^2} порядка 25 обладает с точностью до сопряженности только следующими подгруппами Шмидта: холлова подгруппа S; нормальная в G холлова подгруппа $[E_{5^2}]\langle a\rangle$; субнормальная в G подгруппа $[E_5]\langle b^2\rangle$, где E_5 — любая подгруппа порядка 5 из E_{5^2}. Поэтому в группе G все подгруппы Шмидта холлово субнормально вложены. Поскольку $F(G) = E_{5^2}$, то группа G не будет метанильпотентной в отличие от группы с холлово нормально вложенными подгруппами Шмидта.

Список литературы

[1] Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев: Институт математики НАУ. 2002, секция 1. С.81–90.

[2] Княгина В. Н., Монахов В. С.. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сибирский матем. журн. 2004. Том 45, N 6. С. 1316–1322.

[3] Ведерников В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Том 46, N 6. С. 669-687.

[4] Kniahina V. N., Monakhov V. S. Finite groups with Hall Schmidt subgroups // Publ. Math. Debrecen. 2012. Vol. 81, N 3–4. P. 341–350.

[5] Monakhov V. S., Kniahina V. N. On finite groups with Hall normally embedded Schmidt subgroups subgroups // Algebra and Discrete Mathematics. 2019. Vol. 26, N 1. P. 90–96.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: knyagina@inbox.ru, victor.monakhov@gmail.com

О конечных группах с $\mathfrak{F}$-субнормальными 2-максимальными подгруппами

М. Н. Коновалова

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [**1, 2**]. Закрепим следующие обозначения: $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ — формации всех нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно; $\mathcal{A}$ — формация всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами.

Строение группы, в которой все 2-максимальные подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны для разрешимой наследственной формации $\mathfrak{F}$, изучено В. С. Монаховым [**3**, теорема 1]. В настоящем сообщении для разрешимой наследственной формации $\mathfrak{F}$ исследуется группа G с условием $\mathfrak{F}$-субнормальности не всех 2-максимальных подгрупп, а только тех, которые содержатся в одной максимальной подгруппе группы G. В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная разрешимая формация. Предположим, что в группе G существует максимальная подгруппа M, которая обладает следующими свойствами:*

(1) *M не $\mathfrak{F}$-нормальна в G;*

(2) *каждая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Тогда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, а фактор-группа G/M_G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.

Следствие 1. *Предположим, что в группе G существует максимальная подгруппа M, которая обладает следующими свойствами:*

(1) *$|G : M|$ не простое число;*

(2) *каждая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{U}$-субнормальна в G.*

Тогда $G/F(G)$ сверхразрешима, а G/M_G является минимальной несверхразрешимой группой. В частности, $|\pi(G/M_G)| \leq 3$.

Следствие 2. *Предположим, что в группе G существует максимальная подгруппа M, которая обладает следующими свойствами:*

(1) *M не $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-нормальна в G;*

(2) *каждая максимальная подгруппа из M $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-субнормальна в G.*

Тогда $G \in \mathfrak{N}^2\mathcal{A}$, а G/M_G является минимальной не $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-группой. В частности, $|\pi(G/M_G)| \leq 2$.

Список литературы

[1] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. — 271 с.

[2] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006. — 207 с.

[3] Monakhov V. S. О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами // Математические заметки. — 2019. — Т. 105, N 2. — С. 269–277.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Брянский филиал), Брянск

E-mail: msafe83@mail.ru

О классах Леви квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп экспоненты p^s с коммутантом экспоненты p

В. В. Лодейщикова, С. А. Шахова

Пусть p — простое число, $p \neq 2$, s — натуральное число, $s \geq 2$.

В [1] был описан класс Леви квазимногообразия, порождённого относительно свободной группой в классе 2-ступенно нильпотентных групп экспоненты p^s с коммутантом экспоненты p.

Полагая $s > 2$ при $p = 3$, рассмотрим следующие классы групп.

$\mathcal{K}^{p^s}$ — квазимногообразие, заданное формулами:

$$x^{p^s} = 1,$$

$$[x, y]^p = 1,$$

$$x^{p^{s-1}} = 1 \to [x, y] = 1.$$

$\mathcal{N}^{p^s}$ — квазимногообразие, заданное в $\mathcal{K}^{p^s}$ квазитождеством

$$x^p = [y, z] \to [y, z] = 1.$$

$\mathcal{R}^{p^s}$ — квазимногообразие, заданное в многообразии 3-ступенно нильпотентных групп экспоненты p^s формулами

$$[x, y, x]^p = 1,$$

$$[x, y]^{p^{s-1}} = 1 \to [x, y, x] = 1.$$

$\mathcal{M}^{p^s}$ — квазимногообразие, заданное в $\mathcal{R}^{p^s}$ при $p \neq 3$ квазитождеством

$$[x, z]^p = [x, y, x] \to [x, y, x] = 1,$$

а при $p = 3$ квазитождествами:

$$[x, z]^3 = [x, y, x] \to [x, y, x] = 1,$$

$$x^{3^{s-1}}[x, z]^3 = [x, y, x] \to [x, y, x] = 1.$$

Обозначим $L(\mathcal{M})$ класс Леви, порождённый классом групп $\mathcal{M}$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. $L(\mathcal{K}^{p^s}) \subseteq \mathcal{R}^{p^s}$.

Теорема 2. *Если $\mathcal{K}$ — неабелево квазимногообразие групп, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}^{p^s}$, то $L(\mathcal{K}) = \mathcal{M}^{p^s}$.*

Список литературы

[1] Лодейщикова В. В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s, Алгебра и логика, 50, N 1 (2011), 26-41

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: lodeischikova@gmail.com, sashakhova@gmail.com

Периодические группы, насыщенные конечными простыми ортогональными группами нечетной размерности над полями нечетных характеристик

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Пусть M — некоторое множество групп. Группа G *насыщена* группами из M, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу множества M.

Теорема. *Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 3$, $M = \{O_{2n+1}(q) \mid q$ нечетно$\}$, G — периодическая группа, насыщенная группами из M. Тогда G изоморфна группе $O_{2n+1}(F)$ для некоторого поля F нечетной характеристики.*

Здесь $O_{2n+1}(q)$ (соответственно $O_{2n+1}(F)$) означает простую ортогональную группу размерности $2n+1$ над полем порядка q (соответственно над полем F).

Ранее этот результат был получен при условии $q \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8)$ [1].

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19–11–00039).

Список литературы

[1] Лыткина Д. В, Мазуров В. Д., О характеризации простых ортогональных групп нечетной размерности в классе периодических групп, Сиб. матем. ж. (в печати).

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск
E-mail: daria.lytkin@gmail.com, mazurov@math.nsc.ru

О строго 2-максимальных подгруппах конечных групп

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Рассматриваются только конечные группы. Запись $M \leq G$ ($M < G$, $M \lessdot G$) означает, что M — подгруппа (соответственно собственная подгруппа, максимальная подгруппа) группы G. Если H — подгруппа группы G, то $\mathrm{Max}(G, H) = \{M \lessdot G \mid H \leq M\}$.

Подгруппа H группы G называется

2-максимальной подгруппой группы G, если существует подгруппа $M \in \mathrm{Max}(G, H)$ такая, что $H \lessdot M$;

n-максимальной подгруппой группы G для $n \geq 3$, если существует подгруппа $M \in \mathrm{Max}(G, H)$ такая, что H — $(n-1)$-максимальная подгруппа в M;

строго 2-максимальной подгруппой группы G, если $H \lessdot V$ для всех $V \in \mathrm{Max}(G, H)$.

В группе $L_2(8)$ подгруппа C_2 порядка 2 является 2-, 3- и 4-максимальной: $C_2 \lessdot D_{14} \lessdot L_2(8)$; $C_2 \lessdot S_3 \lessdot D_{18} \lessdot L_2(8)$; $C_2 \lessdot C_2^2 \lessdot C_2^3 \lessdot C_2^3 : C_7 \lessdot L_2(8)$. Согласно [**1**, example 3] для любого $n > 2$ существует группа, в которой некоторая 2-максимальная подгруппа является n-максимальной.

Если в группе G существует 2-максимальная подгруппа, то 2-максимальная подгруппа наименьшего индекса в G будет строго 2-максимальной. Поэтому в любой неединичной группе непростого порядка существует строго 2-максимальная подгруппа. Из теоремы Хупперта следует, что в сверхразрешимой группе каждая 2-максимальная подгруппа строго 2-максимальна. Группа Фробениуса $C_3^2 : C_8$ [**2**, remak 4] и группа $L_2(17)$ также обладают этим свойством.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — группа, $K \lessdot M \lessdot G$. Если $K_G \neq M_G$, то K — строго 2-максимальная подгруппа группы G. В частности, если максимальная подгруппа M группы G нормальна в G, то каждая максимальная в M подгруппа является строго 2-максимальной подгруппой группы G.*

Следствие. *Пусть G — p-разрешимая группа, $M < G$. Если $|G : M| = p$, то каждая максимальная в M подгруппа является строго 2-максимальной подгруппой группы G.*

Список литературы

[1] Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite group with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. Ricerche Mat., 62 (2013), 307–323.

[2] Meng H., Guo X. Weak second Maximal subgroups in solvable groups. J. Algebra, 517 (2019), 112–118.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com
Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: irina.sokhor@gmail.com

Критерий разложения Брюа для ковровых подгрупп групп Шевалле

Я. Н. Нужин, А. В. Степанов

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $E(F)$ — (элементарная) группа Шевалле типа Φ над полем F, порожденная корневыми подгруппами $x_r(F) = \{x_r(t) \mid t \in F\}$, $\quad r \in \Phi$. Следуя В.М.Левчуку [**1**], *ковром типа* Φ *над* F назовем набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ поля F с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi,\ i, j > 0, \tag{1}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs}$ равны ±1, ±2 или ±3. Включения (1) происходят из коммутаторной формулы Шевалле

$$\big[x_s(u), x_r(t)\big] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\big), \quad r, s, ir+js \in \Phi.$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ определяет *ковровую подгруппу* $E(\mathfrak{A})$, порожденную подгруппами $x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi$. Ковер $\mathfrak{A}$ назовем *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, и — *неприводимым*, если все его аддитивные подгруппы ненулевые.

Пусть $N(F)$ — мономиальная подгруппа группы $E(F)$, а $U(F)$ — ее максимальна унипотентная подгруппа, соответствующая положительным корням Φ^+. Аналоги этих подгрупп, конечно, существуют и в ковровых подгруппах. По определению $N(\mathfrak{A}) = N(F) \cap E(\mathfrak{A})$, а $U(\mathfrak{A})$ — подгруппа, порожденная подгруппами $x_r(\mathfrak{A}_r)$, $r \in \Phi^+$. Отметим, что для незамкнутого ковра $\mathfrak{A}$ пересечение $U(F) \cap E(\mathfrak{A})$ может быть больше чем $U(\mathfrak{A})$.

Факторизация $E(F) = U(F)N(F)U(F)$ обычно называется *разложением Брюа*. Для любой аддитивной подгруппы A поля F по определению A^{-1} состоит из всех обратных к ненулевым элементам из A в объединении с нулем. Доказан следующий критерий существования разложения Брюа для ковровых подгрупп.

Теорема. *Пусть* $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— неприводимый замкнутый ковер аддитивных подгрупп типа* Φ *над полем* F*. Факторизация* $E(\mathfrak{A}) = U(\mathfrak{A})N(\mathfrak{A})U(\mathfrak{A})$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{A}_{-r} = \mathfrak{A}_r^{-1} \text{ для всех } r \in \Phi.$$

Список литературы

[1] Левчук В. М., Параболические подгруппы некоторых ABA-групп, Матем. заметки 31 (1982), no. 4, 509–525.

Сибирский федеральный университет, Красноярск; Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru, stepanov239@gmail.com

О субмаксимальных подгруппах знакопеременных групп

Д. О. Ревин

Пусть $\mathfrak{X}$ — полный класс конечных групп, т. е. непустой класс, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{X}$-*субмаксимальной*, если существует вложение группы G в некоторую группу G^*, при котором G субнормальна в G^* и $H = H \cap K$ для некоторой $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппы K группы G^*.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — полный класс и $\mathbb{Z}_2 \in \mathfrak{X}$. Справедливы утверждения:*
(i) Подгруппа H группы A_n является $\mathfrak{X}$-субмаксимальной нечетного индекса тогда и только тогда, когда когда H является группой одного из следующих типов:

(S) H — подгруппа вида $K \cap \mathrm{A}_n$, где K — $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа нечетного индекса в S_n;

$(A6)$ $n = 6$, $\mathrm{A}_6 \notin \mathfrak{X}$ и $H \in \mathrm{Syl}_2(G)$, при этом $H \cong \mathrm{D}_8$;

$(A7)$ $n = 7$, $\mathrm{A}_7 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ и $H \cong \mathrm{GL}_3(2)$;

$(A8)$ $n = 8$, $\mathrm{A}_8 \notin \mathfrak{X}$, $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$ и $H \cong 2^3 : \mathrm{GL}_3(2)$.

(ii) Две $\mathfrak{X}$-субмаксимальные подгруппы H_1 и H_2 типа (S) сопряжены в A_n тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$-максимальные подгруппы $K_1, K_2 \leq \mathrm{S}_n$ нечетного индекса, для которых $H_i = K_i \cap \mathrm{A}_n$, $i = 1, 2$, сопряжены в S_n. Таким образом, существует биекция между классами сопряженности $\mathfrak{X}$-субмаксимальных подгрупп типа S в A_n и $\mathfrak{X}$-максимальных подгрупп нечетного индекса в S_n. При выполнении ограничений, указанных для типов $(A6)$–$(A8)$ в группе A_n число классов сопряженности подгрупп типа (An) равно одному при $n = 6$ и двум при $n = 7, 8$.

(iii) Либо класс сопряженности любой $\mathfrak{X}$-субмаксимальной подгруппы H нечетного индекса в группе A_n инвариантен относительно действия группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_n)$,

либо $n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{A}_6 \notin \mathfrak{X}$ и H — подгруппа типа (S); при этом $\mathfrak{X}$-субмаксимальные подгруппы типа (S) в A_6 образуют два класса сопряженности, переставляемых автоморфизмом из $\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_6) \setminus \mathrm{S}_6$ и инвариантных относительно S_6;

либо $n \in \{7, 8\}$, H — подгруппа типа (An); при этом в A_n два класса сопряженности $\mathfrak{X}$-субмаксимальных подгрупп типа (An) переставляются любым автоморфизмом группы A_n, индуцированным нечетной подстановкой.

(iv) Либо $\mathfrak{X}$-субмаксимальная подгруппа H нечетного индекса в A_n $\mathfrak{X}$-максимальна,

либо $n = 6$, $\mathbb{Z}_3 \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{A}_6 \notin \mathfrak{X}$ и H — подгруппа типа $(A6)$; в этом случае H содержится в двух подгруппах $(\mathrm{S}_2 \times \mathrm{S}_4) \cap \mathrm{A}_6$ и $(\mathrm{S}_2 \wr \mathrm{S}_3) \cap \mathrm{A}_6$ типа (S), переставляемых автоморфизмом из $\mathrm{Aut}(\mathrm{A}_6) \setminus \mathrm{S}_6$;

либо $n = 8$, $\mathrm{GL}_3(2) \in \mathfrak{X}$, $\mathrm{A}_8 \notin \mathfrak{X}$ и $H = (\mathrm{S}_2 \wr \mathrm{S}_4) \cap \mathrm{A}_8$ — подгруппа типа (S); в этом случае H содержится в подгруппах типа $(A8)$, принадлежащих обоим классам сопряженности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00039).

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск; ИММ УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: revin@math.nsc.ru

Об универсальных теориях метабелевых обобщенно жестких групп

Н. С. Романовский

Автором было дано определение и изучены общие свойства обобщённо жёсткой группы (r-группы) и начато исследование метабелевых r-групп. Обозначим через $\mathcal{R}_2$ класс 2-ступенно разрешимых r-групп G, у которых первый фактор $A = G/B$ жёсткого ряда $G > B > 1$ не имеет кручения. По условию A — абелева группа без кручения, B представляется как аддитивная группа правого модуля без кручения над коммутативной областью целостности R, причём A вкладывается в группу обратимых элементов R^* и порождает R как кольцо, а действие элемента $g \in G$ на B сопряжением соответствует в модуле умножению на образ элемента g в A.

Нас интересуют универсальные теории групп из класса $\mathcal{R}_2$. В 1995 году О.Шапю [**1**] доказал, что универсальная теория свободной метабелевой группы разрешима и затем в [**2**] охарактеризовал группы, которые имеют ту же универсальную теорию, что и свободная метабелева группа ранга ≥ 2. В нашей терминологии это в точности жёсткие 2-ступенно разрешимые группы. Позднее в [**3**] автором было доказано, что универсальная теория свободной разрешимой группы ступени ≥ 4 алгоритмически неразрешима. В перспективе ставится задача классификации групп из класса $\mathcal{R}_2$ по универсальным свойствам и вопрос об алгоритмической разрешимости универсальной теории конечно порождённой $\mathcal{R}_2$-группы.

Для упомянутой выше пары (A, R) мы определяем понятие универсальной теории пары. Также с парой (A, R) свяжем 2-ступенно разрешимую r-группу матриц $M(A, R) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ R & 1 \end{pmatrix}$ над кольцом R.

ТЕОРЕМА 1. *Универсальные теории пары (A, R) и r-группы $G = M(A, R)$ эквивалентны, то есть каждая из них интерпретируется в другой.*

ТЕОРЕМА 2. *Универсальные теории двух расщеплнных групп $G_1, G_2 \in \mathcal{R}_2$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают универсальные теории соответствующих пар (A_1, R_1) и (A_2, R_2).*

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

Список литературы

[1] Chapuis O., Universal theory of certain solvable groups and bounded Ore group rings, J. Algebra, 176 (1995), 368-391.

[2] Chapuis O., ∀-free metabelian groups, J. Symbolic Logic, 62 (1997), 159-174.

[3] Романовский Н. С., Об универсальной теории свободной разрешимой группы, Алгебра и логика, 51, N 3 (2012), 385-391.

Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: rmnvski@math.nsc.ru

О $\mathfrak{H}_{\theta^\sigma}$-критических формациях конечных групп

И. Н. Сафонова

Все рассматриваемые группы являются конечными. Мы используем определения и обозначения, принятые в [**1**]-[**5**]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Если n целое число, то символ $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Функция f вида $f : \sigma \to \{$формации групп$\}$ называется формационной σ-функцией. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \,|\, G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то формацию $\mathfrak{F}$ называют σ-локальной, а формационную σ-функцию f — σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.

Пусть θ — некоторая полная решетка формаций. Следуя [**1**], формационную σ-функцию будем называть θ-значной, если $f(\sigma_i) \in \theta$ для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$. Символом θ^σ будем обозначать совокупность всех тех σ-локальных формаций, которые имеют по крайней мере одно θ-значное σ-локальное определение. Совокупность θ^σ образует полную решетку формаций. Формация $\mathfrak{F} \in \theta^\sigma$ называется $\mathfrak{H}_{\theta^\sigma}$-критической, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные θ^σ-подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Теорема. *Пусть θ — такая полная решетка формаций, что $\theta^\sigma \subseteq \theta$. И пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H — каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f — наименьшее θ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\theta^\sigma}$-критической формацией, когда $\mathfrak{F} = \theta^\sigma \mathrm{form} G$, где G — такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))_\theta$-критической.*

Список литературы

[1] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.

[2] Skiba A. N. On one generalization of the local formations. Probl. Phys. Math. Tech.. 2018;34(1):79–82.

[3] Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups. Probl. Phys. Math. Tech.. 2018;34(2):85–88.

[4] Zhang Ch., Skiba A. N. On Σ_t^σ-closed classes of finite groups. Ukranian Math. J.. 2019;70(2):1707–1716.

[5] Chi Z., Safonov V.G., Skiba A.N. On n-multiply σ-local formations of finite groups. Comm. Algebra. 2019;47(3):957–968.

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
E-mail: safonova@bsu.by

Об аппроксимируемости корневыми классами обобщенных групп Баумслага — Солитэра

Е. В. Соколов

Напомним, что *обобщенной группой Баумслага–Солитэра* называется фундаментальная группа непустого конечного связного графа групп, все вершинные и реберные подгруппы которого являются бесконечными циклическими. Напомним также, что класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он содержит хотя бы одну неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых степеней вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Далее будем считать, что G — обобщенная группа Баумслага–Солитэра, Γ — задающий ее граф с метками и $\Delta\colon G \to \mathbb{Q}^*$ — модулярный гомоморфизм (определения графа Γ и гомоморфизма Δ можно найти, например, в [**3**]). Доказаны следующие два утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс, состоящий из периодических групп, и $\rho(\mathcal{C})$ — множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$. Пусть также группа G не является разрешимой и граф Γ редуцирован (т. е. любое его ребро, не являющееся петлей, имеет метки, отличные от ± 1).*

1. Если $\operatorname{Im} \Delta = \{1\}$, то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все метки графа Γ являются $\rho(\mathcal{C})$-числами.

2. Если $\operatorname{Im} \Delta = \{1, -1\}$, то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все метки графа Γ являются $\rho(\mathcal{C})$-числами и $2 \in \rho(\mathcal{C})$.

3. Если $\operatorname{Im} \Delta \nsubseteq \{1, -1\}$, то группа G не является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс, содержащий хотя бы одну непериодическую группу.*

1. Если группа G элементарна, то она является $\mathcal{C}$-группой без кручения.

2. Пусть группа G не является элементарной и Q — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, порожденное множеством $\operatorname{Im} \Delta$. Если аддитивная группа кольца Q принадлежит классу $\mathcal{C}$, то группа G аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения. В частности, если $\operatorname{Im} \Delta \subseteq \{1, -1\}$ или класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то группа G аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения.

Отметим, что если группа G разрешима, то критерий ее аппроксимируемости корневым классом, состоящим из периодических групп, получен в [**2**]. Сформулированные теоремы обобщают и усиливают ряд известных результатов.

Список литературы

[1] *Levitt G.* On the automorphism group of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Topol. 2007. Vol. 11. P. 473–515.

[2] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, N 3. С. 700–709.

Ивановский государственный университет, Иваново
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных групп Баумслага — Солитэра

Е. В. Соколов

Пусть G — произвольная обобщенная группа Баумслага–Солитэра и Γ — задающий ее граф с метками. Полученные автором результаты об аппроксимируемости группы G корневыми классами позволяют ответить на вопрос 4 из [**1**] об условиях ее нильпотентной аппроксимируемости. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть группа G не является разрешимой, граф Γ редуцирован и $\Delta\colon G \to \mathbb{Q}^*$ — модулярный гомоморфизм.*

1. Если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, то группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируется конечными p-группами для некоторого простого числа p.

2. Если $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, то следующие утверждения равносильны:

а) группа G аппроксимируется нильпотентными группами;

б) группа G аппроксимируется конечными нильпотентными $\{2, p\}$-группами для некоторого простого числа p (которое может быть равно 2);

в) все метки графа Γ являются p-числами для некоторого простого числа p и, если $p \neq 2$, то каждый сопряженный со своим обратным эллиптический элемент принадлежит циклическому радикалу группы G.

3. Если $\operatorname{Im}\Delta \nsubseteq \{1, -1\}$, то группа G не аппроксимируется нильпотентными группами.

Отметим, что если группа G разрешима, то критерий ее нильпотентной аппроксимируемости получен в [**2**]. Напомним также, что циклическим радикалом группы G называется наибольшая циклическая нормальная подгруппа этой группы. Определение эллиптического элемента можно найти в [**3**].

В работе предложен алгоритм, позволяющий для заданного графа Γ проверить, выполняется ли утверждение 2в приведенной теоремы. Также доказана

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны.*

1. Группа G аппроксимируется нильпотентными группами без кручения.

2. Группа G аппроксимируется свободными группами.

3. Группа G изоморфна прямому произведению некоторой свободной (возможно, единичной) и бесконечной циклической групп.

Список литературы

[1] *Bardakov V. G., Neshchadim M. V.* On the lower central series of Baumslag–Solitar groups // arXiv:2009.01150 [math.GR].

[2] *Молдаванский Д. И.* О нильпотентной аппроксимируемости групп с одним определяющим соотношением // Матем. заметки. 2020. Т. 107, N 5. С. 752–759.

[3] *Levitt G.* On the automorphism group of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Topol. 2007. Vol. 11. P. 473–515.

Ивановский государственный университет, Иваново

E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

sorokina@yandex.ru, msp222@mail.ru

О $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальных подгруппах конечных групп

М. М. Сорокина, С. П. Максаков

Рассматриваются только конечные группы. Среди классов конечных групп центральное место занимают локальные формации, построенные В. Гашюцем в 1963 году. Для локальной формации $\mathfrak{F}$ в конечной группе изучены многие виды подгрупп, в частности, $\mathfrak{F}$-нормальные и $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы, $\mathfrak{F}$-субнормальные и $\mathfrak{F}$-абнормальные подгруппы (см., например, [**1**]). Естественным обобщением понятия локальной формации является введенное в рассмотрение Л.А. Шеметковым в 1984 году понятие ω-локальной формации, где ω – непустое множество простых чисел. При изучении и применении ω-локальных формаций целесообразным оказалось рассмотрение определенных подгрупп в конечных группах с учетом множества ω (см., например, [**2**]). Следуя [**1**], максимальную подгруппу M группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$-нормальной ($\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной) в G, если $G/(Core_G(M)\cap O_\omega(G))\in\mathfrak{F}$ (соответственно $G/(Core_G(M)\cap O_\omega(G))\notin\mathfrak{F}$), где $O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G; максимальную $(G-H)$-цепь $H=H_0<H_1<\ldots<H_m=G$ назовем $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной ($\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной), если подгруппа H_i является $\mathfrak{F}^\omega$-нормальной (соответственно $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной) в H_{i+1} для любого $i\in\{0,\ldots,m-1\}$; подгруппу K группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальной в G, если существует хотя бы одна $\mathfrak{F}^\omega$-субнормальная максимальная $(G-K)$-цепь; $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной в G, если любая максимальная $(G-K)$-цепь является $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей в G, где $\mathfrak{F}$ – класс групп, если $H\in\mathfrak{F}$ и из того, что $H\le U\le G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V\in\mathfrak{F}$ следует, что $U=HV$ [**2**]; $G^\mathfrak{F}$ – наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$ [**1**].

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – группа, $H<G$, $H\in\mathfrak{F}$, $\pi(G^\mathfrak{F})\subseteq\omega$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальной в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Нормальная подгруппа R группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$-*предельной* в G, если $R\subseteq G^\mathfrak{F}$ и $R/R\cap\Phi(G)\cap O_\omega(G)$ – главный фактор группы G; максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$-*критической* в G, если $G=MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^\omega$-предельной подгруппы R из G [**2**].

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, M – максимальная подгруппа группы G, $\pi(G^\mathfrak{F})\subseteq\omega$. Подгруппа M является $\mathfrak{F}^\omega$-критической в G тогда и только тогда, когда M – $\mathfrak{F}^\omega$-абнормальная подгруппа группы G и $G=M\tilde{F}(G)$.*

Список литературы

[1] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978.

[2] Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, N 1. С. 64–82.

Брянский государственный университет имени И. Г. Петровского, Брянск

Автоморфизмы частично коммутативных метабелевых групп

Е. И. Тимошенко

Автоморфизм группы G называется $IA-$автоморфизмом, если он индуцирует тождественный автоморфизм на фактор-группе G по коммутанту G'. Изучаются автоморфизмы частично коммутативной метабелевой группы M_Γ, определенной графом Γ.

Теорема 1. *Предположим, что определяющий граф Γ группы M_Γ не содержит циклов. Если $IA-$автоморфизм α группы M_Γ оставляет неподвижными все висячие и изолированные вершины графа Γ, то α – тождественный автоморфизм.*

Доказано, что ни одно из ограничений, а именно, об отсутствии циклов в графе и о действии α тождественно на фактор-группе по коммутанту, исключить из условий теоремы нельзя.

Каждый автоморфизм группы M_Γ индуцирует автоморфизм свободной абелевой группы M_Γ/M'_Γ. Группа индуцированных автоморфизмов называется группой факторных автоморфизмов группы M_Γ/M'_Γ. Мы даем описание некоторой группы матриц над кольцом целых чисел и с её помощью определяем понятие матричного автоморфизма группы M_Γ/M'_Γ.

Теорема 2. *Пусть граф Γ не содержит циклов. Тогда каждый факторный автоморфизм группы M_Γ/M'_Γ можно записать как произведение автоморфизма графа Γ и матричного автоморфизма.*

Следствие. *Если определяющий граф Γ не содержит циклов, то группа факторных автоморфизмов группы M_Γ/M'_Γ является арифметической.*

Математический центр в Академгородке, НГТУ, Новосибирск
E-mail: eitim45@gmail.com

Базис коммутанта частично коммутативной метабелевой про-P-группы

Е. И. Тимошенко

Базис коммутанта частично коммутативной метабелевой группы найден в работе автора [1]. Теперь доказана теорема о базисе коммутанта частично коммутативной метабелевой про$-p-$ группы. Из неё следует каноническая запись элементов группы.

