Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Международная конференция

# МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

9–14 ноября 2026 г.

Тезисы докладов




Международный математический центр
в Академгородке

Новосибирск • 2026

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

# MAL'TSEV MEETING

November 9–14, 2026

Collection of Abstracts

MATHEMATICAL CENTER IN AKADEMGORODOK

International Mathematical Center
in Akademgorodok

Novosibirsk • 2026

# Содержание

**I. Пленарные доклады** ..... 11
М. М. Арсланов. О проблемах Сакса о структуре вычислимо перечислимых степеней ..... 12
А. Я. Белов. БЕЗ НАЗВАНИЯ ..... 13
М. А. Гречкосеева. Проблема распознавания конечных простых групп по спектру решена ..... 14
С. В. Гусев. Проблема конечного базиса тождеств для аддитивно идемпотентных полуколец ..... 15
В. Н. Желябин, А. П. Пожидаев. Простые конечномерные алгебры Новикова, их представления и автоморфизмы ..... 16
В. Г. Кановей. Конструктивные множества в теории множеств Симпсона ..... 17
К. Ж. Кудайбергенов. Об объединениях цепей алгебр Йонссона ..... 18
О. В. Кудинов. Теоретико-модельные свойства полей и абелевых групп ..... 19
А. В. Манцивода. Мироцентричные семантические модели и их операционная семантика ..... 20
Г. К. Рябов. Классификация абелевых групп Шура ..... 21
С. В. Скресанов. Проблема изоморфизма групп, заданных таблицами умножения 22
А. А. Степанова. Псевдоконечные теории унарных алгебр ..... 23
А. Л. Таламбуца. О проблеме равенства для минимально бесконечных групп .... 24
М. В. Швидефски. Обобщения дуальностей Стоуна и Биркгофа ..... 25
M. G. Amaglobeli, A. G. Myasnikov. General construction of the tensor completion of finitely generated 2-nilpotent groups ..... 26
S. A. Badaev, B. S. Kalmurzayev, N. A. Bazhenov, A. G. Melnikov, A. M. Iskakov. Rogers semilattices for structures ..... 28
A. O. Basheyeva. The problems of finite axiomatizability and profiniteness of quasivarieties of lattices ..... 29
L. D. Beklemishev. The Logic of Choice and Monotone Gödel–Löb ..... 30
E. Daniyarova. Theory of Interpretations and Its Applications ..... 31
F. A. Dudkin. The isomorphism problem for groups acting on trees ..... 33
S. Goncharov. Decidable models in the theory of well-orderings ..... 34
A. S. Kondrat'ev. Finite groups with given properties of their Gruenberg-Kegel graphs ..... 35
V. V. Rybakov. Multi-agent and temporal logics, projective substitutions ..... 36
A. L. Semenov. Progress in Definability Theory, AI, and Education ..... 37
A. Sorbi. The Dyment lattice and intuitionistic logic ..... 38
U. Umirbaev. Automorphisms of Free Metabelian Lie Algebras ..... 39
A. Yeshkeyev. The Kaiser class of Jonsson theories ..... 40
**II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»** ..... 41

В. М. Абраменко. Разработка модуля управления кластерами в среде Kubernetes для ИИ-агента администрирования Apache Kafka ..... 42
Л. В. Авдонина. Разработка цифровых двойников регламентов при помощи онтологических моделей ..... 43
Д. А. Агриколянский. Логическая семантика как источник ошибок генерации кода с использованием больших языковых моделей ..... 44
Л. Е. Анисимов. Методы управления диалогом и блочной оценки ответов в LLM-тренажере собеседований ..... 45
Б. Б. Базаров. Режиссёрский вывод: вероятностная модель динамики сцены для генерации персональных аудио-нарративов по тексту ..... 46
О. П. Валенко. Алгоритм распознавания и восстановления структуры зависимостей квантовых состояний ..... 47
А. Д. Воробьев. Гибридный метод поиска релевантной информации в нормативно-правовых документах для RAG-систем ..... 48
В. Н. Глушкова, К. С. Коровина. Линейно вычислимые регулярные модели дискретных систем реального времени ..... 49
Л. В. Городняя. Алгебро-логический подход к анализу языков программирования 50
Н. А. Доценко. Разработка методов извлечения эмоциональных оценок ситуаций из текстов естественного языка ..... 52
С. Ю. Дуткин. Теоретико-модельный подход к поиску и извлечению знаний из документов в системах электронного документооборота ..... 53
А. Ю. Зубарев. Использование причинно-следственной семантики для редукции пространства состояний непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией ..... 54
К. П. Кондренко. Разработка алгоритма генерации объяснений для модели CLIP 55
Н. С. Косарев. Разработка методов автоматизации планирования в сфере управления ИТ-проектами ..... 56
С. С. Кравцова. Интеллектуальный агент для сопровождения трудоустройства преподавателей кафедры на основе онтологии ..... 57
А. А. Лексина. Построение онтологической модели туристической предметной области при помощи больших языковых моделей ..... 58
В. О. Малышев. Разработка интеллектуального диалогового онлайн-консультанта для выбора электронных устройств на основе динамически обновляемой базы знаний ..... 59
Е. В. Мельникова. Выявление неполноты и противоречивости онтологической модели завода вентиляционного оборудования средствами частичных моделей ..... 60
В. С. Миронов. Методы извлечения эмоциональных оценок из текстов естественного языка и построения оценочных речевых моделей ..... 62
В. А. Москалюк. Сравнительный анализ надежности и точности подходов к оцениванию результатов тестирования ..... 63
А. К. Назаров. Разработка онтологической модели учебного процесса кафедры. 64
И. С. Немцев. Извлечение моделей процессов из текстов на естественном языке с помощью LLM и логико-семантического анализа ..... 65
Д. С. Огилько. Методы извлечения и формального представления знаний из текстов для построения онтологической модели кафедры ..... 66
О. Д. Пальчунова. Проверка согласованности и разрешения конфликтов в оценочных знаниях экспертов ..... 67

Н. А. Петренко. Разработка интеллектуальной рекомендательной системы подбора турпакетов с использованием семантических технологий и нейросетевых методов ..... 68
В. А. Попова. Автоматическая проверка программ численного обращения преобразования Лапласа в вероятностных моделях ..... 69
Д. М. Савельев. Разработка автоматизированной системы электронного документооборота кафедры ..... 70
Б. С. Свирский. Методы извлечения и формализации бизнес-процессов из корпоративных текстовых документов: от нотаций к большим языковым моделям ..... 71
С. В. Слепченко. Разработка базы данных и веб-приложения для тестирования алгоритмов определения сепарабельности квантовых состояний ..... 72
Е. М. Сыроежкин. Разработка программных средств для анализа и визуализации профилировочных трасс высоконагруженных систем ..... 73
Я. А. Тихомолов. Разработка RAG-системы для поддержки диагностики неисправностей и подбора автозапчастей ..... 74
С. В. Трушков. Разработка аналитического модуля для тренировочных программ по плаванию с использованием генеративного искусственного интеллекта ..... 75
М. А. Фильберт. Методы и алгоритмы автоматического обнаружения ошибок в ответах авторегрессионных порождающих моделей языка ..... 76
И. Р. Фиткулин. Архитектура аутентификации и разграничения доступа пользователей ИИ-агента для администрирования Apache Kafka ..... 77
И. С. Хорьяков. Выявление противоречий в текстовых документах на основе частичных моделей и больших языковых моделей ..... 78
М. А. Цуканов. Проверка требований даташитов в прошивках, создаваемых ИИ-агентами ..... 79
Чаплыгина С. С.. Изотопные преобразования n-квазигрупп, улучшающие криптографические свойства ..... 80
М. Черепанов. Влияние контекста на классификацию эмоциональной окраски мнений в русскоязычных новостных текстах ..... 81
А. М. Шевлякова. Разработка программного комплекса с применением интеллектуальных технологий для адаптивного A/B-тестирования ..... 82
М. С. Шеремет. Исчисления тождеств Клини, конечное и бесконечное ..... 83
А. А. Якобсон. Архитектура логической надстройки для объяснения ответов больших языковых моделей ..... 84
M. Zinchenko. Classes of universal epi- and monomorphisms in quasi-abelian categories ..... 86
**III. Секция «Неклассические логики и универсальная алгебра» ..... 87**
С. И. Башмаков, Ю. А. Бушакова. Свойства ступенчатой временной логики с прошлым $p\mathcal{LTK}.sl$ и ее аксиоматизация ..... 88
Е. В. Борисов. Семантика одной кондициональной логики первого порядка с лямбда-оператором ..... 89
Е. В. Брылякова. Метод доказательства финитарного типа унификации для некоторых суперинтуиционистских логик ..... 90
И. А. Горбунов, М. Н. Рыбаков. Минимальная вполне-определённая логика ..... 91
К. В. Грекович. К вопросу о вероятностном расширении логик динамической надежности ..... 92

Л. В. Дворкин. Об интерполяционном свойстве Линдона и амальгамируемости бисимуляций ..... 93
У. Д. Зайцева. Отрицательное согласование в формальной семантике ..... 95
М. И. Кудряшова. Рефлексивные и сильно рефлексивные подпространства $T_0$-пространств с аппроксимациями ..... 96
Д. Д. Лоновенко, К. В. Селиванов. О многообразии, порожденном решетками, близкими к дистрибутивным ..... 97
М. М. Минготт Фернандез. Дуальность Стоуна для частично упорядоченных структур ..... 98
К. А. Петров, В. В. Рыбаков. Многоагентные темпорально-эпистемические кластерные логики с операторами прошлого, будущего и общего знания ..... 99
А. А. Поляков. Нормальные формы и их унификация в модальной логике $\mathbf{Alt_1}$ 101
Н. А. Проценко. К вопросу об аксиоматизации логики $\mathbf{MLinML_N}$ ..... 102
А. Р. Углев. О специальных базисах тождеств некоторых конечных решёток ..... 103
А. С. Шарапов. Кондициональная логика первого порядка с лямбда-оператором 104
В. Ф. Юн. Пример J-логики без интерполяционного свойства ..... 106
D. A. Bredikhin. On classes of semigroups of binary relations with conjunctive operations ..... 107
A. Das. Composites of Central Extension for Weakly Mal'tsev Categories ..... 108
R. A. Farakhutdinov. Recognizing of linearly orderable finite semigroups ..... 109
**IV. Секция «Теория вычислимости» ..... 110**
П. Е. Алаев. Вычислительная сложность вычислимых абелевых групп ..... 111
Р. Р. Багавиев. Функции выбора неподвижной точки и их обобщения ..... 112
Р. Н. Дадажанов. Универсальная и экзистенциальная определимость негативно представимых моделей ..... 113
М. В. Зубков. Низкие линейные порядки, изоморфные вычислимым ..... 114
Н. Х. Касымов. О нумерованной модели с перечислимым эффективно подпрямо неразложимым отношением ..... 115
К. А. Ковалёв. Аксиоматизации арифметики Бюхи ..... 116
J. O. Ruzimov. Пунктуальные и $P$-вычислимые представления колец и алгебр ... 117
М. Х. Файзрахманов. Семейства особых элементов полных нумераций ..... 118
И. Н. Шиманогов, М. Н. Вялый. Сложность изоморфизмов относительно регулярных булевых алгебр ..... 119
З. К. Щедрикова. Точные пары для арифметических идеалов полурешеток Роджерса ..... 120
I. O. Chitaia, R. Sh. Omanadze. Notes on maximal sets and $Q_1$-reducibility ..... 121
N. T. Kogabaev. The problem of $\forall$-representability for sentences ..... 122
A. V. Seliverstov. Numbered diagrams of projective limits ..... 123
S. O. Speranski. On the complexity of the theory of atomless finitely-additive probability spaces ..... 124
**V. Секция «Теория групп и ее приложения» ..... 125**
В. С. Атабекян. Два вопроса В. Д. Мазурова об автоморфизмах периодических групп ..... 126
И. Н. Белоусов, В. И. Зенков. О пересечениях $\pi$-холловых подгрупп в $D_\pi$-группах с цоколем $L_2(q)$ ..... 127
В. В. Беняш-Кривец. О многообразиях двумерных представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением ..... 128
А. Н. Бородин. Квандлы с вариациями тождества ассоциативности ..... 129

С. О. Бородин. Покрытия и частичные трансверсали латинских гиперкубов ..... 130
А. Н. Бородин, М. В. Нещадим, А. А. Симонов. Конструкции квандлов над группами, модулями и почти-кольцами ..... 131
А. Н. Бородин, М. В. Нещадим, А. А. Симонов. Независимость аксиом квандла 132
А. И. Будкин. Мощности решеток квазимногообразий 3-ступенно нильпотентных групп ..... 133
И. М. Бучинский. Нетеровость по уравнениям для нильпотентных групп ..... 134
А. В. Васильев. MDS-коды с 2-транзитивной группой подстановочных автоморфизмов ..... 135
Б. М. Веретенников. О конечных $p$-группах с заданными порядками порождающих элементов по модулю 1 или по модулю ее коммутанта..... 136
Н. Н. Воробьев. Тождества решеток формаций ..... 137
Н. Т. Воробьев, А. А. Стайнова. О характеризации инъекторов во множестве Фиттинга $\sigma$-разрешимой группы ..... 138
Р. И. Гвоздев. Порождающие множества сопряженных инволюций групп $PSL_n(2^m)$ ..... 139
О. Ю. Дашкова. Об одном классе бесконечномерных линейных групп конечного нормального ранга ..... 140
Ф. А. Дудкин, А. П. Ядова. Центроиды некоторых обобщенных групп Баумслага–Солитера с нетривиальным центром ..... 141
В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы $F_n(\mathfrak{N}_2)$ ..... 142
А. Л. Евтягин. О построении вложений в классе частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп ..... 143
А. Х. Журтов, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. О периодических группах, насыщенных конечными простыми унитарными группами ..... 144
А. И. Зеткина, В. Г. Дурнев. О сложности проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы $F_n$ ..... 145
М. Р. Зиновьева. О существовании спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах ..... 146
А. Л. Искра. Конечные порядки произведений двух транспозиций классов..... 147
С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов. $\sigma$-Проблема Кегеля–Виландта для групп с ограничениями на их композиционные факторы ..... 148
О. В. Кравцова. О «больших» 2-подгруппах автотопизмов полуполевых проективных плоскостей ..... 149
А. А. Кузнецов. О некоторых соотношениях в свободной бернсайдовой группе $B(2,5)$ ..... 150
А. М. Кукарцев. О решении экзистенциальной проблемы информационных действий ..... 151
М. А. Кулешов. О структуре группы обобщенных транспозиций классов ..... 152
В. С. Логинова. Условия покрытия конечных квазиполей Холла..... 153
М. С. Лукьянов. О фильтрах в решетке квазимногообразий нильпотентных групп без кручения ..... 154
А. А. Махнев, В. С. Климин. Классификация $Q$-полиномиальных графов Шилла с $b_2 = c_2$ ..... 155
В. С. Монахов. Конечные группы с циклическими $z$-подгруппами ..... 156
И. Новиков. Классификация брэйсов на свободной абелевой группе ранга 2 ..... 157

