

МИХАИЛ ПЕРЕТЯТКИН

Выразительная сила логики первого порядка

(аннотация доклада)

Общий вопрос о том что можно выразить одной формулой классической логики предикатов первого порядка долгое время оставался нерешённым и привлекал внимание многих специалистов по математической логике. Важный шаг в решении этого вопроса был сделан Ханфом [1] получившим *локальную теорему*, которая описывает класс всех начальных сегментов алгебры Тарского-Линденбаума исчисления предикатов $PC(\sigma)$ конечной богатой сигнатуры σ , а также *глобальную теорему*, характеризующую тип изоморфизма алгебры Тарского-Линденбаума $\mathcal{L}(PC(\sigma))$ исчисления предикатов $PC(\sigma)$ посредством некоторой явно заданной формулы. Дальнейшим продвижением в этом направлении стала книга [2] представляющая *универсальную конструкцию* конечно аксиоматизируемых теорий и множество её приложений, которые показывают большие выразительные возможности логики первого порядка. В докладе представлен некоторый общий взгляд на данную проблематику в целом. Рассматриваются исследования после выхода книги [2], уточняются и систематизируются понятия сопутствующие описанию универсальной конструкции, что даёт более полную и содержательную картину по полученным результатам в этом направлении.

В работе [3] отмечается, что существует два уровня выразительности логики первого порядка, а именно, *финитарный* (который можно назвать *комбинаторным*), и *инфинитарный* (также называемый *вычислительным*). Финитарному уровню выразительности соответствуют процедуры редукции конечных сигнатур и декартовы расширения теорий, а инфинитарному уровню соответствуют процедуры редукции бесконечных сигнатур к конечным и универсальная конструкция конечно аксиоматизируемых теорий.

Финитарный уровень выразительности логики первого порядка представлен операцией *декартова расширения* теории детализирующей понятие точной интерпретации. Этой операцией определяется *декартов слой* ACL теоретико-модельных свойств (также называемый *финитарным* слоем), на основе которого определено понятие *виртуального изоморфизма* теорий, [4], более общее по сравнению с обычным понятием *формульной эквивалентности* теорий. Ключевой фигурой финитарного уровня выразительности является формально точное определение неформального понятия теоретико-модельного свойства с обоснованием адекватности этого определения практике исследований в теории моделей. Доказано, что задаваемый этим определением слой $AreaL$ реальных теоретико-модельных свойств является, в известном смысле, абсолютным понятием. А именно, этот слой не зависит от выбора разных возможных вариантов его определения, он прямо выражается через отношение виртуального изоморфизма теорий, а также характеризуется некоторой естественной связью с классом смешанно-размерностных интерпретаций.

Инфинитарный уровень выразительности логики предикатов первого порядка определяется некоторыми деталями универсальной конструкции входящими в определение квазиточного слоя MQL теоретико-модельных свойств, которым управляет эта конструкция. По сути, универсальная конструкция конечно аксиоматизируемых теорий, является преобразованием из класса вычислимо аксиоматизируемых теорий различных перечислимых сигнатур в класс конечно аксиоматизируемых теорий заданной конечной богатой сигнатуры, и поэтому, такую конструкцию можно рассматривать как улучшенный вариант процедуры редукции бесконечных сигнатур к конечным. При этом, оба указанных преобразования используют общее определение квазиточного слоя MQL (также называемого *инфинитарным* слоем) и поэтому сохраняют один и тот же слой теоретико-модельных свойств. Это может служить неформальным обоснованием максимальной силы существующей версии универсальной конструкции.

Получены глобальные представления (подобные глобальной формуле Ханфа) для типов изоморфизма обобщённой алгебры Тарского-Линденбаума исчисления предикатов $PC(\sigma)$ конечной богатой сигнатуры σ над финитарным слоем ACL и инфинитарным слоем MQL теоретико-модельных свойств. Кроме того, имеется утверждение, устанавливающее некоторый эффективный переход между этими двумя представлениями. Полученные глобальные формулы выражают в концентрированном виде наиболее общую информацию о выразительной силе логики предикатов первого порядка. В частности, локальные утверждения, такие как процедуры редукции конечных сигнатур и универсальная конструкция конечно аксиоматизируемых теорий, являются непосредственными следствиями этих формул. С другой стороны, сами глобальные формулы получаются в результате некоторой достаточно сложной сборки из локальных утверждений соответствующих уровней (т.е., из процедуры редукции конечных сигнатур и универсальной конструкции). Таким образом, главные результаты финитарного и инфинитарного уровня представленные в глобальной форме являются более значимыми по сравнению с локальными результатами.

Целью доклада является изложение некоторого общего взгляда на комплекс результатов по выразительной силе логики первого порядка в рамках разработанного концептуального подхода на основе комбинаторики первого порядка. К настоящему времени, в этом направлении достигнут значительный прогресс и получены ответы на большинство естественных вопросов, касающихся выразительной силы логики первого порядка.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ ИСТОЧНИКИ

- [1] HANF W. *The Boolean algebra of Logic*, Bull.Amer.Math.Soc., **31**, 1975, 587-589.
- [2] PERETYAT'KIN M.G. *Finitely axiomatizable theories*. Plenum, New York, 1997.
- [3] PERETYAT'KIN M.G. *Finitely axiomatizable theories and similarity relations*, American Math. Soc. Transl., (2) **195**, 1999, 309-346.
- [4] PERETYAT'KIN M.G. *Virtual algebraic isomorphisms between predicate calculi of finite rich signatures*, Algebra and Logic, **60**, No. 6, 2022, 389-406.