Пусть M – свободная метабелева про-p-группа с базисом $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. По конечному неориентированному графу без петель $\Gamma = (V; E)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ – множество вершин, а $E = E(\Gamma)$ – множество ребер, определим частично коммутативную метабелеву про-p-группу $M_\Gamma = M/R_\Gamma$. Здесь R_Γ – нормальная подгруппа из M, порожденная коммутаторами $[x_i, x_j]$, для которых ребро (v_i, v_j) лежит в E. Фактор-группа M_Γ по коммутанту M'_Γ будет свободной абелевой про-p-группой A с базисом $\{a_1, \ldots, a_n\}$, являющимся образом X при естественных гомоморфизмах $M \to M_\Gamma \to M_\Gamma/M'_\Gamma$. Группа A изоморфна прямой сумме n копий аддитивной группы кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Действие группы M_Γ на коммутанте M'_Γ сопряжениями $x \to x^g = g^{-1}xg$, $x \in M'_\Gamma$, $g \in M_\Gamma$, определяет на M'_Γ структуру правого модуля над пополненной групповой алгеброй $\mathbb{Z}_p[[A]]$, которая отождествляется с алгеброй степенных рядов $\mathbb{Z}_p[[b_1, \ldots, b_n]]$ при условии, что $b_i = a_i - 1$. Обозначим $y_i = x_i R_\Gamma$.

Теорема. *Пусть на множестве вершин V графа Γ задан порядок $<$. Тогда множество элементов w вида*

$$w = [y_i, y_j]^{b_{j_1}^{s_1} \ldots b_{j_m}^{s_m}}, \{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{N},$$

удовлетворяющих условиям

1) $v_j \leq v_{j_1} < \ldots < v_{j_m}$, $v_j < v_i$;

2) вершины v_i и v_j лежат в разных компонентах связности графа Γ_w, порожденного всеми разными вершинами из множества $\{v_i, v_j, v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}\}$;

3) v_i – наибольшая вершина в своей компоненте связности графа Γ_w;

образуют базис коммутанта M'_Γ над кольцом $\mathbb{Z}_p$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ номер 075-15-2019-1613

Список литературы

[1] Тимошенко Е. И., Базис частично коммутативной метабелевой группы, Известия Российской академии наук. Серия математическая (принята к публикации), DOI: 10.4213/im9034.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: eitim45@gmail.com

О сверхразрешимости группы, факторизуемой попарно перестановочными полунормальными подгруппами

А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [**1**]. Через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ обозначим формации всех нильпотентных и сверхразрешимых групп, а через $H^{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{X}$-корадикал группы H.

Напомним, что подгруппы A и B группы G называются *взаимно перестановочными*, если $UB = BU$ и $AV = VA$ для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Запись $Y \leq X$ означает, что Y — подгруппа группы X. Данное понятие было порождено работой [**2**], в которой Асаад и Шаалан установили признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ с взаимно перестановочными сверхразрешимыми подгруппами A и B. Эти результаты развивались многими авторами, см. монографию [**1**].

В [**1**] был поставлен открытый вопрос 5.2.19: *What can be said about the structure of a product of finitely many pairwise mutually permutable product of supersoluble groups?*

Из теоремы 1 настоящей работы вытекает «корадикальное» решение данной проблемы, т.е. описание сверхразрешимого корадикала группы.

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B. Группы с полунормальными подгруппами исследовались в работах многих авторов, см., например, работу [**3**] и литературу в ней. Очевидно, что если в группе $G = AB$ подгруппы A и B взаимно перестановочны, то A и B будут полунормальными. Обратное утверждение неверно, см. [**3**, пример 1].

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $G = G_1G_2\dots G_n$ — произведение попарно перестановочных подгрупп $G_1,\dots,G_n$ таких, что G_i и G_j полунормальны в G_iG_j для любых $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$. Предположим, что G_i сверхразрешимы для всех $i \in \{1,\dots,n\}$. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$.*

Следствие 1. *Пусть $G = G_1G_2\dots G_n$ — произведение попарно взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп $G_1,\dots,G_n$. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$.*

Случай $n = 2$ теоремы 1 рассмотрен в работе [**3**].

Список литературы

[1] Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

[2] Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318–326.

[3] Монахов В. С., Трофимук А. А. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сибирский матем. ж. 2020. Т. 61, N 1. С. 148–159.

Брестский университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)
E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

О периодической части группы Шункова, насыщенных полными линейными группами степени 3 над конечными полями харктеристики 2

А. А. Шлепкин, И. В. Сабодах

По определению, группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X (множество X называется *насыщающим множеством* для группы G) [**1**]. В [2] доказано, что группа Шункова, насыщенная группами из множества групп $\{GL_2(2^n)\}$, где n принадлежит некоторому подмножеству натурального ряда, обладает периодической частью, которая изоморфна $GL_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2. Естественно рассмотреть случай, группа Шункова насыщена группами из множеств групп $\{GL_3(2^n)\}$. Получен следующий результат.

Теорема. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества групп вида $GL_3(2^n)$, где n принадлежит некоторому подмножеству натурального ряда, обладает периодической частью, которая изоморфна $GL_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики* 2.

Работа авторов выполнена за счёт гранта Российского научного фонда, проект 18-71-10007.

Список литературы

[1] Шлепкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами// Математические труды. 1998. Т. 1, N 1. С. 129–138.

[2] Shlepkin A. A., On the periodic part of the Shunkov group saturated with linear groups of degree 2 over finite fields even characteristic, Чебышевский сб. 20:4(2019), 399-407.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: shlyopkin@mail.ru, sabodax@mail.ru

Finite groups with generalized σ-subnormal and σ-permutable subgroups

N. M. Adarchenko

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. We say that a subgroup H of G is nearly modular in G if either A is normal in G or $H_G \neq H^G$ and every chief factor H/K of G between H_G and H^G is nearly central in G, that is, $|H/K||G/C_G(H/K)|$ divides pq for some primes p and q.

We say that a subgroup A of G is *nearly σ-permutable* (respectively nearly S-permutable) in G if $A = \langle L, T\rangle$, where L is a nearly modular subgroup and T is a σ-permutable (respectively an S-permutable) subgroup of G.

Some known results are generalized. The following theorem is proved:

Theorem. *Suppose that G is soluble and every n-maximal subgroup of G is nearly S-permutable in G. If $n \leq |\pi(G)|$, then G is strongly supersoluble and G induces on any its non-Frattini chief factor H/K an automorphism group of order dividing $p_1 \cdots p_m$, where $m \leq n$ and $p_1, \ldots, p_m$ are distinct primes.*

The example of the alternating group A_4 of degree 4 shows that the restrictions on $|\pi(G)|$ in this Theorem cannot be weakened.

References

[1] Skiba A. N., On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups, J. Algebra, 436 (2015), 1–16.

[2] Skiba A. N., Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups, J. Algebra, 495 (2018), 114–129.

[3] Skiba A. N., A generalization of a Hall theorem, J. Algebra and its Application, 15(5) (2016), 21–36.

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel' (Belarus)
E-mail: nik.adarchenko@gmail.com

Spectra of almost simple groups

A. A. Buturlakin, M. A. Grechkoseeva

The spectrum $\omega(G)$ of a finite group G is the set of orders of elements of G. Denote by $\mu(G)$ the set of elements of $\omega(G)$ that are maximal with respect to the divisibility. Since the spectrum is closed under taking divisors, it is uniquely determined by any set $\nu(G)$ such that $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

If L is a nonabelian simple group of Lie type, then $\operatorname{Inndiag} L$ denotes the group of inner-diagonal automorphisms of L. Our purpose is to find $\omega(\operatorname{Inndiag} L)$ for exceptional groups. Since the spectrum of L itself is known (see [**1**]), we may assume that $\operatorname{Inndiag} L \neq L$, and so $L = E_6(q)$ with $q \equiv 1 \pmod 3$, or $L = {}^2E_6(q)$ with $q \equiv -1 \pmod 3$, or $L = E_7(q)$ with q odd. Here we give our result for the first two cases.

It is convenient to write $E_6^\varepsilon(q)$, where $\varepsilon \in \{+, -\}$, $E_6^+(q) = E_6(q)$ and $E_6^-(q) = {}^2E_6(q)$. Also we write ε instead of $\varepsilon 1$ in arithmetic expressions for brevity. If a and b are numbers, then $(a \pm 1)(b \mp 1)$ is a short form of $(a+1)(b-1), (a-1)(b+1)$. If p is a prime and n is a positive integer n, then $p(n)$ denotes the least power of p greater than n.

Theorem. *Let $L = E_6^\varepsilon(q)$, where q is a power of a prime p and 3 divides $q - \varepsilon$, and let G be the group of inner-diagonal automorphisms of L. Define the set $\nu(G)$ to be the union of the following sets:*

1) $\{\frac{q^6-1}{(3,q-\varepsilon)}, q^6 + \varepsilon q^3 + 1, (q^2 + \varepsilon q + 1)(q^4 - q^2 + 1), (q - \varepsilon)(q^2 + 1)(q^3 + \varepsilon), (q^2 - 1)(q^4 + 1), (q + \varepsilon)(q^5 - \varepsilon)\}$;

2) $p \cdot \{\frac{q^6-1}{q-\varepsilon}, q^5 - \varepsilon, (q^3 + \varepsilon)(q - \varepsilon)\}$;

3) $p(2) \cdot \{(q^3 - \varepsilon)(q + \varepsilon), q^4 + q^2 + 1, q^4 - 1\}$;

4) $p(5) \cdot \{q^2 - 1, q^2 + \varepsilon q + 1\}$;

5) $p(7) \cdot \{q - \varepsilon\}$;

6) $\{p(11)\}$.

Then $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

The proofs of the results follow the same lines as [**2, 3**] and involve calculations in MAGMA [**4**].

References

[1] Buturlakin A. A., Spectra of groups $E_8(q)$. Algebra Logic 57 (2018) 1–8.

[2] Buturlakin A. A, Spectra of the finite simple groups $E_7(q)$. Siberian Math. J. 57 (2016) 769–777.

[3] Buturlakin A. A, Spectra of finite simple groups $E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$. Algebra Logic 52 (2013) 284–304.

[4] Bosma W., Cannon J., Playoust C., The Magma algebra system. I. The user language. J. Symbolic Comput. 24 (1997), 235–265.

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk
E-mail: buturlakin@math.nsc.ru

On locally nilpotent subgroups of a finitary linear group

O. Yu. Dashkova, O. A. Shpyrko

Let K be an associate ring with unity and let ν be a linearly ordered set with an order $\leq$. Let $A = (m_{ij}(A))$ be a matrix of degree ν over the ring K in which $1 \leq i, j$ and $i, j \in \nu$. Consider all possible subsets $\nu' \subseteq \nu$ such that outside $\nu' \times \nu'$ the matrix A coincides with the identity matrix. The intersection of all sets ν' with the given property itself has this property and therefore it is the smallest set with such property which is called the support of matrix A and denoted by $supp(A)$. Matrices with finite supports are called the *finitary* matrices. Finitary matrices are multiplied by the natural way $m_{ij}(AB) = \sum_k m_{ik}(A)m_{kj}(B)$ where the sum on the right side contains only a finite numbers of nonzero elements. It is obviously that $supp(AB) \subseteq supp(A) \cup supp(B)$. For all invertible matrixes A we have $supp(A^{-1}) = supp(A)$. Hence the set $FL_\nu(K)$ of all invertible finitary matrices of degree ν over K forms a group under multiplication which is called a *finitary linear group* of degree ν over K.

Finitary linear groups of degree ν over a ring K was introduced by Yu.I. Merzlyakov in [**1**]. The investigation of $FL_\nu(K)$ was started in [**2**] and actively continued in [**1, 3, 4, 5, 6, 7**]. In this paper we continue to study finitary linear groups. We investigate torsion free locally nilpotent subgroups of $FL_\nu(K)$ if K is a commutative Noetherian ring.

Theorem. Let $FL_\nu(K)$ be a finitary linear group, K be a commutative Noetherian ring. If G is a torsion-free locally nilpotent subgroup of $FL_\nu(K)$ then G is hyperabelian.

References

[1] Merzlyakov Yu. I., Equisubgroups of unitriangular groups: a criterion for self-normalizability. Dokl. Akad. Nauk. 339 (1994) 732-735.

[2] Levchuk V. M., Some locally nilpotent rings and their associated groups. Mat. Zametki. 42 (1987) 631-641.

[3] Levchuk V. M., Radchenko O. V., Derivations of the locally nilpotent matrix rings. J. Algebra Appl. 9 (2010) 717-724.

[4] Kuzucuoglu F. and Levchuk V. M., Jordan isomorphisms of radical finitary matrix rings. J. Algebra Appl. 9 (2010) 659-667.

[5] Kuzucuoglu F. and Levchuk V. M., Isomorphisms of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings. Acta Appl. Math. 82 (2004) 169–181.

[6] Dashkova O. Yu., Salim M. A., Shpyrko O. A., On the structure of a finitary linear group. Proceedings of the Institute of mathematics and mechanics UrB RAS 23 (2017) 98-104.

[7] Bovdi V., Dashkova O. Yu., Salim M. A., Subgroups of a finitary linear group. Ric. Mat. 68 (2019) 803–809.

Branch of Moscow State University in Sevastopol, Sevastopol (Russia)
E-mail: odashkova@yandex.ru

Recognition of the simple groups $L_4(q)$ and $U_4(q)$ by spectrum

M. A. Grechkoseeva, S. V. Skresanov, M. A. Zvezdina

The spectrum of a finite group G is the set of the orders of its elements. Groups are isospectral if they have the same spectra. To solve the problem of recognition by spectrum for a finite group L is to find all finite groups isospectral to L. If L is the only group with this property, then L is said to be recognizable by spectrum. The recognition problem is solved for all nonabelian simple groups except for some classical groups in dimension up to 36 in odd characteristic (see [**1, 2**]).

We consider this problem for the groups $L_4(q)$ and $U_4(q)$ with q odd. These groups are challenging for two reasons. First, it was unknown until recently which of them can be isospectral to a proper cover (a proper cover of L is a group whose quotient by some nontrivial group is isomorphic to L). Second, by some general theory, a finite group isospectral to a classical group of small dimension can have an exceptional group of Lie type as a composition factor which complicates the analysis of order elements.

Suppose that L is equal to $L_4(q)$ or $U_4(q)$ with q odd and G is a finite group isospectral to L. We prove that the quotient of G by its solvable radical is an almost simple group with socle L [**3**] and that L cannot be isospectral to a proper cover [**4**]. Thus we have

Theorem. *Let L be one of the simple groups $L_4(q)$ or $U_4(q)$, where q is odd. Then every finite group isospectral to L is an almost simple group with socle L.*

It is worth noting that we cannot strengthen the theorem by claiming that every finite group isospectral to L is isomorphic L, even for large q (see [**5**]). On the other hand, $L_4(q)$ and $U_4(q)$, where $q > 2$ is even, are recognizable by spectrum [**6**].

Acknowledgments. The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 18-31-20011).

References

[1] Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V., On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups, J. Group Theory 18 (2015) 741–759.

[2] Staroletov A., On almost recognizability by spectrum of simple classical groups, Int. J. Group Theory 6 (2017) 7–33.

[3] Grechkoseeva M. A., Zvezdina M. A., On recognition of $L_4(q)$ and $U_4(q)$ by spectrum, Siberian Math. J. 61 (2020).

[4] Grechkoseeva M. A., Skresanov S. V., On element orders in covers of $L_4(q)$ and $U_4(q)$, Sib. Élektron. Mat. Izv. 17 (2020) 585–589.

[5] Grechkoseeva M. A., On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle, J. Group Theory 20 (2017) 1191–1222.

[6] Mazurov V. D., Chen G. Y., Recognizability of the finite simple groups $L_4(2^m)$ and $U_4(2^m)$ by the spectrum, Algebra Logic 47 (2008) 49–55.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: grechkoseeva@gmail.com

Problems on structure of finite quasifields and collineation groups of semifield projective translation planes

O. V. Kravtsova, V. M. Levchuk, N. D. Podufalov

The study of finite semifields and quasifields originated as a classical part of algebra in the work of L. E. Dickson and A. A. Albert at the start of the 20th century. It is well known that a finite Desarguesian projective plane is coordinatized by a field, and weakening of commutativity and associativity for multiplication leads to translation planes and semifield planes which are coordinatized by quasifields and semifields. A detailed review on semifields, quasifields and correspondent projective planes is presented in *Handbook of Translation Planes* (2007); however, many problems are little studied.

Some open problems on finite semifields were formulated by M. Lavrauw and O. Polverino (2011): a classification, geometric construction and representation, invariants. The list was updated by V. M. Levchuk (2013): maximal subfields, multiplicative loop spectra, automorphisms of finite semifields and quasifields. Recall also Wene's hypothesis (1991) on right- or left-primitivity of a finite semifield and its weakening to right- or left-cyclicity.

A well known unsolved problem on finite semifield projective planes is connected with its automorphisms (collineations). In 1959 D. R. Hughes suggested that the full collineation group of any non-Desarguesian semifield plane is solvable (see also *The Kourovka notebook*, Question 11.76, N. D. Podufalov, 1990). To date, solvability has been proven for some classes of semifield planes, but the hypothesis has not yet been confirmed.

The problem is reduced to the solvability of the autotopism group (the group of collineations fixing a triangle). We propose to determine simple non-Abelian groups that cannot be the autotopism subgroups. It is proved that any finite non-Desarguesian semifield plane of odd order does not admit the alternating group A_5 in autotopism group. We also specified several infinite families of semifield planes of odd or even order which autotopism group does not contain a subgroup isomorphic to the Suzuki group $Sz(2^{2n+1})$, or to $SL(2,5)$, or to $PSL(2,p)$.

This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2020-1534/1).

Siberian Federal University, Krasnoyarsk; The Russian Academy of Education, Moscow
E-mail: ol71@bk.ru, vlevchuk@sfu-kras.ru, londont@yandex.ru

Classification of finite simple exceptional groups of Lie type in which the subgroups of odd index are pronormal

A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin

According to Ph. Hall, a subgroup H of a group G is said to be *pronormal* in G if H and H^g are conjugate in $\langle H, H^g\rangle$ for every $g \in G$. Some problems in combinatorics and permutation group theory were solved in terms of the pronormality. Obvious examples of pronormal subgroups are normal subgroups, maximal subgroups, and Sylow subgroups of finite groups; Hall subgroups of finite solvable groups.

In [**1**] E. Vdovin and the third author proved that the Hall subgroups (if they exist) are pronormal in all finite simple groups and, basing on the analysis of the proof, they conjectured that the subgroups of odd index are pronormal in finite simple groups.

The conjecture was verified for many families of finite simple groups in [**2**]. Namely, it was proved that the subgroups of odd index are pronormal in the following finite simple groups: A_n, where $n \geq 5$; sporadic groups; groups of Lie type over fields of characteristic 2; $PSL_{2^n}(q)$; $PSU_{2^n}(q)$; $PSp_{2n}(q)$, where $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$; $P\Omega_{2n+1}(q)$; $P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$; exceptional groups of Lie type not isomorphic to $E_6(q)$ or ${}^2E_6(q)$. In [**3, 4**] it was proved that the conjecture fails. Precisely, if $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ and $n \notin \{2^m, 2^m(2^{2k}+1) \mid m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, then the finite simple symplectic group $PSp_{2n}(q)$ contains a non-pronormal subgroup of odd index. Moreover, in [**4, 5**] we received the complete classification of finite simple symplectic groups in which all the subgroups of odd index are pronormal. In this work we complete the classification of finite simple exceptional groups of Lie type in which the subgroups of odd index are pronormal. So, we prove the following theorem.

Theorem. Let $G = E_6^{\varepsilon}(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$, $q = p^m$, and p is a prime. All the subgroups of odd index are pronormal in G if and only if $q \not\equiv \varepsilon 1 \pmod{18}$ and if $\varepsilon = +$ and $p > 2$, then m is a power of 2.

The work is supported by Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

References

[1] Vdovin E. P., Revin D. O., Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups // Sib. Math. J. 2012. Vol. 53, no. 3. P. 419–430.

[2] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On the pronormality of subgroups of odd indices in finite simple groups // Sib. Math. J. 2015. Vol. 56, no. 6. P. 1101–1107.

[3] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 296, Suppl. 1. P. 1145–1150.

[4] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple symplectic groups // Sib. Math. J. 2017. Vol. 58, no. 3. P. 467–475.

[5] Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O., On pronormal subgroups in finite simple groups // Doklady Mathematics. 2018. Vol. 98, no. 2. P. 405–408.

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS, Yekaterinburg
E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru, danila.revin@gmail.com

On sublattices of the lattice of all totally ω-composition formations of finite groups

I. P. Los, V. G. Safonov

All groups considered are finite, notations and terminologies are standard [**1, 2**]. Let ω be a non-empty set of primes. Every formation of groups is called 0-multiply ω-composition. For $n \geq 1$, a formation $\mathfrak{F}$ is called n-multiply ω-composition, if it has an ω-composition satellite f such that every value $f(p)$ is $(n-1)$-multiply ω-composition. A formation $\mathfrak{F}$ is called totally ω-composition if it is n-multiply ω-composition for all nonnegative integer n.

Let for any group G, $\tau(G)$ be a set of subgroups of G such that $G \in \tau(G)$. Then τ is called a subgroup functor [**2**], if for every epimorphism $\varphi :\ A \to\ B$ and any groups $H \in \tau(A)$ and $T \in \tau(B)$ we have $H^{\varphi} \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. A class $\mathfrak{F}$ of groups is called τ-closed if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for all $G \in \mathfrak{F}$.

For any set $\mathfrak{X}$ of groups, the symbol $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ denotes the τ-closed totally ω-composition formation generated by $\mathfrak{X}$, i.e. $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ is the intersection of all τ-closed totally ω-composition formations containing $\mathfrak{X}$. For any τ-closed totally ω-composition formations $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$, we write $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

With respect to the operations $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}$ and $\cap$ the set $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ of all τ-closed totally ω-composition formations forms a complete lattice.

Developing the results of papers [**3, 4**], we proved the following theorem.

Theorem. *The lattice $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ of all τ-closed totally ω-composition formations is a complete sublattice of the lattice c^{ω}_{∞} of all totally ω-composition formations.*

Corollary. *The lattice c^{τ}_{∞} of all τ-closed totally composition formations is a complete sublattice of the lattice c_{∞} of all totally composition formations.*

References

[1] Skiba A.N., Shemetkov L.A.. Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups. Ukrainsk. math. zh. 52, N 6, (2000), 783–797.

[2] Skiba A.N., Algebra of formations, Belarus. Navuka, Minsk, 1997.

[3] Safonov V.G., Shemetkov L.A. On sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups. Doklady NAN Belarusi. 52, N 4, (2008), 34–37.

[4] Shcherbina V.V., Safonov V.G. On sublattices of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientic Bulletin. Mathematics. Physics, 51, N 2, (2019), 227–244.

Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: losip@bsu.by, vgsafonov@bsu.by

Classification of maximal subgroups of odd index in finite almost simple groups

N. V. Maslova

M. Liebeck and J. Saxl [**4**] and, independently, W. Kantor [**2**] proposed a classification of finite primitive permutation groups of odd degree. It was one of the greatest results in the theory of finite permutation groups. Both papers [**4**] and [**2**] contain lists of subgroups of finite almost simple groups that can turn out to be maximal subgroups of odd index. However, in the case then the socle of an almost simple group is an alternating group or a classical group over a field of odd characteristic, neither in [**4**] nor in [**2**] it was described which of the specified subgroups are precisely maximal subgroups of odd index. Thus, the problem of the complete classification of maximal subgroups of odd index in finite almost simple groups remained open.

For alternating and symmetric groups, we completed the classification in [**6**]. For simple classical groups over fields of odd characteristics, the classification was completed in [**5**]. For almost simple groups with classical socle of dimension at least 13, the classification was completed in [**7, 8**].

In [**5**] we used results obtained by P. Kleidman in [**3**]. However there is a number of mistakes and inaccuracies in [**3**]. These mistakes and inaccuracies were corrected in [**1**]. In [**9**] we revised of the classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups obtained in [**5**].

Recently, we have completed the classification of maximal subgroups of odd index in almost simple groups with classical socle of degree at most 12 over a field of odd characteristic. Thus, the classification of maximal subgroups of odd index in almost simple groups with classical socle is complete. In this talk, we discuss these results.

The work is supported by Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

References

[1] Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M., The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576 .

[2] Kantor W. M., Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // J. Algebra. 1987. Vol. 106, no. 1. P. 15–45.

[3] Kleidman P., The subgroup structure of some finite simple groups, Ph. D. Thesis, Cambridge Univ., Cambridge, 1986.

[4] Liebeck L. W., Saxl J., The primitive permutation groups of odd degree // London Math. Soc. 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.

[5] Maslova N. V., Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.). 2009. Vol. 267, suppl. 1. S164–S183.

[6] Maslova N. V., Classification of maximal subgroups of odd index in finite groups with alternating socle // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.). 2014. Vol. 285, suppl. 1. S136–S138.

[7] Maslova N. V., Classification of maximal subgroups of odd index in finite groups with simple orthogonal socle // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2010. Vol. 16, no. 4. P. 237–245 (in Russian).

[8] Maslova N. V., Maximal subgroups of odd index in finite groups with simple linear, unitary, or symplectic socle // Algebra and Logic. 2011. Vol. 50, no. 2. P. 133–145.

[9] Maslova N. V., Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: Addendum // Sib. Electron. Math. Reports. 2018. Vol. 15. P. 707–718.

Krasovskii Institute of Mathemetics and Mechanics UrB RAS, Yekaterinburg
E-mail: butterson@mail.ru

On λ-homomorphic skew braces

M. V. Neshchadim

A (left) skew brace is a triple $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ where $\langle A, \cdot \rangle$ and $\langle A, \circ \rangle$ are groups and the compatibility condition

$$a \circ (bc) = (a \circ b)a^{-1}(a \circ c)$$

holds for all $a, b, c \in A$, where a^{-1} denotes the inverse of a with respect to the group $\langle A, \cdot \rangle$. The group $\langle A, \cdot \rangle$ will be the **additive group** of the brace and $\langle A, \circ \rangle$ will be **multiplicative group** of the brace. A skew brace is said to be **classical** if its additive group is abelian.

For a skew left brace $(G, \cdot, \circ)$, the map $\lambda : (G, \circ) \to \mathrm{Aut}(G, \cdot)$, $a \mapsto \lambda_a$, where $\lambda_a(b) = a^{-1} \cdot (a \circ b)$ for all $a, b \in G$, is a group homomorphism. Then λ can also be viewed as a map from $(G, \cdot)$ to $\mathrm{Aut}(G, \cdot)$, which, in general, may not be a homomorphism. We study skew left braces $(G, \cdot, \circ)$ for which $\lambda : (G, \cdot) \to \mathrm{Aut}(G, \cdot)$ is a homomorphism. Such skew left braces we call as λ-homomorphic. We formulate necessary and sufficient conditions under which a given homomorphism $\lambda : (G, \cdot) \to \mathrm{Aut}(G, \cdot)$ gives rise to a skew left brace, which, indeed, is λ-homomorphic. As an application, we construct skew left braces when $(G, \cdot)$ is either a free group or a free abelian group. We prove that any λ-homomorphic skew left brace is an extension of a trivial skew brace by a trivial skew brace. Special emphasis is given on λ-homomorphic skew left brace for which the image of λ is cyclic. A complete characterization of such skew left braces on the free abelian group of rank two is obtained.

The work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-41-02005).

References

1. Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadav M. K., Computing skew left braces of small orders. Internat. J. Algebra Appl., https://doi.org/10.1142/S0218196720500216. 2. Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadav M. K., On λ-homomorphic skew braces. arXiv:2004.05555v1 [math.RA] 12 Apr 2020

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk; Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Tomsk
E-mail: neshch@math.nsc.ru

Verbal width by squares of alternating group A_n

R. V. Skuratovskii

The Verbal Width of a free group was investigated by Sucharit Sarkar [**1**]. Sarkar proved that an arbitrary commutator of free group of rank greater than 1 cannot be generated by only 2 squares. The conditions when a commutator can be presented as a product of 2 squares were further found by him too [**1**]. The commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of an alternating group have been previously investigated by the author [**3**].

We consider a similar problem in the symmetric group S_n and alternating group A_n. Upon taking into account that the commutator subgroup of S_n is the alternating group A_n, when $n > 4$ [**2**], then the problem can be reformulated in terms of the alternating group.

Therefore, we research the verbal width by squares of A_n.

Theorem 1. *An arbitrary element of A_n can be presented in the form of a product of two squares of elements from A_n.*

Proposition. *If for an element $g \in A_n$, there exists $l \in \mathbb{N}$, such that $l = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ then g can be presented in the form of a product of independent cycles with an odd number of independent l-cycles, then g cannot be presented in the form of square of $h,\ h \in A_n$, where h is presented as a product of independent cycles.*

Lemma. *The square of a cycle of even length L is a product of two cycles of length $\frac{L}{2}$.*

We denote by p_l the number of pairs of l-cycles. We define residue of g $(r(g) > 1)$ as the number of element of $\{1, ..., n\}$ where g acts trivial. We define m_i as the number of cycles of length i in cyclic structure.

Theorem 2. *If in cyclic structure of $g \in A_n$ every even cycle appears even times i.e. $m_{2k} \equiv 0 \pmod 2$ and one of the next conditions 1 or 2 holds:*

1)

$$\left[\begin{array}{r} r(g) > 1 \\ \max\limits_{k \in N} (m_{2k-1}) > 1, \end{array}\right.$$

2) $\sum\limits_{l}^{L} p_{2l} \equiv 0 \pmod 2$,

then this g can be presented as $g = h^2$, $h \in A_n$. The vice versa is also true.