Я. Н. Нужин. О ковровых группах и ковровых кольцах Ли ..... 158
Я. Н. Нужин, Т. С. Петруть. Порождающие тройки сопряженных инволюций группы $\mathrm{PSU}_4(q^2)$ при нечетном $q$ ..... 159
Я. Н. Нужин, А. М. Соколовская. Об одной гипотезе Пеллегрини–Залесского .... 160
Я. Н. Нужин, Е. Н. Троянская. О группах, порожденных неединичными пересечениями со всеми корневыми подгруппами группы Шевалле над полем ..... 161
Д. О. Ревин. Неразрешимые конечные группы с минимальным числом несопряженных максимальных разрешимых подгрупп ..... 162
Д. С. Скок. Группы автоморфизмов малых четных порядков конечных полуполей ..... 163
Е. В. Соколов. О полинильпотентной аппроксимируемости древесных произведений групп ..... 164
М. М. Сорокина, В. Н. Сорокина. О свойствах $\omega$-веерных формаций конечных групп ..... 165
И. Л. Сохор. Конечные группы с монотонными максимальными цепями ..... 166
Н. М. Сучков. О бесконечных группах Цассенхауза ..... 167
Д. А. Тауснев, А. К. Шлепкин, А. А. Шлепкин. О контрпримерах к гипотезе Мюллера ..... 168
А. И. Ткачев. О финитной аппроксимируемости и слабой мощности обобщенных свободных произведений ..... 169
А. А. Трофимук. Конечные факторизуемые группы с заданной системой $F(G)$-перестановочных подгрупп из сомножителей ..... 170
А. В. Усиков. Централизаторная размерность HNN-расширений с абелевой базой 171
С. А. Шахова. О сложности решетки квазимногообразий нильпотентных ступени не выше двух групп ..... 172
В. Д. Шепелев. Существование континуума множеств $\pi$ простых чисел, для которых существование холловой $\pi$-подгруппы влечёт сильную $\pi$-теорему Силова ..... 173
А. А. Шлепкин, В. С. Сенашов. О локально конечных группах, содержащих прямые произведения обобщенных обратных полудиэдральных групп ..... 174
Н. Е. Яковлев. Порядки внешних диагональных автоморфизмов конечных простых симплектических групп ..... 175
R. Zh. Aleev. Units of integral group rings of groups of prime orders ..... 176
A. A. Buturlakin. Non-Frobenius equivalenced schurian schemes ..... 177
A. V. Greshnov. The fundamental theorem of affine geometry on the first Heisenberg group ..... 178
A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, M. S. Nirova. On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw ..... 179
Ya. A. Kopylov. Translation invariant linear functionals and the first Orlicz cohomology ..... 180
D. Malinin, A. Vasilevich. On IBIS groups ..... 181
N. V. Maslova. On the realizability of a simple labeled graph as the Gruenberg–Kegel graph of a finite group ..... 182
N. V. Maslova, K. V. Selivanov. On characterization by Gruenberg–Kegel graph of finite simple groups $PSL_3(q)$, where $q$ is even ..... 183
V. H. Mikaelian. On effectiveness or explicitness of the Higman Embedding Theorem for recursive groups ..... 184

I. Yu. Mogilnykh. New results on ternary CRCs in the Hamming metric ..... 185
T. R. Nasybullov. Orbit series tree as an invariant of quandles ..... 186
A. M. Romanov. Nonlinear additive perfect codes over finite fields ..... 187
S. S. Saidov. Element Orders in the Extension of a Linear or Unitary Group by a Graph Automorphism ..... 188
B. Sangare. Automorphism groups of quandle algebras ..... 189
A. Savelyev. Rota—Baxter operators on a free group of infinite rank ..... 190
R. V. Skuratov. Lattice of normal subgroups of permutational wreath products ..... 191
L. Yu. Tsiovkina. Coset graphs of finite groups with a $BN$-pair of rank 1 ..... 192
A. Yu. Vasil'eva. On completely regular codes with large covering radius in $n$-dimensional rectangular grid ..... 193
R. Wang. On one-dimensional affine schemes of rank 4 ..... 194
W. Zhou. On $\{2, 3, 5\}$-groups with conjugacy classes of distinct sizes ..... 195
**VI. Секция «Теория колец» ..... 196**
М. Е. Гончаров. Конструкция дубля для оператора Роты — Бакстера на алгебре Хопфа ..... 197
А. Г. Гутор. О факторизации многочленов с коэффициентами в алгебрах с делением ..... 198
Е. В. Журавлев. О классификации конечных коммутативных локальных колец 199
И. М. Исаев, А. В. Кислицин. Об экстремальных $L$-многообразиях над конечным полем ..... 200
В. В. Курсов. Обобщенные скрещенные произведения простых алгебр ..... 201
В. С. Логинова. Условия покрытия конечных квазиполей Холла ..... 202
М. Н. Мартышкина. Коммутативность ассоциативного кольца с автоморфизмами 203
Д. А. Павлинов. Графы коммутативности конечномерных эластичных композиционных алгебр ..... 204
А. С. Панасенко. Радикал Кёте алгебр Новикова ..... 205
Е. П. Петров. О стандартном тождестве в подалгебре алгебры строго верхнетреугольных матриц ..... 206
А. П. Пожидаев. О слабом делении в конечномерных алгебрах ..... 208
С. В. Пчелинцев. Простые правоальтернативные супералгебры с двумерной нильпотентной чётной частью ..... 209
Р. Ю. Репеев. Дифференцирования в алгебрах инверсных полугрупп Клиффорда 210
А. Н. Бородин, М. В. Нещадим, А. А. Симонов. Конструкции квандлов над группами, модулями и почти-кольцами ..... 211
А. Ф. Ходзицкий. Мономиальные операторы Роты — Бакстера и операторы усреднения на алгебре многочленов Лорана ..... 212
О. В. Шашков. Бимодули скрученного типа ..... 213
A. R. Chekhlov, P. V. Danchev. Big subgroups of Abelian $p$-groups ..... 214
V. Yu. Gubarev. New results on Rota—Baxter operators ..... 215
A. S. Monastyreva. The girth of the compressed zero-divisor graph of a finite associative ring ..... 216
A. Naurazbekova. A non-linearizable action of $S_3$ on free metabelian Lie and associative algebras ..... 217
I. P. Shestakov. Trace identities of special Jordan algebras ..... 218
S. V. Tikhonov. Genus of quaternion algebras over formally real fields ..... 219
V. N. Zhelyabin, A. S. Mamontov. Primitive Jordan Banach algebras ..... 220

**VII. Секция «Теория моделей»** ..... 222
В. В. Вербовский. О свойстве локального строгого порядка в упорядоченных структурах ..... 223
А. А. Викентьев. Применения полумодельных расстояний, вопросы теории моделей и новые кластеризации многозначных логических высказываний с вероятностями ..... 224
Д. Ю. Емельянов. Спектры полных алгебр бинарных изолирующих формул для циклов ..... 225
Е. Л. Ефремов, А. А. Степанова, С. Г. Чеканов. О группах автоморфизмов линейно упорядоченных унаров ..... 226
А. Р. Ешкеев, А. К. Исаева, Н. В. Попова, К. Д. Тимошина. Расширение фрактальных моделей и опускание в них типов ..... 227
А. Р. Ешкеев, Н. М. Мусина, А. С. Шульгина-Таранчук. Малые модели $K_T$-малых теорий ..... 228
А. А. Избасаров, Б. Ш. Кулпешов. О псевдо-сильно минимальных частичных порядках высоты два ..... 229
Б. Ш. Кулпешов, Е. К. Неталиева. О сильной минимальности тотально категоричных частичных порядков ..... 230
С. Б. Малышев. Достаточные условия предгеометричности тернарного замыкания ..... 231
В. А. Миллер. Об аксиоматизируемости некоторых свойств топологий Зарисского 232
Н. Л. Поляков. Обобщенные ультрапределы и их приложения в теории ультрафильтров ..... 233
И. А. Сахаров. Проективные линейно упорядоченные унары ..... 234
С. Г. Чеканов, А. А. Степанова, Е. Л. Ефремов. Структура линейно упорядоченных унаров ..... 235
M. E. Abishev, D. Z. Berkinbayev, K. M. Tulenbaev, A. K. Kunanbayev. A Typed Core Calculus for Three-Regime Semantics ..... 236
A. B. Altayeva, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov. On variations of rigidity for circular orders ..... 237
M. Džamonja. Iterating strongly $(< \lambda)$-closed stationary $\lambda^+$-cc forcing, or definability matters ..... 238
M. T. Kassymetova, O. I. Ulbricht, G. E. Zhumabekova. Fragments of theoretical sets and Jonsson extensions of $K_T$-normal theories ..... 240
I. B. Kazakov. An Alternative Set Theory ..... 241
L. N. Khakimova, S. V. Sudoplatov. On variations of algebraicity for relatively free algebras ..... 242
B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov. On variations of algebraicity for compositions of structures ..... 243
In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov. On variations of algebraicity for abelian groups ..... 244
T. E. Rajabov, S. V. Sudoplatov. On algebras of types via their preservations ..... 245
I. Tungushbayeva. Holographicity of relational reducts of the Picard Painlevé VI solution set ..... 246
I. K. Uktamaliev. Hierarchical extensions of closure operators via families of operations ..... 247
**VIII. Авторский указатель** ..... 248

# I. Пленарные доклады

**О проблемах Сакса о структуре вычислимо перечислимых степеней**

М. М. Арсланов

В докладе будут рассмотрены две проблемы, поставленные Дж. Саксом в его монографии "Degrees of Unsolvability", 1966. Обе проблемы относятся к знаменитой проблеме Поста 1944-го года о существовании неполного (относительно Тьюринговой сводимости) вычислимо перечислимого (для краткости: в.п.) множества.

($P_1$) В гёделевской нумерации вычислимо перечислимых с оракулом множеств $\{W_e^X\}_{e\in\omega}$ существует ли такой индекс $e$, что для любого множества $A$ множество $W_e^A$ имеет более высокую, чем $A$ (здесь и далее тьюринговую) степень, и более низкую, чем $A'$, степень; и если $A$ и $B$ имеют одинаковую степень, то $W_e^A$ и $W_e^B$ также имеют одинаковую степень?

($P_2$) Существует ли какое-нибудь простое (в стиле Поста) свойство дополнений в.п. невычислимых множеств, которое влечет их неполноту относительно Тьюринговой сводимости?

В первой проблеме ($P_1$) спрашивается о существовании *инвариантного решения* проблемы Поста: о единой равномерной конструкции, которая позволяет получить решение её релятивизированной версии. По второй проблеме ($P_2$) стала общепринятой такая её интерпретация: существует ли *определимое* в решетке в.п. множеств свойство невычислимых в.п. множеств, которое гарантирует их неполноту?

Обе эти проблемы вызвали множество публикаций. В докладе речь пойдёт о некоторых наиболее интересных результатах, полученных в этом направлении, а также об ими инициированных исследованиях, продолжающихся и в настоящее время.

## БЕЗ НАЗВАНИЯ

А. Я. Белов

Тождеством алгебры $A$ называется многочлен, тождественно обращающийся в ноль на ней. В коммутативных алгебрах выполняется тождество $[x, y] = xy - yx = 0$, в алгебре матриц второго порядка — тождество $[[x, y]^2, z] = 0$ и т.д. Тождество $g$ следует из набора $f_i$, если в любой алгебре, где выполняется система тождеств $f_i$, выполняется тождество $g$. Проблема Шпехта состоит в том, верно ли, что любая система тождеств в некоммутативном ассоциативном кольце следует из конечной подсистемы?

$\sigma$

Основной прорыв в этой сфере был сделан А.Р. Кемером, установившим конечную базируемость многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики ноль (решив проблему Шпехта в оригинальном ее понимании). В дальнейшем были получены неассоциативные аналоги (Вайс и Зельманов установили для йордановых алгебр с тождеством Капелли, Ильтяков — альтернативные и лиевы алгебры).

$\sigma$

Решение этой проблемы приводит к задачам комбинаторики слов (в том числе элементарным), к новой точке зрения на некоммутативную алгебраическую геометрию. Недавно А. Хорошкин, И. Воробьев и А.Я. Белов вывели из одной из версий доказательства гипотезу Гельфанда о нетеровости действия полиномиальных векторных полей без свободного члена на тензорных представлениях.

$\sigma$

Доклад будет посвящен обзору результатов в этой сфере.

## Проблема распознавания конечных простых групп по спектру решена

М. А. Гречкосеева

Доклад основан на совместных работах с А.В. Васильевым и А.М. Старолетовым.

Спектром $\omega(G)$ конечной группы называется множество порядков ее элементов. Проблема распознавания по спектру для данной группы $G$ ставится следующим образом: найти число различных конечных групп $H$ таких, что $\omega(H) = \omega(G)$, и если это число конечно, то дать явное описание группы $H$.

Конечные простые группы обладают специфическим спектром, и около 35 лет назад была инициирована программа по решению проблемы распознавания по спектру для всех конечных простых групп. Для спорадических групп проблема была решена к 1998 г., для групп лиева типа ранга не более 2 — к 2006 г., для знакопеременных групп — к 2013 г., для всех исключительных групп и классических групп достаточно большой размерности — к 2015 г.

После 2015 г. начался период классических групп «промежуточных», т.е. не очень больших и не очень маленьких, размерностей. Рассмотрение этих групп было завершено в этом году в работах **[1, 2]**; тем самым было завершено решение проблемы распознавания по спектру для всех конечных простых групп. Доклад посвящен изложению этого решения и основным идеям доказательства.

*Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 24-11-00127).*

Литература

[1] M. Grechkoseeva, A. Staroletov, A. Vasil'ev, *Recognition by element orders for simple linear and unitary groups*, 2026, arXiv:2604.04587 [math.GR].

[2] M. Grechkoseeva, A. Staroletov, A. Vasil'ev, *The problem of recognition of finite simple groups by element orders is solved*, 2026, arXiv:2608.01754 [math.GR].

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия); Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* grechkoseeva@gmail.com

## Проблема конечного базиса тождеств для аддитивно идемпотентных полуколец

С. В. Гусев

Доклад основан на результатах совместных работ докладчика с М.В. Волковым, посвященных проблеме конечного базиса тождеств для аддитивно идемпотентных полуколец.

*Полукольцом* называется алгебраическая система с двумя ассоциативными бинарными операциями (сложением и умножением), удовлетворяющая законам дистрибутивности: $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$. Полукольцо называется *аддитивно идемпотентным*, если сложение в нем коммутативно и идемпотентно, т.е. выполняются законы $a+b = b+a$ и $a+a = a$. Внимание к аддитивно идемпотентным полукольцам мотивируется наличием большого числа естественных примеров, имеющих разнообразные применения в алгебре и за ее пределами.

*Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект FEUZ-2026-0007).*
*Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)*
*E-mail:* sergey.gusb@gmail.com

**Простые конечномерные алгебры Новикова, их представления и автоморфизмы**

В. Н. Желябин, А. П. Пожидаев

Мы доказываем, что каждая конечномерная полупростая алгебра Новикова является прямой суммой простых алгебр. Нами показано, что любая неассоциативная алгебра Новикова может быть снабжена нетривиальной структурой алгебры Новикова–Пуассона, откуда следует, что при определенных условиях конечности каждая простая алгебра Новикова получается с помощью конструкции Гельфанда–Дорфмана, применяемой к ассоциативно-коммутативной дифференциально простой алгебре.

Описание автоморфизмов таких простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутым полем сводится к описанию некоторых специальных автоморфизмов исходных ассоциативно-коммутативных алгебр. Используя структуру алгебры Новикова–Пуассона на алгебре Новикова, получена классификация конечномерных неприводимых бимодулей над конечномерными простыми алгебрами Новикова в терминах дифференциально простых модулей над дифференциально простыми ассоциативными коммутативными алгебрами.

**Конструктивные множества в теории множеств Симпсона**

В. Г. Кановей

*Аннотация:* Теория множеств Симпсона SST введена в его известной монографии как подтеория теории ZFC, во многих отношениях эквивалентная арифметике второго порядка Z- без счетного выбора. Мы расскажем об этом соответствии между теориями SST и Z-, а также покажем, как SST позволяет строить множества конструктивные по Гёделю.

## Об объединениях цепей алгебр Йонссона

К. Ж. Кудайбергенов

Обсуждаются условия, при которых объединение возрастающей цепи алгебр Йонссона тоже будет алгеброй Йонссона. Найдены условия, при которых существует счетная возрастающая цепь групп Йонссона, объединение которой не является группой Йонссона.