References

[1] Sarkar S. Commutators and squares in free group, Algebra Geometry Topologe, 4 (2004), 595-602.
[2] Dixon J. D., Mortimer B. Permutation groups. Graduate texts in mathematics; 163 (1996), P. 348.
[3] Skuratovskii R. V. Commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating group and the commutator width in the wreath product. BASM n.1 (92), 2020, pp.3-16.

Institute for Applied and System Analysis, Kiev (Ukraine)
E-mail: ruslan@imath.kiev.ua, ruslcomp@mail.ru, r.skuratovskii@kpi.ua

Centralizer dimension and equationally noetherian groups

A. V. Treier

In [**1**], the authors described the basics of algebraic geometry over groups. There was shown in the article that the basic concepts and results of classical algebraic geometry have analogs in the case of equations over groups. Further, these ideas were developed in many papers devoted to the study of algebraic geometry over arbitrary algebraic structures.

One of the important properties of algebraic structures from the point of view of algebraic geometry is the concept of noetherness by equations.

Definition. *An algebraic structure A is called equationally noetherian if, for any natural number n, any system of equations $S(\mathbf{x})$ over n variables $\mathbf{x}$ is equivalent to its own finite subsystem.*

There is a weakened version of the definition above.

Definition. *Let n be a natural number. We say that an algebraic structure is A n-equationally noetherian if any system of equations $S(x)$ in n variables is equivalent to its own finite subsystem.*

In the paper [**2**] it is shown that for minimax algebraic systems, the property of being n-equationally noetherian does not imply the usual equational noetherian property for arbitrary n. But for groups, the question of equivalence of the two definitions above was formulated by G.Baumslag, A.Miasnikov and V.Remeslennikov in [**1**] and remained open:

Problem.*Let L be the language of group theory, G a group and L_G the language of group theory with set of constants from the group G. Let the group $G = \langle G, L_G \rangle$ be 1-equationally noetherian group. Does it follow from this that the group G is equationally noetherian?*

The new results on a close connection between the concepts of centralizer dimension and noetherenes by equations for nilpotent groups will be presented. An example of a nilpotent group will be presented, which is 1-equationally noetherian but is not equationally noetherian in general which solves the mentioned problem.

The research was supported by Mathematical Center in Akademgorodok, agreement with the Russia Ministry of Science and Education 075-15-201901613.

References

[1] Baumslag G., Miasnikov A., Remeslennikov V., Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. Journal of Algebra, 219 (1999) 16–79.

[2] Kotov M. V. Several notions on a noethereness by equations. {Herald of Omsk University}, 2 (2013), 24–28.

Sobolev Institute of Mathematics, Omsk (Russia)
E-mail: alexander.treyer@gmail.com

On separability property of the lattice of multiply σ-local formations

N. N. Vorob'ev, I. I. Staselka, A. Hojagulyyev

All groups considered are finite. Let σ be a partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, that is $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n; $\sigma(n)$ denotes the set $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n)\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ and $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$. The symbol $F_{\sigma_i}(G)$ denotes the product of all normal $\sigma_i^{'}$-closed subgroups of G.

Any function f of the form

$$f : \sigma \to \{\text{formations of groups}\},$$

is called a *formation σ-function*. Following [**1, 2**] we put

$LF_\sigma(f) = \big(G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)\big).$

If for some formation σ-function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then we say that class $\mathfrak{F}$ is *σ-local* and f is a *σ-local definition of* $\mathfrak{F}$ (see [**1, 2**]). In 1986 A. N. Skiba proposed the following concept (see [**1, 3**]): every formation is supposed to be 0-*multiply σ-local*; for $n > 0$, we say that the formation $\mathfrak{F}$ is *n-multiply σ-local* provided either $\mathfrak{F} = (1)$ is the class of all identity groups or $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i)$ is $(n-1)$-multiply σ-local for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. By $\Theta\mathrm{form}(G)$ we denote the intersection of all Θ-formations containing a group G. In what follows Θ denotes a complete lattice of formations. The collection of all n-multiply σ-local formations is a complete lattice by an inclusion $\subseteq$ (see [**1**, Theorem 1.20]). If $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$, then $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ is the greatest lower bound for $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ in Θ. The symbol $\mathfrak{M} \vee_\Theta \mathfrak{H}$ denotes the least upper bound for $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ in Θ.

A complete lattice of formations Θ is called $\mathfrak{X}$-*separated* if for every term $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ of the signature $\{\cap, \vee_\Theta\}$, every Θ-formations $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ and every group $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ there exist $\mathfrak{X}$-groups $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$ such that $A \in \xi(\Theta\mathrm{form}A_1, \ldots, \Theta\mathrm{form}A_m)$.

We proved the following

Theorem. *The lattice of all n-multiply σ-local formations l_n^σ is $\mathfrak{G}$-separated.*

Corollary ([3, Theorem 4.1.16]; [4, Lemma 9.16]). *The lattice of all n-multiply local formations l_n is $\mathfrak{G}$-separated.*

References

[1] Chi Zh., Safonov V. G., and Skiba A. N., On n-multiply σ-local formations of finite groups, Communications in Algebra, 47 (2019), no. 3, 957–968.

[2] Chi Zh. and Skiba A. N., On Σ_t^σ-closed classes of finite groups, Ukrainian Math. J., 70 (2019), no. 12, 1966–1977.

[3] Skiba A. N., Algebra of Formations, Belaruskaya Navuka, Minsk, 1997 (in Russian).

[4] Shemetkov L. A. and Skiba A. N., Formations of algebraic systems, Sovremennaya Algebra, Moskva: Nauka, 1989 (in Russian).

P. M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk (Belarus')
E-mail: vornic2001@mail.ru, mars17906@mail.ru, nazar_96_nazar_96@mail.ru

VII. Секция «Теория колец»

Дифференцирования в групповых алгебрах и теорема Столлингса

А. А. Арутюнов

Хорошо известно такое понятие как конец графа (Γ) обозначаемое обычное как $e(\Gamma)$. Это максимально число бесконечных компонент связности в графе виде $\Gamma \setminus Q$, где Q – всевозможные конечные подграфы. Известны результаты Столлингса (мы будем ориентироваться на [**1**]), показывающие, что число концов графа Кэли данной дискретной группы не зависит от выбранного копредставления группы и более того, может быть описано в терминах комбинаторной теории групп. При этом естественно понимать граф Кэли, как граф, порожденный действием группы на себе правыми сдвигами. Соответственно число концов графа Кэли является инвариантом группы и обозначается $e(G)$. Кроме того, вполне естественно изучать и другие варианты действия группы на себе, в частности действие сопряжениями.

Для конечнопороженной группы $G = \langle X \rangle$ зафиксируем λ – действие группы на себе, и $\Gamma_u, u \in G$ – связный граф в котором множество вершин отождествлено с элементами орбиты действия λ на u. И между вершинами a, b есть ребро с меткой $x \in X$ если $x(a) = b$.

Теорема. *Число концов графа Γ_u – не зависит от копредставления группы и $e(\Gamma_\lambda) \leq e(G)$.*

Оказывается, что эта конструкция в случае, когда в качестве действия берется внутреннее действие сопряжениями, может быть связана с задачей изучения дифференцирований в групповых алгебрах, изучавшейся в работах [**2, 3, 4**]. В частности, показывается связь между квазивнутренними и внутренними дифференцированиями (см. [**4**]) следующей теоремой.

Теорема. *Для квазивнутренних и внутренних дифференцирований носители которых сосредоточены в соответствующих группоидах (см. [**2, 3**]) справедлива формула $dimQInn(\Gamma_u)/Inn(\Gamma_u) = e(\Gamma_u) - 1$.*

Этот результат позволяет описывать алгебру дифференцирований групповой алгебре в терминах комбинаторной теории групп. При этом оказывается, что есть серьезная разница в структуре алгебры в зависимости от числа концов исходной группы $e(G)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых МК-2364.2020.1.

Список литературы

[1] Dunwoody M. J.: Cutting up graphs, Combinatorica 2(1) (1982), 15–23.

[2] Арутюнов А.А., Мищенко А.С., Штерн А.И., Деривации групповых алгебр, Фундаментальная и прикладная математика, Интуит (М.), 2016, т. 21-6, с.63–75.

[3] Арутюнов А.А. Алгебра дериваций в некоммутативных групповых алгебрах, Тр. МИАН, 308 (2020), 28–41

[4] Arutyunov, A. A., Alekseev, A. V.: Complex of n-categories and derivations in group algebras. Topology and its Applications, 275, 107002 (2020)

МФТИ, Москва
E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

Вполне разложимые абелевы группы ранга 2 и их группы автоморфизмов

В. А. Гайдак, Е. А. Тимошенко

Пусть $B \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ — некоторый класс абелевых групп. Будем говорить, что B *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{X}$, если из изоморфизма групп автоморфизмов $\operatorname{Aut} B$ и $\operatorname{Aut} B'$, где $B' \in \mathbf{X}$, всегда следует $B \cong B'$.

Далее под $\mathbf{X}$ понимается класс всех вполне разложимых групп (без кручения) ранга 2. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга* n называется всякая группа B, представимая в виде прямой суммы n групп ранга 1; хорошо известно, что любые два таких разложения группы B будут изоморфны.

В [1] получены необходимые и достаточные условия существования изоморфизма $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$ для случая 2-делимых групп $B, B' \in \mathbf{X}$. В нашей работе аналогичная задача решена уже для произвольных групп класса $\mathbf{X}$.

Для коммутативного кольца с единицей R через $GL_2(R)$, как обычно, обозначается группа обратимых (2×2)-матриц с элементами из R; эта группа состоит из матриц, определители которых суть обратимые элементы кольца R. Через $ML_2(R)$ обозначим подгруппу группы $GL_2(R)$, элементами которой служат матрицы с определителем ± 1. Можно показать, что если R — подкольцо поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то $ML_2(R)$ порождается множеством всех инволюций группы $GL_2(R)$.

Теорема 1. *Для подколец R и S поля $\mathbb{Q}$ следующие условия эквивалентны*:
1) $GL_2(R) \cong GL_2(S)$.
2) $ML_2(R) \cong ML_2(S)$.
3) $R = S$.

Теорема 2. *Если $B = Y \oplus Y$ и $B' = Z \oplus Z$, где Y и Z — группы без кручения ранга* 1, *то $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$ тогда и только тогда, когда кольца эндоморфизмов групп Y и Z изоморфны.*

Группа Y называется *почти делимой*, если $pY = Y$ почти для всех простых p. Теорема 2 вместе с результатами из [1] позволяет в явном виде указать те группы класса $\mathbf{X}$, которые определяются своей группой автоморфизмов в этом классе:

Теорема 3. *Группа $B \in \mathbf{X}$ определяется группой $\operatorname{Aut} B$ в классе $\mathbf{X}$ тогда и только тогда, когда $B \cong Y \oplus Y$, где Y — почти делимая группа ранга* 1.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных — докторов наук МД-108.2020.1.

Список литературы

[1] Вильданов В. К. Определяемость абелевой группы её группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Нижний Новгород, 2014. 73 с.

Томский государственный университет, Томск
E-mail: gaidakvioletta@gmail.com, tea471@mail.tsu.ru

О конечных сильно критических кольцах

Ю. Н. Мальцев, Е. В. Журавлев

Конечное ассоциативное кольцо R порядка n называется сильно критическим, если $R \notin \mathrm{var}\,\langle B \mid |B| < n\rangle$, то есть существует многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ свободного ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\,\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ такой, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ является тождеством в любом конечном кольце B порядка меньшего n, но не является тождеством в кольце R. Так как собственные факторы конечного кольца R имеют порядок меньший, чем порядок R, то каждое сильно критическое кольцо является критическим, а следовательно, подпрямо неразложимым и его порядок – степень простого числа. Таким образом, сильно критические кольца образуют подкласс класса всех критических колец.

Доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть R – конечное нильпотентное кольцо, не являющееся сильно критическим кольцом. Тогда $R \in \mathrm{var}\,\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$, где $A_1, \ldots, A_n$ – нильпотентные кольца порядка меньшего $|R|$.*

Теорема 2. *Пусть R простое конечное кольцо. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Теорема 3. *Пусть R – конечное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *R – сильно критическое кольцо;*

(2) *для любого натурального числа n кольцо $M_n(R)$ является сильно критическим кольцом;*

(3) *существует натуральное число n такое, что $M_n(R)$ является сильно критическим кольцом.*

Теорема 4. *Пусть R – конечное кольцо с единицей, $J(R)$ – его радикал Джекобсона, $R/J(R) = M_n(GF(q))$ и $J(R)$ – сильно критическое кольцо. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Теорема 5. *Пусть R – конечное кольцо порядка p или p^2 и неразложимое в прямую сумму ненулевых идеалов. Тогда R – сильно критическое кольцо. В частности, все критические кольца порядка не более p^2 являются сильно критическими.*

Пусть R – кольцо порядка 8 такое, что $(R, +) = \langle a\rangle \dot{+} \langle b\rangle$, где $4a = 2b = 0$, $a^2 = b^2 = 0$, $ab = ba = 2a$. Доказано, что R – критическое кольцо, не являющееся сильно критическим.

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: maltsevyn@gmail.com
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: evzhuravlev@mail.ru

О факторно делимых абелевых группах ранга 2

М. Н. Зонов, Е. А. Тимошенко

Все группы считаем абелевыми. Группа G называется *факторно делимой группой ранга* n, если её периодическая часть редуцированна и существует свободная подгруппа $F \subset G$ ранга n такая, что G/F – делимая периодическая группа.

Нас интересуют коуниверсальные квадраты вида

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & B \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow{\alpha} & T \end{array} \qquad (\alpha \text{ и } \beta \text{ – эпиморфизмы}). \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть G – группа без кручения ранга 2. Следующие условия эквивалентны*:

1) *G – факторно делимая группа.*

2) *Существует коуниверсальный квадрат* (1), *в котором A и B – факторно делимые группы без кручения ранга* 1 *и тип* $\mathbf{t}(\ker\alpha) \wedge \mathbf{t}(\ker\beta)$ *идемпотентен.*

3) *Существует коуниверсальный квадрат* (1), *в котором A и B – факторно делимые группы без кручения ранга* 1, *группа T делима и тип* $\mathbf{t}(\ker\alpha) \wedge \mathbf{t}(\ker\beta)$ *идемпотентен.*

4) *Если в коуниверсальном квадрате* (1) *A и B – группы без кручения ранга* 1, *то группы A и B факторно делимы и тип* $\mathbf{t}(\ker\alpha) \wedge \mathbf{t}(\ker\beta)$ *идемпотентен.*

Пусть p – простое число. Факторно делимую группу G назовём *p-минимальной*, если для некоторой её свободной подгруппы F выполнено $G/F \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

Через $\mathbb{Q}^{(p)}$ обозначаем подкольцо поля $\mathbb{Q}$, порождённое элементом p^{-1}. Для всякого элемента η мультипликативной группы $U(J_p)$ кольца целых p-адических чисел J_p зададим группу H_η с помощью коуниверсального квадрата

$$\begin{array}{ccc} H_\eta & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{(p)} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \mathbb{Q}^{(p)} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z} \end{array}$$

такого, что $\beta(x) = x + \mathbb{Z}$ и $\alpha(x) = \eta \cdot (x + \mathbb{Z})$ для всякого элемента $x \in \mathbb{Q}^{(p)}$. Эта группа является p-минимальной факторно делимой группой без кручения ранга 2. Верно и обратное утверждение: всякая p-минимальная факторно делимая группа без кручения ранга 2 изоморфна группе H_η для некоторого $\eta \in U(J_p)$.

Теорема 2. *Пусть $\eta, \zeta \in U(J_p)$. Следующие условия эквивалентны*:

1) $H_\eta \cong H_\zeta$.

2) *Существуют числа $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ такие, что $ad - bc \in U(\mathbb{Q}^{(p)})$ и $\zeta = \frac{c+d\eta}{a+b\eta}$.*

Томский государственный университет, Томск
E-mail: mnzonov@gmail.com, tea471@mail.tsu.ru

Автоморфизмы и центральные ряды нильтреугольных подколец алгебр Шевалле

А. В. Казакова, Е. А. Кириллова

По аналогии с [**1**] исследуем автоморфизмы и центральные ряды кольца $N\Phi(K)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. В приведённом ниже описании центральных рядов кольца $N\Phi(K)$ типов F_4 и G_2 используются обозначения из [**1**].

Теорема 1. *Для кольца $L = NF_4(K)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей верны следующие равенства:*

$\Gamma_1 = L$, $\Gamma_i = L_i(M_i) + \sum_{r\in M_i} 2Ke_r$ $(2 \le i \le 5)$, $M_2 = \{0120, 0122\}$,
$M_3 = M_2 \cup \{1120, 1122\}$, $M_4 = M_3 \cup \{1220, 1222, 1242\}$, $M_5 = M_4 \cup \{1342\}$,
$\Gamma_6 = Ke_{1221} + 2Ke_{1122} + Ke_{1231} + 2Ke_{1222} + Ke_{1232} + 2L_9$,
$\Gamma_7 = Ke_{1231} + 2Ke_{1222} + Ke_{1232} + 2L_9$, $\Gamma_8 = Ke_{1232} + 2L_9$,
$\Gamma_i = 2L_i$ $(i = 9, 10, 11)$, $\Gamma_{12} = 0 = Z_0$, $Z_1 = L_{11} + \mathfrak{Z}_2Ke_{1232}$,
$Z_2 = L_{10} + \mathfrak{Z}_2Ke_{1231} + \mathfrak{Z}_2Ke_{1232}$, $Z_3 = L_9 + \mathfrak{Z}_2L_6(1122)$, $Z_4 = L_8 + \mathfrak{Z}_2L_5(0122)$,
$Z_i = L_{12-i} + \mathfrak{Z}_2L_{9-i}$ $(i = 5, 6, 7)$, $Z_i = L_{12-i} + \mathfrak{Z}_2L$ $(i = 8, 9, 10)$, $Z_{11} = L$.

Теорема 2. *Для кольца Ли $L = NG_2(K)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей верны следующие равенства:*

$\Gamma_1 = L$, $\Gamma_2 = Ke_{a+b} + 2Ke_{2a+b} + 3Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b}$,
$\Gamma_3 = 2Ke_{2a+b} + 6Ke_{3a+b} + 3Ke_{3a+2b}$, $\Gamma_4 = 6Ke_{3a+b} + 6Ke_{3a+2b}$,
$\Gamma_5 = 6Ke_{3a+2b}$, $\Gamma_6 = 0 = Z_0$, $Z_1 = \mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3Ke_{a+b} + \mathfrak{Z}_3Ke_{2a+b} + L_5$,
$Z_2 = \mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3Ke_a + \mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3Ke_b + \mathfrak{Z}_2Ke_{a+b} + \mathfrak{Z}_3Ke_{2a+b} + L_4$,
$Z_3 = \mathfrak{Z}_2Ke_a + \mathfrak{Z}_2Ke_b + \mathfrak{Z}_2Ke_{a+b} + L_3$, $Z_4 = \mathfrak{Z}_2Ke_a + \mathfrak{Z}_2Ke_b + L_2$, $Z_5 = L$.

Для описания автоморфизмов кольца $NG_2(K)$ над произвольным полем K были описаны некоторые исключительные автоморфизмы, в числе которых $\xi(t) : e_{2a+b} \to e_{2a+b} + te_{a+b}, e_r \to e_r$ $(r \in \Phi^+\backslash\{2a + b\})$.

Теорема 3. *Всякий автоморфизм кольца Ли $NG_2(K)$ над полем K есть произведение стандартных автоморфизмов и*

1) гиперцентрального автоморфизма Гиббса высоты 2, если $6K = K$;

2) гиперцентральных автоморфизмов высоты 2 (Гиббса и $\xi(t)$) и исключительных автоморфизмов, если $2K = 0$;

3) исключительного автоморфизма и гиперцентрального автоморфизма Гиббса высоты 2, если $3K = 0$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Список литературы

[1] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп Шевалле. *Алгебра и Логика*, 1990, т. 29, 2, с. 315–338.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: alvkazakova@gmail.com, kea92@bk.ru

Описание минимальных ненулевых L-многообразий векторных пространств над полем $GF(2)$

А. В. Кислицин

Пусть F — некоторое поле, E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (говорят, что E вложено в алгебру A). Тождеством векторного пространства E назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E. В этом случае также говорят о тождествах пары (A, E).

Класс всех векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры и удовлетворяющих всем тождествам пространства E, будем называть L-многообразием, порожденным пространством E, и обозначать $\mathrm{Var}_L E$. L-многообразие $\mathcal{M}$ назовем минимальным ненулевым L-многообразием (относительно включения) или атомом, если для любого L-многообразия $\mathcal{N}$ из включения $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ следует, что либо $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, либо $\mathcal{N}$ — нулевое L-многообразие.

А. Тарский показал, что атомы в классе колец порождаются либо простым полем $GF(p)$, либо кольцом с нулевым умножением [**1**]. Автором частично исследовано строение атомов в классе L-многообразий векторных пространств над полем $GF(2)$. А именно, доказано, что L-многообразия $\mathcal{M}_0 = \mathrm{Var}_L\langle xy = 0\rangle$, $\mathcal{M}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x, y] = 0, x + x^2 = 0\rangle$ и $\mathcal{M}_{p(x)} = \mathrm{Var}_L\langle [x, y] = 0, x^2y = xy^2, x \cdot p(x) = 0\rangle$ ($p(x)$ — неприводимый над полем $GF(2)$ многочлен степени $\deg p \geq 2$) являются атомами в указанном классе [**2, 3**].

В настоящей работе показано, что других атомов в классе L-многообразий над полем $GF(2)$ не существует.

Теорема. *L-многообразие мультипликативных векторных пространств над полем $GF(2)$ является атомом тогда и только тогда, когда оно совпадает с одним из L-многообразий $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_{p(x)}$.*

Список литературы

[1] Tarski A. Equationally complete rings and relation algebras // Proc. Konninkl. Akad. Wetensch. 1956. Vol. 59. 1. pp. 39–46.

[2] Кислицин А. В. О минимальных ненулевых L-многообразиях векторных пространств [Электронный ресурс] // Тезисы докладов международной конференции ««Мальцевские чтения»». 2018. С. 154. Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/18/maltsev18.pdf

[3] Кислицин А. В. О минимальных ненулевых L-многообразиях векторных пространств над полем из двух элементов [Электронный ресурс] // Тезисы докладов международной конференции ««Мальцевские чтения»». 2019. С. 164. Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/19/maltsev19.pdf

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: kislitsin@altspu.ru

О решеточной определяемости классов конечных локальных колец

С. С. Коробков

Пусть R и R^{φ} — ассоциативные кольца с изоморфными решётками подколец $L(R)$ и $L(R^{\varphi})$ соответственно. Изоморфизм φ решётки $L(R)$ на решётку $L(R^{\varphi})$ будем называть *решточным изоморфизмом* кольца R на кольцо R^{φ}. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс колец. Будем говорить, что класс $\mathcal{K}$ *решточно определяется*, если для любого кольца $R \in \mathcal{K}$ и любого решёточного изоморфизма φ кольца R на кольцо R^{φ} выполняется следующее условие: $R^{\varphi} \in \mathcal{K}$. Если, кроме того, $R^{\varphi} \cong R$, то будем говорить, что кольцо R *определяется своей решткой подколец.*

Продолжается изучение решёточных изоморфизмов конечных локальных колец, начатое в работах [**1**] – [**5**]. Пусть k, l, m, n — произвольные натуральные числа, p, q — простые числа. Назовём кольцо R кольцом типа (I), если $R \cong GF(p^{q^n})$ и назовём R кольцом типа (II), если $R \cong \langle e \rangle \dotplus V$, где $o(e) = p^l$, e — единичный элемент, V — нильпотентное кольцо.

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс конечных локальных колец, не содержащий колец типов (I) и (II). Зафиксируем числа k, m, n, p и определим в классе $\mathcal{L}$ следующие подклассы колец характеристики p:

$$\mathcal{L}_{p^{kn}} = \{R \mid R = F \dotplus N, F \cong GF(p^k), k > 1, N = \operatorname{Rad} R, |R| = p^{kn}, n > 1\};$$
$$\mathcal{L}^1_{p^{kn}} = \{R \in \mathcal{L}_{p^{kn}} \mid (\forall f \in F)(\forall r \in N)(fr = rf)\};$$
$$\mathcal{L}^m_{p^{kn}} = \{R \in \mathcal{L}_{p^{kn}} \mid (\forall r \in N)(r^m = 0)(m > 1)\}.$$

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Классы $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_{p^{kn}}$, $\mathcal{L}^1_{p^{kn}}$, $\mathcal{L}^m_{p^{kn}}$, решёточно определяются.*

Теорема 2. *Любое однопорождённое кольцо из класса $\mathcal{L}^1_{p^{kn}}$ определяется своей решёткой подколец.*

Теорема 3. *Пусть R — коммутативное кольцо, принадлежащее классу $\mathcal{L}_{p^{kn}}$, φ — решёточный изоморфизм кольца R на коммутативное кольцо R^{φ}. Тогда, если* $\operatorname{ind}(\operatorname{Rad} R) < p$, *то* $\operatorname{ind}(\operatorname{Rad} R^{\varphi}) = \operatorname{ind}(\operatorname{Rad} R)$.

Список литературы

[1] Коробков С. С., Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов, Изв. Урал. гос. ун-та, 2002, 22, Матем. и механ., Вып. 4, 81—93.

[2] Коробков С. С., Проектирования колец Галуа, Алгебра и логика, 54, 1 (2015), 16—33.

[3] Коробков С. С., Проектирования конечных однопорождённых колец с единицей, Алгебра и логика, 55, 2 (2016), 192—218.

[4] Коробков С. С., Проектирования конечных коммутативных колец с единицей, Алгебра и логика, 57, 3 (2018), 285—305.

[5] Коробков С. С., Проектирования конечных локальных колец // Международная конференция "Мальцевские чтения-18": тезисы докладов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 19–22 ноября 2018 г.) — Новосибирск, 2018. С. 155.

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург
E-mail: ser1948@gmail.com

Полуцепные групповые кольца расширений проективных специальных линейных групп над полем характеристики 3

А. В. Кухарев

Кольцо называется полуцепным, если его правый регулярный и левый регулярный модули являются прямыми суммами цепных модулей. Полуцепные кольца являются естественным обобщением полупростых колец. Поэтому возникает вопрос, в каких случаях групповое кольцо FG конечной группы G над полем F является полуцепным. Известно, например, что если G — p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой и F — поле характеристики p, то кольцо FG полуцепное. Также ответ известен для всех простых групп [1]. Однако для неразрешимых непростых групп этот вопрос остается открытым.

Предположим, что G — не p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой P. Тогда существует нормальный ряд $1 \subset O_{p'}(G) \subset K \subset G$, где K — наименьшая нормальная подгруппа в G, собственно содержащая $O_{p'}(G)$. При этом $K/O_{p'}(G)$ — простая неабелева группа. Поскольку индекс $[G : K]$ взаимно прост с p, то кольцо FG полуцепное тогда и только тогда, когда FK полуцепное. Поэтому интересующий нас вопрос сводится к нахождению всех групп G и полей F, для которых $G/O_{p'}(G)$ есть простая группа, а групповое кольцо FG полуцепное. В настоящей работе ответ получен для расширений некоторых групп вида $\mathrm{PSL}(n, q)$ в случае поля характеристики 3.

Теорема. *Пусть F — поле характеристики $p = 3$, и пусть G — конечная группа, такая, что $G/O_{p'}(G) \cong \mathrm{PSL}(n, q)$, где $q \equiv 2, 5 \pmod 9$. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если $n \in \{2, 3\}$.*

Например, групповое кольцо группы $\mathrm{SL}(2, 5)$ над полем Галуа $\mathrm{GF}(3)$ является полуцепным.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект 18-71-10007).

Список литературы

[1] Кухарев А.В., Кайгородов И.Б., Горшков И.Б., Когда групповое кольцо простой конечной группы полуцепное // Зап. науч. сем. ПОМИ. **460** (2017), 168-189.

Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: kukharev.av@mail.ru

О конечных сильно критических кольцах

Ю. Н. Мальцев, Е. В. Журавлев

Конечное ассоциативное кольцо R порядка n называется сильно критическим, если $R \notin \operatorname{var}\langle B \mid |B| < n\rangle$, то есть существует многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ свободного ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ такой, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ является тождеством в любом конечном кольце B порядка меньшего n, но не является тождеством в кольце R. Так как собственные факторы конечного кольца R имеют порядок меньший, чем порядок R, то каждое сильно критическое кольцо является критическим, а следовательно, подпрямо неразложимым и его порядок – степень простого числа. Таким образом, сильно критические кольца образуют подкласс класса всех критических колец.

Доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть R – конечное нильпотентное кольцо, не являющееся сильно критическим кольцом. Тогда $R \in \operatorname{var}\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$, где $A_1, \ldots, A_n$ – нильпотентные кольца порядка меньшего $|R|$.*

Теорема 2. *Пусть R простое конечное кольцо. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Теорема 3. *Пусть R – конечное ассоциативное кольцо с единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *R – сильно критическое кольцо;*
(2) *для любого натурального числа n кольцо $M_n(R)$ является сильно критическим кольцом;*
(3) *существует натуральное число n такое, что $M_n(R)$ является сильно критическим кольцом.*

Теорема 4. *Пусть R – конечное кольцо с единицей, $J(R)$ – его радикал Джекобсона, $R/J(R) = M_n(GF(q))$ и $J(R)$ – сильно критическое кольцо. Тогда R – сильно критическое кольцо.*

Теорема 5. *Пусть R – конечное кольцо порядка p или p^2 и неразложимое в прямую сумму ненулевых идеалов. Тогда R – сильно критическое кольцо. В частности, все критические кольца порядка не более p^2 являются сильно критическими.*

Пусть R – кольцо порядка 8 такое, что $(R, +) = \langle a\rangle \dot{+} \langle b\rangle$, где $4a = 2b = 0$, $a^2 = b^2 = 0$, $ab = ba = 2a$. Доказано, что R – критическое кольцо, не являющееся сильно критическим.

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул
E-mail: maltsevyn@gmail.com
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: evzhuravlev@mail.ru

О логарифмической оценке функции короста алгебр и равномерно рекуррентных слов

И. В. Митрофанов, И. А. Мельников

Пусть дана конечно порожденная алгебра $A = k\langle X\rangle/I$ над полем K, где $k\langle X\rangle$ - свободная алгебра с образующими из конечного множества X, а I - двусторонний идеал. Пусть G - минимальный базис Гребнера алгебры A. Моном называется сократимым, если он является старшим мономом для некоторого элемента идеала I. Обструкцией называется сократимый моном, всякий подмоном которого не сократим. Ростом называется функция от n - размерность пространства ненулевых мономов степени не более n, коростом же называется кол-во обструкций длины не более n. Bergman Gap theorem утверждает, что размерность Гельфанда-Кириллова не может быть в интервалах $(0;1)$ и $(1;2)$. Мы доказали ее аналог для короста, а именно что *корост либо конечен, либо хотя бы логарифмичен.* Проблематика минимального базиса Гребнера-Ширшова разбирается в работах [1], [2].

Бесконечное слово A называется *равномерно рекуррентным*, если для всякого подслова S слова A существует n, такое что для любого подслова W слова A длины n, S подслово W. *Обструкцией* назовем слово не являющееся подсловом A, всякое подслово которого является подсловом A. Мы покажем, что *в равномерно рекуррентном слове количество обструкций длины не более n хотя бы $log_3 n$ для сколь угодно многих n.*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{O_W(n)}{log_3 n} \geq 1.$$

Аналогичный результат для периодических слов был доказан Лавровым и несколько позднее Богдановым-Челноковым. В их работе доказывается, что длина периода слова W не превосходит x-ого числа Фибоначчи, где x - кол-во обструкций.

См. arxiv.org/abs/1412.5201 (Доклады академии наук, 2016, том 468, No 5, с. 492–495), arxiv.org/abs/1305.0460.

Данная работа поддержана Грантом Российского Научного Фонда N 17-11-01377.

Список литературы

[1] Gröbner-Shirshov bases. Normal forms, combinatorial and decision problems in algebra (Bokut, Leonid; Chen, Yuqun; Kalorkoti, Kyriakos; Kolesnikov, Pavel; Lopatkin, Viktor).

[2] Nonstandard analysis, deformation quantization and some logical aspects of (non) commutative algebraic geometry (Alexei Kanel-Belov, Alexei Chilikov, Ilya Ivanon-Pogadaev, Sergey Malev, Eugeny Plotkin, Jie-Tai Yu, and Wenchao Zhang).

ENS, Paris (France)
E-mail: phortim@yandex.ru
МФТИ, Москва
E-mail: Igor@melnikov.name

Порядки в полупростых конечномерных алгебрах, близких к ассоциативным

А. С. Панасенко

Пусть A — ассоциативная алгебра с ненулевым центром $Z \neq 0$. Рассмотрим множество S регулярных в алгебре A элементов центра Z. Тогда можно построить алгебру частных $B = S^{-1}A$. В этом случае алгебра A называется *порядком* в алгебре B.

Известно, что если алгебра A полупервична, удовлетворяет тождественному соотношению и условию обрыва возрастающих цепей аннуляторов, то алгебра $S^{-1}A$ полупроста и конечномерна ([**1**]). В связи с этим, представляет интерес изучение центральных порядков в конечномерных полупростых алгебрах в других многообразиях.

Определение. Алгебра A называется *альтернативной*, если в ней выполнены следующие тождества:

$$(xy)y - xy^2 = x^2y - x(xy) = 0.$$

Определение. Алгебра A называется *йордановой*, если в ней выполнены следующие тождества:

$$(x^2y)x - x^2(yx) = xy - yx = 0.$$

В работе [**2**] было показано, что порядок в полупростой конечномерной ассоциативной алгебре является конечным модулем над центром при условии, что этот центр нетеров. В последние годы ([**3**]) были получены результаты, обобщающие упомянутый результат на порядки в простых конечномерных альтернативных и йордановых супералгебрах. В этой работе доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть A — порядок в полупростой конечномерной альтернативной или йордановой алгебре и пусть Z — центр A, который нетеров. Тогда A является конечно порожденным Z-модулем.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-31-90055.

Список литературы

[1] Small L., Orders in Artinian rings, J. Algebra 4 (1966), 13–41.
[2] Formanek E., Noetherian PI-rings, Comm. in Algebra, 1, N 1 (1974), 79–86.
[3] Panasenko A.S., Central orders in simple finite dimensional superalgebras, SEMR, 17 (2020), 1027–1042.

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
E-mail: a.panasenko@g.nsu.ru

О степени стандартного тождества в конечнопорожденной нильпотентной алгебре R над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$

Е. П. Петров

В работе [1] было показано, что всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $\dim R^2/R^3=2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{\sigma\in S_4}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}=0.$$

Причем эта оценка является точной.

В процессе обобщения указанного результата в работах [2] и [3] выяснилось, что ассоциативная нильпотентная s-порожденная алгебра R, над полем характеристики, не равной 2, с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2$ при $N>2$, удовлетворят при достаточно больших значениях числа N стандартному тождеству значительно меньшей степени, чем N.

Следующая теорема (в работе [4], декабрь 2019 г.) предоставляет алгоритм нахождения степени минимального тождества s-порожденной нильпотентной алгебры уже над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2,\ N\geq 3$, для бесконечного множества значений N определенного вида.

Теорема. *Пусть R – произвольная s-порожденная ($s\geq 2$) нильпотентная алгебра над произвольным полем с условием $\dim R^N/R^{N+1}=2,\ N\geq 3$. Тогда*

1) если $s<N+2$, то R удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_T(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_T)=0,$$

где $T=\left\lceil\frac{(N+2)(s-1)^2+s^{m+1}-m(s-1)s-s}{m(s-1)^2}\right\rceil$ *и параметр m вычисляется по формулам:*

$$m=\begin{cases}\left\lfloor \log_s\dfrac{\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor, & \text{если } N<N^*;\\[2ex] \left\lfloor \log_s\dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor, & \text{если } N\geq N^*,\end{cases}$$

$$N^*=\frac{\left(\left\lfloor \log_s\dfrac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor(s-1)-s\right)\cdot s^{\left\lfloor \log_s\frac{s\cdot\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s-1}}{\log_s\frac{(N+2)(s-1)^2-s}{s\cdot(s-1)}}\right\rfloor}+s}{(s-1)^2}-2;$$

2) при любых значениях s алгебра R удовлетворяет стандартному тождеству $S_{N+2}(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_{N+2})=0$.

Замечание. Если $m\geq 3$, то для $N=\dfrac{(ms-m-s)\cdot s^m+s}{(s-1)^2}-2+mr$, где $1\leq r<s^m$, найдется такая s-порожденная нильпотентная алгебра R над произвольным полем с условием $dimR^N/R^{N+1}=2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $(T-1)$.

Список литературы

[1] Petrov E. P., Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^2/R^3=2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052–1066.

[2] Petrov E. P., Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^N/R^{N+1}=2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 1153–1187.

[3] Petrov E. P., Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition $dimR^N/R^{N+1}=2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1048–1064.

[4] Petrov E. P., Defining relations and identities of finite-generated nilpotent algebra R with condition $dimR^N/R^{N+1} = 2$, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1981–2002.

Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: pep@email.asu.ru

Об эндоморфах правосимметрических алгебр

А. П. Пожидаев

Пусть $End(\mathcal{A})$ — алгебра эндоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$. Рассмотрим прямую сумму алгебр $E(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \oplus End(\mathcal{A})$ и наделим ее произведением по правилу:

$$a \cdot A = aA, \quad A \cdot a = aA + [A, R_a]$$

для всех $a \in \mathcal{A}$, $A \in End(\mathcal{A})$. Полученную алгебру назовем *эндоморфом* алгебры $\mathcal{A}$. По определению $\mathcal{A}$ и $End(\mathcal{A})$ являются подалгебрами в $E(\mathcal{A})$, а $\mathcal{A}$ — это естественный правый модуль над $End(\mathcal{A})$. Таким образом, эндоморф — это естественное расширение алгебры при помощи её алгебры эндоморфизмов. Эндоморфы возникают при описании правосимметрических алгебр, содержащих подалгебру матриц с общей единицей. Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ называется правосимметрической, если ассоциатор на $\mathcal{A}$ правосимметричен, т. е. симметричен относительно двух последних аргументов: $(x, y, z) = (x, z, y)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$, где $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z. Как оказалось, частным случаем эндоморфа является конструкция Ж.Хелмстеттера, предложенная в 1971 г. Мы доказываем, что эндоморф (супер)алгебры является простой (супер)алгеброй, если исходная алгебра не является алгеброй скалярного умножения. Если исходная (супер)алгебра является правосимметрической (прелиевой), то ее эндоморф также правосимметричен (прелиев). Тем самым строится широкий класс простых (правосимметрических, прелиевых) (супер)алгебр, содержащих матричную подалгебру с общей единицей. Находится алгебра дифференцирований эндоморфа унитальной алгебры и группа автоморфизмов простой правосимметрической алгебры, являющейся эндоморфом прямой суммы полей.

ИМ СО РАН, Новосибирск
E-mail: app@math.nsc.ru

Многообразия разрешимых йордановых алгебр

А. В. Попов

Будем считать, что характеристика основного поля $\mathbb{F}$ равна нулю. Обозначим через $\mathcal{V}_J$ многообразие йордановых алгебр, удовлетворяющих паре тождеств

$$x^2yx \equiv 0, \qquad (x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3) \equiv 0.$$

В работе [**1**] показано, что многообразие $\mathcal{V}_J$ имеет определенные связи с многообразием алгебр Ли $\mathcal{L}ie$. В многообразии йордановых алгебр $\mathcal{J}ord$ роль многообразия $\mathcal{V}_J$ определяется следующей теоремой [**2**, предложение 6.6].

Теорема 1. *Идеал тождеств* $id(\mathcal{V}_J) \triangleleft \mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[X]$ *является наибольшим элементом в множестве идеалов* $\left\{ I \triangleleft \mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[X] \middle| I \subset (\mathbb{F}_{\mathcal{J}ord}[X])^{(2)} \right\}$.

Теорема 1 вместе с результатами работы [**1**] позволяет во многих ситуациях свести изучение многообразия $\mathcal{V}$ к изучению его подмногообразия $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_J$. С помощью данного подхода, в частности, была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{V}$ *— произвольное многообразие разрешимых йордановых алгебр. Тогда*

(1) *Рост многообразия* $\mathcal{V}$ *экспоненциально ограничен тогда и только тогда, когда многообразие* $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_J$ *имеет экспоненциально ограниченный рост;*

(2) *Рост многообразия* $\mathcal{V}$ *полиномиально ограничен тогда и только тогда, когда* $\mathcal{J}ord^{(2)} \not\subset \mathcal{V}$, *где* $\mathcal{J}ord^{(2)}$ *— многообразие разрешимых индекса 2 йордановых алгебр.*

(3) *Многообразие* $\mathcal{V}$ *нильпотентно тогда и только тогда, когда в* $\mathcal{V}$ *выполнено стандартное йорданово тождество* [**2**, теорема 5.1].

Следствие 1.

(1) *Многообразие* $\mathcal{J}ord^{(2)}$ *— единственное многообразие почти полиномиального роста среди многообразий разрешимых йордановых алгебр;*

(2) *Имеется всего два почти нильпотентных многообразия йордановых алгебр* [**2**, следствие 5.2]*:*

- *многообразие* $\mathcal{C}om$ *ассоциативных коммутативных алгебр;*
- *многообразие* $\mathcal{V}$ *йордановых алгебр, удовлетворяющих тождествам*

$$(x_1y_1)(x_2y_2) \equiv 0 \quad \textit{и} \quad x^3 \equiv 0.$$

Список литературы

[1] *Попов А. В.* Йордановы алгебры лиева типа // *Матем. тр.* 2019. Т. 22, N 1. С. 127–177.

[2] *Попов А. В.* Нильпотентность альтернативных и йордановых алгебр // *Сиб. мат. журн.* в печати.

Ульяновск
E-mail: klever176@rambler.ru

Максимальные этальные подалгебры центральных простых алгебр

С. В. Тихонов

Род $\mathbf{gen}(D)$ конечномерной центральной алгебры с делением D над полем F определяется как семейство классов $[D'] \in Br(F)$, где D' — центральная F-алгебра с делением, имеющая такие же максимальные подполя, что и алгебра D. Это означает, что D и D' имеют одинаковую степень n, и расширение K/F степени n допускает F-вложение $K \hookrightarrow D$ тогда и только тогда, когда оно допускает F-вложение $K \hookrightarrow D'$.

Следующие вопросы были сформулированы в [**1**]:

Следует ли из того, что алгебры с делением D и D' имеют одинаковые максимальные подполя, то, что матричные алгебры $M_l(D)$ и $M_l(D')$ имеют одинаковые максимальные подполя (или максимальные этальные подалгебры) для всех (или хотя бы для некоторого) $l > 1$?

Пусть n_1 и n_2 — взаимно простые натуральные числа. Пусть также D_i и D'_i — центральные алгебры с делением степени n_i над полем F, $i = 1, 2$. Верно ли, что если $\mathbf{gen}(D_i) = \mathbf{gen}(D'_i)$ для $i = 1, 2$, то $\mathbf{gen}(D_1 \otimes D_2) = \mathbf{gen}(D'_1 \otimes D'_2)$?

Цель доклада — представить отрицательные ответы на эти вопросы ([**2**]).

Список литературы

[1] Chernousov V.I., Rapinchuk A.S., Rapinchuk I.A. The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and some generalizations. Israel Journal of Mathematics. 236 (2020), no. 2, 747–799.

[2] Tikhonov S.V. On genus of division algebras. Manuscripta math. 2020. https://doi.org/10.1007/s00229-020-01184-4.

Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)
E-mail: tikhonovsv@bsu.by

Binary Leibniz algebras

A. Dzhumadil'daev, N. Ismailov

An algebra with identity $(ab)c = a(bc) - b(ac)$ is called *(left)-Leibniz* algebra. An algebra is said to be a mono Leibniz algebra if every one-generated subalgebra is a Leibniz algebra. An algebra is said to be a binary Leibniz algebra if every two-generated subalgebra is a Leibniz algebra. Gainov found defining identities of variety of mono Leibniz algebras in [**1**]. We give a characterization of binary Leibniz algebras in terms of identities.

Theorem. *An algebra A over a field* $\mathbf{K}$ *of characteristic not 2 is binary Leibniz if and only if it satisfies the following identities:*

$$(aa)b = 0,$$
$$(ab)a + b(aa) - a(ba) = 0,$$
$$(ab)(ab) - a(b(ab)) + b(a(ab)) = 0.$$

The second author was supported by grant AP08052405 of MES RK.

References

[1] Gainov A.T., An independent system of identities for a variety of mono-Leibniz algebras, Algebra and Logic, 49, No 2, (2010), pp 115-119.

Kazakh-British Technical University, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, and Astana IT University, Nur-Sultan, (Kazakhstan)
E-mail: dzhuma@hotmail.com, nurlan.ismail@gmail.com

New simple binary-Lie superalgebras

A. Grishkov

By definition, a $\mathbf{Z}_2$-graded algebra $B = B_0 \oplus B_1$ with the following graded identities:

$$
\begin{aligned}
&xy = (-1)^{1+xy} yx, \\
&(xy)z.t - x.(y(zt)) + (-1)^{xy}\{y.(xz.t) + y.(x.zt) - (y.xz)t\} \\
&\qquad\qquad\qquad + (-1)^{zt}\{x.(yt.z) - (xy)t.z - (x.yt)z\} = 0,
\end{aligned}
$$

is called a binary-Lie superalgebra ($SBL-$algebra). The problem of classification of the finite-dimensional simple $SBL-$algebras over the field $\mathbf{C}$ is open. We know unique example of such $SBL-$algebra $B = B_0 \oplus B_1$ with $B_1 \neq 0$. It has dimension two with $dim_{\mathbf{C}} B_0 = dim_{\mathbf{C}} B_1 = 1$, and it was constructed by I. Shestakov. I. Shestakov proposed the following

Conjecture 1. Let $B = B_0 \oplus B_1$ be a finite-dimensional simple $SBL-$algebras over the field $\mathbf{C}$ with abelian even part B_0 and $dim\, B_1 \neq 0$. Then $dim\, B = 2$.

We prove that all conditions in this Conjecture are essential. More exactly, we construct three simple $SBL-$algebras S_1, S_2, S_3 with non-trivial odd parts and abelian even parts such that S_1 is finite-dimensional over a field of characteristic $p > 2$, S_2 is finite-dimensional over a non-algebraically closed field of characteristic 0, $dim\, S_1 > 2$, $dim\, S_2 > 2$ and S_3 is infinite-dimensional over $\mathbf{C}$.

This talk is based on a join paper with Ivan Shestakov (São Paulo/Novosibirsk) and Marina Rasskazova (Omsk).

Universidade de São Paulo
E-mail: shuragri@gmail.com

Unital decompositions of the matrix algebra of order three

V. Yu. Gubarev

We classify all decompositions of $M_3(\mathbb{C})$ into a direct vector-space sum of two subalgebras such that one of the subalgebras contains the identity matrix.

We split the problem of classification of unital decompositions $M_3(\mathbb{C}) = A \oplus B$, where $\dim B > \dim A$, into 3 main cases: $\dim B = 7$, $\dim B = 6$, or $\dim B = 5$. In the first case, it is known that there is a unique 7-dimensional subalgebra of $M_3(\mathbb{C})$ up to transpose and action of $\mathrm{Aut}(M_3(\mathbb{C}))$, it is $M = \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{32}, e_{33}\}$. Given a direct decomposition $M_3(\mathbb{C}) = S \oplus M$, we may assume that S is generated by matrices $e_{21} + m_1$ and $e_{31} + m_2$, where $m_1, m_2 \in M$. Applying the condition that S is a subalgebra, we find possible decompositions.

It is known that up to transpose and action of $\mathrm{Aut}(M_3(\mathbb{C}))$ there are two 6-dimensional subalgebras of $M_3(\mathbb{C})$: either the subalgebra of upper-triangular matrices or the subalgebra of matrices with zero first column. For the dimension 5, we prove

Lemma. Every 5-dimensional subalgebra in $M_3(\mathbb{C})$ up to action of $\mathrm{Aut}(M_3(\mathbb{C}))$ and up to transpose is one of the following ones,

1) $\mathrm{Span}\{e_{11}, e_{22}, e_{23}, e_{32}, e_{33}\}$,
2) $\mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{33}\}$,
3) $\mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{22} + e_{33}\}$,
4) $\mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$,
5) $\mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{33}\}$,
6) $\mathrm{Span}\{e_{11} + e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}\}$.

Altogether there are 71 decompositions, some of them involve one or two parameters. In some subcases we are able to prove that all obtained variants lie in different orbits under automorphisms and antiautomorphisms (i. e., compositions of an automorphism and transpose) of $M_3(\mathbb{C})$, see, e.g., the following result.

Theorem. Every direct decomposition of $M_3(\mathbb{C})$ with two subalgebras of the dimensions 3 and 6, where a 6-dimensional subalgebra is unital, up to transpose and up to action of $\mathrm{Aut}(M_3(\mathbb{C}))$ is isomorphic to $S \oplus \mathrm{Span}\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{33}\}$, where S is one of the following subalgebras:

(T1) $\mathrm{Span}\{e_{21}, e_{31}, e_{32}\}$,
(T2) $\mathrm{Span}\{e_{21} + e_{22}, e_{31}, e_{32}\}$,
(T3) $\mathrm{Span}\{e_{21} + e_{22} + e_{33}, e_{31}, e_{32}\}$,
(T4) $\mathrm{Span}\{e_{21} + e_{22}, e_{11} + e_{22} + e_{31}, e_{31} + e_{32}\}$,
(T5) $\mathrm{Span}\{e_{21} + e_{22}, e_{11} + e_{22} + e_{31}, e_{12} + e_{21} + e_{32}\}$,
(T6) $\mathrm{Span}\{e_{21} + e_{22} + e_{13} - e_{23} + e_{33}, e_{11} + e_{22} + e_{31}, e_{12} - e_{22} + e_{32}\}$.

Moreover, all cases (T1)–(T6) lie in different orbits under action of automorphisms or anti-automorphisms of $M_3(\mathbb{C})$ preserving the six-dimensional subalgebra.

The work is supported by Mathematical Center in Akademgorodok.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk
E-mail: vsevolodgu@math.nsc.ru

Nonfinitary niltriangular algebras and their automorphism groups

V. M. Levchuk, I. N. Zotov

Let Γ be an arbitrary chain (or linearly ordered set) and K be an associative ring with identity. Denote by $M(\Gamma, K)$, the K-module of all matrices $||a_{ij}||_{i,j\in\Gamma}$ over K, and by $NT(\Gamma, K)$, the submodule of all matrices with $a_{ij} = 0$ for all $i \leq j$. For any infinite chain Γ the K-module $M(\Gamma, K)$ with usual multiplication is not algebra. The submodule $FM(\Gamma, K)$ of all finitary matrices in $M(\Gamma, K)$ is always algebra. Since the subalgebra $R = FNT(\Gamma, K)$ is radical (even a nil-algebra), the adjoint group $G(R) \simeq FUT(\Gamma, K) = e + R$. Earlier the automorphism groups of the ring R and the associated Lie ring $R^{(-)}$ and, also, $Aut\ G(R)$ had been described, when ring K has no zero-divisors [**1**]. We show that the submodule $NT(\Gamma, K)$ is an algebra if and only if the chain Γ is isomorphic to $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; all such algebras are radical.

Clearly the inclusion $Aut\ R \subseteq Aut\ R^{(-)}$ is always satisfied for any ring R. We find the structure of automorphism groups for $R = NT(\Gamma, K)$ and $R^{(-)}$, when K is commutative ring. All automorphisms and antiautomorphisms of the chain Γ generate an infinite dihedral group $Aut\ \Gamma \leftthreetimes \langle\tau\rangle$ for $\Gamma = \mathbb{Z}$, the group $\langle\tau\rangle$ of order 2 for finite chain Γ and the group of order 1 for $\Gamma = \mathbb{N}$ or $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Denote by D, $\widetilde{Aut}\ K$ and $\widetilde{Aut}\ \Gamma$, the subgroups diagonal automorphisms and induced by automorphisms ring K and chain Γ, respectively [**1**]. Also, W is generated by idempotent automorphisms of Lie algebra $R^{(-)}$ at finite chains Γ and $W = \langle\tau\rangle$ at $\Gamma = \mathbb{Z}$. We suppose that K is an integer domain, if Γ is infinite.

Theorem 1. *The automorphism groups $Aut\ R^{(-)}$ is generated by inner and hypercentral automorphisms and the subgroups B automorphisms which is identical modulo R^2. Also, $B = ((D \leftthreetimes \widetilde{Aut}\ \Gamma) \leftthreetimes \widetilde{Aut}\ K) \leftthreetimes W \mod R^2$.*

Models of algebraic systems of a first order language are called elementarily equivalent, denoted $\equiv$, if every sentence true in the one is true in the other. In 2018 I.N. Zotov and V.M. Levchuk proved the following theorem.

Theorem 2. *Let $N\Phi(K)$, $N\Phi'(S)$ be Lie rings, and $N\Phi(K)$ of classical type D_n $(n \geq 4)$, B_n or C_n $(n > 4)$. Then* a) $N\Phi'(S) \simeq N\Phi(K) \Leftrightarrow$ root systems Φ', Φ are equivalent and $S \simeq K$; b) $N\Phi'(S) \equiv N\Phi(K) \Leftrightarrow$ root systems Φ', Φ are equivalent and $S \equiv K$.

This work was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center, which is financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2020-1534/1).

References

[1] Levchuk V. M. Some locally nilpotent matrix rings, Mat. Zametki, **42**:5 (1987), 631-641.

[2] Holubowskii W., *Algebraic properties of groups of infinite matrices*, Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, Gliwice, 2017.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk
E-mail: izotov@sfu-kras.ru, vlevchuk@sfu-kras.ru

About one modification of concepts of completely, reducibility, periodicity and primarity for associative rings

L. M. Martynov

In 1996, we defined analogs of the concepts of a complete (divisible), reduced, periodic (in particular, primary) Abelian group for arbitrary algebras. In the case of groups or semigroups, the concept of periodic algebra turns in the generally accepted concept of a periodic group or semigroup as an algebra with finite monogenic (i.e., one-generated) subalgebras. We would like to have a similar situation at least in the case of associative rings. In our approach, when we started from the set $At(L(As))$ of atoms of the lattice $L(As)$ of subvarieties of the variety As of all associative ring, any non-simple finite field was not periodic. In [**1**], we drew attention to the fact that sometimes it can be a useful modification of the concepts under discussion, when instead of the set $At(L(\mathcal{V}))$ for the variety $\mathcal{V}$ of algebras another set $\mathfrak{M}$ of subvarieties of $\mathcal{V}$ is considered.

Here we propose to consider the special set $\mathfrak{M}$ of subvarieties of As, consisting of varieties $\mathcal{Z}_p$ and $\mathcal{F}_{p^n}$ generated by of the ring Z_p of residues modulo p and the finite field F_{p^n}, respectively, for all prime number p and natural number $n > 0$.

Let's call a ring R $\mathfrak{M}$-*complete* if R has no homomorphisms to non-zero rings from varieties of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}$-*reduced* if R has no non-zero $\mathfrak{M}$-complete subrings. We call the ring R $\mathfrak{M}$-*periodic* if any monogenic subring of R is finitely $\mathfrak{M}$-reduced, i. e., has a finite decreasing ideal series to factors from varieties of the set $\mathfrak{M}$. A ring R is called $\mathcal{M}$-*primary* if for some $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ each its monogenic subring is finitely $\mathcal{M}$-solvable, i. e., has a finite decreasing ideal series to factors from $\mathcal{M}$. It is clear that a $\mathcal{M}$-primary ring is $\mathfrak{M}$-periodic. Any finite field is $\mathfrak{M}$-periodic and $\mathfrak{M}$-primary.

We study properties of the concepts defined above. In particular, we characterize the $\mathfrak{M}$-periodic, $\mathfrak{M}$-primary and $\mathfrak{M}$-reduced varieties of associative rings. Here we give only one result. Using Proposition 2.1 of [**2**], we prof the following statement.

Theorem. *For varieties of associative rings $\mathcal{V}$ the following conditions are equivalent:*

(1) $\mathcal{V}$ is a $\mathfrak{M}$-periodic variety;

(2) $\mathcal{V}$ is a locally finite variety;

(3) all monogenic ring of $\mathcal{V}$ are finite;

(4) $\mathcal{V}$ satisfies the identities $x^k = x^l,\ nx = 0$ $(k > l > 0,\ n > 0)$.

References

[1] Martynov L. M. Completeness, reducibility, primarity and purity for algebras: results and problems // Sib. Electron. Matem. Izv. 2016. Vol. 13. P. 181Ц-241 (in Russian).

[2] L'vov I. V. On varieties of associative rings, I // Algebra i logika. 1973. Vol. 12, no 3. P. 269–297 (in Russian).

Omsk State Pedagogical University, Omsk
E-mail: mart@omsk.edu; l.m.martynov@yandex.ru

The compressed zero divisor graphs of order 4

A. S. Monastyreva

All rings under consideration in the article are associative. *The zero-divisor graph* $\Gamma(R)$ of a ring R is the graph whose vertices are nonzero zero divisors of the ring (one- and two-sided), and two different vertices x and y are joined by an edge if and only if $xy = 0$ or $yx = 0$.

The geometric depiction of the zero-divisor graph is rather complicated even for rings of small order. Therefore, it is necessary to partition the vertex set of the graph into cosets so that the impression of the structure of the graph as a whole be preserved. In [**1**] – [**4**], the authors proposed some method for solving this problem for commutative rings. In [**5**], we extend their approach by generalizing it to the noncommutative case.

Let R be a ring. For any element $a \in R$, denote $l(a) = \{x \in R;\ xa = 0\}, r(a) = \{x \in R;\ ax = 0\}$. For $x, y \in D(R)$, we say that $x \sim y$ if and only if $r(x) \cup l(x) = r(y) \cup l(y)$. It is clear that $\sim$ is an equivalence relation. We denote by $[x]$ the equivalence class of an element $x \in D(R)$. *The compressed zero-divisor graph* $\Gamma_\sim(R)$ of a ring R is the looped graph whose vertices are all classes $[x]$ where $x \in D(R)^*$, and two vertices $[x]$ and $[y]$ are joined by an edge iff $xy = 0$ or $yx = 0$.