*Институт математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан)*
*E-mail:* kanatkud@gmail.com

**Теоретико-модельные свойства полей и абелевых групп**

О. В. Кудинов

*Аннотация:* Первый раздел посвящен тесным взаимосвязям упорядоченных и нормированных полей нулевой характеристики. Известно, что каждому упорядоченному полю $F$ соответствует подходящая упорядоченная абелева группа $G$, являющаяся определенной мерой его неархимедовости, будем называть ее кратко группой упорядоченного поля. На основе взаимосвязи исходного порядка поля и подходящего нормирования с группой упорядоченного поля в качестве группы нормирования удается показать, что $F$ изоморфно вкладывается в языке упорядоченных полей в поле формальных рядов $R((G))$ с коэффициентами из поля вещественных чисел $R$. Это ведет к некоторому описанию (но не к классификации) всех упорядоченных полей.

Второй раздел посвящен новому понятию относительной модельной полноты. Теория $T$ языка $L$ назовем модельно полной относительно его части $L_0$, если для всякой модели теории $T$ полной является теория, аксиомы которой состоят из:

а) полной диаграммы обеднения модели до языка $L_0$;
б) атомной диаграммы самой модели;
в) самой теории $T$.

Предлагается характеризация этого понятия (весьма похожая на классическую для обычной модельной полноты) и рассмотрен ряд примеров. Метод может представлять интерес как способ сравнения элементарных теорий.

### Мироцентричные семантические модели и их операционная семантика

А. В. Манцивода

В презентации рассматривается подход к построению масштабируемых мультиагентных интеллектуальных информационных систем, основанный на идее мироцентричных семантических моделей, которые позволяют интегрировать средства семантического моделирования, символьного ИИ и языковых моделей.

Современные агентные системы управления объединяют множество автономных участников — людей, ИИ-агентов, программных сервисов и планировщиков. Они принимают решения на основании собственной стратегии и доступной им части информации. Однако управляемая организация («институт») должна сохранять единое понимание своих объектов, ресурсов, полномочий и допустимых состояний вне зависимости от действий очередного агента. Поэтому центральной становится задача построения общего институционального мира: кто может запросить изменение, какие обязательные последствия оно порождает и при каких условиях полученный результат может стать новым состоянием системы. Мироцентричная семантическая модель решает эту задачу, отделяя выбор цели от вычисления последствий, а интеллект от знаний: внешние агенты (оракулы) формируют запросы, а модель, как центральный хранитель правды, проверяет их допустимость, выполняет преобразования, запускает реактивные правила и фиксирует как новое публичное состояние только целостный результат. В частности, такая постановка охватывает объектно-онтологические механизмы наших семантических моделей, на платформах *bSystem* и *Ontobox*.

В докладе рассматривается концепция мироцентричных семантических моделей, их трехуровневая формальная операционная семантика, а также рассматриваются примеры применения, в частности, на платформе *Ontobox*.

## Классификация абелевых групп Шура

Г. К. Рябов

Для изучения групп подстановок, содержащих регулярные подгруппы, Шуром было введено понятие специального подкольца целочисленного группового кольца, называемого теперь $S$-кольцом (кольцом Шура) [**3**]. Как писал Виландт [**5**], Шур, по-видимому, полагал, что каждое $S$-кольцо может быть построено из подходящей группы подстановок, содержащей регулярную подгруппу. Однако, как показал Виландт, это предположение оказалось неверным [**4**]. В статье [**2**] Пёшелем были введены понятия шурового $S$-кольца, т.е. такого $S$-кольца, которое может быть построено из подходящей группы подстановок, содержащей регулярную подгруппу, а также понятие группы Шура, т.е. такой конечной группы, все $S$-кольца над которой являются шуровыми. В этой же работе была поставлена проблема определения всех групп Шура. В общем случае эта проблема, по-видимому, является сложной, в частности, потому что число $S$-колец над заданной группой может экспоненциально зависеть от порядка группы. Список всех возможных абелевых групп Шура был получен Евдокимовым, Ковачем и Пономаренко в статье [**1**].

В докладе будет представлена полная классификация абелевых групп Шура.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0011).*

Литература

[1] S. Evdokimov, I. Kovács, and I. Ponomarenko, *On schurity of finite abelian groups*, Commun. Algebra, 44, No. 1 (2016), 101–117.
[2] R. Pöschel, *Untersuchungen von s-ringen insbesondere im gruppering von p-gruppen*, Math. Nachr., 60 (1974), 1–27.
[3] I. Schur, *Zur theorie der endlich transitiven Permutationsgruppen*, S.-B. Preus Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 18, No. 20 (1933), 598–623.
[4] H. Wielandt, *Finite permutation groups*, Academic Press, New York – London, 1964.
[5] H. Wielandt, *Permutation Groups Through Invariant Relations and Invariant Functions*, Lecture Notes, Department Mathematics Ohio State University, Columbus, 1969.

*Институт математики им. Л.С. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* gric2ryabov@gmail.com

### Проблема изоморфизма групп, заданных таблицами умножения

С. В. Скресанов

Проблема изоморфизма групп в теории вычислительной сложности — это проблема распознавания, в которой по двум конечным группам, заданным таблицами умножения, требуется определить, изоморфны эти группы или нет. Ещё с конца 70-х для этой проблемы известен простой квазиполиномиальный алгоритм, работающий за время $n^{O(\log n)}$ для групп порядка $n$, причём не известно асимптотически более быстрых алгоритмов, определяющих изоморфизм произвольных групп. После того, как Л. Бабан в 2015 г. был предложен квазиполиномиальный алгоритм для более общей проблемы изоморфизма графов, главным препятствием для дальнейших улучшений стала именно проблема изоморфизма групп.

В докладе будет рассказано о текущем состоянии дел вокруг проблемы изоморфизма групп, а основное внимание будет уделено классам групп, для которых существует полиномиальный алгоритм проверки изоморфизма. Планируется также рассказать о «диких» проблемах алгебры, которые оказываются «простыми» с вычислительной точки зрения, и о том, как такие проблемы естественным образом возникают при рассмотрении проблемы изоморфизма групп.

*Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: skresan@math.nsc.ru*

## Псевдоконечные теории унарных алгебр

А. А. Степанова

Теория языка $L$ называется *псевдоконечной*, если существует бесконечная модель этой теории, удовлетворяющая каждому предложению языка $L$, истинному во всех конечных структурах языка $L$. Структура называется *псевдоконечной*, если теория этой структуры псевдоконечна.

В докладе будет приведен обзор основных результатов, связанных с псевдоконечными алгебрами такими, как группы, кольца, поля. Акцент будет сделан на результаты, опубликованные в совместных работах докладчика с Ефремовым Е.Л. и Чекановым С.Г., посвященные изучению псевдоконечных унарных алгебр (унаров и полигонов над моноидами).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026 г.).*
*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток (Россия)*
*E-mail: steptld@mail.ru*

### О проблеме равенства для минимально бесконечных групп

А. Л. Таламбуца

*Минимально бесконечной группой* называется бесконечная группа, все собственные факторгруппы которой конечны. В докладе будет рассмотрена проблема равенства слов для минимально бесконечных групп, порождённых не более чем счётным множеством элементов и заданных в них рекурсивно перечислимым множеством соотношений. В случае конечного числа порождающих на основе идей классических теорем Кузнецова и Макинти–Мальцева доказывается разрешимость проблемы равенства.

В случае счётного порождающего множества разрешимость, вообще говоря, зависит от задания группы, но при этом проблема равенства также оказывается разрешима в большинстве случаев. Однако, как будет показано, существуют такие рекурсивно перечислимые задания минимально бесконечных групп, являющихся перестановочными сплетениями, для которых проблема равенства неразрешима. Конструкции таких заданий оказываются тесно связаны с результатом Деккера о существовании гиперпростых множеств Поста.

## Обобщения дуальностей Стоуна и Биркгофа

М. В. Швидефски

Теорема Стоуна устанавливает дуальную эквивалентность категории дистрибутивных $(0,1)$-решеток с гомоморфизмами, сохраняющими 0 и 1, и категории спектральных пространств со спектральными отображениями. Теорема Биркгофа устанавливает дуальную эквивалентность категории конечных дистрибутивных решеток с гомоморфизмами, сохраняющими 0 и 1, и категории частично упорядоченных множеств с монотонными отображениями. В докладе будут представлены обобщения этих классических результатов, а также их эффективные версии.

*Доклад выполнен в рамках гос. задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2026-0032.*

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* m.schwidefsky@g.nsu.ru

## General construction of the tensor completion of finitely generated 2-nilpotent groups

M. G. Amaglobeli, A. G. Myasnikov

We investigate tensor $R$-completions of finitely generated torsion-free groups of nilpotency class 2, where $R$ is an arbitrary binomial integral domain of characteristic zero. The completion is taken in the quasivariety $\mathcal{N}_{2,R}$ of Myasnikov-Remeslennikov $R$-groups: groups equipped with exponentiation by elements of $R$ satisfying the usual laws for exponents and compatibility with conjugation, together with the distributive law for commuting elements. Unlike Hall $R$-groups, these groups are not required to satisfy the Hall-Petresco formula. The aim of the paper is to describe both the group structure of the tensor completion and its $R$-exponentiation.

Let $G$ be such a group, and let $\mu : G \otimes_{\mathcal{N}_{2,R}} R \to G \otimes_{\mathcal{H}_{2,R}} R$ be the canonical $R$-epimorphism onto its Hall completion. We prove that, after choosing a suitable Mal'tsev basis, the Hall completion embeds as an abstract subgroup and

$$G \otimes_{\mathcal{N}_{2,R}} R \cong (G \otimes_{\mathcal{H}_{2,R}} R) \times D, \qquad D = \ker \mu,$$

where $D$ is a central $R$-module, written multiplicatively inside the group. Thus $\mu$ admits a section (a homomorphism) $G \otimes_{\mathcal{H}_{2,R}} R \to G \otimes_{\mathcal{N}_{2,R}} R$ in the category of abstract groups. The distinction between group structure and exponentiation is essential: the section need not be an $R$-homomorphism, and the displayed decomposition is not, in general, a direct product of $R$-groups.

The principal technical tool is a calculus of $c$-commutators, which measure the deviation from Hall exponentiation. In the binary case (for two factors), the $c$-commutators $c(g,h)_\lambda$ are defined by

$$(gh)^\lambda = g^\lambda h^\lambda [g,h]^{-\binom{\lambda}{2}} c(g,h)_\lambda.$$

We establish their centrality, invariance under insertion of central factors, and reduction of multivariable $c$-commutators to binary ones. Relative to the chosen splitting, we also define the one-variable defect $d(g)_\lambda = (g^{*\lambda})^{-1} g^\lambda$, where $g^{*\lambda}$ denotes the auxiliary Hall exponentiation on the direct product. The defect belongs to $D$, depends only on the noncentral Hall coordinates of $g$, and gives the formula $g^\lambda = g^{*\lambda} d(g)_\lambda$.

We give a complete presentation of $D$ by coordinate $c$-commutators and explicit $R$-linear relations expressing normalization, addition and composition of exponents, conjugation invariance, and compatibility with products of commuting elements. Together with multiplication in Hall coordinates, this presentation determines the entire $R$-group structure. The relations depend both on the arithmetic of $R$ and on the commutator map in the group; finding explicit bases of $D$ remains a separate problem.

Applied to free 2-nilpotent groups, the construction describes the free nilpotent $R$-groups in $\mathcal{N}_{2,R}$, resolving Remeslennikov's question concerning their algebraic structure. It also provides a framework for subsequent explicit computations and motivates extending the defect calculus and the tensor-completion construction to higher nilpotency classes.

*This work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia, project FR-25-7138.*
*Iv. Javakhishvili Tbilisi State University (Georgia)*
*E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge*

*Stevens Institute of Technology, Hoboken (USA)*
*E-mail:* amiasnikov@gmail.com

## Rogers semilattices for structures

S. A. Badaev, B. S. Kalmurzayev, N. A. Bazhenov, A. G. Melnikov, A. M. Iskakov

Classification of algebraic structures by means of isomorphism types is central in the study of algebra. Goncharov and Knight [**1**] collected several up to date approaches used to classify effectively presented computable structures. One of the approaches is based around the notion of a *numbering* for classes of computable algebraic structures. A numbering of a class $\mathcal{K}$ is a total computable function $\nu : \omega \to \omega$ such that $\nu$ gives a uniform listing of the computably presented members of $\mathcal{K}$ in which every isomorphism types appears at least once.

Goncharov and Knight defined classification for class as having a *Friedberg numbering*, i.e. having an effective listing of all isomorphism types with no repetition. For the longest time people focused only on this one aspect. We go further than that by applying all the machinery developed in classical numbering theory to classes of computable structures. What we essentially get is a new invariant for classes of structures called a Rogers semilattice. In the talk we present the application of this setup to various classes of structures.

References

[1] S.S. Goncharov, J. Knight *Computable Structure and Non-Structure Theorems*, Algebra and Logic, 41:(6) (2002), 351–373.

*Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)*
*E-mail: sbadaev@gmail.com*

*Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)*
*E-mail: birzhan.kalmurzaev@gmail.com*

*Nanyang Technological University, Singapore (Singapore)*
*E-mail: nickbazh@yandex.ru*

*Victoria University of Wellington, Wellington (New Zealand)*
*E-mail: alexander.g.melnikov@gmail.com*

*Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan)*
*E-mail: bheadr73@gmail.com*

**The problems of finite axiomatizability and profiniteness of quasivarieties of lattices**

A. O. Basheyeva

In its general formulation, it concerns the following two closely related questions: Which finite lattices generate finitely axiomatizable varieties and (or) quasivarieties? Which finite lattices generate profinite quasivarieties?

For several important classes of algebraic structures, including groups and rings, the problem of finite axiomatizability of varieties and quasivarieties is completely understood. In contrast, the situation for lattices is considerably more subtle and continues to reveal new phenomena.

While the profiniteness problem for varieties of lattices was answered positively, for quasivarieties it is still unsolved.

The talk provides an overview of recent results concerning certain aspects of locally finite quasivarieties of lattices that have no finite basis of quasi-identities and are neither profinite.

*Gumilyov Eurasian National University, Astana (Kazakhstan)*
*E-mail: basheyeva3006@gmail.com*

## The Logic of Choice and Monotone Gödel–Löb

L. D. Beklemishev

**Joint work with V. Danilov, D. Shamkanov, and D. Trofimov.**

The matching theory in mathematical economics originated in the famous paper by D. Gale and L. S. Shapley (1962). It is stated in terms of the so-called *choice functions*, given by an operation $C$ on the powerset of $X$ satisfying certain natural conditions. Intuitively, $C(A)$ represents the preferred choices of an agent when presented with a *menu* $A$. Arguably, one of the most important properties of choice functions is the so-called *path independence* condition introduced by C. R. Plott (1973). The study of path-independent choice functions has a long tradition, represented in particular by the fundamental work of M. A. Aizerman and A. V. Malishevski, and by the more recent results of V. I. Danilov and G. Koshevoy.

We will argue that Plottian path-independent choice functions happen to be exactly the neighborhood frames of a subnormal (monotone) version of Gödel–Löb logic $GL$, denoted $mGL$. The emerging connections reveal many interesting parallels between provability logic and path-independent choice theory, including the role of fixed points.

The results obtained so far include a neighborhood completeness theorem for $mGL$, the failure of de Jongh's theorem (definability of fixed points) in $mGL$, and a *distributed provability* interpretation of $mGL$.

## Theory of Interpretations and Its Applications

E. Daniyarova

*The talk is based on joint works with Alexei Myasnikov (Stevens Institute of Technology, USA).*

Interpretations from a theory of one signature to a theory of another emerged in the mid-20th century in the works of Tarski and Mal'tsev as a tool for proving the undecidability of theories. Nowadays, this tool is being refined and imbued with new expressive power (see [**1, 2, 3**]). In this talk, we will briefly discuss the modern approach to the theory of interpretations, and the applications that arise from exploiting the theory's technical capabilities. Different types of interpretations allow one to transfer certain model-theoretic properties from an algebraic structure $\mathbb{B}$ to an algebraic structure $\mathbb{A}$. These properties include decidability of the Diophantine problem, stability, saturation, isotypeness, definability by types, primarity, homogeneity, atomicity, richness, elimination of imaginaries, quasi-finitely axiomatizability, and so on. Among such applications, we note the following theorem, which allows one to solve the first order classification problem for $\mathbb{A}$ by reducing it to the corresponding problem for $\mathbb{B}$, provided there exists a regular bi-interpretation between them.

**Theorem 1.** *Let algebraic structures $\mathbb{A} = \langle A; L(\mathbb{A})\rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B})\rangle$ be regularly bi-interpretable in each other, so $\mathbb{A} \cong \Gamma(\mathbb{B}, \phi)$ and $\mathbb{B} \cong \Delta(\mathbb{A}, \psi)$. Then for any $L(\mathbb{A})$-structure $\widetilde{\mathbb{A}}$ the following statements are equivalent:*

(1) $\mathbb{A} \cong \widetilde{\mathbb{A}}$;
(2) $\widetilde{\mathbb{A}} \simeq \Gamma(\widetilde{\mathbb{B}}, \phi)$ *for some $L(\mathbb{B})$-structure $\widetilde{\mathbb{B}} \equiv \mathbb{B}$. Moreover, for any such $\widetilde{\mathbb{B}}$ one has $\widetilde{\mathbb{B}} \simeq \Delta(\widetilde{\mathbb{A}}, \psi)$, so $\widetilde{\mathbb{B}}$ is defined uniquely up to an isomorphism.*

Typically, parameters are used when constructing interpretations. In practice, proving the existence of a regular interpretation—let alone a regular bi-interpretation—is often significantly more complex than doing so with parameters (see [**4**]). Yet, for applications, it is precisely the regular interpretation that holds greater value. For this reason, tools that allow for the regularization of interpretations involving parameters are of significant interest. One such tool is as follows.

**Theorem 2.** *Suppose that $\mathbb{B}$ is a finitely generated, such that a tuple $\bar{b} \in \mathbb{B}$ of generating elements has an absolutely definable automorphic orbit* $\mathrm{Orb}(\bar{b})$. *Then every interpretation $(\Gamma, p) : \mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{B}$ with parameters has a regularization $(\Gamma, \varphi) : \mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{B}$.*

Furthermore, it has emerged that the theory of interpretations has deep connections to B. I. Plotkin's logical geometries. By employing the language of interpretations and interpretation functors, it has become possible to provide answers to fundamental questions posed by B. I. Plotkin: "When do two algebraic structures possess the same logical geometries?" The categorical results obtained in addressing these questions will be presented during the talk. One such result is the following theorem.

**Theorem 3.** *For any algebraic structures $\mathbb{A} = \langle A; L(\mathbb{A})\rangle$ and $\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B})\rangle$ the following conditions are equivalent:*

(1) *$\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are strongly bi-interpretable in each other;*
(2) *the categories of projective definable sets over $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are equivalent relative to the class of translation functors;*
(3) *the categories of projective logical sets over $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are equivalent relative to the class of interpretation functors.*

*The research was supported in accordance with the state task of the IM SB RAS, project FWNF-2026-0033.*

## References

[1] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, M. Sohrabi, *Rich groups, weak second-order logic, and applications*, arXiv:2109.13133, Groups and Model Theory: GAGTA Book 2: 127–192, 2021.

[2] E. Daniyarova, A. Myasnikov, *Theory of Interpretations I. Foundations*, arXiv:2511.13810, International Journal of Algebra and Computation, 2025, 81 p., doi: 10.1142/S0218196726400047.

[3] E. Daniyarova, A. Myasnikov, *Theory of Interpretations II. Categorical equivalence of projective logical geometries*, arXiv:2607.23261, International Journal of Algebra and Computation, 2026, 94 p., doi: 10.1142/S0218196726400059.

[4] E. Daniyarova, A. Myasnikov, *Groups elementarily equivalent to metabelian Baumslag–Solitar groups and regular bi-interpretability*, arXiv:2407.00642, Annals of Pure and Applied Logic, **177**(5): 103695, 2026, 32 p. doi: 10.1016/j.apal.2025.103695.

*Sobolev Institute of Mathematics, Omsk (Russia)*
*E-mail:* evelina.daniyarova@gmail.com

## The isomorphism problem for groups acting on trees

F. A. Dudkin

A finitely generated group $G_n$ that acts on a tree $T$ such that all edge stabilizers are infinite cyclic groups and all vertex stabilizers are free abelian groups of rank $n$ will be called a *generalized Baumslag-Solitar group of type* $(n, 1)$ ($GBS(n, 1)$ group).

According to the Bass-Serre theorem, every $GBS(n, 1)$ group $G_n$ can be represented as $\pi_1(\mathbb{A})$ the fundamental group of a graph of groups $\mathbb{A}$, where each edge group is infinite cyclic and each vertex group is a free abelian group of rank $n$. A $GBS(1, 1)$ group is called a *generalized Baumslag-Solitar group* ($GBS$ group). The isomorphism problem for $GBS(n, 1)$ groups, even in the case $n = 1$, has only been solved in some special cases and, in general, remains a difficult open problem. G. Levitt, M. Forester, M. Clay, D. Wang and others proposed solutions to this problem for special cases.

We study $GBS(n, 1)$ groups with a non-trivial center and prove that the isomorphism problem for such groups is closely related to the isomorphism problem for $GBS$ groups with a non-trivial center (which is decidable).

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: DudkinF@math.nsc.ru*

## Decidable models in the theory of well-orderings

S. Goncharov

In this talk we present results on decidable (strongly constructive) models built from ordinal constructions, obtained within computable model theory [**1**]. The foundational results on the theory of well-orderings are due to Doner, Mostowski and Tarski [**2**], who proved the decidability of the elementary theory of every ordinal and of the theory of all ordinals, and established a number of model-theoretic results for these theories.

Using this technique together with computability theory, it was first shown, jointly with A.M. Petrenko, V.K. Kravtsov and E.I. Khlestova, that the prime model of the complete theory of any ordinal is decidable. This follows from the decidability of the theory [**2**], the computability of the set of complete formulas of any such theory, and the theorem on decidability of prime models [**1**]. As a consequence, we obtain decidable presentations of the ordinal $\omega^\omega$ and of every ordinal $\lambda < \omega^\omega + \omega^\omega$.

Next, using the theory of recursive ordinals [**2**] and the elimination of quantifiers from [**2**], we prove the following result, which can be applied to inductive constructions of models on the basis of ordinals in order to study their strong constructivity effectively.

**Theorem.** *Every computable ordinal has a strongly constructive presentation.*

Finally, jointly with E. I. Khlestova, these results were extended to prime and saturated models of all complete extensions of the theory of all ordinals.

### References

[1] Yu. L. Ershov, S.S. Goncharov. *Constructive Models*. Springer, New York, NY, 2012.

[2] J.E. Doner, A. Mostowski, A. Tarski. *The elementary theory of well-ordering — a metamathematical study*. In: A. Macintyre, L. Pacholski, J. Paris (eds.), Logic Colloquium '77, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] H. Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York, 1967.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* s.s.goncharov@math.nsc.ru

**Finite groups with given properties of their Gruenberg-Kegel graphs**

A. S. Kondrat'ev

The Gruenberg-Kegel graph, or the prime graph, of a finite group $G$ is the graph, in which the vertex set is the set of all prime divisors of the order of $G$ and two different vertices $p$ and $q$ are adjacent if and only if there exists an element of order $pq$ in $G$. One of popular directions of research in finite group theory is the study of finite groups with given properties of their Gruenberg-Kegel graphs. The talk is devoted mainly to the important problem of a description of finite groups of order divisible by $2p$ for an odd prime $p$ and containing no elements of order $2p$. In the Gruenberg-Kegel graph of such groups, the vertices 2 and $p$ are non-adjacent. The results about the problem are discussed.

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Ural Mathematical Center, Yekaterinburg (Russia)*
*E-mail:* a.s.kondratiev@imm.uran.ru

**Multi-agent and temporal logics, projective substitutions**

V. V. Rybakov

Usage of non-classical multi-agent and temporal logics is a popular area in mathematical logic, computer science and artificial intelligence. First of all, such logic provides mathematical tools for description models expressing events connected with discussion of problems by distinct agents, resolving various confidence in correctness or truth of provided information, and influence of running time on truth value of events.

Besides, these tools also allow one to evolve pure mathematical models for calculation of truth and value of confidence. Such tools are often used in automated deduction, optimization programs and pure mathematical logic (cf. e.g. Robinson, Knuth et al., Baader and Snyder, Baader and Ghilardi). Now it is very popular as elements of mathematics in artificial intelligence. Time as environment of events or measure of information transmission may be seen as linear or branching. For example, linear modal logic may be seen as linear temporal logic (logic with linear time). Studying it, Dzik and Wojtylak proved that any formula unfailable in the linear modal logic S4.3 is projective, which gives a direct solution of the admissibility problem for S4.3. (Ideas similar to projectivity for linear modal and intuitionistic logics were suggested already in A. Wronski.)

In this work we consider multi-agent non-classical logics which may be seen as multi-modal as well as temporal logics with various time running. Basic mathematical questions in our research, as very often, are questions of decidability, satisfiability problems, and problems of the admissibility problem for inference rules. Using an unusual interpretation of the notion of projectivity for substitutions, we solve the admissibility problem for inference rules in all temporal bounded logics. We consider as well the mentioned approach for multi-agent temporal logic represented by sequences of running time clusters. Here, using a trick with hidden states, we may modify the projective formulas technique and as well solve these decidability problems in such logics. This allows very short proofs and also helps to solve the problem.

*This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 23-21-00213,* https://rscf.ru/project/23-21-00213/ *, and by the Russian Science Foundation under grant no. 25-21-20011,* https://rscf.ru/project/25-21-20011/ *.*
*Krasnoyarsk Federal University, Krasnoyarsk (Russia)*
*E-mail: vladimir_rybakov@mail.ru*

## Progress in Definability Theory, AI, and Education

A. L. Semenov

At last year's Mal'tsev Meeting, I discussed several historical starting points of definability theory and outlined a number of open problems. This year, I will briefly revisit that background before turning to recent progress and the opportunities the field offers for introducing young mathematicians to research.

Definability theory still deserves more attention than it receives. It offers open problems at various levels of difficulty, while requiring relatively little preliminary knowledge: a modest selection of topics from standard undergraduate courses, supplemented by a small amount of more specialized material, is often sufficient to begin research. Recent developments provide concrete evidence of this accessibility.

In 2021, Sergei Soprunov and I published a theorem providing an approach, based on the Svenonius theorem, to the study of definability lattices, outside of the class of homogeneous structures (in the sense of Fraïssé). The extensive body of earlier work had focused primarily on homogeneous relational structures, such as the ordered rationals and the random graph. We applied our approach to determine the definability lattice of the integers with the successor relation, viewed as a basic example of an infinite directed graph. Subsequent publications extended this approach.

In 2022, definability theory became the subject of a research programme for high-school students at the Sirius Educational Centre. Ten students from seven Russian cities took part, including one from a closed city in the Sverdlovsk Region. Alongside Soprunov and myself, the programme was led by A. Ya. Belov and I. A. Ivanov-Pogodaev. The participants engaged with the open problems and began obtaining new partial results.

One of the problems mentioned in last year's talk (and we have investigated for some time) concerned the infinite undirected tree in which every vertex has degree three. In 2026, Professor S. M. Dudakov, a representative of the Novosibirsk school of mathematical logic, solved this problem by showing that its definability lattice has exactly three elements. In the autumn of the same year, several university students, having participated in our Sirius programme, returned to us with solutions to a number of open problems (discussed in Sirius) obtained with the assistance of AI.

These developments support the prospect of a model of mathematical education and research built around dialogue among a student, a teacher, and an AI agent. A professor associated with them has a central role in this model: proposing an overall research direction, selecting problems of varying difficulty, and ensuring the mathematical significance of the results. Definability theory offers a promising setting in which to develop this approach.

We believe that the same model can also be used at the pre-university level, where students may obtain results that are new to them even when those results are already known to mathematics. Such work continues a tradition of learning through mathematical inquiry that long predates AI: N. N. Luzin's school, known as Lusitania; university-based mathematical circles for school students from the mid-1930s onward; and specialized mathematical schools and boarding schools established from the early 1960s.

The talk will present the recent mathematical results and discuss further prospects for definability theory as both a research field and a setting for mathematical education assisted by AI.

## The Dyment lattice and intuitionistic logic

A. Sorbi

The research described in this abstract is joint work with Hristo Ganchev, Paul Shafer, Theodore Slaman, and Mariya Soskova.

The *logic* $L(\mathscr{B})$ of a Brouwer algebra $\mathscr{B} = \langle B, \wedge_B, \vee_B, \to_B, \neg_B, 0_B, 1_B\rangle$ is the set of propositional formulas $\alpha$ that evaluate to $0_B$ when the propositional variables occurring in $\alpha$ are assigned arbitrary elements of $B$ and the propositional connectives are interpreted as the corresponding operations of the algebra, with $\wedge_B, \vee_B, \to_B$, and $\neg_B$ interpreting, respectively, the connectives $\wedge, \vee, \to$ and $\neg$. It is well known that every $L(\mathscr{B})$ contains the intuitionistic propositional calculus Int. If $a >_B 0_B$ is an element of $\mathscr{B}$, then $B_{\leqslant a} = \{x \in B : x \leqslant_B a\}$ is the universe of a Brouwer algebra as well, where the operations are the restrictions of the operations of $\mathscr{B}$ to $\{x : x \leqslant_B a\}$, except that $1_{B_{\leqslant a}} = a$ and $\neg_{B_{\leqslant a}}(x) = x \to_B a$.

We investigate two Brouwer algebras arising in computability theory, the Dyment lattice and the Dyment–Muchnik lattice, which can be viewed as natural generalizations, in the setting of enumeration reducibility, of the well known Medvedev and Muchnik lattices arising from Turing reducibility.

If $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ are *Dyment mass problems*, i.e., sets of partial numerical functions, we say that $\mathcal{A}$ is *Dyment-reducible* to $\mathcal{B}$, and write $\mathcal{A} \leqslant_D \mathcal{B}$, if there exists an enumeration operator $\Phi$, such that for every $\varphi \in \mathcal{B}$, $\Phi(\text{graph}(\varphi))$ outputs the graph of a partial function which lies in $\mathcal{A}$. The degrees (called *Dyment degrees*) corresponding to $\leqslant_D$ form not only a poset, but in fact a Brouwer algebra, $\mathscr{M}_D$, called the *Dyment lattice*.

The non-uniform counterpart of the Dyment reducibility is the *Dyment–Muchnik reducibility* $\leqslant_{D,w}$. Thus, $\mathcal{A} \leqslant_{D,w} \mathcal{B}$ if and only if $(\forall \varphi \in \mathcal{B})(\exists \psi \in \mathcal{A})\, \text{graph}(\varphi) \leqslant_e \text{graph}(\psi)$. This reducibility gives rise to a Brouwer algebra, denoted by $\mathscr{M}_{D,w}$ and called the *Dyment–Muchnik lattice*.

**Theorem 1.** *There exist Dyment degrees* $\mathbf{A}$ *such that* $L(\mathscr{M}_{D\leqslant_D \mathbf{A}}) = \text{Int}$.

The proof combines algebraic and computability-theoretic methods. The algebraic part is essentially the same as that used for the Medvedev lattice, while the computability-theoretic part requires additional care in view of the substantial differences between enumeration reducibility and Turing reducibility.

**Theorem 2.** *There exist Dyment–Muchnik degrees* $\mathbf{A}$ *such that* $L(\mathscr{M}_{D,w\leqslant_{D,w}\mathbf{A}}) = \text{Int}$.

Here, the existence of $\mathbf{A}$ can be derived from the existence of special classes $\mathcal{A}$ of sets of numbers, called *e-splitting* classes. Proving that these classes exist is not an easy task, since the known examples of splitting classes for the Turing degrees do not readily transfer to the setting of enumeration reducibility.

**Corollary.** *Both* $L(\mathscr{M}_D)$ *and* $L(\mathscr{M}_{D,w})$ *coincide with the intermediate logic obtained by extending Int with the axiom scheme* $\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$.