Proposition 1 [5]. *Let R be an associative ring and $x \in D(R)^*$. If $x^2 = 0$ then for all $y, z \in [x]$, $yz = 0$ or $zy = 0$. If $x^2 \neq 0$ then for all $y, z \in [x]$, $yz \neq 0$ and $zy \neq 0$.*

Note that the graph $\Gamma_\sim(R)$ may have loops. Proposition 1 implies that all vertices in $\Gamma_\sim(R)$ fall into two types. If $x^2 = 0$ then $[x]$ is a vertex with a loop; if $x^2 \neq 0$ then $[x]$ is a vertex without any loop. Knowing the size of each coset $[x]$, it is always possible to pass from the compressed zero-divisor graph to the conventional zero-divisor graph. In [**5**], we find the graphs containing at most three vertices that can be realized as the compressed zero-divisor graphs of some finite associative ring. The present article deals with associative finite rings whose compressed zero-divisor graphs have four vertices. Namely, we find the graphs containing four vertices that can be realized as the compressed zero-divisor graphs of some finite associative ring.

References

[1] Mulay S.B., Cycles and Symmetries of Zero-Divisors, Comm. Alg., 30(7) (2002), 3533–3558.

[2] Spiroff S., Wickham C., A Zero-Divisor Graph Determined by Equivalence Classes of Zero Divisors, Comm. Alg., 39 (2011), 2338–2348.

[3] Bloomfield N., The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3, Comm. Alg., 41 (2013), 765–775.

[4] Anderson D.F., LaGrange J.D., Some Remarks on the Compressed Zero-Divisor Graph, J. Alg. 447 (2016), 297–321.

[5] Zhuravlev E.V., Monastyreva A.S., Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings, Sib. Math. J., 61(1) (2020), 76-Ц84.

Altai State University, Barnaul
E-mail: akuzmina1@yandex.ru

Universal equivalence of partially commutative associative nilpotent algebras defined by cycles

E. Poroshenko

Let $G = \langle A; E\rangle$ be an undirected graph with no loop with the set of loops A ш and the set of edges E and let R be a domain R containing $\mathbb{Z}$ as a subring. A *partially commutative associative algebra* on R is an R-algebra with the set of generators A and the set of relations of the form

$$\{ab = ba \,|\, a, b \in A;\ a \text{ and } b \text{ are connected by an edge}\}. \tag{1}$$

This algebra is denoted by $\mathcal{A}(A; G)$. The graph G is called the *defining graph* of the corresponding algebra. So, $\mathcal{A}(A; G) = \mathcal{A}(A)/I$, where $\mathcal{A}(A)$ is the free associative R-algebra with the set of generators A and I is the ideal generated by the set of relations (1).

The definition of partially commutative associative algebra on an arbitrary variety is defined analogously. In this case, a partially commutative associative algebra is the associative R-algebra defined by the same sets of generators and relations and the identities of the variety.

In the series of papers by the author [**1**]–[**5**] (the first one was co-authored with E. I. Timoshenko), criteria of universal equivalence for some specific classes of partially commutative Lie algebras were obtained. The purpose of this work is to extend these results for partially commutative associative algebras. Namely, we obtain a criterium of universal equivalence for partially commutative nilpotent associative algebras defined by cycles.

Let $\mathcal{AN}_m(A; G)$ denote the partially commutative nilpotent associative algebra whose nilpotency index is $c \geqslant 3$ and C_n denote the graph which is the cycle on n vertices.

The following theorem holds.

Theorem. *Let A and B be the sets of vertices of the graphs C_n and C_m correspondingly and $c \geqslant 3$ be an integer. Partially commutative nilpotent associative algebras $AN_c(A; C_n)$ and $AN_c(A; C_m)$ are universally equivalent if and only if $n = m$.*

The work is partially supported by RFBR (project 18–01–00100).

References

[1] Poroshenko E. N., Timoshenko E. I., Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, J. Algebra, **384** (2013), 143–168.

[2] Poroshenko E. N., On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, Comm. in Algebra, **43**, 2 (2015), 746–762.

[3] Poroshenko E. N., Universal equivalence of partially commutative Lie algebras, Algebra and Logic, **56**, 2 (2017), 133–148.

[4] Poroshenko E. N., Universal equivalence of some countably generated partially commutative structures, Siberian Math. J., **58**, 2 (2017), 296–304.

[5] Poroshenko E. N., On universal theories of partially commutative Lie algebras defined by graphs without triangles, squares, and isolated vertices, Siberian Electronic Mathematical Reports, **7**, 2020, 933-953, DOI 10.33048/semi.2020.17.069

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk
E-mail: auto_stoper@ngs.ru

Free product of operads and free basis of Lie-admissible operad

B. K. Sartayev

Generalization of algebra equipped with two operations μ and ν without identities that contain both products is a free product of operads $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$, where generating operation of operads $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ are μ and ν, respectively.

Obviously, if an operad $\mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ has the graded space of generators V_i and defining relations $\Sigma_i \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{F}(V_i)(n)$ then $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$($*$ symbol of free product of operads) is generated by $V_1 \oplus V_2$ with defining relations $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. In particular, we consider 2-Com(commutative) algebra, as an analog of 2-As algebra [**2**]. There is natural connection between $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ and series-parallel networks.

Theorem 1. *The dimension of 2-Com algebra generated by $X = \{x_1\}$ equal to the number of series-parallel networks(or MacMahon numbers* [**4**]*) with n unlabeled edges.*

n unlabeled edges	1	2	3	4	5	6	7	...
series-parallel networks	1	2	4	10	24	66	180	...

There is a natural mapping from $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ to series-parallel networks. Denote by $\mathcal{N}_i$ each subspace of $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ that defined by each network, then:

$$\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2(n) = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{N}_{k_n},$$

where k_n are MacMahon numbers.

For the first time, Lie-admissible algebra was introduced by A. Adrian Albert. The main idea of Lie-admissible algebra is that $\mathcal{L}$ is a Lie-admissible algebra if $\mathcal{L}^{(-)}$ is a Lie algebra. Lie admissible algebra and operad was studied in [**1**] and [**3**].

Theorem 2. *Operad Lie-adm isomorphic to $Lie * Com$.*

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$\dim(Lie * Com(n))$	1	2	11	101	1299	21484	434314	...

It would be interesting to find other free algebras $\mathcal{A}$ as a Lie admissible that is isomorphic to a free product of $\mathcal{A}^{(-)}$ and $\mathcal{A}^{(+)}$.

References

[1] Remm E., Operades Lie-admissibles, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (12) (2002) 1047Ц1050.

[2] Loday J.-L., Ronco M., On the structure of cofree Hopf algebras J. Reine Angew. Math., 592 (2006), pp. 123-155

[3] Goze M., Remm E., Lie-admissible algebras and operads, J. Algebra 273 (1) (2004) 129Ц152.

[4] Macmahon P. A., The combinations of resistances, Discrete Applied Mathematics, 54 1994, Issue 23, 225–228.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia), Astana IT university, Nur-Sultan (Kazakhstan)
E-mail: baurjai@gmail.com

Zariski topology on bicommutative algebras

K. M. Tulenbaev

Bicommutative algebras are defined by the identities $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$ and $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b$.
A bicommutative algebra A is most close to commutative and associative case. Especially A^2 is commutative and associative [**1**].
As usual, we define a prime ideal ρ of a bicommutative algebra A with the property that iff $\forall x, y \in A$ from $x \circ y \in \rho$ follows that $x \in \rho$ or $y \in \rho$.
But we must be very careful with operating with such ideals because most theorems of commutative algebra is true because we have identity element 1 such that $a \circ 1 = 1 \circ a = a$.
For bicommutative case, existence of such element give us associative and commutative case.
Another one unpleasant moment is that maximal ideal can not be prime.
Let us denote X to be $SpecA$. But we can prove that if Zariski topology is not empty, then X is compact space if bicommutative algebra A is finitely generated.

Theorem 1. *Let A be a finitely generated bicommutative algebra then X=Spec A is compact space*

References

[1] Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M., Bi-commutative algebras // Uspechi Math. Nauk.,2003, No.6, 149-150=engl.transl. Russian Math. Surv., 1196-1197.

Suleyman Demirel University, Almaty (Kazakhstan)
E-mail: tulen75@@hotmail.com

A Dixmier theorem for Poisson type algebras

U. Umirbaev, V. N. Zhelyabin

Let $U = U(\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}))$ be the universal enveloping algebra of the three dimensional simple Lie algebra $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ over the field of complex numbers $\mathbb{C}$. If h, x, y is the standard splittable basis of $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ then the Casimir element $C = 2xy + 2yx + h^2$ generates the center of U. In 1973, Dixmier [**1**] studied the quotient algebras U/I_λ of U where $I_\lambda = (C - \lambda)U$ and $\lambda \in \mathbb{C}$. The quotient algebra U/I_λ is simple if $\lambda \neq n^2 + 2n$ for any natural number n.

Let P be an associative commutative algebra over a field K. A skew-symmetric bilinear operation $\{\,,\}$ on P will be called a *Leibniz bracket*, if the following identity (the Leibniz identity) holds:

$$\{x \cdot y, z\} = x \cdot \{y, z\} + \{x, z\} \cdot y.$$

The *center* $Z(P)$ of P with respect to the Leibniz bracket $\{\,,\}$ is defined as the set of all elements $c \in P$ such that $\{c, a\} = 0$ for all $a \in P$. The elements of $Z(P)$ are called *Casimir* elements. Recall that P is called *central* over K if $Z(P) = K$.

Let L be an arbitrary algebra with a skew-symmetric bilinear operation $[\,,]$ over a field K and let $e_1, e_2 \ldots$ be a linear basis of L. Then there exists a unique Leibniz bracket $\{\,,\}$ on the polynomial algebra $K[e_1, e_2, \ldots]$ such that $\{e_i, e_j\} = [e_i, e_j]$. The algebra $\langle K[e_1, \ldots,], \cdot, \{\,,\}\rangle$ is called the *Poisson enveloping algebra* of L and will be denoted by $P(L)$. If L is a Lie algebra then $P(L)$ is a Poisson algebra. But if M is a Malcev algebra then $P(L)$, in general, is not a Malcev algebra with respect to $\{\,,\}$.

Theorem 1. *Let $P = P(\mathrm{sl}_2(K))$ be the Poisson enveloping algebra of $\mathrm{sl}_2(K)$ over a field K of characteristic zero and let $C = 4xy + h^2 \in P$ be the standard Casimir element of P. Set $I_\lambda = (C - \lambda)P$ for any $0 \neq \lambda \in K$. Then the quotient algebra P/I_λ is a central simple algebra over K.*

Let $\mathbb{M}$ be a seven-dimensional simple Malcev algebra over a field K of characteristic 0. If K is an algebraically closed field then it is easy to check that the standard Casimir element $C_{\mathbb{M}} = 4(xx' + yy' + zz') + h^2$ belongs to the center of the Poisson enveloping algebra $P(\mathbb{M})$, where x, x', y, y', z, z', h is a splittable basis of $\mathbb{M}$. Recall that each triple of elements $\{x, x', h\}$, $\{y, y', h\}$ and $\{z, z', h\}$ forms a splittable basis for $\mathrm{sl}_2(K)$.

Theorem 2. *Let $P = P(\mathbb{M})$ be the Poisson enveloping algebra of a seven-dimensional simple Malcev algebra $\mathbb{M}$ over a field K of characteristic zero and let $C_{\mathbb{M}} \in P$ be the standard Casimir element of P. Set $I_\lambda = (C_{\mathbb{M}} - \lambda)P$ for any $0 \neq \lambda \in K$. Then the quotient algebra P/I_λ is a central simple algebra over K.*

References

[1] Dixmier J., Quotients simples de l'algébre enveloppante de sl_2. (French) J. Algebra 24 (1973), 551–564.

Wayne State University, Detroit (USA)
E-mail: umirbaev@math.wayne.edu
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)
E-mail: vicnic@math.nsc.ru

The number of solutions for a certain type of comparisons over prime field

E. V. Zavalishina

In 2016, the U.S. National Institute of Standards and Technology (NIST) released a Report on Post-Quantum Cryptography [**1**]. NIST suggests it is time to prepare for the transition to quantum-resistant cryptography, seems some problems on which the cryptographic algorithms are based can be solved by quantum computers.

In this regard, the author of this work and co-authors made an attempt to create a new encryption algorithm with a public key, based on solving a system of homogeneous polynomial equations in integers[**2**].

As a part of the study of the cryptographic resistance of this system, it is necessary to determine the number of solutions for comparisons of a certain type. Let p be a prime number, $\alpha \in GF(p), r \geqslant 1, k \geqslant 1$ be parameters of a comparison and $b_{ij} \in GF(p)$ be variables, where $i = 1, ..., r$. Then the comparison has the form:

$$\prod_{j=1}^{k} b_{1j} + ... + \prod_{j=1}^{k} b_{rj} \equiv \alpha \pmod p,$$

Let N_r^k be the number of comparison solutions where $\alpha = 0$, and M_r^k be the number of comparison solutions where $\alpha \neq 0$.

Theorem. *The number of solutions for the described comparison is determined by the following recurrence relations:*

$$N_1^k = \sum_{i=1}^{k} C_k^i (m-1)^{k-i},$$

$$M_1^k = (m-1)^{k-1},$$

$$N_r^k = N_{r-1}^k N_1^k + M_{r-1}^k (m-1)^k \text{ for } r \geq 2,$$

$$M_r^k = M_{r-1}^k N_1^k + N_{r-1}^k (m-1)^k + M_{r-1}^k M_1^k (m-2) \text{ for } r \geq 2.$$

The work is supported by Mathematical Center in Akademgorodok under agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation and Laboratory of Cryptography JetBrains Research.

References

[1] NIST Internal or Interagency Reports (IR) 8105 Report on Post-Quantum Cryptography, Gaithersburg, Maryland, April 2016, 15pp.

[2] Volkov E., Baranov A., Zavalishina E. A public key cryptographic system. Second Conference on Software Engineering and Information Management (SEIM-2017), 2017. pp. 41-44.

Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS and JetBrains Research Cryptographic Lab, Novosibirsk
E-mail: e.zavalishina@g.nsu.ru

Jordan superalgebras defined by an n-sphere

V. N. Zhelyabin, A. S. Zakharov

Let $\mathbb{F} = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ be a field of real (complex) numbers and let Γ be an associative commutative algebra with a bilinear skew-symmetric operation (bracket) $\{\,,\} : \Gamma \times \Gamma \mapsto \Gamma$. Consider $J = \Gamma + \Gamma\xi$, where $\Gamma\xi$ is an isomorphic copy of Γ and define a product $(\cdot)$ by

$$a \cdot b = ab,\ a \cdot b\xi = (ab)\xi,\ a\xi \cdot b = (ab)\xi,\ a\xi \cdot b\xi = \{a, b\},$$

where $a, b \in \Gamma$ and ab is a product in the algebra Γ. Define $A_0 = \Gamma$ and $A_1 = \Gamma\xi$. Then $J(\Gamma, \{\,,\}) = A_0 + A_1$ is a superalgebra with an even part A_0 and an odd part A_1. A bracket $\{\,,\}$ is called a Jordan bracket if $J(\Gamma, \{\,,\})$ is a Jordan superalgebra.

Let $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$ be a $\mathbb{Z}_2$-graded algebra with a grading-respecting bracket $\{\,,\}$. Then $J(\Gamma_0, \Gamma_1, \{\,,\}) = \Gamma_0 + \Gamma_1\xi$ is a subsuperalgebra of the $J(\Gamma, \{\,,\})$.

Theorem 1. *Let n be an odd positive integer and let $\Lambda(n)$ be the coordinate ring of the n-sphere. Then $\Lambda(n) = \Lambda(n)_0 + \Lambda(n)_1$ is a $\mathbb{Z}_2$-graded algebra. Moreover, there exist a Jordan bracket $\{\,,\}_n$ on the $\Lambda(n)$ such that $J(\Lambda(n), \{\,,\}_n)$ and $J(\Lambda(n)_0, \Lambda(n)_1, \{\,,\}_n)$ are simple superalgebras.*

Theorem 2. *Let n be an even positive integer and let $\Lambda(n, 1)$ be the coordinate ring of the direct product of n-sphere and affine line. Then $\Lambda(n, 1) = \Lambda(n, 1)_0 + \Lambda(n, 1)_1$ is a $\mathbb{Z}_2$-graded algebra. Moreover, there exists a Jordan bracket $\{\,,\}_{n,1}$ on the $\Lambda(n, 1)$ such that $J(\Lambda(n, 1), \{\,,\}_{n,1})$ and $J(\Lambda(n, 1)_0, \Lambda(n, 1)_1, \{\,,\}_{n,1})$ are simple superalgebras.*

Theorem 3. *Let $J = A + M$ be a Jordan superalgebra over $\mathbb{F}$ with the even part A and the odd part M. Let $J = J(\Lambda(n)_0, \Lambda(n)_1, \{\,,\}_n)$ with odd n or $J = J(\Lambda(n, 1)_0, \Lambda(n, 1)_1, \{\,,\}_{n,1})$ with even n. Then J is a simple superalgebra. The even part M is a finitely generated A-module which cannot be generated by fewer than $n + 1$ elements for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ and fewer than $[\frac{n}{2}] + 1$ for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Moreover, $J(\Lambda(2, 1)_0, \Lambda(2, 1)_1, \{\,,\}_{2,1})$ is an exceptional Jordan superalgebra. If $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $n > 1$ then J is not isomorphic to a superalgebra of a Jordan bracket.*

For $n = 1$ the result was obtained in [**1, 2**].

References

[1] Zhelyabin V. N., Differential algebras and simple Jordan superalgebras, Siberian Adv. Math., 20:3 (2010), 223-230.

[2] Zhelyabin V. N., New examples of simple Jordan superalgebras over an arbitrary field of characteristic zero, St. Petersburg Math. J., 24:4 (2013), 591-600.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
E-mail: vicnic@math.nsc.ru
Novosibirsk State University, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk
E-mail: antzakh@gmail.com

Group superschemes and Harish-Chandra pairs

A. N. Zubkov

The aim of this talk is to describe recent progress in the theory of locally algebraic group superschemes. This is a continuation of the project, which I have already reported at the previous Maltsev's meeting (2017) about. The novelty of this report is as follows :

(1) We extended the previous result on the fundamnetal equivalence between algebraic group superschemes and certain Harish-Chandra pairs for locally algebraic group superschemes.
(2) The above result is based on the existence of a normal formal super-subgroup in arbitrary group superscheme (formal completion of the identity element). This fact takes place for group schemes also, but so far we know it have never been used or even mentioned in.

We outline some applications of this fundamental equivalence, and as most important among them, the following theorem.

Theorem. *Let G be an algebraic (not necessary affine) group superscheme, and H be a closed group super-subscheme of G. Then the sheaf quotient G/H is always a superscheme of finite type.*

We also discuss (corrected) superizations of many other fundamnetal results from the theory of group schemes, as Barsotti-Chevalley theorem, the structure of pseudoabelian and abelian group superschemes etc.

UAEU, Abu-Dhabi, Al Ain; Sobolev Institute of Mathematics, SORAN (Omsk branch)
E-mail: a.zubkov@yahoo.com

VIII. Секция «Теория моделей и универсальная алгебра»

Об $\aleph_0$-категоричности E-комбинации линейных порядков

А. Б. Алтаева, Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов

В серии работ [**1**]–[**5**] изучались топологические свойства семейств теорий. Были введены понятия P-оператора и E-оператора, позволяющие изучать связи между теориями относительно подходящих операторов замыкания.

Данное исследование было продолжено в совместных работах Кулпешова Б.Ш. и Судоплатова С.В. [**6**]–[**8**] для семейств упорядоченных теорий. В настоящем докладе исследуются E-комбинации счетного числа счетно категоричных линейно упорядоченных структур чистого линейного порядка.

Теорема. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричный линейный порядок, M^+ — линейно упорядоченная непересекающаяся E-комбинация ω копий структуры M. Тогда имеет место следующее:*
(1) $Th(M^+)$ — $\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$ и $\langle M^+/E, <_{ind}\rangle$ — $\aleph_0$-категорична, где $<_{ind}$ — индуцированный порядок на E-классах в M^+.
(2) Если $Th(M^+)$ не является $\aleph_0$-категоричной, то $Th(M^+)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544) и программой фундаментальных научных исследований СО РАН I.1.1, проект 0314-2019-0002.

Список литературы

[1] Sudoplatov S. V. Combinations of structures // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2018. Vol. 24. P. 82–101.
[2] Sudoplatov S. V. Closures and generating sets related to combinations of structures // Reports of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2016. Vol. 16. P. 131–144.
[3] Sudoplatov S. V. Families of language uniform theories and their generating sets // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2016. Vol. 17. P. 62–76.
[4] Sudoplatov S. V., On semilattices and lattices for families of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 980–985.
[5] Sudoplatov S. V. Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 135–150.
[6] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., О P-комбинациях упорядоченных теорий // Традиционная международная апрельская математическая конференция (тезисы докладов), ИМММ, Алматы, 2019. С. 30–31.
[7] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., Об эренфойхтовости P-комбинации упорядоченных теорий // Материалы международной конференции ”Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, Казанский федеральный университет, 2019. С. 131–133.
[8] Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В., P-комбинации упорядоченных структур // Тезисы докладов международной конференции ”Мальцевские Чтения”, Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2019. С. 190.

Институт математики и математического моделирования, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы (Казахстан)
E-mail: vip.altayeva@mail.ru
Казахстанско-Британский технический университет, Алматы (Казахстан)
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

О некоторых интервалах в решетке частичных ультраклонов

С. А. Бадмаев, А. Е. Дугаров, И. В. Фомина

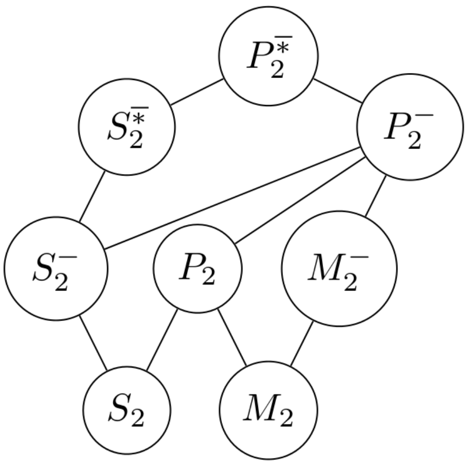
Настоящая работа посвящена исследованию одного фрагмента решетки частичных ультраклонов ранга 2 (функции определены на двухэлементном множестве), содержащем максимальные клоны множества P_2 – функций двузначной логики, а именно клоны S_2 – самодвойственных и M_2 – монотонных функций. Множество всех мультифункций обозначим через $P_2^{\overline{*}}$, множество всех гиперфункций через P_2^{-}. Через S_2^{-} и M_2^{-} обозначим множества гиперфункций, сохраняющих, соответственно, предикаты $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix}$. Через $S_2^{\overline{*}}$ обозначим множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = f(\bar{\tilde{\alpha}}) = -$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \underline{f(\bar{\tilde{\alpha}})} = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

Интервалом $\Im(A, B)$ назовем частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон A и являющихся подклонами клона B.

В работе [**1**] доказано, что классы P_2, $S_2^{\overline{*}}$ и M_2^{-} являются максимальными ультраклонами ранга 2, а в работе [**2**] доказано, что классы P_2^{-} и $S_2^{\overline{*}}$ являются максимальными частичными ультраклонами ранга 2.

Теорема. *Интервал $\Im(S_2, P_2^{\overline{*}})$ содержит ровно 6 клонов, интервал $\Im(M_2, P_2^{\overline{*}})$ содержит ровно 5 клонов, а именно, клоны, представленные на диаграмме ниже.*



Список литературы

[1] Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2009. Т. 68, N 2. С. 60–79.

[2] Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 450–474.

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
E-mail: badmaevsa@mail.ru, dugarov_aleksandr@mail.ru, fomina-irina0104@yandex.ru

Определимые квазимногообразия

М. И. Бекенов, А. М. Касатова

Рассматривается множество T всех полных теорий языка исчисления предикатов первого порядка. Произведение $T_1 \times T_2$ полных теорий T_1, T_2 стандартное.

Определение 1. *Подмножество M множества T называется определимым, если существует теория $T_1 \in M$ такая, что для любой $P \in M$ выполняется $P \times T_1 = T_1$. T_1 в этом случае называется определителем множества M.*

Определение 2. *Определимое подмножество M множества T называется определимым квазимногообразием, если класс всех моделей теорий множества M образует квазимногообразие.*

Теорема *Определимое подмножество M множества T будет определимым квазимногообразием, если определитель множества M универсальная теория.*

Также показано, что если ввести соответствующие операции $\cap$ и $\cup$ на множестве определимых квазимногообразий, используя операции $\cap$ и $\times$ над определимыми квазимногообразиями, то множество определимых квазимногообразий с этими операциями образует полную решетку.

Данная работа осуществлялась при поддержке гранта КН МОН РК AP05132688.

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан (Казахстан)
E-mail: Kasatova_Aida@mail.ru

Определяющие соотношения в 3-порожденной решетке, близкой к дистрибутивной

А. Г. Гейн, И. Д. Маслинцын, К. Э. Рабой

В [**1**] рассматривается класс решёток, названных близкими к дистрибутивным.

Определение. *Решётка называется близкой к дистрибутивной, если для любых элементов x, y и z интервалы*

$$[(x \wedge z) \vee (y \wedge z); (x \vee y) \wedge z] \text{ и } [(x \wedge y) \vee z; (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$$

имеют длину, не большую 1.

Там же отмечено, что этот класс содержит в себе многообразие модулярных решёток. В продолжение той работы приведём следующую теорему.

Теорема. *Пусть решётка, близкая к дистрибутивной, порождена элементами x_0, x_1 и x_2. Если она содержит не менее 38 элементов, то в ней выполнены следующие определяющие соотношения:*

$$\begin{aligned}
((x_1 \vee x_0) \wedge x_2) \vee x_0 &= (x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee x_0) = ((x_2 \vee x_0) \wedge x_1) \vee x_0;\\
((x_0 \vee x_1) \wedge x_2) \vee x_1 &= (x_0 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee x_1) = ((x_2 \vee x_1) \wedge x_0) \vee x_1;\\
((x_0 \vee x_2) \wedge x_1) \vee x_2 &= (x_0 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2) = ((x_1 \vee x_2) \wedge x_0) \vee x_2;\\
((x_1 \wedge x_0) \vee x_2) \wedge x_0 &= (x_1 \wedge x_0) \vee (x_2 \wedge x_0) = ((x_2 \wedge x_0) \vee x_1) \wedge x_0;\\
((x_0 \wedge x_1) \vee x_2) \wedge x_1 &= (x_0 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) = ((x_2 \wedge x_1) \vee x_0) \wedge x_1;\\
((x_0 \wedge x_2) \vee x_1) \wedge x_2 &= (x_0 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) = ((x_1 \wedge x_2) \vee x_0) \wedge x_2.
\end{aligned}$$

Эти определяющие соотношения слабее тех, которые рассматривались в [**2**] и для которых была доказана конечность 3-порождённой решётки. Гипотеза о конечности 3-порождённой решётки, близкой к дистрибутивной, проверяется.

Список литературы

[1] Гейн А. Г., Маслинцын И. Д., Рабой К. Э. О решётках, близких к дистрибутивным // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тезисы докл. Новосибирск, 19–23 августа 2019 г. / Новосибирск, ИМ СО РАН, 2019. С. 186.

[2] Гейн А. Г., Шушпанов М. П. Решётки с определяющими соотношениями, близкими к дистрибутивности // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, N 6. С. 798–804.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: a.g.geyn@urfu.ru, maslintsyn@gmail.com, raboyk@mail.ru

Распределения счетных моделей ω-стабильных теорий

А. Б. Даулетиярова

Мы продолжаем изучение свойств распределения счётных моделей по предпорядкам Рудин-Кейслера и по числу предельных моделей над последовательностями типов [**1**]. В данной работе мы двигаемся по нарастанию ранга Морли и развиваем теорию размерности для ω-стабильных теорий, как в сильно минимальном случае, чтобы применить к описанию распределений счётных моделей подобно распределениям для теорий одноместных предикатов [**2**]. Каждое определимое множество ранга 1 и степени 1 при элементарных расширениях ведет себя как модель сильно минимальной теории, т.е. либо имеет конечное число 1-типов, либо имеет единственный неглавный 1-тип, задающий размерность. Целью данной работы является распределение предельных моделей относительно независимых неглавных 1-типов. Известно [**3, 4**], что для ω-стабильных теорий число попарно неизоморфных счётных моделей исчерпывается следующими значениями: $1, \omega, 2^{\omega}$. При этом бесконечное число счётных моделей обеспечивается счётными предпорядками Рудин–Кейслера. Следующая теорема даёт частичный ответ на вопрос из монографии [**1**] о существовании ω-стабильной теории, обладающей свойством l-эренфойхтовости, т. е. имеющей конечное, но большее единицы число предельных моделей.