*University of Siena, Siena (Italy)*
*E-mail: sorbi@unisi.it*

## Automorphisms of Free Metabelian Lie Algebras

U. Umirbaev

In 1964, P. Cohn proved that every automorphism of a finite-rank free Lie algebra over an arbitrary field is tame. It was recently shown [**2, 3**] that every automorphism of a free metabelian Lie algebra $M_n$ of rank $n \geq 4$ over an arbitrary field is almost tame, that is, it is a product of so-called Chein automorphisms (or one-row transformations). Moreover, the group of all automorphisms $\mathrm{Aut}(M_n)$ of $M_n$ of rank $n \geq 4$ over a field of characteristic $\neq 3$ is generated by all linear automorphisms, as well as one quadratic and one cubic automorphism.

I will discuss these results and some problems concerning the structure of automorphism groups of free algebras. The notions of approximately tame and absolutely wild automorphisms were introduced in joint work with I. Shestakov [**1**]. Almost all known examples of wild automorphisms of free algebras are absolutely wild, with the notable exceptions of the Nagata and Anick automorphisms. In particular, the Bergman automorphism of free matrix algebras of order two is absolutely wild. Moreover, free algebras in any variety of polynilpotent Lie algebras—except for the abelian and metabelian varieties—also possess absolutely wild automorphisms.

### References

[1] I. Shestakov, U. Umirbaev, *Tangent Lie algebras of automorphism groups of free algebras*, Linear Algebra Appl. 734 (2026), 193–223.
[2] U.U. Umirbaev, *Automorphisms of free metabelian Lie algebras, I*, J. Algebra 698 (2026), 433–452.
[3] U.U. Umirbaev, *Automorphisms of free metabelian Lie algebras, II*, J. Algebra (accepted), https://arxiv.org/abs/2610.21954.

*Wayne State University, Detroit (USA)*
*E-mail:* umirbaev@wayne.edu

## The Kaiser class of Jonsson theories

A. Yeshkeyev

In classical model theory, the study of existentially closed models of inductive theories plays an important role in understanding their model-theoretic and structural properties [**1**]. Jonsson theories form a distinguished subclass of inductive theories, characterized by the amalgamation and joint embedding properties. For a Jonsson theory $T$, the *Kaiser class* was introduced in [**2**] as

$$K_T = \{M \in \mathrm{Mod}(T) : \mathrm{Th}_{\forall\exists}(M) \text{ is a Jonsson theory}\}.$$

Since every existentially closed model of $T$ belongs to $K_T$, the Kaiser class provides a natural generalization of the classical approach based on existentially closed models.

In this talk, we discuss the main model-theoretic properties of the Kaiser class, including questions of axiomatizability and the $K_T$-equivalence of Jonsson theories [**2**]. We also examine related structural problems concerning algebras defined on Jonsson spectra [**1**], small models and algebraically prime and atomic configurations [**4**], the role of central types in the study of fragments of perfect Jonsson spectra [**5**], and the model-theoretic properties of the #-companion of a Jonsson set [**6**]. These connections highlight the interplay between semantic properties of models and the algebraic organization of classes of theories.

References

[1] J. Barwise (ed.), *Справочная книга по математической логике. Ч. 1: Теория моделей*, M.: Наука, 1982, 392 pp. (in Russian).

[2] A. Yeshkeyev, I. Tungushbayeva, and M. Kassymetova, *On the Kaiser class of a Jonsson theory*, Symmetry **17** (2025), no. 6, art. 870.

[3] A. R. Yeshkeyev, I. O. Tungushbayeva, and O. I. Ulbrikt, *On some types of algebras of a Jonsson spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports **21** (2024), no. 2, 866–881.

[4] A. R. Yeshkeyev, O. I. Ulbrikt, and A. K. Issayeva, *Algebraically prime and atomic sets*, TWMS J. Pure Appl. Math. **14** (2023), no. 2, 232–245.

[5] A. R. Yeshkeyev, O. I. Ulbrikt, and M. T. Omarova, *The number of fragments of the perfect class of the Jonsson spectrum*, Lobachevskii J. Math. **43** (2022), no. 12, 3658–3673.

[6] A. R. Yeshkeyev, M. T. Kassymetova, and N. K. Shamatayeva, *Model-theoretic properties of the #-companion of a Jonsson set*, Eurasian Mathematical Journal **9** (2018), no. 2, 68–81. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2018-9-2-68-81.

*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda (Kazakhstan)*
*E-mail:* aibat.kz@gmail.com

# II. Секция «Алгебро-логические методы в информационных технологиях»

## Разработка модуля управления кластерами в среде Kubernetes для ИИ-агента администрирования Apache Kafka

В. М. Абраменко

Эксплуатация Apache Kafka в среде Kubernetes включает настройку кластеров, изменение их конфигурации, контроль состояния и диагностику сбоев. Эти задачи требуют опыта DevOps-специалистов, а ручное выполнение повторяющихся операций увеличивает трудозатраты на сопровождение системы [**1**]. Развитие ИИ-агентов и мультиагентных систем создаёт предпосылки для автоматизации типовых действий [**2**]. Для этого агенту необходим программный интерфейс получения сведений о кластере и выполнения операций управления.

Целью данной работы является разработка модуля управления кластерами Kafka в среде Kubernetes для ИИ-агента администрирования Apache Kafka.

В ходе работы определены требования к взаимодействию ИИ-агента с кластером Kafka и выбрана архитектура модуля на основе протокола Model Context Protocol [**3**]. Модуль предназначен для предоставления агенту единого интерфейса к операциям администрирования с проверкой параметров вызовов и структурированными результатами.

### Литература

[1] Cloud Native Computing Foundation. *CNCF Ecosystem Gaps*, 2024. https://www.cncf.io/reports/cncf-ecosystem-gaps/.

[2] Plaat A. et al. *Agentic Large Language Models, a survey*, 2025. https://arxiv.org/abs/2503.23037.

[3] Model Context Protocol. *Tools*. https://modelcontextprotocol.io/specification/2025-11-25/server/tools.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* *v.abramenko@g.nsu.ru*

## Разработка цифровых двойников регламентов при помощи онтологических моделей

Л. В. Авдонина

Цифровой двойник регламента — динамическая исполняемая модель нормативного документа, позволяющая компьютеру понимать правила без неоднозначностей естественного языка. Она автоматически проверяет соответствие действий требованиям, симулирует изменения и адаптируется к новым редакциям [**1**].

В работе рассматривается задача создания цифрового двойника регламента на примере приказов о направлении студентов на практику. Разработан программный прототип `onto-practice`, который реализует полный цикл проверки: извлечение структурированных фактов из текста приказа с помощью больших языковых моделей, загрузку фактов в онтологию на языке OWL 2, логический вывод с использованием ризонера HermiT и формирование объяснимого отчёта о выявленных нарушениях.

Онтологическая модель формализует ключевые понятия предметной области (студент, приказ, практика, руководитель, направление подготовки и др.) и связи между ними. Для проверки документов сформулирован набор из семи правил, включающих полноту обязательных полей, корректность дат, соблюдение минимального срока между изданием приказа и началом практики, наличие руководителя от университета, уникальность номеров зачётных книжек и соответствие кода направления ФГОС.

Архитектура системы спроектирована расширяемой, что позволяет в перспективе добавлять новые типы регламентов без переписывания ядра.

Полученные результаты демонстрируют работоспособность подхода «текст регламента → онтология → цифровой двойник регламента» и показывают перспективы применения цифровых двойников регламентов в системах управления учебным процессом вузов.

### Литература

[1] Пальчунов Д. Е., Чернявцева С. И. *Разработка интеллектуального помощника для автоматизированного порождения документов кафедры* // Программная инженерия. 2023. Том 14, № 8. С. 388–400. DOI: 10.17587/prin.14.388-400.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*

*Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, академик РИА Д. Е. Пальчунов.*

## Логическая семантика как источник ошибок генерации кода с использованием больших языковых моделей

Д. А. Агриколянский

Язык Delta Zero Semantic Language (d0sl) — декларативный язык, предназначенный для создания семантических исполняемых спецификаций [**1**]. Несмотря на практическую значимость, d0sl остается недоступным для инструментов ИИ-ассистирования: язык отсутствует в обучающих корпусах больших языковых моделей и представляет собой случай низкоресурсного DSL. Как следствие, при генерации кода модели переносят на него знания, полученные при обучении на данных императивных языков с двузначным логическим типом данных `boolean`. Вместо него в d0sl представлен тип `logical` — логическое значение тернарной логики Клини (`true`, `false` или `unknown`) [**1**].

Гипотеза, что большие языковые модели применяют к коду на d0sl преобразования, допустимые лишь в классической логике, подтверждается при проверках на разработанном для d0sl бенчмарке, в том числе на задачах, которые реализуют проверки разрешения троичной логики. В большинстве случаев модели порождают программы, которые проходят синтаксический анализ, разрешение имен и проверку типов, но расходятся в проверках по семантической корректности.

Рассмотрим характерный пример с инверсией условия с перестановкой ветвей, где тернарный оператор выполняет первую ветвь только при значении `true`, а `false` и `unknown` направляет в ветвь «иначе», поэтому программы

```
?(!(sent(t)) ? notify(t) : true)   и   ?(sent(t) ? true : notify(t)),
```

эквивалентные в классической логике, при ошибке проверки `sent(t)` ведут себя поразному: первая не отправит уведомление, а вторая отправит его повторно. Для модели, обученной на двузначной логике, эти записи взаимозаменяемы, а обычные тесты, в которых внешняя система всегда отвечает, разницы не выявляют.

Для устранения в том числе таких ошибок необходимо дообучение открытых моделей методами Low-Rank Adaptation (LoRA) и Reinforcement Learning with Verifiable Rewards (RLVR) с последующим сравнением доли таких ошибок до и после дообучения.

### Литература

[1] Gumirov V. S., Matyukov P. Y., Palchunov D. E. *Semantic Domain-specific Languages*. International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences. SIBIRCON, 2019. P. 955–960.

[2] Клини С. К. *Введение в метаматематику*. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: d.agrikolyanskii@nsu.ru*

*Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, академик РИА Д. Е. Пальчунов.*

## Методы управления диалогом и блочной оценки ответов в LLM-тренажере собеседований

Л. Е. Анисимов

Применение языковых моделей позволяет моделировать технические собеседования, однако создание тренажера требует непрерывного контекстного диалога с учетом предыдущих реплик респондента. Поскольку итоговые данные фиксируются без внешней корректировки, процедура оценивания внутри сессии должна быть высокоточной и объяснимой.

Цель работы — сравнить методы управления диалогом, оценивания ответов и агрегации баллов по блокам подготовки, а также определить подходы, обеспечивающие надежную оценку и выявление сильных и слабых сторон пользователя.

Интервью включает три блока: биографический (HR), общетеоретический и профильный. Такая структура исключает единую шкалу: в HR-блоке оцениваются связность и структура речи, а в технических — фактологическая точность. Унифицированный критерий смешивает беглость ответа с его корректностью, завышая баллы, а сложность генерации вопросов может отклоняться от целевой.

Оценка опирается на блочную декомпозицию: общий балл скрывает пробелы, тогда как дифференцированный анализ раскрывает реальный профиль знаний.

Рассматриваются три группы подходов. Для управления диалогом: конечный автомат с фиксированными переходами и мультиагентная система. Для оценивания: детерминированные рубрики (STAR, модели компетенций) и калиброванный LLM-судья. Для агрегации: взвешенное объединение блочных оценок и профилирование компетенций. Для каждого метода описаны принципы, требования, ограничения, а также проанализированы опубликованные данные о точности и согласованности. Поскольку метрики получены на разных выборках и шкалах, условия экспериментов учитываются отдельно. Дополнительно исследуется влияние длины диалога, уточняющих вопросов и повторных запусков на устойчивость оценок.

### Литература

[1] Яхъяева Г.Э., Абсайдульева А.Р. *Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств.* Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[2] Баталин К.В., Яхъяева Г.Э. *Система управления оценочными средствами.* Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2020. Т.18, №2. С. 5–14.

[3] Wen Z., Cao J., Wang Z. et al. *PolyInterview: An LLM-based Platform for Immersive Mock Interview Practice with Comprehensive Multimodal Assessment.* arXiv:2607.10310. 2026.

[4] Sun G., Yu R., Yin L. et al. *CoMAI: A Collaborative Multi-Agent Framework for Robust and Equitable Interview Evaluation.* arXiv:2603.16215. 2026.

[5] Tang X., Ambrose G. A., Cheng Y. *Designing Reliable LLM-Assisted Rubric Scoring for Constructed Responses: Evidence from Physics Exams.* arXiv:2604.12227. 2026.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: l.anisimov@g.nsu.ru*

## Режиссёрский вывод: вероятностная модель динамики сцены для генерации персональных аудио-нарративов по тексту

Б. Б. Базаров

Озвучивание художественных текстов по ролям востребовано для доступа незрячих людей к литературе, в обучении и в издательской практике, но требует труда режиссёра и актёров. Системы автоматической генерации аудио поручают постановочные решения языковой модели [**1**] или каскаду правил, не учитывая надёжность источников информации и согласованность решений во времени.

Предлагается метод режиссёрского вывода: постановка рассматривается как скрытое состояние сцены, а ремарки автора, разметка языковой модели и оценки классификатора эмоций — как его зашумлённые наблюдения. Состояние персонажа включает координаты эмоции в модели «удовольствие — возбуждение — доминантность» [**2**] и голосовое усилие $\ell$:

$$z_c(t+1) = \bar{z}_c + A\big(z_c(t) - \bar{z}_c\big) + \gamma\, e_\ell\big(g_\ell(t+1) - \ell_c(t)\big) + \eta_c,$$

где матрица $A$ задаёт эмоциональную инерцию, а поле сцены $g$ — подстройку собеседников друг под друга. Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка состояния вычисляется сглаживателем Рауха — Тунга — Штрибеля [**3**], подача реплик — алгоритмом Витерби, а надёжность источников оценивается без эталонной разметки методом «треуголки» [**4**].

Показано, что эмпирические правила режиссуры — приоритет авторской ремарки, эмоциональная инерция, приглушение сцены после шёпота — являются частными случаями модели, что даёт им теоретическое обоснование; персонализация сводится к параметрам функции потерь. Разработанная программная система по тексту на русском или английском языке формирует аудиоспектакль с голосами персонажей, звуковыми эффектами и автоматическим контролем качества и служит инструментом создания доступных персонализированных аудиоверсий литературных произведений.

### Литература

[1] Liu X., Zhu Z., Liu H. et al. *WavJourney: Compositional Audio Creation with Large Language Models.* arXiv:2307.14335, 2023.

[2] Russell J.A., Mehrabian A. *Evidence for a three-factor theory of emotions.* Journal of Research in Personality, 1977, vol. 11, no. 3, pp. 273–294.

[3] Rauch H.E., Tung F., Striebel C.T. *Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems.* AIAA Journal, 1965, vol. 3, no. 8, pp. 1445–1450.

[4] Gray J.E., Allan D.W. *A method for estimating the frequency stability of an individual oscillator.* Proc. 28th Annual Symp. on Frequency Control, 1974, pp. 243–246.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* b.bazarov1@g.nsu.ru

## Алгоритм распознавания и восстановления структуры зависимостей квантовых состояний

О. П. Валенко

В настоящее время большинство алгоритмов для анализа квантовых систем позволяют делать лишь косвенные выводы о наличии сепарабельности [**1**]. В условиях роста интереса к квантовым вычислениям задача точного распознавания структуры таких систем приобретает особую значимость. Разработка алгоритма, способного напрямую определять сепарабельность системы и её подсистем, повышает надёжность анализа и расширяет возможности его практического применения.

В данной работе рассматривается метод анализа сепарабельности квантовых систем на основе теории размытых моделей [**1, 2**]. Подход опирается на вычисление вероятностной меры и проверку запутанности для различных комбинаций элементов исходной системы.

Квантовое состояние задаётся набором амплитуд. Формируется вектор состояния, служащий входными данными для алгоритма. На первом этапе вычисляется вероятностная мера для всевозможных комбинаций атомов заданной размерности. Затем выполняется последовательная проверка запутанности для пар, троек, четвёрок и далее, что позволяет выявить зависимости разного порядка.

Дополнительно разработан обратный алгоритм, строящий допустимое вероятностное распределение базисных состояний по заданным атомарным мерам и структуре зависимостей. Для этого меры конъюнкций выражаются через суммы вероятностей состояний, а условия зависимости и независимости — через равенства и неравенства. Найденное распределение верифицируется прямым алгоритмом путём сравнения полученных кластеров с исходными.

Эксперименты на квантовых системах различной размерности показали, что метод корректно выявляет би- и мультисепарабельные состояния. Проверка обратного алгоритма подтвердила возможность построения распределений с сохранением заданных мер, зависимостей и кластерной структуры. В дальнейшем планируется оптимизация алгоритмов для снижения их вычислительной сложности на системах большой размерности.

### Литература

[1] G. Yakhyaeva and V. Kharchenko, *On the Separability Problem of Quantum Systems*, 2025 IEEE XVII International Scientific and Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE), Novosibirsk, Russian Federation, 2025, pp. 1–5.

[2] Yakhyaeva G. E. *Quantum Interpretation of Fuzzy Models.* Pattern Recognition and Image Analysis, 2025, Vol. 35, No. 4, 2025, pp. 1082–1089.

[3] Яхъяева Г. Э. *Взаимная независимость подмоделей размытой модели.* Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 56. С. 160–175.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: o.valenko@g.nsu.ru*

## Гибридный метод поиска релевантной информации в нормативно-правовых документах для RAG-систем

А. Д. Воробьев

RAG-системы (Retrieval-Augmented Generation) объединяют поиск информации во внешней базе знаний с генерацией ответа языковой моделью [**1**]. Их качество во многом зависит от релевантности фрагментов, формирующих контекст.

Для нормативно-правовых документов семантического и лексического сходства недостаточно. Нормативные акты имеют иерархическую структуру, изменяются во времени и связаны отношениями изменения, отмены, дополнения и ссылок. Поэтому релевантный фрагмент может относиться к недействующей редакции или быть неприменимым без учета связанных норм.

Цель работы — разработка гибридного метода поиска релевантных фрагментов нормативно-правовых документов для RAG-систем. Метод сочетает BM25 и семантический векторный поиск. Векторный поиск выявляет смыслово близкие фрагменты без точного совпадения терминов [**2**], а BM25 эффективен для юридических формулировок, наименований и реквизитов нормативных актов.

При ранжировании предлагается учитывать структуру документа, период действия редакции и связи между нормативными актами, представленные в виде графа. Графовые представления позволяют учитывать взаимосвязи между сущностями и фрагментами [**3**], а соответствующие признаки использовать при поиске и переранжировании.

Предлагаемый подход объединяет лексическую, семантическую, структурную и временную релевантность. Предполагается, что это позволит сократить долю устаревших и неприменимых фрагментов. Оценка метода будет проводиться в сравнении с BM25 и векторным поиском по стандартным метрикам информационного поиска.

### Литература

[1] Lewis P., Perez E., Piktus A. et al. *Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks.* NeurIPS, 2020.

[2] Karpukhin V., Oğuz B., Min S. et al. *Dense Passage Retrieval for Open-Domain Question Answering.* EMNLP, 2020.

[3] Edge D., Trinh H., Cheng N. et al. *From Local to Global: A Graph RAG Approach to Query-Focused Summarization.* 2024.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* *a.vorobev2@g.nsu.ru*

## Линейно вычислимые регулярные модели дискретных систем реального времени

В. Н. Глушкова, К. С. Коровина

В концепции Σ-программирования [**1**] для спецификации систем реального времени выделены классы $\Delta_0$-формул с ограниченными кванторами по спискам, представляющим полные деревья выводов $tr$ в регулярных грамматиках $G$. Правила вида $st \to act_1 st_1$ описывают поведение моделируемой системы через переходы из одного состояния в другое с изменением посредством действий ее параметров. Грамматика $G$ — синтаксическая часть формальной модели, ее алфавит задает основные сорта модели, правила являются шаблоном аксиом теории — квазитождеств, которые интерпретируются на элементах списка надстройки модели, представляющим полное дерево вывода в грамматике $G$.

Дискретное время $dt$ равно номеру позиции символа в дереве $tr$ при его обходе сверху-вниз, слева-направо; непрерывное время — список из констант $\langle c_1, c_2 \rangle$. Правилу грамматики соответствует аксиома теории модели вида

$$(\forall z, y \dot{\in} r)(\forall x \in y)(St(dt(y)) \wedge dt(z) < dt(x) \wedge P(dt(z)) \to St_1(dt(x)) \wedge Act_1(dt(x))$$
$$\wedge Q(dt(x), dt(y), dt(z)) \wedge f(dt(x)) = \tau(dt(y), dt(z)))$$

Здесь $\dot{\in}$ — транзитивное замыкание отношения $\in$ на элементах списка, $r$ — список дерева $tr$; $P, Q, f, \tau$ — символы предикатов, функции и терма. Альтернативным правилам для символа $st$ сопоставляются дизъюнкты, входящие в правую часть импликации. Для теории, обладающей свойством нетеровости и конфлюентности, можно построить модель за линейное время относительно количества правил грамматики. В рамках теории списочных расширений $GES$ за полиномиальное время можно провести количественный временной анализ моделируемой системы в отличие от сложных экспоненциальных алгоритмов верификации для темпоральных логик в идеологии model checking [**2**].

Частный случай выделенного класса формул использовался в [**3**] для спецификации и верификации FDDI-протокола. Многокомпонентная система описывается «мультиграмматикой» со специфичными правилами для каждой подсистемы, связь между которыми осуществляется наличием в теории системы общих средств управления (предикатов) для взаимосвязи отдельных компонент.

### Литература

[1] Goncharov S.S., Ershov Yu.L., Sviridenko D.I. *Semantic programming.* Information processing. 1986, V. 11, № 10, p. 1093–1100.

[2] Кларк Э.М., Гринберг О., Пелед Д. *Верификация моделей программ: Model Checking.* Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, Москва, 2002.

[3] Глушкова В.Н., Коровина К.С. *Полиномиально вычислимые регулярные модели систем реального времени.* Материалы IX Международной конференции «Знания — Онтологии — Теории» (ЗОНТ 2023), стр. 73–82, Новосибирск, 2023.

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону (Россия)*
*E-mail: lar@aaanet.ru, ksenichka_ @inbox.ru*

**Алгебро-логический подход к анализу языков программирования**

Л. В. Городняя

В докладе представлены полученные в ИСИ СО РАН результаты исследования языков программирования, связанные с разработкой методов преподавания программирования. Используется предложенное в 1970-е годы С.С. Лавровым понятие «семантическая система», расширяющее понятие «алгебраическая система» заданием правила применения операций к данным. Семантическая система — это $\langle V, F, R\rangle$, где: $V$ — основное множество данных, $F$ — базовый набор операций над $V$, $R$ — правило применения операций из $F$ к данным из $V$.

Семантические системы могут быть отнесены к разным категориям в зависимости от особенностей правила $R$ и свойств операций $F$. Наиболее очевидным является строгость границ между составляющими $V, F, R$. Большинство языков поддерживает строгое разделение данных, операций и правила применения как в языке Pascal ($V \cap F \cap \{R\} = \varnothing$). Языки ООП, например C++, включают методы в структуры классов объектов ($F \subset V$, $F \cap \{R\} = \varnothing$), но общее правило применения операций остаётся изолированным. В языке Forth данные и операции разделены ($V \cap F = \varnothing$, $\{R\} \subset F$), но правило применения операций к данным можно программировать. В языках функционального программирования, начиная с языка Lisp, функции могут быть данными, а правила — функциями ($\{R\} \subset F \subset V$).

Другое направление различий связано с четырьмя уровнями абстрагирования механизмов языка на базис, расширение, диагностику и связь с внешним миром. Базовая семантика определяется вне языка, на уровне абстрактной машины. Расширенная семантика может быть сведена к композициям над базовой семантикой, пополняющим набор операций $F$. Уровень границ вычислений требует диагностического дополнения языка. Кроме того, требуются семантические системы, обслуживающие отладку и применение программ, а также работу в сетях и с разными устройствами.

Каждый уровень может быть разделён на четыре сектора, связанных с компонентами компьютерных архитектур, таких как вычислительное устройство, память, устройство управления процессами и средства структурирования данных. Семантические системы, ориентированные на такие устройства, различаются особенностями формата определений операций. Так для любого множества данных $V$ различимы формы для:

- методов вычислений: $(V^* \to V^+)$ или $(V^* \to V)$ для языков чисто функционального программирования;
- доступа к памяти: $(T : N \to V)$, $N$ — имена, $T$ — таблица, возможно неявная;
- предикатов, управляющих вычислениями: $(F \to \{\text{истина}, \text{ложь}\})$;
- обратимого структурирования данных: $(A \to K) \cup (A \to K) = (A \to K)$.

Здесь $V^*$ — произвольное число вхождений элементов $V$, $V^+$ — хотя бы одно вхождение элемента $V$.

История языков программирования накопила заметное разнообразие понимания роли и смысла предикатов. На уровне аппаратуры главным является критерий успешного выполнения команды за конечное время. При успехе вырабатывается сигнал «0», а иначе — код прерывания или диагностическое сообщение. Для численных расчётов достаточно код «0» понимать как значение «ложь», а всё остальное как «истина». При переходе к обработке структур данных оказалось удобнее контролировать их опустошение, что привело к пониманию Nil или пустого списка как значение «ложь», а всего остального как «истина». При сопоставлении с образцом истинность понимается как

соответствие шаблону, что выводит это понятие из мира данных в пространство процессов. Встречаются языки с явными логическими значениями «true» — «false» или «f» — «t» и сочетания таких обозначений с ранее принятым пониманием. В языке Ruby и многих диалектах языка Lisp ложь только «false» и «nil». В языке Python ложь — это «False», «None», «0», «0.0», «», «[]», «», «set()». Похожая картина в языке JavaScript. Ложь — «false», «0», «-0», «0n», «», «null», «undefined» или «NaN», остальное, включая «[]» и «», — истина. Практически это означает, что вместо логического типа данных поддерживаются два типа — тип «логическая истина» и тип «логическая ложь», надстроенные над общим пространством данных языка.

Появление многопроцессорных комплексов влияет не только на стиль мышления, но и на семантику языков программирования, усложняя семантические системы управления вычислениями в соответствии с числом моделей параллелизма. Вместо абстрактной машины приходится определять абстрактный комплекс, команды которого предоставляют возможности взаимодействия процессов, обработку сигналов, событий и др.

В целом, алгебро-логический подход с помощью семантических систем позволяет проявлять рассеянные закономерности в определениях языков программирования.

*Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: lidvas@gmail.com*

## Разработка методов извлечения эмоциональных оценок ситуаций из текстов естественного языка

Н. А. Доценко

Современные нейросетевые модели успешно классифицируют эмоции в текстах, но не указывают, чем вызвана каждая эмоция, и не учитывают, что разные части одной ситуации могут вызывать разные эмоции. Целью работы является разработка методов извлечения эмоциональных оценок ситуаций, связывающих каждую эмоцию с её причиной. Для этого используется формализм частичных моделей **[1]**: знания о ситуации, содержащиеся в тексте, неполны, и предикаты, не определённые текстом, не считаются ни истинными, ни ложными.

По тексту $T$ строится сигнатура $\sigma_T$ (константы — объекты ситуации, предикаты — их свойства и отношения) и атомарная диаграмма $D(T)$ — множество атомарных формул, истинных согласно тексту. Эмоциональная оценка ситуации определяется как множество троек

$$E(T) = \{(e_i,\, w_i,\, \Phi_i)\}, \qquad e_i \in \mathrm{Emo}, \quad w_i \in [0,1], \quad \Phi_i \subseteq D(T),$$

где Emo — восемь базовых эмоций (на основе модели Плутчика **[2]**), $w_i$ — интенсивность, $\Phi_i$ — фрагмент диаграммы, являющийся причиной эмоции $e_i$.

В рамках работы разработан двухэтапный метод построения $E(T)$:

- **Построение частичной модели.** Большая языковая модель (Qwen2.5-7B-Instruct) по тексту $T$ строит $\sigma_T$ и $D(T)$.
- **Извлечение эмоциональной оценки.** Вторая модель по $D(T)$ определяет тройки $(e_i, w_i, \Phi_i)$.
- **Проверка корректности.** Аргументы фактов должны быть константами $\sigma_T$, $\Phi_i \subseteq D(T)$, $w_i \in [0,1]$; при нарушении условий генерация повторяется.

Тем самым каждая эмоция обоснована конкретными фактами о ситуации.

Метод реализован в виде программного модуля; модели дообучаются методом LoRA на корпусе отзывов, размеченных частичными моделями и эмоциональными оценками. Дальнейшие исследования направлены на экспериментальное сравнение двухэтапного метода с одноэтапным подходом, извлекающим эмоции из текста напрямую.

### Литература

[1] Palchunov D. E., Akhmedov E. Yu. *Development of logical methods for extracting emotional assessments from natural language texts* // 2023 IEEE XVI International Scientific and Technical Conference APEIE. Novosibirsk, 2023. P. 1460–1465.

[2] Plutchik R. *The nature of emotions* // American Scientist. 2001. Vol. 89, no. 4. P. 344–350.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* n.dotsenko1@g.nsu.ru

## Теоретико-модельный подход к поиску и извлечению знаний из документов в системах электронного документооборота

С. Ю. Дуткин

Деятельность университетской кафедры сопровождается значительным объемом регламентирующих документов (рабочие программы дисциплин, приказы, локальные нормативные акты). Традиционные методы информационного поиска и векторные архитектуры генерации с дополнением поиском (RAG) сталкиваются с рядом ограничений: отсутствием строгого учета темпоральных характеристик, потерей контекста происхождения данных, а также подверженностью генеративным ошибкам. В связи с этим разработка формальных методов точной ориентации в документах кафедры является актуальной задачей.

Целью работы является разработка программной системы для интеллектуальной ориентации в документообороте секретаря кафедры, обеспечивающей поиск и извлечение информации по сущностям, хранение и верификацию сведений об актуальности, сроках действия и происхождении документов.

Научная новизна исследования заключается в интеграции теоретико-модельного подхода к представлению знаний с методами генеративного вопросно-ответного поиска. Предметная область кафедры формализуется на основе многоуровневой структуры знаний: онтологические понятия и отношения, общие правила и нормативные регламенты, а также эмпирические факты, представленные в виде конечных фрагментов атомарных диаграмм алгебраических систем [**1, 2**].

Архитектурно система строится по гибридной схеме и включает реляционное хранилище метаданных и источников, модуль логического представления и проверки непротиворечивости на базе языка OWL/ALCI, компонент извлечения сущностей из текстов и модуль взаимодействия с пользователем на основе RAG-пайплайна.

Разрабатываемый подход позволит повысить точность информационного обслуживания сотрудников кафедры, снизить трудозатраты на рутинные поисковые операции и обеспечить прозрачность принятия регламентных решений.

### Литература

[1] Найданов Ч. А. *Разработка ядра онтологической модели, настраиваемой под предметную область* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2019. — Т. 17, № 1. — С. 72–81.

[2] Найданов Ч. А., Пальчунов Д. Е., Сазонова П. А. *Теоретико-модельные методы интеграции знаний, извлеченных из медицинских документов* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2015. — Т. 13, № 3. — С. 29–41.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* s.dutkin@g.nsu.ru

## Использование причинно-следственной семантики для редукции пространства состояний непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией

А. Ю. Зубарев

Непрерывно-временные сети Петри (НВСП) расширяют классические сети Петри, сопоставляя каждому переходу временной интервал. Выделяют сильную и слабую временные стратегии. В отличие от сильной, в слабой стратегии ход времени не принуждает переходы к срабатыванию, что позволяет моделировать системы (например, биохимические), где наступление событий возможно, но не гарантировано. Данные стратегии несравнимы по выразительности, однако многие стандартные задачи верификации, неразрешимые в общем случае для сильной стратегии, разрешимы для слабой.