Теорема. *Для ω-стабильных теорий T возможны следующие случаи распределения счётных моделей:*

1) *Если теория T имеет один неглавный 1-тип, то распределение соответствует сильно минимальному случаю с одной предельной моделью;*
2) *Если имеется конечное число $n > 1$ независимых неглавных 1-типов, то предпорядок Рудин–Кейслера является дистрибутивной решеткой L с n атомами и счётной высотой; эта решетка задает счётное число предельных моделей;*
3) *Если имеется счётное число независимых неглавных 1-типов, то предпорядок Рудин–Кейслера является счётной атомной дистрибутивной решёткой L с n атомами, с относительными дополнениями и без максимальных элементов; при этом получается 2^{ω} предельных моделей, каждая из которых представляется в виде объединения некоторой максимальной цепи в L, и обратно, объединение каждой максимальной цепи в L задаёт некоторую предельную модель.*

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544).

Список литературы

[1] Судоплатов С. В. Классификация счётных моделей полных теорий. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2018.

[2] Даулетиярова А. Б. Распределения счётных моделей теорий одноместных предикатов // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня работников науки Казахстана посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования, Алматы-2020. — С. 25–26.

[3] Lachlan A. H. On the number of countable models of a countable superstable theory // Proc. Int. Cong. Logic, Methodology and Philosophy of Science. Amsterdam : North-Holland, 1973. — P. 45–56.

[4] Shelah S., Harrington L., Makkai M. A proof of Vaught's conjecture for ω-stable theories // Israel J. Math. 1984. Vol. 49, No. 1–3. P. 259–280.

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; Astana IT University, Нур-Султан (Казахстан)
E-mail: d_aigera95@mail.ru

Об алгебрах бинарных изолирующий формул для корневых произведений графов

Д. Ю. Емельянов

Следуя [**1, 2, 3**], *корневое произведение* графа G и корневого графа H определяется следующим образом: возьмём $|V(G)|$ копий графа H и для каждой вершины v_i графа G, отождествляем v_i с корневой вершиной i-ой копии H.

Известно, что диаметр графа для произведения $G \circ H$ считается как $m + 2l$, где m — диаметр графа G, l — диаметр графа H.

При $H_1 = H_2 = \ldots = H_k = H$ декартово произведение $H \circ H \circ \ldots \circ H$ называется *k-й корневой степенью* графа H и обозначается через H^k.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул [**4**] для теорий корневых произведений. Рассмотрены правила умножения для правильных фигур от отрезка до шестиугольника. Для них получены таблицы корневого умножения вида $G \circ H^k$, где G — граф правильного многоугольника, H^k — k-я корневая степень графа отрезка. Исследуя корневые произведения алгебры для отрезка и правильных многоугольников, обнаружили зависимость получаемой алгебры от четности вершин. На основе этой зависимости описаны две общие формы для n-угольников с чётным количеством углов и с нечётным.

При корневом умножении вида $G \circ S^k$, где G — алгебра правильного многоугольника, S — алгебра симплекса, замечено поглощение алгебры для G алгеброй [**5**] для симплекса S.

Теорема. *Если в результате корневого умножении алгебр бинарных изолирующих для n-угольников получается хотя бы один симплекс, то алгебра для результата будет изоморфна алгебре симплексов.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-31-90004, а также КН МОН РК AP08855544.

Список литературы

[1] Godsil C. D., McKay B.D. A new graph product and its spectrum // Bull. Austral. Math. Soc. 1978. Vol. 18, No. 1. P. 21–28.

[2] Koh K. M., Rogers D. G., Tan T. Products of graceful trees // Discrete Mathematics. 1980. Vol. 31, No. 3. P. 279–292.

[3] Fink J. F., Jacobson M. S., Kinch L. F., Roberts J. On graphs having domination number half their order // Period. Math. Hungar. 1985. Vol. 16, No. 4. P. 287–293.

[4] Sudoplatov S. V. Classification of Countable Models of Complete Theories. — Novosibirsk : NSTU Publisher, 2018.

[5] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов. Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk : NSTU Publisher, 2017. — P. 66–74.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Примитивная нормальность класса слабо инъективных полигонов над конечным моноидом

Е. Л. Ефремов

Пусть S — моноид с единицей 1, $L_S = \{s^{(1)} \mid s \in S\}$. Алгебраическая система ${}_SA = \langle A; L_S \rangle$ называется *(левым) полигоном над* S, если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $a \in A$, $s_1, s_2 \in S$. Полигон ${}_SA$ называется *слабо инъективным*, если для любого левого идеала I моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SI \to {}_SA$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$, продолжающий φ.

Пусть T — полная теория языка L_S, ${}_SC$ — достаточно насыщенная модель теории T. Формула вида $\exists x_1 \ldots \exists x_k\, (\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n)$, где Φ_i — атомарная формула языка L_S $(i \leqslant n)$, называется *примитивной*. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула языка L_S, $\bar{a}, \bar{b} \in C$ — кортежи элементов той же длины, что и $\bar{y}$, то множества $\Phi({}_SC, \bar{a})$ и $\Phi({}_SC, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*. Теория T называется *примитивно нормальной*, если любые две примитивные копии либо совпадают, либо не пересекаются. Класс $\mathcal{K}$ полигонов над моноидом S называется *примитивно нормальным*, если теория любого полигона класса $\mathcal{K}$ примитивно нормальна. Примитивно нормальные теории полигонов изучаются в [1–3].

Пусть ${}_SA$ — полигон, $s \in S \setminus \{1\}$, $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$, $a \in A$. Будем говорить, что условие $P({}_SA, a, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ выполняется, если $a = sa$, $a \notin \bigcup\{St_ja \mid j \in J\} \cup \bigcup\{Sr_ka \mid k \in K\}$, $t_ja \notin \bigcup\{Sr_ka \mid k \in K\}$ для любых $j \in J$, $r_ka \notin \bigcup\{St_ja \mid j \in J\}$ для любых $k \in K$.

Теорема. *Пусть S — конечный моноид. Класс всех слабо инъективных полигонов над S примитивно нормален тогда и только тогда, когда для любых элементов $u, s \in S$, $s \neq 1$, любых $\mathbf{t} = \{t_j \mid j \in J\} \subseteq S$, $\mathbf{r} = \{r_k \mid k \in K\} \subseteq S$, $\mathbf{t} \neq \varnothing$, $\mathbf{r} \neq \varnothing$, и любой конгруэнции ρ полигона ${}_SS$, если выполняется условие $P({}_SS/\rho, u/\rho, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$, то существует $w \in S$ такой, что выполняется условие $P({}_SS, w, s, \mathbf{t}, \mathbf{r})$ и для которого существует гомоморфизм*

$$\varphi : \bigcup\{St_jw \mid j \in J\} \cup \bigcup\{Sr_kw \mid k \in K\} \to {}_SS/\rho$$

такой, что $\varphi(t_jw) = t_ju/\rho$ для любых $j \in J$ и $\varphi(r_kw) = r_ku/\rho$ для любых $k \in K$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020, 075-02-2020-1482-1.

Список литературы

[1] Степанова А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, No 4. С. 491–508.

[2] Ефремов Е. Л. Примитивная нормальность и примитивная связность класса инъективных полигонов // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, No 2. С. 155–168.

[3] Птахов Д. О. Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, No 5. С. 614–624.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: efremov-el@mail.ru

Свойства определимых замыканий на подмножествах малых моделей

А. Р. Ешкеев, А. К. Исаева, Н. В. Попова

Данный тезис имеет отношение к синтаксическим свойствам специальных подмножеств фрагмента семантической модели конкретной йонсоновской теории. Концепция так называемого теоретико-модельного “реостата”, также использовалась для получения результатов, связанных с уточнением понятия атомности в рамках йонсоновской теории.

Пусть T — некоторая фиксированная йонсоновская теория [1], C — ее семантическая модель в счетном языке L и $\nabla_1, \nabla_2 \subseteq L_{\forall\exists}$, где $L_{\forall\exists}$ есть множество универсально-экзистенциальных формул языка L совместных с T.

Определение. (a) Назовем (∇_1, ∇_2)-cl-атомное множество A в теории T — (∇_1, ∇_2)-cl Σ-*nice множеством* в теории T, если для любого A', где A' — (∇_1, ∇_2)-cl-атомное множество в теории T, верно, что

1) $cl(A) = M \in E_T \cap AP_T$;

2) для всех $a_0, ..., a_{n-1} \in A$,$b_0, ..., b_{n-1} \in A^{'}$, если

$$(M, a_0, ..., a_{n-1}) \Rightarrow_\exists (M', b_0, ..., b_{n-1}),$$

то для любых $a_n \in A$ существуют $b_n \in A'$ такие, что

$$(M, a_0, ..., a_n) \Rightarrow_\exists (M', b_0, ..., b_n),$$

где $M' = cl(A')$, и полученную модель M назовем (∇_1, ∇_2)-cl-Σ-nice моделью в теории T;

(b) A — (∇_1, ∇_2)-cl Σ^*-*nice множество* в теории T, если условие 2) в (a) выполняется с заменой '$\Rightarrow_\exists$' на '$\equiv_\exists$', и полученную модель M назовем $(\nabla_1, \nabla_2) - cl$-$\Sigma^*$-*nice моделью* в теории T;

(c) A — (∇_1, ∇_2)-cl Δ-*nice множество* в теории T, если условие 2) в (a) выполняется с заменой '$\Rightarrow_\Delta$' на '$\equiv_\Delta$', где $\Delta \subseteq L$, $\Delta = \forall \cap \exists$, и полученную модель M назовем (∇_1, ∇_2)-cl Δ-*nice моделью* в теории T.

Теорема. *Пусть F – некоторый фрагмент (∇_1, ∇_2)-cl Δ-nice алгебраически простого множества X, и пусть $A \in AP_F \cap E_F$ и фрагмент F есть совершенная экзистенциально простая теория, полная для $\exists$-предложений. Тогда A является (∇_1, ∇_2)-Δ-nice алгебраически простой моделью, тогда и только тогда, когда A есть (∇_1, ∇_2)-cl-Δ-nice атомная модель.*

Список литературы

[1] Ешкеев А. Р., Касыметова М. Т. Йонсоновские теории и их классы моделей. Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. 370 с.

Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, Караганда (Казахстан)
E-mail: modth1705@mail.ru, isa_aiga@mail.ru, dandn@mail.r

Свойство категоричности гибридов Δ-PJ-фрагментов

А. Р. Ешкеев, Н. М. Мусина

В данной работе рассмотрено понятие гибрида для специального позитивного случая йонсоновских теорий. До этого нами было определено понятие гибрида для йонсоновских теорий [1], которое тесно связано с некоторой фиксированной йонсоновской теорией. При этом, понятие йонсоновской теории можно рассмотреть в рамках изучения позитивной теории моделей [2].

Пусть T — Δ-PJ-теория [3] и C — семантическая модель теории T. Пусть X_1, X_2 — позитивные йонсоновские подмножества C. $Fr(X_1), Fr(X_2)$ — Δ-PJ-фрагменты.

Пусть $M_1 = dcl(X_1), M_2 = dcl(X_2)$, где $M_1, M_2 \in (E_T^{\Delta})^+$. $Th_{\forall\exists^+}(M_1) = T_1$, $Th_{\forall\exists^+}(M_2) = T_2$, C_1 — семантическая модель позитивной йонсоновской теории T_1, C_2 — семантическая модель позитивной йонсоновской теории T_2. $T_1 = Th_{\forall\exists^+}(M_1) = Fr^+(X_1)$, $T_2 = Th_{\forall\exists^+}(M_2) = Fr^+(X_2)$.

Пусть $\times$ — декартово произведение.

Следующее определение дает гибрид двух Δ-PJ-фрагментов одной сигнатуры.

Определение. Гибридом $H(Fr^+(X_1), Fr^+(X_2))$ Δ-PJ-фрагментов $Fr^+(X_1)$, $Fr^+(X_2)$ будет называться теория $Th_{\forall\exists^+}(C_1 \times C_2)$, если она Δ-PJ-теория, где C_i — семантические модели $Fr^+(X_i), i = 1, 2$.

Факт. Для того чтобы теория $H(Fr^+(X_1), Fr^+(X_2))$ была Δ-PJ-теорией достаточно, чтобы $(C_1 \times C_2) \in (E_T^{\Delta})^+$.

Пусть $\Delta = B^+(At)$.

Теорема 1. *Пусть T — совершенная выпуклая экзистенциально простая полная для $\forall\exists$-предложений Δ-PJ-теория. X_1, X_2 — Δ-PJ-множества в теории $Th_{\forall\exists^+}(C)$, где $M_i = dcl(X_i) \in E_{Fr(Th_{\forall\exists^+}(C))}$, $Fr^+(X_i) = Th_{\forall\exists^+}(M_i)$ также совершенные выпуклые экзистенциально простые полные для $\forall\exists^+$-предложений Δ-PJ-фрагменты. Тогда, если их гибрид $H(Fr^+(X_1), Fr^+(X_2))$ является модельно совместным с $Fr^+(X_i)$, то $H(Fr^+(X_1), Fr^+(X_2))$ является совершенной Δ-PJ-теорией для $i = 1, 2$.*

Теорема 2. *Пусть $Fr^+(X), Fr^+(X_1), Fr^+(X_2)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $Fr^+(X_1), Fr^+(X_2)$ - ω-категоричны. Тогда их гибрид $H(Fr^+(X_1), Fr^+(X_2))$ также является совершенной Δ-PJ-теорией.*

Все неопределенные здесь понятия можно извлечь из [3].

Список литературы

[1] Yeshkeyev A. R., Mussina N. N. Properties of hybrids of Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University - Mathematics. 2018. Vol. 92, No. 4. P. 99–104.

[2] Poizat B., Yeshkeyev A. R. Positive Jonsson Theories // Logica Universalis. 2018. Vol. 12, No. 1–2. P. 101–127.

[3] Ешкеев А. Р., Касыметова М. Т. Йонсоновские теории и их классы моделей: моногр. Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — 370 с.

Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, Караганда (Казахстан)
E-mail: modth1705@mail.ru, nazerke170493@mail.ru

О некоторых свойствах моделей позитивных (n_1, n_2)-йонсоновских теорий

А. Р. Ешкеев, М. Т. Омарова

В этом тезисе мы рассматриваем (n_1, n_2)-йонсоновские теории с условием позитивной аксиоматизируемости, и вместо морфизмов мы рассматриваем специальные случаи гомоморфизмов. Индексы n_1, n_2 определяют соответственно n_1-модельную полноту, n_2-элиминацию кванторов.

Определение 1. Теория T называется *Δ-позитивной йонсоновской ($\Delta - PJ$)-теорией*, если для нее выполняются следующие условия: 1) T имеет бесконечные модели; 2) T — позитивная $\forall\exists$-аксиоматизируемая теория; 3) T допускает Δ-JEP; 4) T допускает Δ-AP.

Определение 2. 1. T называется n-модельно полной, если для всех моделей B, D теории T из $B \subseteq_n D$ следует $B \prec D$.

2. T называется *почти n-модельно полной*, если любая формула эквивалентна (относительно $\mathrm{mod}\ T$) булевой комбинации Σ_{n+1} (или Π_{n+1}) формул.

3. Цепь $\{B_n\}_{n\in\omega}$ относительно $\subseteq_n$ называется *n-цепью.*

Определение 3. Будем говорить, что теория является *n_2-Э.К.*, если любая формула этой теории представлена в виде булевой комбинации формул из $Q_{n_2}(B(At))$.

Определение 4. Теория T называется *(n_1, n_2)-йонсоновской*, если она является n_1-модельно полной и n_2-Э.К.

Определение 5. Цепь $\{B_k\}_{k\in\omega}$ называется *эвентуально элементарной*, если для всех $\bar{b} \in \cup_{k\in\omega} B_k$ и для всех формул $\psi(\overline{x})$ существует некоторое $k_0 \in \omega$, такое, что выполняется либо $B_k \models \psi(\bar{b})$ для каждого $k \geq k_0$ либо $B_k \models \neg\psi(\bar{b})$ для каждого $k \geq k_0$.

Определение 6. Цепь $\{B_k\}_{k\in\omega}$ называется *n_2-йонсоновской*, если она состоит только из моделей $\Sigma_{n_2}(T)$.

Теорема. *Пусть T является совершенной (n_1, n_2)-позитивной йонсоновской теорией, где $n_1 = n_2 + 1$; $n_1, n_2 > 0$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) T является n_2-Э.К.;

2) любая n_2-цепь моделей, которые принадлежат $\Sigma_{n_2}(T)$, является йонсоновской эвентуально элементарной;

3) T является n_1-модельно полной;

4) любая n_2-цепь моделей, которая принадлежит $\Sigma_{n_2}(T)$, чье объединение также модель $\Sigma_{n_2}(T)$, является йонсоновской эвентуально элементарной.

Все определения, касающиеся Δ-PJ-теорий, можно извлечь из [1].

Список литературы

[1] Yeshkeyev A. R. The structure of lattices of positive existential formulae of Δ-PJ-theories // SCIENCEASIA. 2013. Vol. 39, annex 1. P. 19–24.

Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, Караганда (Казахстан)
E-mail: modth1705@mail.ru, omarovamt_963@mail.ru

О счетных моделях экзистенциально алгебраически простой йонсоновской теории

А. Р. Ешкеев, Н. В. Попова, А. К. Исаева

Определение 1. [1] Модель A теории T называется *ядерной*, если она изоморфно вкладывается в любую модель данной теории и этот изоморфизм единственный.

Определение 2. Индуктивная теория T называется *ядерной*, если существует модель $A \in E_T$ такая, что для любой модели $B \in E_T$ существует единственный изоморфизм из A в B.

Определение 3. [1] Модель A теории T *жестко вкладывается* в модель B теории T, если существует ровно один изоморфизм A в B.

Ясно, что A жестко вкладывается в любую модель T тогда и только тогда, когда A является ядерной моделью для T и не имеет собственных автоморфизмов, кроме тождественных. Таким образом, любая ядерная модель ядерной йонсоновской теории жестко вкладывается в любую экзистенциально замкнутую модель этой теории. Поскольку по определению любая ядерная модель является алгебраически простой моделью, мы выделяем естественный подкласс класса всех йонсоновских теорий, которые обязательно имеют алгебраически простую модель.

Определение 4. Теория T называется *экзистенциально алгебраически простой* (EAP), если она имеет такую модель $A \in E_T$, что для любого $B \in E_T$, A изоморфно вкладывается в B.

Определение 5. Индуктивная теория T называется *экзистенциально простой*, если:

1) она имеет алгебраически простую модель, класс ее AP (алгебраически простых моделей) обозначим через AP_T;

2) класс E_T нетривиально пересекается с классом AP_T, т.е. $AP_T \bigcap E_T \neq 0$.

Теорема. *Пусть C является ядерной моделью некоторой экзистенциально алгебраически простой совершенной полной для экзистенциальных предложений, ядерной йонсоновской теории T. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(1) C вкладывается в каждую экзистенциально замкнутую модель центра этой теории.

(2) C — алгебраически простая модель теории T.

Все неопределенные здесь понятия можно извлечь из [2].

Список литературы

[1] Kueker D. W. Core structures for theories // Fundamenta Mathematicae LXXXIX. 1973. P. 154–171.

[2] Ешкеев А. Р. Касыметова М. Т. Йонсоновские теории и их классы моделей: моногр. Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — 370 с.

Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, Караганда (Казахстан)
E-mail: dandn@mail.ru

О многообразии m-групп $\mathcal{N}$ с субнормальными скачками

А. В. Зенков

Согласно [1], m-группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, \ ^{-1}, \ e, \ \vee, \ \wedge, \ _* \rangle$ такая, что $\langle G, \cdot, \ ^{-1}, \ e, \ \vee, \ \wedge \rangle$ является ℓ-группой, а одноместная операция $_*$ задает автоморфизм группы $\langle G, \cdot, \ ^{-1}, \ e \rangle$ порядка 2 и антиавтоморфизм решетки $\langle G, \ \vee, \ \wedge \rangle$, т.е. $_*$ взаимооднозначно отображает G на себя, причем выполняются соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, \ \ (x_*)_* = x, \ \ (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \ \ (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

Класс $\mathcal{M}$ всех m-групп образует многообразие сигнатуры m. Множество всех многообразий m-групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m-групп. Также на M вводится стандартная операция произведения многообразий, относительно которой M является полугруппой.

Работа посвящена изучению свойств многообразия всех нормальнозначных m-групп $\mathcal{N}$, которое задается тождеством

$$|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y| \qquad (*).$$

Как установили В. М. Копытов и Й. Рахунек в [2], многообразие $\mathcal{N}$ является наибольшим элементом решетки M. Таким образом $\mathcal{N}^2 = \mathcal{M}$, либо $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}$, т.е. является идемпотентом решетки M. Верно следующее:

Предложение 1. *Многообразие $\mathcal{N}$ всех нормальнозначных m-группа является идемпотентом решетки M многообразий m-групп.*

Как обычно, через $\mathcal{A}$ обозначим многообразие абелевых m-групп. Тогда, учитывая сформулированное выше предложение 1, для каждого натурального n имеем $\mathcal{A}^n \subseteq \mathcal{N}$. Следовательно $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n \subseteq \mathcal{N}$. Оказывается верна:

Теорема 1. *Имеет место* $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n = \mathcal{N}$.

Отметим, что теорема 1 дает положительный ответ на вопрос 3.12 из “Эрлагольской тетради” [3].

Список литературы

[1] Giraudet M., Rachunek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. Vol. 49, No. 4. P. 743–766.

[2] Копытов В.М., Рахунек Й. Наибольшее собственное многообразие m-групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. С. 624–635.

[3] Эрлагольская тетрадь. Избранные открытые вопросы по алгебре и теории моделей, поставленные участниками Эрлагольских школ-конференций // составители: А. Г. Пинус, Е. Н. Порошенко, С. В. Судоплатов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. 40 с.

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул
E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

О классе наследственно чистых алгебр с выделенным идемпотентом

О. В. Князев

В обзоре [**1**] предлагается обширная программа по изучению структурных свойств универсальных алгебр. В частности ставится проблема 3.17: *«Описать наследственно чистые алгебры данного многообразия алгебр»*.

Мы изучаем наследственно чистые алгебры в в классе алгебр с выделенным идемпотентом. Напомним, что элемент алгебры называется идемпотентом, если порождаемая им подалгебра одноэлементная.

Пусть $\mathbf{V}$ — произвольное фиксированное многообразие (универсальных) алгебр, в сигнатуру которых входит нульарная операция — выделение идемпотента. $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом «алгебра» понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}-$вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на алгебре A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-алгебры по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подалгеброй алгебры A, будет класс, содержащий выделенный идемпотент. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$*вербалом* алгебры A. Подалгебру B алгебры A называют $\mathbf{X}-$*чистой* в A, если $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$. Алгебру, у которой все подалгебры являются $\mathbf{X}-$ чистыми, называют *наследственно* $\mathbf{X}-$*чистой.* Если алгебра наследственно чистая по всякому атому решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$, то ее называют *наследственно атомно чистой.* Ограничим наши рассуждения многообразиями алгебр, в которых каждая моногенная алгебра имеет независимую порождающую совокупность элементов. К таким, например, относятся многообразие всех групп, всех моноидов, всех полугрупп с нулем.

Теорема. *Класс всех наследственно атомно чистых алгебр многообразия алгебр с выделенным идемпотентом, в котором каждая моногенная алгебра обладает независимой порождающей совокупностью элементов, замкнут относительно взятия гомоморфных образов.*

Список литературы

[1] Мартынов Л. М. Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 181–241.

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: knyazev50@rambler.ru

О P-стабильности классов S-полигонов

А. И. Красицкая, А. А. Степанова

В работе изучаются полигоны с P-стабильной теорией. Понятие P-стабильности является частным случаем обобщенной стабильности полных теорий (см. [**1**]). Вопросы P-стабильности для класса всех полигонов рассматривались в работе [**2**].

Напомним некоторые определения из теории полигонов (см. [**3**]).

Пусть S — моноид. Элемент $c \in S$ называется *сократимым справа*, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. Под *S-полигоном* ${}_SA$ понимается множество A, на котором определено действие элементов из S слева, причем единица действует на A тождественно. *Делимый S-полигон* — это S-полигон ${}_SA$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$. *Копроизведением* S-полигонов ${}_SA_i$, $i \in I$, называется их дизъюнктное объединение. Пусть ${}_SB_i \subseteq {}_SA_i$ и $\varphi_{ij} :_S B_i \to_S B_j$ — изоморфизм, причем $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ и $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} : B_i \to B_i$ — тождественное отображение ($i, j, k \in I$). Тогда S-полигон $\coprod\limits_{i \in I} {}_SA_i/\eta$, где η — конгруэнция S-полигона $\coprod\limits_{i \in I} {}_SA_i$, порожденная множеством $\{(a_i, \varphi_{ij}(a_i)) | a_i \in B_i, i, j \in I\}$, называется *склейкой* S-полигонов ${}_SA_i$ по подполигонам ${}_SB_i$ ($i \in I$). Класс K S-полигонов называется *замкнутым относительно копроизведений (склеек)*, если копроизведение (склейка) любых S-полигонов из K принадлежит K.

Теорема. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и склеек и существуют S-полигон ${}_SA \in K$ и $e^2 = e \in S$, такие что ${}_SSe \subseteq {}_SA$. Если класс K является (P, e)-стабильным, то $Ste = Se$ для любого $t \in S$.*

Следствие 1. *Пусть K — класс всех делимых S-полигонов. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс K (P, s)-стабилен;

2) класс K (P, a)-стабилен;

3) класс K (P, e)-стабилен;

4) S – группа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020, 075-02-2020-1482-1.

Список литературы

[1] Палютин Е. А. E^*-стабильные теории // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, No 2. С. 194–210.

[2] Птахов Д. О. Р-стабильные полигоны // Алгебра и логика. 2017. — Т.56, С.486–505.

[3] Kilp M. Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter De Gruyter, 2000. — 546 p.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
E-mail: stasyakras@gmail.com

Бинарность почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1

Б. Ш. Кулпешов, Т. С. Мустафин

Пусть L — счетный язык первого порядка. Мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящий доклад касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [**1**]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Определение. [**2, 3**] *Пусть T — полная теория, $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. Тип $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ называется* $(p_1, \ldots, p_n)$-типом, *если* $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. *Через $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$ будем обозначать множество всех $(p_1, \ldots, p_n)$-типов теории T. Счетная теория T называется* почти ω-категоричной, *если для любых типов $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ существует лишь конечное число типов $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.*

Недавно в работе [**4**] была установлена бинарность почти ω-категоричных вполне о-минимальных теорий. Следующая теорема устанавливает бинарность для почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Теорема. *Любая почти ω-категоричная слабо о-минимальная теория ранга выпуклости 1 является бинарной.*

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант AP08855544).

Список литературы

[1] Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. 2000. Vol. 352, issue 12. P. 5435–5483.

[2] Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly. 1998. Vol. 44, issue 2. P. 161–166.

[3] Sudoplatov S. V. Classification of countable models of complete theories. Part 1. — Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publishing House, 2018. ISBN 978-5-7782-3527-4. — 326 p.

[4] Алтаева А. Б., Кулпешов Б. Ш. Бинарность почти ω-категоричных вполне о-минимальных теорий // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61, No 3. С. 484–498.

Институт математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан); Казахстанско-Британский технический университет, Алматы (Казахстан)

E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz, timurmustafin379@gmail.com

Об определимости топологических плоскостей непрерывными эндоморфизмами

В. А. Молчанов

В работе [1] получено решение проблемы Л.М. Глускина, Л.А. Скорнякова [2] об определяемости проективных плоскостей полугруппами их эндоморфизмов. В настоящей работе этот результат обобщается на топологические плоскости.

Под плоскостью [3] будем понимать систему вида $\Pi = (X, L)$, где X — непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки $a, b \in X$ проходит одна и только одна прямая, которая обозначается ab; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость Π является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует такая единственная прямая l', что $x \in l'$ и $l \cap l' = \emptyset$.

Топологической плоскостью называется плоскость $\Pi = (X, L)$ с заданной на множестве X компактной хаусдорфовой топологией τ_X, которая на множестве L определяет топологию Вьеториса [4] τ_L, так что операция построения по двум точкам a, b прямой ab непрерывна.

Непрерывным гомоморфизмом топологической плоскости $\Pi = ((X, \tau_X), L)$ в топологическую плоскость $\Pi_1 = ((X_1, \tau_{X_1}), L_1)$ называется такое непрерывное отображение $\varphi : X \to X_1$, что для любой прямой $l \in L$ множество $\varphi(l)$ содержится в некоторой прямой $l_1 \in L_1$. Обратимый непрерывный гомоморфизмом топологической плоскости Π на топологическую плоскость Π_1 называется топологическим изоморфизмом. Непрерывный гомоморфизм топологической плоскости Π в себя называется непрерывным эндоморфизмом этой плоскости. Множество всех непрерывных эндоморфизмов плоскости Π с операцией композиции и компактно-открытой топологией [4] образует топологическую полугруппу $\mathrm{End}\,\Pi$.

Теорема. *Топологические плоскости* Π, Π_1 *в том и только том случае топологически изоморфны, если топологически изоморфны их топологические полугруппы непрерывных эндоморфизмов* $\mathrm{End}\,\Pi$, $\mathrm{End}\,\Pi_1$.

Литература

[1] Молчанов В.А. Как проективные плоскости определяются своими полугруппами // Теория полугрупп и ее приложения. Полугруппы и связанные с ними алгебраические системы. Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1984. С. 42–50.

[2] Свердловская тетрадь: Сб. нерешенных задач по теории полугрупп. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1979.

[3] Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. М. Наука, 1980.

[4] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

Саратовский государственный университет, Саратов
E-mail: v.molchanov@inbox.ru

Об элементарной определимости класса универсальных гиперграфических автоматов в классе полугрупп

В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина

В настоящей работе продолжаются исследования автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями.