Классическая интерливинговая семантика, основанная на чередовании хода времени и срабатываний переходов, применяется для анализа свойств систем, однако ее использование сопряжено с избыточным перебором всех возможных последовательностей срабатываний параллельных переходов. В работе исследуется альтернативная причинно-следственная семантика на основе модели временных процессов. Временной процесс определяется временной причинно-следственной сетью (ВПСС — множеством условий и событий, связанных ациклическим отношением инцидентности) и гомоморфизмом (отображением элементов ВПСС в НВСП). Время в такой модели связано с сечениями ВПСС (максимальными по включению множествами попарно параллельных условий) и согласовано с временными ограничениями исходной НВСП. Данная модель позволяет рассматривать независимые параллельные события в рамках единого процесса, представляющего целый класс интерливинговых последовательностей, которые различаются лишь порядком этих событий.

Для оценки подхода реализован экспериментальный программный инструмент на языке Python [**1**]. На биологических моделях сигнальных каскадов (EGFr, MAPKbis) и модели системы балансировки нагрузки (simpleLBS) был исследован коэффициент редукции — отношение суммарного числа состояний во всех интерливинговых последовательностях процесса к числу его сечений. Результаты продемонстрировали экспоненциальный рост данного коэффициента с увеличением числа событий в процессе.

### Литература

[1] Зубарев А. Ю. *Программный инструмент построения и анализа временных процессов для непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией* [Электронный ресурс] // GitVerse. — 2026. — URL: https://gitverse.ru/auzubarev/time-process-cut (дата обращения: 02.10.2026).

*Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* auzubarev@gmail.com

## Разработка алгоритма генерации объяснений для модели CLIP

К. П. Кондренко

Мультимодальные модели глубокого обучения позволяют сопоставлять изображения и текстовые описания. Одной из таких моделей является модель CLIP [**1**]. Однако интерпретация результатов в этой модели затруднена, поскольку оценка сходства сама по себе не позволяет определить, какие признаки изображения и элементы текста повлияли на результат. Это ограничивает возможности анализа поведения модели и затрудняет интерпретацию решений [**2**].

Целью работы является разработка метода генерации объяснений для CLIP, позволяющего оценивать значимость отдельных токенов текста и частей изображения при вычислении кросс-модального сходства. Подход основан на анализе внутренних представлений модели и механизмов внимания архитектуры Transformer Encoder.

На данный момент разрабатывается программная реализация метода, обеспечивающая получение оценок значимости элементов обеих модальностей. Для предварительного исследования подхода планируется проведение экспериментов на примерах изображений и текстовых описаний. Полученные результаты позволят проанализировать характер и качество формируемых объяснений и определить ограничения метода.

Разрабатываемый подход направлен на повышение интерпретируемости мультимодальных моделей и создание инструмента для анализа их работы.

### Литература

[1] Radford A., Kim J.W., Hallacy C., et al. *Learning Transferable Visual Models From Natural Language Supervision*. In: Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning, Proceedings of Machine Learning Research, 2021, vol. 139, pp. 8748–8763.

[2] Molnar C. *Interpretable Machine Learning: A Guide for Making Black Box Models Explainable*. 3rd ed., 2025. Available at: https://christophm.github.io/interpretable-ml-book.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: k.kondrenko@g.nsu.ru*

## Разработка методов автоматизации планирования в сфере управления ИТ-проектами

Н. С. Косарев

Одними из наиболее важных характеристик ИТ-проектов являются их прогнозируемость, управляемость и адаптивность. Для обеспечения преемственности данных характеристик на протяжении всего жизненного цикла проекта ключевое значение имеет этап планирования [**1**].

На сегодняшний день известно множество методов и подходов к планированию ИТ-проектов. Однако существующие подходы требуют значительных трудозатрат на этапе оценки и критически зависят от субъективного опыта и качества анализа неоднородных данных, получаемых в ходе управления рисками, учета ограничений и, зачастую изменчивых, потребностей бизнеса. Более того, необходимость учета множества разнородных факторов зачастую приводит к ошибкам планирования [**1**].

В рамках данной работы рассматривается подход, основанный на разработке методов для автоматизации планирования в сфере управления ИТ-проектами. Предполагается, что предлагаемый подход позволит не только существенно сократить трудозатраты, необходимые для выполнения итераций планирования, но и предотвратить потенциальные ошибки планирования.

В рамках работы рассматриваются применение больших языковых моделей для автоматизации анализа трудоемкости задач и управления рисками, разработка и применение методов иерархического планирования для автоматизированной декомпозиции задач, разработка алгоритма автоматизированного планирования, применимого для структуры задач, имеющих слабую зависимость друг от друга.

Теоретическая ценность данной работы заключается в расширении методологии планирования в сфере управления ИТ-проектами. Практическая ценность данной работы заключается в экономии времени и ресурсов людей на этапе планирования в рамках ИТ-проектов.

### Литература

[1] Крючкова Д. А. *Проблемы оценки трудозатрат при реализации ИТ-проектов. Взаимосвязь между оценкой трудоемкости работ в ИТ-проектах по методу story points и реальными трудозатратами* // Парадигма. 2025. № 4. С. 15–22.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: nkosarev4392@gmail.com*

## Интеллектуальный агент для сопровождения трудоустройства преподавателей кафедры на основе онтологии

С. С. Кравцова

Трудоустройство преподавателей — один из самых трудоёмких процессов работы секретаря кафедры. Перед семестром для каждого преподавателя нужно определить форму оформления (трудовой договор по основному месту работы или по совместительству, договор ГПХ, почасовая оплата), собрать комплект документов и проконтролировать сроки: например, справку об отсутствии судимости изготавливают до месяца, и её заказ нужно отследить заранее. Правила зависят от условий: договор ГПХ нельзя заключить с сотрудником вуза, почасовая оплата возможна только в пределах лимита часов, для избрания нужен курс повышения квалификации не старше трёх лет, иностранным гражданам требуются дополнительные документы. Сведения о преподавателях хранятся в разрозненных таблицах, что ведёт к пропуску сроков и ошибкам.

Современные ИИ-агенты строятся на больших языковых моделях (LLM), которые в цикле «рассуждение — действие» вызывают внешние инструменты; стандартом подключения инструментов стал протокол MCP. Универсальный агент может составить письмо или ответить на общий вопрос, но не знает регламентов конкретного вуза и данных о преподавателях кафедры; в таких условиях модель склонна выдавать правдоподобные, но неверные ответы.

Предлагается специализированный агент, опирающийся на OWL-онтологию: преподаватели, формы трудоустройства, документы и их статусы, требования к должностям, сроки этапов. Правила процесса записываются в онтологии как ограничения: например, форма «договор ГПХ» несовместима со статусом «сотрудник вуза». Агент берёт факты только из онтологии и указывает их источник. Реализация — на базе opencode с локальной открытой LLM (данные персональные). Компоненты: онтология и программа её пополнения на Python (Owlready2); локальный MCP-сервер с инструментами поиска преподавателя, определения формы трудоустройства и комплекта документов, проверки статусов и сроков; системный промпт, задающий роль агента, запрет на выдумывание данных и подтверждение изменений; навыки (skills) — инструкции для типовых задач: «подготовить письмо новому преподавателю со списком документов», «кто не заказал справку об отсутствии судимости», «составить список избирающихся». Новые этапы добавляются навыками без изменения кода.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: s.kravtsova@g.nsu.ru*

## Построение онтологической модели туристической предметной области при помощи больших языковых моделей

А. А. Лексина

Большие языковые модели (LLM) применяются в диалоговых системах, в том числе в туризме, для подбора направлений и консультирования пользователей [**1, 2**]. Однако LLM отвечают на основе статистических закономерностей и не имеют явной модели предметной области, поэтому могут давать неверные рекомендации. Для надёжной работы системе нужны формально описанные знания, на которых можно проверять ответы.

Такие знания удобно хранить в виде онтологии: в ней описаны понятия предметной области (направления, виды отдыха, сезоны, бюджет и другие), связи между ними и правила, которым они подчиняются. Онтология записывается на языке OWL, и логический вывод позволяет автоматически проверять её согласованность и находить подходящие под запрос пользователя направления [**3**].

Сложность в том, что построение онтологии вручную занимает много времени. В работе предлагается подключить LLM к самому построению: по текстовым описаниям направлений модель предлагает кандидатов в понятия, свойства и правила, эксперт их отбирает, а логический вывод проверяет, что добавленное не противоречит уже имеющимся знаниям. Так LLM ускоряет работу, а корректность результата обеспечивает логика.

Онтология туристической предметной области (`tourism.owl`) построена в среде Protégé; согласованность проверена с помощью вывода HermiT, подбор направлений выполняется запросами к онтологии. Она служит основой гибридной диалоговой системы, в которой LLM обрабатывает естественный язык, а онтология отвечает за проверку и отбор вариантов.

### Литература

[1] *ChatGPT и туризм: применение, преимущества и риски*. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/chatgpt-i-turizm-primenenie-preimuschestva-i-riski

[2] Д. Е. Пальчунов, А. А. Якобсон. *Разработка интеллектуального помощника для подбора товаров в процессе диалога с пользователем* // Бизнес-информатика. 2024. Т. 18. № 1. С. 7–21.

[3] D. E. Palchunov. *Logical Methods for Modeling Reasoning, Concepts and Representations Based on the Partial Model Theory* // 2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, 2024. P. 339–344.

*E-mail:* *a.leksina@gmail.com*

*Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, акад. РИА Д. Е. Пальчунов.*

## Разработка интеллектуального диалогового онлайн-консультанта для выбора электронных устройств на основе динамически обновляемой базы знаний

В. О. Малышев

При выборе электронных устройств пользователю необходимо сопоставить характеристики и цены, представленные в разных источниках. При этом он не всегда может сразу сформулировать технические требования к устройству. Примеры систем диалогового подбора товаров описаны в работах [**1, 2**]. Цель работы состоит в разработке онлайн-консультанта, который уточняет эти требования в диалоге и подбирает устройства на основе динамически обновляемой базы знаний.

База знаний объединяет сведения о товарах из внешних источников. Для её наполнения используются модули сбора, нормализации, устранения дубликатов и загрузки данных. Для каждой категории задаются параметры, которые требуется уточнить у пользователя. Управление диалогом включает извлечение этих параметров из реплик и постановку уточняющих вопросов. Полученные сведения сохраняются в состоянии диалога и учитываются при последующем поиске.

Для формирования рекомендаций используется подход RAG [**3**]. Сначала из базы знаний извлекаются описания устройств с учётом накопленных требований пользователя. Найденные сведения передаются языковой модели вместе с запросом и служат контекстом для подготовки ответа. Модель формирует ответ со ссылками на переданные описания.

В результате разработана программная система для подбора смартфонов, ноутбуков, телевизоров и наушников. Пользователь работает с каталогом устройств через диалоговый веб-интерфейс. На демонстрационной базе выполнена функциональная проверка извлечения параметров запроса, постановки уточняющих вопросов и выдачи рекомендаций.

### Литература

[1] Пальчунов Д. Е., Якобсон А. А. *Разработка интеллектуального помощника для подбора товаров в процессе диалога с пользователем* // Бизнес-информатика. 2024. Т. 18. № 1. С. 7–21. DOI: 10.17323/2587-814X.2024.1.7.21.

[2] Palchunov D. E., Yakobson A. *Argumentative Dialogue System for Product Selection in the Sales Industry* // 2024 IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM). 2024. P. 2350–2355. DOI: 10.1109/EDM61683.2024.10615020.

[3] Lewis P., Perez E., Piktus A. et al. *Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks* // Advances in Neural Information Processing Systems. 2020. Vol. 33. P. 9459–9474.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: v.malyshev@g.nsu.ru*

## Выявление неполноты и противоречивости онтологической модели завода вентиляционного оборудования средствами частичных моделей

Е. В. Мельникова

При автоматизированном извлечении параметров оборудования из конструкторской документации языковые модели (LLM) генерируют факты-кандидаты, верифицируемые относительно онтологической модели предметной области [**1, 2**]. Однако экспертная онтология завода неизбежно неполна, а формализованные ограничения могут вступать в противоречие с реальной инженерной практикой. В работе предлагается подход, при котором результаты извлечения данных служат источником автоматического выявления дефектов и направленного пополнения самой онтологической модели.

Предметная область формализуется частичной моделью $\mathcal{A}^p = \langle A; P_1, \ldots, P_m, c_1, \ldots, c_l \rangle$ сигнатуры $\sigma$, где значение каждого $n$-местного предиката $P_i$ определено парой непересекающихся множеств: $P_i^{\mathcal{A}^p} = (P_i^+, P_i^-)$, причем $P_i^+, P_i^- \subseteq |A|^n$ и $P_i^+ \cap P_i^- = \varnothing$ [**3, 4**]. Извлеченный кандидат-кортеж $(a_1, \ldots, a_n) \in |A|^n$ получает один из трех эпистемических статусов: подтвержден ($\mathcal{A}^p \models P_i(a_1, \ldots, a_n)$), если $(a_1, \ldots, a_n) \in P_i^+$; противоречит онтологии ($\mathcal{A}^p \models \neg P_i(a_1, \ldots, a_n)$), если $(a_1, \ldots, a_n) \in P_i^-$; либо не определен в модели $\mathcal{A}^p$, если $(a_1, \ldots, a_n) \notin (P_i^+ \cup P_i^-)$.

**Выявление неполноты.** Систематически возникающие неопределенные значения сигнализируют о пробелах в сигнатуре и допустимых комбинациях параметров. Пробелы кластеризуются по предикатным связям (например, допустимость климатического исполнения для заданного типа конструкции) и формируют верифицируемую очередь запросов к инженеру. Одобренные допустимые значения расширяют частичную модель до $\mathcal{E}^p$, где $\mathcal{A}^p \leq \mathcal{E}^p$ [**4**], не требуя сплошного пересмотра базы знаний.

**Выявление противоречий и обобщение.** Если параметры, подтвержденные экспертом как корректные, нарушают аксиому онтологии (попадают в $P_i^-$), фиксируется противоречие аксиоматики. Коррекция аксиомы переносится на родственные конфигурации посредством онтологических гомоморфизмов сходства $h\colon \mathcal{M}^p \to \mathcal{N}^p$, заданных на основе бинарного отношения сходства предикатов $\mathrm{Sim}(P, Q)$, для которых $h(P^+_{\mathcal{M}^p}) \subseteq Q^+_{\mathcal{N}^p}$ и $h(P^-_{\mathcal{M}^p}) \subseteq Q^-_{\mathcal{N}^p}$ [**3, 5**]. Это позволяет квалифицировать аналогичное расхождение в сходном конструктивном узле как проявление единого дефекта правила, а не изолированную аномалию.

**Апробация.** Подход реализован в системе «OVIK Extractor» и апробирован на массиве производственной документации завода (16 проектных спецификаций вентиляционного оборудования, более 360 страниц, 110 позиций). Применение семантики частичных моделей позволило устранить ложные срабатывания (в графе триплетов зафиксировано 6 ложных флагов из-за трактовки отсутствия узла как нарушения) и успешно сгенерировать допустимые варианты заполнения для 102 из 109 неопределенных позиций. Метод локализует зоны неполноты знаний и преобразует ошибки извлечения в инструмент дообучения онтологии.

### Литература

[1] Д. Е. Пальчунов. *Методологические аспекты применения теории моделей в инженерии знаний и искусственном интеллекте* // Proc. CSGB, 2022. С. 210–215.

[2] Д. Е. Пальчунов. *Автоматизированные методы моделирования мышления и рассуждений на основе теории частичных моделей* // Proc. IEEE APEIE, 2023. С. 1490–1495.

[3] D. E. Palchunov. *Model Theory of Subject Domains. I, II* // Algebra and Logic, 2022. Vol. 61. No. 2, pp. 166–173; No. 4, pp. 341–347.