В работе рассматриваются гиперграфы особого вида — p-гиперграфы. Под p-гиперграфом понимается алгебраическая система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество вершин и L — семейство его подмножеств, именуемых гиперребрами, или просто ребрами, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) любые p вершин содержатся в одном и только одном ребре; (A_2) каждое ребро содержит по крайней мере $p+1$ вершину; (A_3) в множестве X есть $(p+1)$-элементное множество, не принадлежащее ни одному ребру. Например, аффинная и проективная плоскости являются 2-гиперграфами.

Главное внимание в наших исследованиях уделяется, так называемым, универсальным гиперграфическим автоматам, подавтоматы которых охватывают все гомоморфные образы рассматриваемых гиперграфических автоматов. Такой универсальный автомат определяется для произвольных гиперграфов H_X, H_Y как автомат $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y) = (H_X, H_Y, S, \delta, \lambda)$ с полугруппой входных сигналов $S = \mathrm{End}(H_X) \times \mathrm{Hom}(H_X, H_Y)$, функцией переходов $\delta(x, s) = \varphi(x)$ и выходной функцией $\lambda(x, s) = \psi(x)$ (где $x \in X_1$, $s = (\varphi, \psi) \in S(H_X, H_Y)$).

С помощью полученных в работах [**1, 2**] результатов доказано, что класс универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами $\mathbf{Atm}$ относительно элементарно определим в классе полугрупп. Для этого получены формулы элементарной теории полугрупп, с помощью которых можно построить изоморфную копию любого автомата $A \in \mathbf{Atm}$ в его полугруппе входных сигналов $\mathrm{Inp}(A)$.

Список литературы

[1] Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. Об абстрактной определяемости универ-сальных гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов // Чебышевский сборник. Тула, 2019. Т. 20, 2. С. 259–272.

[2] Khvorostukhina E. V., Molchanov V. A. Abstract characterization of inputsymbol semigroups of universal hypergraphic automata // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, No. 2. P. 214–226.

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина, Саратов

E-mail: molchanovva@mail.ru, khvorostukhina85@gmail.com

Суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй, теория которой не имеет простой модели

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов

В работе изучаются суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй, совпадающей с основной алгеброй по модулю идеала Фреше.

Любая теория конечной сигнатуры имеет счетные однородные модели, которые создают хороший базис для исследования. Интересен вопрос существования однородных моделей при дополнительных условиях минимальности или максимальности. Модель называется *простой*, если она минимальная, то есть элементарно вкладывается в любую модель своей элементарной теории; простая модель является однородной. В [1] описаны счётно категоричные модели теорий булевых алгебр с выделенными идеалами; каждая такая модель является простой.

Известно, что существует счетное число элементарных теорий булевых алгебр; каждая из них имеет простую модель. Если добавить в сигнатуру булевых алгебр одноместный предикат, выделяющий идеал, то ситуация с числом элементарных теорий и простых моделей существенно меняется [2-4]. В [2] доказано, что существует счетное число различных элементарных теорий суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом; каждая из этих теорий имеет простую модель [3]. В [4] доказано, что существует континуум элементарных теорий булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющих простых моделей.

Авторами было доказано существование континуума простых суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй, элементарные теории которых различны и не имеют счетно-насыщенных моделей, а также существование континуума суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй, элементарные теории которых различны и имеют счетно-насыщенную модель [5].

Теорема. *Существует суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй, совпадающей с основной алгеброй по модулю идеала Фреше, элементарная теория которой не имеет простой модели.*

Список литературы

[1] Pal'chunov D. E. Countably-categorical Boolean algebras with distinguished ideals // Studia Logica. 1987, Vol. XLVI, No. 2. P. 121–135.

[2] Пальчунов Д. Е. О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, No 3. С. 326–346.

[3] Пальчунов Д. Е. Простые и счетно насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами // Труды Института Математики. 1993. Т. 25. С. 82–103.

[4] Пальчунов Д. Е. Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели // Труды Института Математики. 1993. Т. 25. С. 104–132.

[5] Пальчунов Д. Е. Трофимов А. В. Теории суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй, не имеющие счетно-насыщенной модели // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61, No 3. С. 654–668.

ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск
E-mail: palch@math.nsc.ru, tr0f@mail.ru

Алгебраические множества $\aleph$-широких алгебр

А. Г. Пинус

Для любого кардинала $\aleph$ алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем $\aleph$-*широкой*, если ее $\aleph$-степень $\mathfrak{A}^{\aleph}$ вложима в нее самою (в $\mathfrak{A}$). Для любого бесконечного кардинала $\aleph$ и любой алгебры $\mathfrak{A}$ алгебра $\mathfrak{A}^{\aleph}$ является $\aleph$-широкой. Для бесконечных кардиналов $\aleph$ $\aleph$-широкими являются решетка разбиений множества мощности $\aleph$ и группа перестановок на подобном множестве.

Утверждение. *Для любого бесконечного кардинала $\aleph$ решетка $L_{\aleph}$ функциональных клонов на множестве мощности $\aleph$ является $\aleph$-широкой.*

Напомним, что множество $B \subseteq A^n$ называется *алгебраическим для алгебры* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, если оно есть совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) системы σ-термальных уравнений. Для любого $C \subseteq A^n$ через $Alg_{\mathfrak{A}} C$ обозначим наименьшее алгебраическое для $\mathfrak{A}$ множество включающее в себя C. Алгебраическое для $\mathfrak{A}$ множество B назовем $\aleph$-*порожденным*, если для некоторого $C \subseteq A^n$ такого, что $|C| \leq \aleph$, имеет место $Alg_{\mathfrak{A}} C = B$.

Имеет место:

Теорема. *Для любого кардинала $\aleph$ и любой $\aleph$-широкой алгебры $\mathfrak{A}$ любое алгебраическое для $\mathfrak{A}$ $\aleph$-порожденное множество является 1-порожденным.*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: ag.pinus@gmail.com

О рангах планарности многообразий клиффордовых полугрупп

Д. В. Соломатин

Напомним, что натуральное число r называют *рангом планарности* нетривиального многообразия полугрупп $\mathcal{V}$, если все свободные в $\mathcal{V}$ полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарные графы Кэли, а свободная в этом многообразии полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли. Если для многообразия $\mathcal{V}$ такого натурального числа r не существует, то говорят, что многообразие $\mathcal{V}$ имеет бесконечный ранг планарности. Кроме того, удобно полагать, что ранг планарности тривиального многообразия равен нулю. Спектром рангов планарности многообразия $\mathcal{V}$ называется множество $Spec_{r\pi}(\mathcal{V})$ всех возможных значений рангов планарности подмногообразий $\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{V}$. Любая клиффордова полугруппа является полурешёткой прямоугольных связок групп. Легко понять, что в таком многообразии выполняется тождество $x^n \approx x$ для некоторого натурального числа $n > 1$. Ясно и то, что любое многообразие полугрупп идемпотентов (связок) является многообразием клиффордовых полугрупп. Основным результатом настоящего сообщения является:

Теорема 1. *Ранг планарности многообразия* $\mathrm{var}\{x^n \approx x\}$ *при любом* $n \geq 3$ *равен* 1, *а при* $n = 2$ *равен* 3.

Отметим, что заданные тождеством $x^n \approx 1$ многообразия групп тоже имеют конечный ранг планарности при любом $n > 1$, это представляет отдельный интерес и может быть доказано независимо от анонсированной выше теоремы 1. Спектр рангов планарности многообразий полугрупп идемпотентов описывает:

Теорема 2. $Spec_{r\pi}(\mathrm{var}\{x^2 \approx x\}) = \{0, 2, 3, 4, \infty\}$.

При доказательстве теоремы 2 приведена классификация многообразий связок по рангам планарности. В частности, бесконечный ранг планарности среди них имеют лишь многообразия $\mathcal{L} = \mathrm{var}\{xy \approx x\}$ и $\mathcal{LR} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x, xy \approx xyx\}$. В связи с этим актуальной становится поставленная Л. М. Мартыновым проблема описания многообразий полугрупп бесконечного ранга планарности. На подступах к решению этой проблемы получено два утверждения, представляющих самостоятельный интерес. В качестве нетривиального следствия из теоремы Машке о планарных конечных группах, мы получаем:

Предложение 1. *Всякое локально конечное многообразие групп имеет конечный ранг планарности, не превосходящий 3.*

Прямое произведение группы G на полугруппу L левых нулей будем называть *левой группой*. Нами доказано, что граф Кэли конечной левой группы $S = G \times L$ планарен тогда и только тогда, когда группа G – плоская. Поэтому имеет место:

Предложение 2. *Многообразие полугрупп, отличное от* $\mathcal{L}$, *в котором свободная полугруппа конечного ранга является конечной левой группой, имеет конечный ранг планарности.*

Омский государственный педагогический университет, Омск
E-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

Мульти-алгебры как факторы по толеранциям

М. С. Шеремет

Напомним, что толеранция — это рефлексивное и симметричное отношение, устойчивое относительно основных операций алгебры.

Пары, состоящие из алгебры и толеранции на ней, используются для моделирования нечётко заданных алгебр: с одной стороны, толеранция может интерпретироваться как нечёткое отношение равенства или приближённое равенство; с другой стороны, можно рассматривать фактор данной алгебры по толеранции, который является мульти-алгеброй. В последнем случае известна проблема неоднозначности того, как можно определить такой фактор [**1**].

Мы предлагаем решение этой проблемы путём построения некоего "стандартного" способа, расширяющего диагональное вложение алгебр $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}^2$ до вложения алгебр с толеранциями $(\mathcal{A};\theta) \leqslant (\mathcal{A}^2;\Theta)$, в котором естественно индуцированный толеранцией Θ предпорядок $\supseteqq_\Theta$ определяет Θ полностью, т. е., если мы используем обозначения

$$u\Theta := \{w \mid u\Theta w\} \quad \text{и} \quad (u \supseteqq_\Theta v) := (u\Theta \supseteq v\Theta),$$

тогда имеет место свойство

$$u\,\Theta\,v \;\Leftrightarrow\; (\exists w)(w \supseteqq_\Theta u, v).$$

Список литературы

[1] Grätzer G., Quackenbush R. Multi-algebras as tolerance quotients of algebras // Algebra Univers. 2013. Vol. 69, No. 1. P. 23–26. doi: 10.1007/s00012-012-0216-x

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: sheremet@math.nsc.ru

Исчисления, близкие логике тождеств Клини

М. С. Шеремет

Мы рассматриваем алгебры, основные операции которых могут быть частичными, т. е. значения операций могут быть определены не для всех возможных значений аргументов. В этом случае истинность формул с равенством может определяться по-разному: условие определённости рассматриваемых функций может считаться необходимым условием, а может — нет.

Здесь мы рассматриваем равенство Клини, возникшее естественно в исследованиях по вычислимости [**1**]: равенство $f(\overline{x}) \approx g(\overline{x})$ считается выполненным при означивании $\overline{x} \mapsto \overline{a}$, если либо $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ не определены, либо $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ определены и совпадают.

Несмотря на естественную формулировку, логика тождеств Клини аксиоматизируется существенно сложнее логики тождеств всюду определённых функций [**2**]. С другой стороны, незначительные, на первый взгляд, дополнения [например, истинность тождества вида $p(x, y) \approx x$] позволяют интерпретировать в логике тождеств Клини гораздо более выразительный, вообще говоря, фрагмент логики условных тождеств [**3**], чего хотелось бы избежать.

В данной работе мы рассматриваем два (эквивалентных) исчисления для языка с отношением $\simeq$ следующей семантики: формула $f(\overline{x}) \simeq g(\overline{x})$ считается выполненной при означивании $\overline{x} \mapsto \overline{a}$, если $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ определены и совпадают, при условии, что $f(\overline{a})$ определено. Выразительная сила логики таких «несимметричных тождеств Клини» недостаточна, чтобы проинтерпретировать условные тождества в общем случае; а их аксиоматизация получается достаточно простой.

Одно исчисление имеет аксиомы рефлексивности и правила вывода по транзитивности, замене и подстановке (одного или другого вида). Во втором исчислении можно строить естественные выводы на термах по правилам, «сконвертированным» из упомянутых выше.

Список литературы

[1] Kleene S. C. Introduction to Metamathematics. Amsterdam, 1952.

[2] Robinson A. Equational logic of partial functions under Kleene equality: a complete and an incomplete set of rules // The Journal of symbolic logic. 1989. Vol. 54, No. 2. P. 354–362. doi: 10.2307/2274852

[3] Craig W. Near-Equational and Equational Systems of Logic for Partial Functions. II // The Journal of Symbolic Logic. 1989 Vol. 54, No. 4. P. 1181–1215. doi: 10.2307/2274813

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
E-mail: sheremet@math.nsc.ru

О конечности 3-порожденной решетки с ослабленным условием дистрибутивности

М. П. Шушпанов

Хорошо известно, что тождество $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ определяет многообразие дистрибутивных решёток (см., например, [**1**], Теорема II.8). Если же равенство $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ рассматривать как определяющее соотношение для решётки, порождённой элементами a, b и c, то Ф. Шик [**2**] описал соответствующую свободно порождённую решётку. Она не дистрибутивна, но, тем не менее, конечна — содержит 24 элемента. Учитывая всегда верное неравенство $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) < (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$, естественно интересоваться свойствами решётки, в которой расстояние между элементами, записанными в левой и правой частях неравенства достаточно мало. В решётке L, порождённой элементами a, b и c, обозначим $s = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$ и $t = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$.

Теорема. *Решётка, порождённая элементами a, b и c, у которой элемент t покрывает элемент s, конечна и содержит не более 28 элементов.*

Решётка, изображённая на рисунке 1, показывает, что оценка теоремы точная.

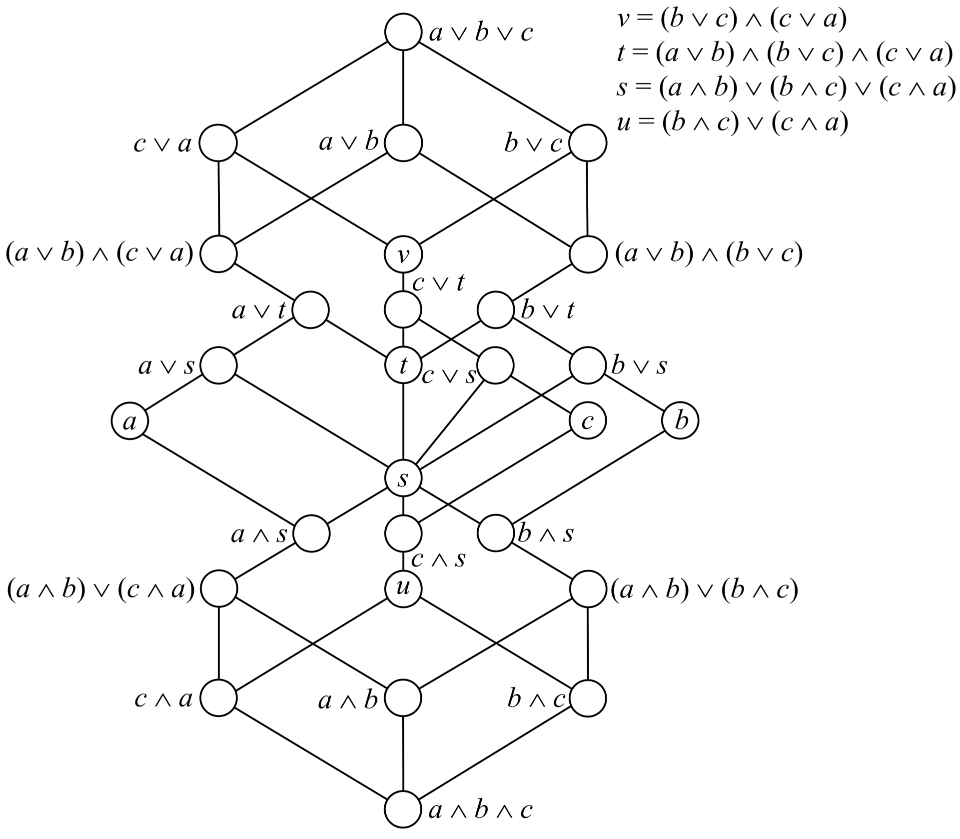


Рис. 1

Список литературы

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1964.
[2] Šik F. Modular and Distributive Equalities in Lattices // Mat. časop. 1973. Vol. 23, No. 4. P. 342–351.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
E-mail: Mikhail.Shushpanov@gmailcom

Automorphisms of the category of free finitely generated algebras

E. Aladova

To 95-th birthday of my teacher B.I. Plotkin

One of the natural questions of Universal Algebraic Geometry is as follows:

When do two algebras have the same algebraic geometry?

Let Θ be an arbitrary variety of algebras and H_1, H_2 be algebras from Θ such that $Var(H_1) = Var(H_2) = \Theta$, where $Var(H_i)$ is the variety generated by the algebra H_i.

We say that algebras H_1 and H_2 have the same algebraic geometry (aka geometrically similar) if the categories of algebraic sets over H_1 and H_2 are isomorphic.

An answer to the question above can be formulated in terms of two notions: *geometric equivalence and geometrically automorphical equivalence of algebras.* Speaking informally, algebras are geometrically equivalent if they have equal possibilities with respect to solving systems of equations. The notion of the geometrically automorphical equivalence of algebras is concerned with automorphisms of the category Θ^0 of free finitely generated algebras in Θ.

Algebras are geometrically equivalent if and only if they are automorphically equivalent for some inner automorphism of the category Θ^0 of free finitely generated algebras from Θ. So, the principal role in studying of the geometrical similarity of algebras from Θ plays the group of automorphisms $Aut(\Theta^0)$ of the category Θ^0 and its quotient group $Out(\Theta^0) = Aut(\Theta^0)/Inn(\Theta^0)$, where $Inn(\Theta^0)$ is the group of inner automorphisms of Θ^0.

The method of verbal operations provides a machinery to calculate the group $Out(\Theta^0)$. It turns out that for the wide class of varieties an automorphism of the category Θ^0 can be represented as a decomposition of an inner and a strongly stable automorphisms. Moreover, there is one-to-one correspondence between strongly stable automorphisms and special systems of verbal words. The method of verbal operations allows us to choose suitable systems of verbal words among all possible systems of verbal words. This is the way to get a description of the group $Out(\Theta^0)$.

The main goal of this talk is give a brief introduction to Universal Algebraic Geometry and to describe the method of verbal operations for the characterization of automorphisms of the category Θ^0. In the presented form this method extends and specifies some ideas from [**1**] and [**2**].

References

[1] Plotkin B., Zhitomirski G. Automorphisms of categories of free algebras of some varieties // Journal of Algebra. 2006. Vol. 306, No. 2. P. 344–367.

[2] Tsurkov A. Automorphic equivalence of linear algebras // Journal of Algebra and Its Applications. 2014. Vol. 13, No. 7. 14 pp.

Federal University of Rio Grande do Norte, Natal/RN (Brazil)
E-mail: aladovael@mail.ru

On algebras of binary formulas for almost omega-categorical weakly o-minimal theories

A. B. Altayeva, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov

In [**1**] algebras of distributions of binary isolating formulas for countably categorical weakly o-minimal theories were described, and in [**2**] — the corresponding algebras for quite o-minimal theories with small number of countable models. Also in [**3**] algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups were described. In the present lecture we describe algebras of distributions of binary isolating formulas for almost ω-categorical weakly o-minimal theories.

Let M be a weakly o-minimal structure, $A \subseteq M$, M be $|A|^+$–saturated, $p, q \in S_1(A)$ be non-algebraic. We say that p is not *weakly orthogonal* to q (denoting this by $p \not\perp^w q$) if there exist an A–definable formula $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ and $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ such that $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ and $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Definition. [**4, 5**] *Let T be a complete theory, and $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$. A type $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_n(\emptyset)$ is said to be a $(p_1, \ldots, p_n)$-*type *if $q(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i)$. The set of all $(p_1, \ldots, p_n)$-types of the theory T is denoted by $S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$. A countable theory T is said to be* almost ω-categorical *if for any types $p_1(x_1)$, …, $p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ there are only finitely many types $q(x_1, \ldots, x_n) \in S_{p_1,\ldots,p_n}(T)$.*

Theorem. *Let T be an almost ω-categorical weakly o-minimal theory, $p, q \in S_1(\emptyset)$ be non-algebraic, $p \not\perp^w q$. Then the following conditions are equivalent:*

(1) Algebra $\mathfrak{P}_{\nu(\{p,q\})}$ is generalized commutative;

(2) $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$.

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544).

References

[1] Emel'yanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures // Algebra and Logic, 2017, Vol. 56, No. 1. P. 13–36.

[2] Emel'yanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions of binary isolating formulas for quite o-minimal theories // Algebra and Logic, 2019, Vol. 57, No. 6. P. 429–444.

[3] Baikalova K. A., Emel'yanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Palyutin E.A., Sudoplatov S. V. On algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered enrichments // Russian Mathematics, 2018, Vol. 62, No. 4. P. 1–12.

[4] Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly, 1998, Vol. 44, No. 2. P. 161–166.

[5] Sudoplatov S. V. Classification of countable models of complete theories. Parts 1 and 2. Novosibirsk: NSTU, Novosibirsk, 2018.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan); Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan); Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

E-mail: vip.altayeva@mail.ru, b.kulpeshov@kbtu.kz, sudoplat@math.nsc.ru

Quasi-identities of pointed abelian groups

A. O. Basheyeva

A pointed (Abelian) group $\mathbf{G} = \langle G; \sigma \cup \{c\} \rangle$ is an algebra of signature $\sigma \cup \{c\}$ with a constant c which σ-reduct $\langle G; \sigma \rangle$ is an (Abelian) group. An algebra $\mathbf{A}$ has a finite basis of (quasi-)identities if the (quasi)variety generated by $\mathbf{A}$ is finitely axiomatizable.

The well-known theorem of S. Oates and M.B.Powell [**1**] states that every finite group has a finite basis of identeties. The R. M. Bryant [**2**] has constructed a finite pointed group $\mathcal{G} = \langle G, c \rangle$ that has no finite basis of identities. Olshansky [**3**] proved that a finite group has a finite basis of quasi-identities iff its every Sylov's subgroup is Abelian. The problem "Which finite pointed group has finite basis of quasi-identities?" is still open.

The main purpose of this work is to study the identities and quasi-identities of finite pointed Abelian groups and prove:

Theorem. *Every finite pointed Abelian group has finite basis of quasi-identities and identities.*

The author supported by the Ministry of Education and Sciences of Kazakhstan (grant AP05132349).

References

[1] Oates S., Powell M.B. Identical relations in finite groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 11–39.
[2] Bryant R. M. The law of finite pointed groups // London Math. Soc. 1982. Vol. 14. P. 119–123.
[3] Olshanskii A. Yu. Conditional identities in finite group // Sib. Math. Journal. 1964. Vol. 15, No. 6. P. 1000–1003.

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan (Kazakhstan)
E-mail: basheeva@mail.ru

Finite groups acting on abelian groups of finite Morley rank

A. V. Borovik

Notation and terminology follow [**ABC**]. Let V be a connected abelian group of finite Morley rank. Let G be a finite set of definable isomorphisms $V \longrightarrow V$ closed under composition and inversion. We shall say in this situation that a finite group G acts on V *definably*.

Let H be a finite group and p a prime number. We introduce two parameters characterizing the size and complexity of H.

- $d_p(H)$ is the minimal degree of a faithful linear representation of H over the algebraically closed field $\overline{\mathbb{F}_p}$.
- $r_p(H)$ is the minimal Morley rank of an infinite elementary abelian p-group V of finite Morley rank such that H acts on V faithfully and definably.

Theorem. *In this notation,*

$$d_p(H) = r_p(H).$$

This theorem is yet another result which emphasises close connections and analogies between groups of finite Morley rank, on one hand, and finite groups and algebraic groups, on another. It is motivated by a result of Berkman and Borovik:

[BB, Theorem 1]. *Let G and V be groups of finite Morley rank, V a connected abelian group of Morley rank n without involutions. Assume that G acts on V definably, and the action is generically sharply m-transitive for $m \geqslant n$. Then $m = n$, and there is an algebraically closed field F such that $V \simeq F^n$ and $G \simeq GL_F(V)$, and the action is the natural action.*

Here, '*generically m-transitive*' means that G has a generic orbit on V^m, '*sharply*' – that the stabilizer K of a point in this orbit is trivial. The Theorem above is needed for removal of the 'sharpness' assumption from [**BB**, Theorem 1] – this is our work in progress – and is applied to the delicate case when K is finite. A wider discussion of this circle of problems can be found in the survey [**BD**].

References

[ABC] Altınel T., Borovik A. V., Cherlin G. Simple Groups of Finite Morley Rank // Amer. Math. Soc. Monographs Series, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[BB] Berkman A., Borovik A. Groups of finite Morley rank with a generically sharply multiply transitive action // J. Algebra. 2018. Vol. 513. P. 113–132.

[BD] Borovik A., Deloro A. Binding groups, permutation groups and modules of finite Morley rank // To appear in M. Fitting et al. (Eds.), Research Trends in Contemporary Logic, College Publications, 2020. arXiv:1909.02813v1, 2019.

Manchester University, Manchester (United Kingdom)
E-mail: alexandre@borovik.net

On function spaces

Yu. L. Ershov, M. V. Schwidefsky

Consider the following properties of topological T_0-spaces:

(1) to be a d-space;
(2) to be a topological join-semilattice;
(3) to be a sober space;
(4) to be an essentially complete space;
(5) to be a [restricted] injective space;
(6) to be a [sober] Δ-space.

Let $\mathfrak{P}$ denote one of the properties (1)–(4). Then a T_0-space $\mathbb{Y}$ has $\mathfrak{P}$ if and only if $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ has $\mathfrak{P}$ for some (and therefore for each) T_0-space $\mathbb{X}$. Let $\mathfrak{Q}$ denote one of the properties (5)–(6). Then a T_0-space $\mathbb{Y}$ has $\mathfrak{Q}$ if and only if $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ has $\mathfrak{Q}$ for some (and therefore for each) α^*-space $\mathbb{X}$. A T_0-space $\mathbb{Y}$ is a [sober] Δ-space if and only if $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ is a [sober] Δ-space for some (and therefore for each) Δ-space $\mathbb{X}$.

Both authors were supported by the fundamental research program of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences I.1.1, project 0314-2019-0003, and by RFBF, project 18-01-00624a.

References

[1] Ershov Yu. L. Topology for Discrete Mathematics. SB RAS Publishing House, Novosibirsk, 2020.
[2] Ershov Yu. L., Schwidefsky M. V. On function spaces // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 999–1008. Available at http://semr.math.nsc.ru/v17/p999-1008.pdf.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: ershov@math.nsc.ru, semenova@math.nsc.ru

On concrete characterization problem of universal graphic automata

R. A. Farakhutdinov

Graphic automaton is an automaton $A = (X, S, \delta)$, for which the set of states is equipped with the structure of a graph $G = (X, \rho)$ preserved by transition functions of the automaton. Graphic automaton $\mathrm{Atm}(G) = (G, \mathrm{End}\, G, \delta)$, where $\delta(x, \varphi) = \varphi(x)$ for $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{End}\, G$, is a universally attracted object in the category of automata [**1**]. For this reason the automaton $\mathrm{Atm}(G)$ is called universal graphic automaton over the graph G. An edge $(x, y) \in \rho$ is called proper if $(y, x) \notin \rho$. A graph is called quasi-acyclic if all its proper edges don't belong to any cycle. In this paper we investigate the following concrete characterization problem of these automata: under which conditions for an automaton $A = (X, S, \delta)$ it is possible to construct on the set X a structure of reflexive quasi-acyclic graph $G = (X, \rho)$, such that the equality $A = \mathrm{Atm}(G)$ holds.

Let $A = (X, S, \delta)$ be an automaton without equal acting input symbols. For $x, y, u, v \in X$ the symbol $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ means that there exists $s \in S$ satisfying $\delta_s(X) = \{u, v\}$, $\delta_s(x) = u$, $\delta_s(y) = v$. For an automaton $A = (X, S, \delta)$ we define on the set X two canonical binary relations Q and R. The relation Q contains all pairs $(x, y) \in X \times X$, such that conditions $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$, $\neg \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ hold. The relation R contains all pairs $(x, y) \in X \times X$, such that the condition $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$ holds for all $u, v \in X, u \neq v$. For an automaton $A = (X, S, \delta)$ the semigroup S is called QR-closed if the following condition holds for each transformation f of the set X:

$$((\forall\ (x, y) \in Q \cup R)\, (\exists s \in S)\, (\delta_s|\{x, y\} = f|\{x, y\})) \Longrightarrow (\exists\ t \in S)\, (f = \delta_t)\,.$$

Theorem. *Let $A = (X, S, \delta)$ be an automaton without equal acting input symbols. Then A is universal graphic automaton $\mathrm{Atm}(G)$ for some reflexive quasi-acyclic graph $G = (X, \rho)$ iff the semigroup S is QR-closed and its canonical relations Q, R satisfy the following conditions:*

(1) $(x, x) \in R$ *for all* $x \in X$;

(2) $(x, y) \in Q \wedge (u, v) \in Q \Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \neg \begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix} \right)$;

(3) $(x, y) \in Q \wedge \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix} \wedge (u, v) \in R \ \vee \ \neg \begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix} \wedge (u, v) \in Q \right)$.

References

[1] Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. Algebraic structures in automata and databases theory // River Edge, NJ : World Scientific, 1992, 296 p. DOI: doi.org/10.1142/1631

Saratov State University, Saratov
E-mail: renatfara@mail.ru

Classification of limit varieties of $\mathcal{J}$-trivial monoids

S. V. Gusev, O. B. Sapir

A variety of algebras is called *finitely based* if the identities it satisfies are finitely axiomatizable, otherwise, the variety is said to be *non-finitely based*. A variety is called a *limit variety* if it is non-finitely based but every its proper subvariety is finitely based.

Only five explicit examples of limit varieties of monoids are known so far. The first two examples of such varieties were discovered by Jackson [**2**] in 2005. In [**3**], Zhang and Luo pointed out the third example of limit monoid variety. Finally, the fourth and the fifth examples of limit monoid varieties are provided by the first-named author in [**1**].

For elements a and b of a monoid, Green's equivalence $\mathcal{J}$ is defined by: $a\mathcal{J}b \iff a$ and b generate the same ideal. A monoid is called $\mathcal{J}$*-trivial* if Green's equivalence $\mathcal{J}$ on it is the equality relation. In this work, we present a new pair of limit varieties of monoids and show that together with the five limit varieties of monoids previously discovered by Jackson, Zhang and Luo and the first-named author, there are exactly seven limit varieties of $\mathcal{J}$-trivial monoids.

The first-named author is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FEUZ-2020-0016).

References

[1] Gusev S. V., A new example of a limit variety of monoids, Semigroup Forum 101 (2020), 102–120.

[2] Jackson M. G., Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras, Semigroup Forum 70 (2005), 159–187.

[3] Zhang W. T. , Luo Y. F., A new example of limit variety of aperiodic monoids, manuscript; available at: https://arxiv.org/abs/1901.02207.

Ural Federal University, Ekaterinburg; Vanderbilt University, Nashville (USA)
E-mail: sergey.gusb@gmail.com, olga.sapir@gmail.com

Varieties of monoids with permuting fully invariant congruences on their free objects

S. V. Gusev, B. M. Vernikov

A variety of semigroups or monoids **V** is called [*almost*] fi-*permutable* if any two fully invariant congruences on arbitrary **V**-free object F [contained in the least semilattice congruence on F] permute. An interest to fi-permutable and almost fi-permutable varieties is explained by the fact that any such variety has a modular (and moreover, Arguesian) subvariety lattice. A complete description of fi-permutable and almost fi-permutable semigroup varieties is given in [**2**] and [**3**], respectively; a minor inaccuracy in the latter result is fixed in [**1**].

In present work, we completely classify fi-permutable and almost fi-permutable monoid varieties. Namely, we prove that a monoid variety is fi-permutable if and only if it either is a group variety or is a variety of idempotent monoids or is contained in a variety from a certain list of aperiodic varieties (a monoid variety is called *aperiodic* if it does not contain non-trivial groups). This list consists of two countably infinite series and 14 "sporadic" varieties. We also verify that a monoid variety is almost fi-permutable if and only if it either is completely regular (that is, consists of unions of groups) or is contained in a variety from the same list.

As corollaries of main results, we verify that if a non-group [non-completely regular] monoid variety is [almost] fi-permutable then its subvariety lattice is distributive. Analogs of these facts for semigroup varieties were found in [**2, 3**]. In particular, we find two new countably infinite series of monoid varieties and three more new "sporadic" monoid varieties with distributive subvariety lattice. Note that only a few examples of monoid varieties with distributive subvariety lattices are known so far. So, each new example of a variety with such a property is of some independent interest.

Two more corollaries of main results are the following facts: the class of all almost fi-permutable monoid varieties is closed under taking of subvarieties; a non-completely regular almost fi-permutable monoid variety is fi-permutable. Analogs of these two claims for semigroup varieties are not the case [**2, 3**].

The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FEUZ-2020-0016).

References

[1] Vernikov B. M., Shaprynskiĭ V. Yu. Three weaker variants of congruence permutability for semigroup varieties // Siberian Electronic Math. Reports. 2014. Vol. 11. P. 567–604 [Russian].

[2] Vernikov B. M., Volkov M. V. Permutability of fully invariant congruences on relatively free semigroups // Acta Sci. Math. (Szeged). 1997. Vol. 63. P. 437–461.

[3] Vernikov B. M., Volkov M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.

Ural Federal University, Ekaterinburg
E-mail: sergey.gusb@gmail.com, bvernikov@gmail.com

On Non-Standard Quasivarieties

A. V. Kravchenko, A. M. Nurakunov, M. V. Schwidefsky

For a structure $\mathcal{A}$ of similarity type σ, we say that $\mathbb{A} = \langle \mathcal{A}, \tau \rangle$ is a *topological structure* if τ is a topology on A and all the basic operations of $\mathcal{A}$ are continuous and all the basic relations on $\mathcal{A}$ are closed with respect to τ. For a topological structure $\mathbb{A}$, we denote its algebraic reduct by $\mathcal{A}$ and its topology by $\tau_{\mathbb{A}}$. A topology τ on a set A is *Boolean* if the topological space $\langle A, \tau \rangle$ is Hausdorff, compact, and admits a base of clopen sets. A topological structure $\mathbb{A}$ is *Boolean* if $\tau_{\mathbb{A}}$ is a Boolean topology. A structure is said to be *profinite* (*with respect to* $\mathbf{K}$) if it is isomorphic to the inverse limit of a spectre of finite structures (from $\mathbf{K}$). A prevariety $\mathbf{K}$ is said to be *standard* if every Boolean topological structure $\mathbb{A}$ with $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ is profinite with respect to $\mathbf{K}$.

The notion of a B-class was introduced by the authors and used in proofs of results on complexity of quasivarieties. For example, it allows us to find continuum many subquasivarieties with no independent basis, with undecidable quasi-equational theory, with undecidable finite membership problem, etc. We prove one more complexity result.

Theorem. *If there exists a finite* B*-class with respect to a quasivariety* $\mathbf{M}$ *of structures of finite similarity type then there are continuum many subquasivarieties of* $\mathbf{M}$ *that are not standard.*

IM SB RAS, NSU, and NSTU, Novosibirsk; Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences, Bishkek (Kyrgyzstan)
E-mail: a.v.kravchenko@mail.ru

On closures for families of theories

N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov

We define and study natural generalizations of E-closures $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ [**1, 2**] of families $\mathcal{T}$ of complete theories for arbitrary families of theories, possibly incomplete.

Following [**1, 2**] for a family $\mathcal{T}$ of theories and a sentence φ we denote by $\mathcal{T}_\varphi$ the family $\{T \in \mathcal{T} \mid \varphi \in T\}$.

Definition. We say that a theory T *belongs to the closure* $\mathrm{Cl}_s(\mathcal{T})$ (respectively, $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T})$) if $T \in \mathcal{T}$ or T is axiomatized by a maximal set of sentences φ (respectively, $\varphi \wedge \neg\psi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_n$) such that $\mathcal{T}_\varphi$ (respectively, $\mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_n}}$) is nonempty (where $\overline{\mathcal{T}_{\psi_i}} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_{\psi_i}$).

Notice that families for $\mathrm{Cl}_s(\mathcal{T})$ are formed by sentences in $\bigcup \mathcal{T}$ whereas families for $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T})$ are extended by boolean combinations of sentences in $\bigcup \mathcal{T}$. Moreover, theories T in $\mathcal{T}$ are transformed into theories $T^* \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T})$ with $T^* \supset T$ by adding of T_2-separating sentences: if $T, T' \in \mathcal{T}$ with $T \neq T'$ then there is a sentence $\varphi \in T^*$ with $\neg\varphi \in (T')^*$, or $\neg\varphi \in T^*$ with $\varphi \in (T')^*$. Thus, the family $\mathcal{T}$ obtains, in $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T})$, a correspondent family $\mathcal{T}^*$ consisting of theories T^* for theories $T \in \mathcal{T}$ which are T_2-separated. The operator $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}^*$ inside $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T})$ is called the *Hausdorffization* of the family $\mathcal{T}$.

The operators $\mathrm{Cl}_s(\mathcal{T})$ and $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T})$ are reflexive, transitive, but can fail under monotony with respect to extensions of families: there are families $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ such that $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1$, $\mathrm{Cl}_s(\mathcal{T}_0) \nsubseteq \mathrm{Cl}_s(\mathcal{T}_1)$ and $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T}_0) \nsubseteq \mathrm{Cl}_{\mathrm{Bs}}(\mathcal{T}_1)$.

Definition. For a family $\mathcal{T}$ of theories in a language Σ and a theory T we put $T \in \mathrm{Cl}_1(\mathcal{T})$ if $T \in \mathcal{T}$, or T is nonempty and $T = \{\varphi \in F(\Sigma) \mid |(\mathcal{T}')_\varphi| \geq \omega\}$ for some $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. If $\mathcal{T}'$ is fixed then we say that T *belongs to the* Cl_1*-closure of* $\mathcal{T}$ *with respect to* $\mathcal{T}'$, and T is an *accumulation point* of $\mathcal{T}$ with respect to $\mathcal{T}'$.

Theorem. *For any family $\mathcal{T}$ of complete theories in at most countable language Σ, $\mathrm{Cl}_1(\mathcal{T}) = \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$.*

The property in Theorem as well as the transitivity of Cl_1 can fail for languages Σ of uncountable cardinalities.

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP08855497, AP08855544) and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

References

[1] Sudoplatov S. V. Closures and generating sets related to combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2016. Vol. 16. P. 131–144.

[2] Sudoplatov S. V. Combinations of structures and of their theories (an informative survey) // Algebra and model theory 12. Collection of papers. Novosibirsk: NSTU, 2019. P. 86–127.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk

E-mail: nur_24.08.93@mail.ru, sudoplat@math.nsc.ru

On approximations of acyclic graphs

N. D. Markhabatov

We consider approximations of acyclic graphs with bounded and unbounded diameters.

Definition [**1**]**.** Let $\mathcal{T}$ be a class of theories and T be a theory, $T \notin \mathcal{T}$. The theory T is called *$\mathcal{T}$-approximated*, or *approximated by $\mathcal{T}$*, or *$\mathcal{T}$-approximable*, or a *pseudo-$\mathcal{T}$-theory*, if for any formula $\varphi \in T$ there is $T' \in \mathcal{T}$ such that $\varphi \in T'$. If T is $\mathcal{T}$-approximated then $\mathcal{T}$ is called an *approximating family* for T, and theories $T' \in \mathcal{T}$ are *approximations* for T.

Definition [**2**]**.** An infinite structure $\mathcal{M}$ is *pseudofinite* if every sentence true in $\mathcal{M}$ has a finite model. If $T = Th(\mathcal{M})$ for pseudofinite $\mathcal{M}$ then T is called pseudofinite as well.

Let $\mathcal{G}_{fin}(\lambda)$ be the family of all infinite acyclic graphs consisting of λ connected components of bounded diameters.

Theorem 1. *Any theory T of an infinite acyclic graph (tree) from the class $\mathcal{G}_{fin}(1)$ is pseudofinite with respect to acyclic graphs (trees).*

Theorem 2. *An acyclic graph G from the class $\mathcal{G}_{fin}(n)$, $n \geq 2$, is not approximated by finite trees.*

Let $\mathcal{G}_{inf}(\lambda)$ be the family of all infinite acyclic graphs consisting of λ connected components of unbounded diameters.

Theorem 3. *A theory T of an acyclic graph from the class $\mathcal{G}_{inf}(\lambda)$, for some cardinality λ, with a finite number of hanging vertices is pseudofinite if and only if the number of rays in $G \models T$ is even.*

Corollary 1. *For any $\lambda > 1$ there is a pseudofinite acyclic graph with lambda hanging vertices.*

Corollary 2. *There is a theory T of an acyclic graph $G \in \mathcal{G}_{inf}(1)$ which is not pseudofinite.*

Theorem 4. *An infinite acyclic graph $G \in \mathcal{G}_{inf}(\lambda)$, for some cardinality λ, with infinitely many hanging vertices is pseudofinite.*

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP08855544) and Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 20-31-90003).

References

[1] Sudoplatov S. V. Approximations of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 715–725. DOI 10.33048/semi.2020.17.049

[2] Rosen E. Some Aspects of Model Theory and Finite Structures // The Bulletin of Symbolic Logic. 2002. Vol. 8, No. 3. P. 380–403.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk
E-mail: nur_24.08.93@mail.ru

On generations for families of theories of abelian groups

In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov

Using a characterization of existence of least/minimal generating set for a family of theories [**1**, Theorem 5] and approximations of theories of abelian groups in terms of Szmielew invariants [**2, 3**] we adapt this characterization for an arbitrary family of theories of abelian groups.

Theorem. *If $\mathcal{T}'_0$ is a generating set for a E-closed set $\mathcal{T}_0$ of theories of abelian groups then the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathcal{T}'_0$ is the least generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(2) *$\mathcal{T}'_0$ is a minimal generating set for $\mathcal{T}_0$;*

(3) *any theory in $\mathcal{T}'_0$ is isolated by some set $(\mathcal{T}'_0)_\varphi$, i.e., for any $T \in \mathcal{T}'_0$ there is $\varphi \in T$ such that $(\mathcal{T}'_0)_\varphi = \{T\}$;*

(4) *any theory in $\mathcal{T}'_0$ is isolated by some set $(\mathcal{T}_0)_\varphi$, i.e., for any $T \in \mathcal{T}'_0$ there is $\varphi \in T$ such that $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$;*

(5) *for any finite set of Szmielew invariants ξ of a theory $T \in \mathcal{T}'_0$ there are no infinitely many theories $T_k \in \mathcal{T}'_0$, $k \in \omega$, such that each ξ either coincides for all T_k and for T or ξ for T is a limit of correspondent Szmielew invariants for T_k (either of same name ξ or as a limit for $\alpha^{T_k}_{p,n}$).*

Corollary 1. *There are continuum many E-closed families of theories of abelian groups with(out) least generating sets.*

Corollary 2. *Any E-closed set of theories of abelian groups generated by theories of finite abelian groups has the least generating set consisting of these groups.*

Corollary 3. *Let $\mathcal{T}$ be an E-closed set of theories of abelian groups such that for each prime p there are only finitely many theories with positive Szmielew invariants $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p. Then $\mathcal{T}$ has the least generating set.*

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP08855497) and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

References

[1] Sudoplatov S. V. Closures and generating sets related to combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2016. Vol. 16. P. 131–144.

[2] Pavlyuk I. I., Sudoplatov S. V. Ranks for families of theories of abelian groups // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2019. Vol. 28. P. 95–112.

[3] Pavlyuk I. I., Sudoplatov S. V. Approximations for Theories of Abelian Groups // Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 8, No. 2. P. 220–224.

Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk

E-mail: pavlyuk@corp.nstu.ru, sudoplat@math.nsc.ru

First order rigidity for algebraic groups

E. Plotkin

We will survey a series of recent developments in the area of first order descriptions of linear groups. The goal is to illuminate the known results and to pose the new problems relevant to logical characterizations of Chevalley groups and Kac–Moody groups. We also dwell on the principal problem of isotipicity of finitely generated groups.

The main question behind all considerations is as follows. Suppose we have two algebras equipped with a sort of logical description.

Problem. When the coincidence of logical descriptions provides an isomorphism between algebras in question?

We will describe the current state of art of the problem: when the elementary equivalence of a linear group to another one implies their isomorphism. Situation of such kind will be called, for short, elementary rigidity. Usually we restrict ourselves with some class of groups $\mathcal{C}$ and consider all rigidity questions with respect to $\mathcal{C}$.

Our second aim is to describe the notions of isotypicity of algebras and logical equivalence of algebras. These notions are much less known than elementary equivalence. However, they can logically characterize algebras in a very rigid way and one can expect affirmative answers to most of the problems formulated.

Regarding elementary rigidity for algebraic groups I am going to describe the recent results by N. Avni - A. Lubotzky - C. Meiri, M. Sohrabi - A. Myasnikov, and K.Tent - D.Sigal. If time permits, the proof of the following result [**1**]:

Theorem. *The Chevalley group $G = G(\Phi, R)$ is elementarily rigid in the class of all finitely generated groups, if R is a ring of Laurent polynomials over the finite field, i.e., $R = F_q[x, x^{-1}]$, $char F_q \neq 2$.*

will be outlined. The isotipic rigidity questions are focused on the principal conjecture:

Conjecture. Every finitely generated group is isotipically rigid in the class of all finitely generated groups.

We will discuss the recent results by R. Sclinos, N. Romanovskii - A. Myasnikov, G. Zhitomirski towards its solution.

References

[1] Capdeboscq I., Kunyavskii B., Plotkin E. Vavilov N. Commutator width of Kac- Moody groups over finite fields, to appear.

Bar-Ilan University, Ramat Gan (Israel)
E-mail: plotkin.evgeny@gmail.com

On subgroup lattices of locally finite 2-groups

V. B. Repnitskiĭ

The problem of representation of lattices by subgroup lattices occupies a prominent place in the aspect of representation of lattices by derived lattices of one kind or another. One of the most striking result here is due to Ph. M. Whitman [**1**] and states that every lattice can be embedded in the subgroup lattice of some group. For a given class K of groups, we say that **K** is *lattice-universal* if every lattice is embeddable in the subgroup lattice of some group from **K**. In this sense the class of all groups is lattice-universal.

In connection with Whitman's result the following question arises: *which are natural proper classes of groups satisfying the condition of lattice universality?* In this direction the author proved in [**2**] that every lattice can be embedded in the subgroup lattice of a Burnside group satisfying the identity $x^k = 1$, where k is odd and $k \geq 665$. Continuing on this path, we proved in [**3**] that non-soluble group varieties are close in some sense to lattice-universal ones, namely, every lattice with Whitman's condition and, in particular, every free lattice can be embedded in the subgroup lattice of a free group in an arbitrary non-soluble group variety. The opposite pole of results concerns the aspect of representation of lattices by subgroup lattices of soluble and nilpotent groups. In [**4**] and [**5**] we have found not-trivial identities which have to be fulfilled on subgroup lattices of metabelian groups and of nilpotent groups of a fixed nilpotency class. So both the class of metabelian and the class of all nilpotent groups are not lattice-universal. It should be noted that natural extensions of the classes of soluble and nilpotent groups are respectively the classes of locally soluble and locally nilpotent groups. It is well known that the class of all locally soluble groups includes the class of all locally nilpotent groups, which in turn includes the class of all locally finite 2-groups. The following theorem is valid.

Theorem. *The class of all locally finite 2-groups is lattice-universal.*

References

[1] Whitman Ph. M., Lattices, equivalence relations, and subgroups, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 507-522.

[2] Repnitskiĭ V. B., Lattice universality of free Burnside groups, Algebra and Logic. **35**, 330-343 (Translated from Algebra i Logika. **35** (1996), 587-611).

[3] Repnitskiĭ V. B., On the representation of lattices by subgroup lattices, Algebra Univers. **37** (1997), 81-105.

[4] Repnitskiĭ V. B., On equational properties of subgroup lattices of metabelian groups, Le Matematiche. LI (1996) - Supplemento, 189-196.

[5] Repnitskiĭ V. B., Nilpotency of algebras and identities on subalgebra lattices, in: Semigroups with applications, including semigroup rings (S. Kublanovsky, A. Mikhalev, P. Higgins, J. Ponizovskiĭ, eds.) Saint-Petersburg, 1999, p.p. 317-330.

Ural Federal University, Ekaterinburg
E-mail: vladimir.repnitskii@urfu.ru

On semigroups of elementary types

M. V. Schwidefsky

For an arbitrary algebraic structure $\mathcal{A}$, let $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ denote the elementary theory of $\mathcal{A}$; that is, the set of all first-order sentences true in $\mathcal{A}$.

Let a class $\mathbf{K}$ of algebraic structures be closed under Cartesian products. For algebraic structures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{K}$, we put $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) * \mathrm{Th}(\mathcal{B}) = \mathrm{Th}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$. It is not hard to verify that the operation $*$ is associative and commutative. Moreover, $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) * \mathrm{Th}(\mathcal{E}) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$, where $\mathcal{E}$ is a trivial structure of the same type. Therefore, the algebraic structure

$$\mathcal{T}_{\mathbf{K}} = \big\langle \{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathbf{K}\}; * \big\rangle$$

is a commutative semigroup with a neutral element. We call this semigroup the *semigroup of elementary types of* $\mathbf{K}$.

We present a series of results which concern the structure complexity of the subsemigroup lattices of semigroups of elementary types.

References

[1] Schwidefsky M. V. On a class of subsemigroup lattices // Siberian Math. J. 2020. Vol. 61, No. 5. P. 941–952.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk
E-mail: semenova@math.nsc.ru

On a hierarchy for families of theories

S. V. Sudoplatov

Throughout we study families $\mathcal{T}$ of complete first-order theories, their E-closures $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T})$ [**1, 2**], RS-ranks $\mathrm{RS}(\mathcal{T})$ and ds-degrees $\mathrm{ds}(\mathcal{T})$ with respect to neighbourhoods $\mathcal{T}_\varphi$ [**3**], as well as their generalizations for the following hierarchy. Let Σ be a language and $\mathcal{T}_\Sigma$ be the family of all complete theories in the language Σ. We consider both an approach for the construction of hereditarily finite sets [**4**] with urelements in $\mathcal{T}_\Sigma$ and, more generally, of sets in $V_{\alpha,\Sigma}$, where for ordinals α the sets $V_{\alpha,\Sigma}$ are defined by the following regular process (cf. [**5**, Section 2.6]): a) $V_{0,\Sigma} = \mathcal{T}_\Sigma$; b) $V_{\alpha,\Sigma} = \mathcal{P}\left(\bigcup\limits_{\gamma\leq\beta} V_{\gamma,\Sigma}\right)$, if $\alpha = \beta + 1$; c) $V_{\alpha,\Sigma} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_{\beta,\Sigma}$, if α is a limit ordinal. A set $\mathcal{T}$ with $\mathcal{T} \in V_{\alpha,\Sigma} \setminus \mathcal{T}_\Sigma$ for some ordinal α is called *regular*. Each regular set $\mathcal{T}$ has an ordinal $\rho(\mathcal{T})$ which is called the *rank* of $\mathcal{T}$ and is defined as the least ordinal with $\mathcal{T} \in V_{\rho(\mathcal{T}),\Sigma}$. For any regular family $\mathcal{T}$ we denote by $\mathrm{ur}(\mathcal{T})$ the set of all urelements in $\mathcal{T}_\Sigma$ which used for the construction of $\mathcal{T}$: 1) if $\rho(\mathcal{T}) = 1$ then $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\Sigma$ and $\mathrm{ur}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$; 2) if $\rho(\mathcal{T}) = \alpha > 1$ then $\mathrm{ur}(\mathcal{T}) = \bigcup\limits_{\mathcal{T}'\in\mathcal{T}} \mathrm{ur}(\mathcal{T}')$.

Theorem 1. *For any two disjoint subfamilies $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ of an E-closed family $\mathcal{T}$ of urelements the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ are separated by some sentence φ: $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_\varphi$ and $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_{\neg\varphi}$;*

(2) *E-closures of $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ are disjoint in $\mathcal{T}$: $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_1) \cap \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_2) \cap \mathcal{T} = \emptyset$;*

(3) *E-closures of $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ are disjoint: $\mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_1) \cap \mathrm{Cl}_E(\mathcal{T}_2) = \emptyset$.*

For a regular family $\mathcal{T}$ we introduce ranks $\mathrm{RS}^\forall(\mathcal{T})$, $\mathrm{RS}^\exists(\mathcal{T})$ and degrees $\mathrm{ds}^\forall(\mathcal{T})$, $\mathrm{ds}^\exists(\mathcal{T})$ due all/some urelements in $\mathrm{ur}(\mathcal{T})$.

Theorem 2. 1. *For any $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord} \cup \{\infty\}$ with $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ there is a regular family $\mathcal{T}$ such that $\rho(\mathcal{T}) = 2$, $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$, $\mathrm{RS}^\forall(\mathcal{T}) = \beta$, $\mathrm{RS}^\exists(\mathcal{T}) = \gamma$.*

2. *For any ordinal α and natural k, m, n with $0 < k \leq m \leq n$ there is a regular family $\mathcal{T}$ such that $\rho(\mathcal{T}) = 2$, $\mathrm{RS}(\mathcal{T}) = \mathrm{RS}^\forall(\mathcal{T}) = \mathrm{RS}^\exists(\mathcal{T}) = \alpha$, $\mathrm{ds}(\mathcal{T}) = k$, $\mathrm{ds}^\forall(\mathcal{T}) = m$, $\mathrm{ds}^\exists(\mathcal{T}) = n$.*

The research is partially supported by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP08855544) and the program of fundamental scientific researches of the SB RAS No. I.1.1, project No. 0314-2019-0002.

References

[1] Sudoplatov S. V. Closures and generating sets related to combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2016. Vol. 16. P. 131–144.

[2] Sudoplatov S. V. Combinations of structures and of their theories (an informative survey) // Algebra and model theory 12. Collection of papers. Novosibirsk: NSTU, 2019. P. 86–127.

[3] Sudoplatov S. V. Ranks for families of theories and their spectra // arXiv:1901.08464v1 [math.LO], 2019, 17 p.

[4] Barwise J. Admissible sets and structures. An approach to definability theory. Perspectivities in Mathematical Logic. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1975. 396 p.

[5] Ershov Yu. L., Palyutin E. A. Mathematical Logic. Moscow: Fizmatlit, 2011. 356 p.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru

The least dimonoid congruence on the free commutative g-dimonoid

A. V. Zhuchok

Loday introduced the notion of a dimonoid [**1**] as a tool to study Leibnitz algebras. The g-dimonoids were introduced in [**2**] as a generalization of dimonoids. Every 0-dialgebra with associative operations [**3**] is a linear analog of a g-dimonoid.

Let A be an arbitrary nonempty set and $\overline{A} = \{\overline{x} \,|\, x \in A\}$. The length of an arbitrary word w over A is denoted by $l(w)$. For every $x \in A$ assume $\widetilde{\overline{x}} = x$ and introduce a map $\alpha = \alpha_A : A \cup \overline{A} \to A$ by the rule $y\alpha = \begin{cases} y, & y \in A, \\ \widetilde{y}, & y \in \overline{A}. \end{cases}$ Let further S be an arbitrary semigroup. Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on $S \cup \overline{S}$ by

$$c \dashv d = (c\alpha_S)(d\alpha_S), \quad c \vdash d = \overline{(c\alpha_S)(d\alpha_S)}$$

for all $c, d \in S \cup \overline{S}$. The algebra $(S \cup \overline{S}, \dashv, \vdash)$ is denoted by $S^{(\alpha)}$. By Lemma 1 of [**4**], $S^{(\alpha)}$ is a g-dimonoid but not a dimonoid. If X is a generating set for a semigroup S, then $S^{(\alpha)} \backslash \overline{X}$ is a g-subdimonoid of $S^{(\alpha)}$ generated by X. The g-dimonoid $S^{(\alpha)} \backslash \overline{X}$, in which S is the free commutative semigroup on X, is denoted by $FCgD(X)$.

Theorem 1. *([**4**], Theorem 1) $FCgD(X)$ is the free commutative g-dimonoid on X.*

If ρ is a congruence on a g-dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ such that $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ is a dimonoid, we say that ρ is a dimonoid congruence. If ρ is a congruence on a g-dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$ such that operations of $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ coincide, we say that ρ is a semigroup congruence.

Theorem 2. *Let $FCgD(X)$ be the free commutative g-dimonoid, $\upsilon_1, \upsilon_2 \in FCgD(X)$, and let $F^\star[X]$ be the free commutative semigroup on X.*

(i) Define a relation $\widetilde{\xi}$ on $FCgD(X)$ by $\upsilon_1 \widetilde{\xi} \upsilon_2$ if and only if

$$\upsilon_1\alpha_{F^\star[X]} = \upsilon_2\alpha_{F^\star[X]} \text{ and } l(\upsilon_1\alpha_{F^\star[X]}) \neq 2, \text{ or } \upsilon_1 = \upsilon_2.$$

Then $\widetilde{\xi}$ is the least dimonoid congruence on $FCgD(X)$.

(ii) Define a relation $\widetilde{\pi}$ on $FCgD(X)$ by

$$\upsilon_1 \widetilde{\pi} \upsilon_2 \quad \text{if and only if} \quad \upsilon_1\alpha_{F^\star[X]} = \upsilon_2\alpha_{F^\star[X]}.$$

Then $\widetilde{\pi}$ is the least semigroup congruence on $FCgD(X)$.

References

[1] Loday, J.-L. Dialgebras // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. 2001. Vol. 1763. Berlin: Springer-Verlag. P. 7–66.

[2] Movsisyan, Y., Davidov, S., Safaryan, M. Construction of free g-dimonoids // Algebra Discrete Math. 2014. Vol. 18, No. 1. P. 138–148.

[3] Pozhidaev, A. P. 0-dialgebras with bar-unity and nonassociative Rota-Baxter algebras // Sib. Math. J. 2009. Vol. 50, No. 6. P. 1070–1080.

[4] Zhuchok, A. V., Zhuchok, Yu. V. Free commutative g-dimonoids // Chebyshevskii Sbornik. 2015. Vol. 16, No. 3. P. 276–284.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Starobilsk (Ukraine)
E-mail: zhuchok.av@gmail.com

IX. Авторский указатель