[4] Д. Е. Пальчунов. *Логические методы моделирования рассуждений, понятий и представлений на основе теории частичных моделей* // Proc. IEEE SIBIRCON, 2024. С. 339–344.
[5] Д. Е. Пальчунов, Г. Э. Яхъяева. *Применение булевозначных моделей и анализа формальных понятий для построения онтологических моделей предметных областей* // CEUR Workshop Proc., 2017. Vol. 1921.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: e.ptitsyna@g.nsu.ru*

## Методы извлечения эмоциональных оценок из текстов естественного языка и построения оценочных речевых моделей

В. С. Миронов

В работе рассматривается задача извлечения эмоциональных оценок из русскоязычных текстов и установления связей между эмоциями, испытывающими их субъектами и причинами возникновения. Особое внимание уделяется высказываниям, содержащим несколько эмоций, в том числе относящихся к одному субъекту.

Предлагается метод, объединяющий нейросетевой и лексико-семантический анализ с формальным представлением знаний. Эмоциональная оценка рассматривается как эмоция субъекта, относящаяся к некоторому объекту: сущности, её свойству, отношению или ситуации [**1**]. Результат представляется оценочной частичной моделью — частичной моделью, дополненной отображением, сопоставляющим наборам атомарных предложений эмоциональные оценки.

Система LogicText строит по тексту конечный фрагмент атомарной диаграммы [**2**]. Для описания ситуаций вводятся специальные константы, связанные двухместными отношениями с действиями, участниками и обстоятельствами. Эмоции распознаются путём объединения результатов контекстного нейросетевого классификатора, генеративной языковой модели и лексико-семантического анализа. Отдельные пороги принятия решений позволяют выявлять несколько эмоций в одном предложении.

Генеративная модель выделяет возможные субъекты и объекты эмоциональных оценок. Затем они сопоставляются с элементами формального представления текста, а предложенные эмоциональные связи проверяются на согласованность со смысловыми связями, установленными LogicText. Подтверждённые связи дополняют фрагмент атомарной диаграммы; при недостатке сведений связь остаётся неподтверждённой.

Разработана программная реализация метода, обеспечивающая извлечение и семантическую проверку эмоциональных оценок, построение и визуализацию оценочной частичной модели. Полученное представление сохраняет связи каждой эмоции с её субъектом и объектом и предназначено для последующей логической обработки.

### Литература

[1] Пальчунов Д. Е., Миронов В. С. *Методы извлечения эмоциональных оценок из текстов естественного языка на основе семантических технологий и глубокого машинного обучения* // Программная инженерия. 2026. Т. 17, № 4. С. 179–190. DOI: 10.17587/prin.17.179-190.

[2] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. *Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, вып. 2. С. 64–73.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: v.mironov1@g.nsu.ru*

## Сравнительный анализ надежности и точности подходов к оцениванию результатов тестирования

В. А. Москалюк

Использование больших языковых моделей (LLM) позволяет формировать предметные тесты с разным числом, сложностью и содержанием заданий. При этом возникает задача сопоставимого оценивания уровня подготовки: равный балл не гарантирует одинаковых знаний из-за различий в трудности заданий и охвате темы. Для оценки точности важны уровень заданий, длина теста и способ расчёта. Актуален поиск методов, объединяющих результаты неоднородных тестов и учитывающих неопределенность параметров автоматически сгенерированных заданий [**1, 2**].

Цель работы — сравнить методы оценивания подготовки по совокупности тестов от LLM и определить границы их применимости. Планируется сопоставить нормированную взвешенную сумму баллов, агрегацию по группам сложности и модель Раша [**3, 4**]. Будут учтены объем выполненных заданий, их распределение по сложности и общая длина теста. Особый акцент сделан на опубликованных данных о точности методов и влиянии структуры теста на итог.

В работе систематизируются подходы к объединению результатов и сопоставляются их возможности при неоднородном тестировании. Для каждого метода будут описаны алгоритм расчёта, требования к данным, ограничения и известные показатели точности. Условия исходных исследований учтутся отдельно, так как ошибки на разных шкалах несопоставимы напрямую. Отдельно анализируется применимость методов к LLM-тестам, где заявленная сложность может расходиться с фактической. Результатом станет сравнительная характеристика методов и рекомендации по их выбору под конкретные условия тестирования.

### Литература

[1] Яхъяева Г.Э., Абсайдульева А.Р. *Семантический подход к моделированию фонда оценочных средств.* Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. Т. 16, вып. 2, 2018. С. 113–121.

[2] Баталин К.В., Яхъяева Г.Э. *Система управления оценочными средствами.* Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2020. Т. 18, № 2. С. 5–14.

[3] Маслак А. А., Моисеев С. И., Осипов С. А., Поздняков С. А. *Исследование точности измерения латентной переменной в зависимости от диапазона варьирования набора индикаторов.*

[4] Selçuk E., Demir E. *Comparison of item response theory ability and item parameters according to classical and Bayesian estimation methods.*

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* v.moskalyuk@g.nsu.ru

## Разработка онтологической модели учебного процесса кафедры

А. К. Назаров

Учебный процесс кафедры включает проведение дисциплин, сопровождение практик и выпускных квалификационных работ, распределение учебных поручений. Согласование сведений об участниках, документах и сроках требует учёта взаимосвязей между этими процессами. Для автоматизированной проверки их выполнения необходимо формальное представление понятий, взаимосвязей и требований к организации учебного процесса.

Для решения указанной проблемы предлагается использовать онтологическое моделирование [**1**]. Целью данной работы является разработка онтологической модели учебного процесса кафедры для проверки выполнения формализованных требований к учебному процессу [**3, 3**]. В ходе разработки планируется определить классы, отношения и ограничения для представления дисциплин, семестров, групп, преподавателей, занятий, заданий, результатов обучения и контрольных мероприятий, а также назначений руководителей, этапов работ, документов, учебных поручений и ресурсов. На основе модели предполагается реализовать программный прототип для ввода сведений о процессах и проверки выполнения требований.

В результате работы ожидается получить онтологию, описание принятых решений моделирования, набор формализованных требований, примеры процессов, работающий программный прототип и результаты проверки модели. В прототипе планируется реализовать проверку полноты назначений, наличия необходимых документов и согласованности сроков с различением нарушений и отсутствующих сведений. Корректность модели и работы прототипа предполагается проверить на сценариях с заранее заданными несоответствиями; соответствие модели предметной области — посредством экспертной оценки.

### Литература

[1] Плешкова А. Ю. *Онтологии в управлении образовательным процессом* // Онтология проектирования. 2022. Т. 12, № 4. С. 506–517. DOI: 10.18287/2223-9537-2022-12-4-506-517.

[2] Palchunov D., Nemtsev I., Yakobson A., Shelkovnikova S. *Integration of Logical and Neural Network Methods for Creation of Digital Twins of Regulations* // IEEE APEIE 2025. P. 1–6. DOI: 10.1109/APEIE66761.2025.11289398.

[3] Grekhova A., Palchunov D., Shishkin A., Zaitsev A. *An Intelligent Assistant for Working with Regulatory Documents Based on Ontological Modeling and RAG* // IEEE APEIE 2025. P. 1–6. DOI: 10.1109/APEIE66761.2025.11289384.

*Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.nazarov3@g.nsu.ru

## Извлечение моделей процессов из текстов на естественном языке с помощью LLM и логико-семантического анализа

И. С. Немцев

В работе рассматривается задача автоматизации регламентированных организационных процессов на примере университетской кафедры. Многие из них включают повторяющиеся операции, которые могут выполняться автоматически. Однако регламенты, определяющие порядок их выполнения, представлены в виде текстов на естественном языке и ориентированы на человека. Автоматизация требует формальной модели, явно описывающей правила выполнения процессов. Как правило, её строят вручную специалисты.

Для извлечения информации о процессах из текстов широко применяются большие языковые модели [**1**], однако извлекаемые ими сведения не всегда соответствуют исходному регламенту и требуют проверки. Предлагается подход, в котором нейросетевой анализ регламентов дополняется логико-семантическим. Информация извлекается из текста независимо двумя методами. Языковая модель выделяет действия, их участников и связи между ними. Система LogicText строит по тексту конечный фрагмент атомарной диаграммы [**1**], в котором каждая ситуация обозначается константой, связанной двухместными отношениями с действием, его участниками и обстоятельствами [**3**].

Затем элементы, извлечённые языковой моделью, проверяются на согласованность с представлением LogicText. Фрагменты с расхождениями повторно анализируются языковой моделью, а случаи, которые не удаётся согласовать автоматически, передаются специалисту. На основе согласованных данных формируется промежуточная модель процесса, сохраняющая для каждого элемента ссылку на исходный фрагмент регламента. После утверждения специалистом промежуточная модель детерминированно преобразуется в BPMN-модель.

Механизмы исполнения BPMN-моделей реализованы в информационной системе кафедры общей информатики ФИТ НГУ и применяются в процессе студенческой практики. Дальнейшая работа направлена на объединение анализа регламентов с этой системой исполнения.

### Литература

[1] Hörner L. F., Möller M., Reichert M. *Automatically generating BPMN 2.0 process models from natural language process descriptions: challenges, framework, quality assessment* // Business & Information Systems Engineering. 2026. Vol. 68. P. 59–83. DOI: 10.1007/s12599-025-00983-x.

[2] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. *Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, вып. 2. С. 64–73.

[3] Ненашева Е. О., Пальчунов Д. Е. *Разработка автоматизированных методов представления знаний о действиях и ситуациях* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, № 3. С. 61–72. DOI: 10.25205/1818-7900-2019-17-3-61-72.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* i.nemtsev@alumni.nsu.ru

## Методы извлечения и формального представления знаний из текстов для построения онтологической модели кафедры

Д. С. Огилько

В работе рассматривается задача автоматизированного построения онтологической модели кафедры по неструктурированным русскоязычным текстам. Источниками знаний могут служить рабочие программы дисциплин, расписания, страницы сайта кафедры, сведения о выпускных квалификационных работах и публикациях сотрудников. Такие документы содержат информацию о преподавателях, студентах, учебных группах, дисциплинах и связях между ними, однако непосредственно использовать её для логического вывода и формальных запросов затруднительно.

Предлагается разделить процесс построения модели на несколько этапов. Сначала задаётся структура предметной онтологии: классы сущностей, отношения и ограничения на них. Затем из текстов выделяются сущности, их свойства и отношения. Полученные факты преобразуются в формальное представление, согласованное со структурой онтологии, и используются для её наполнения. На следующем этапе выполняется логический вывод, позволяющий получать неявные знания и выявлять противоречия [**2**]. Для доступа к построенной модели предполагается использовать запросы к графу знаний, в частности SPARQL.

На предварительном этапе был разработан прототип преобразования результатов логико-семантического анализа текста [**1**] в предметную модель кафедры с выделением сущностей и отношений, графовым представлением и выполнением простых запросов. Дальнейшая работа направлена на переход к полноценному онтологическому представлению и исследование методов автоматического извлечения знаний из разнородных кафедральных документов. Особое внимание уделяется согласованию результатов извлечения с формальными ограничениями онтологии, что позволяет использовать логические методы не только для хранения знаний, но и для проверки корректности автоматически полученных фактов.

### Литература

[1] Махасоева О. Г., Пальчунов Д. Е. *Автоматизированные методы построения атомарной диаграммы модели по тексту естественного языка* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2014. Т. 12, № 2. С. 64–73.

[2] Капустина А. И., Пальчунов Д. Е. *Разработка методов интеграции автоматических средств логического вывода для порождения знаний в онтологической модели* // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2019. Т. 17, № 3. С. 29–42.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: d.ogilko@g.nsu.ru*

## Проверка согласованности и разрешения конфликтов в оценочных знаниях экспертов

О. Д. Пальчунова

Оценочные знания экспертов используются при принятии решений в условиях неполной информации и могут содержать противоречия. Объединение оценок, полученных от разных специалистов, требует проверки их согласованности и выявления конфликтов [**1**]. Теория нечетких моделей позволяет формализовать субъективные вероятности и задать математическую основу анализа оценочных знаний [**2, 1**]. Цель работы состоит в разработке программной системы проверки согласованности экспертных оценок и разрешения возникающих конфликтов.

Проверка согласованности основана на приведении введенных формул к совершенной дизъюнктивной нормальной форме и составлении системы линейных уравнений. Совместность системы исследуется с применением теоремы Кронекера–Капелли, после чего учитываются ограничения на значения вероятностей. Выделяются три случая: наличие решений, удовлетворяющих ограничениям, наличие решений только за пределами допустимых значений и отсутствие решений. Дополнительный алгоритм визуализации представляет оценочные знания в виде графа и позволяет обнаруживать некорректности. Такое представление облегчает анализ экспертных оценок.

Для разрешения обнаруженных конфликтов реализованы метод ближайшего верного значения и метод равномерного распределения нагрузки. В результате разработаны парсер выражений и пользовательский интерфейс, реализованы алгоритмы проверки согласованности, визуализации и разрешения конфликтов. Система объединяет проверку знаний с наглядным представлением результатов и предложениями по корректировке оценок.

### Литература

[1] Яхъяева Г.Э., Ясинская О.В. *Методы согласования знаний по компьютерной безопасности, извлеченных из различных документов.* Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2013. Т. 11, вып. 3. С. 63–73.

[2] Yakhyaeva G.E., Palchunova O.D. *Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge.* Pattern Recognition and Image Analysis, 2023, Vol. 33, No. 3, pp. 529–535.

[3] Г.Э. Яхъяева, О.Д. Пальчунова. *О числовых характеристиках неопределенности в конечных размытых моделях.* Сборник трудов XXII Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием «КИИ-2025», Санкт-Петербург, 6-10 октября 2025 г., С. 120–131.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: o.palchunova@g.nsu.ru*

## Разработка интеллектуальной рекомендательной системы подбора турпакетов с использованием семантических технологий и нейросетевых методов

Н. А. Петренко

**Актуальность.** Подбор турпакета состоит в совместном выборе направления, размещения, транспорта, дат и дополнительных услуг. Существующие агрегаторы опираются либо на жесткие фильтры (которые не учитывают смысл текстовых запросов), либо на нейросетевые рекомендации (которые могут предлагать варианты вне бюджета пользователя). Для составных турпакетов, где пересекаются жесткие ограничения и мягкие предпочтения, эффективной гибридной схемы пока не предложено.

**Цель работы** — разработка гибридной рекомендательной системы подбора турпакетов, сочетающей объяснимость онтологических моделей с гибкостью нейросетевых методов обработки текста.

**Предлагаемый подход.** Система развивает помощника подбора товара в диалоге с пользователем [**1, 2**] и строится на основе расширяющейся частичной онтологической модели. Она включает три ключевых этапа:

- *Извлечение сущностей.* Нейросетевая модель (NER) анализирует текст запроса пользователя, извлекая как жесткие параметры, так и мягкие предпочтения.
- *Онтологическая фильтрация.* По извлеченным данным опрашивается граф знаний (онтология). Жесткие ограничения отсекают недопустимые варианты.
- *Нейросетевое ранжирование.* Среди оставшихся туров нейросеть оценивает смысловую близость описаний к запросу пользователя.

Подобие турпакетов задаётся относительно пользователя и проверяется только среди вариантов, которые прошли жесткие ограничения.

**Ожидаемые результаты.** Предполагается, что предложенная гибридная схема будет точнее учитывать структуру турпакета, чем отбор только по онтологии или только по нейросетевой близости. В ходе дальнейшей работы планируется реализовать программный прототип и оценить качество работы на реальных данных туроператоров.

### Литература

[1] Пальчунов Д. Е., Якобсон А. А. *Разработка интеллектуального помощника для подбора товаров в процессе диалога с пользователем* // Бизнес-информатика. 2024. Т. 18, № 1. С. 7–21. DOI: 10.17323/2587-814X.2024.1.7.21.

[2] Palchunov D. E., Yakobson A. *Argumentative dialogue system for product selection in the sales industry* // 2024 IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM). 2024. P. 2350–2355. DOI: 10.1109/EDM61683.2024.10615020.

*Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* n.petrenko1@g.nsu.ru

## Автоматическая проверка программ численного обращения преобразования Лапласа в вероятностных моделях

В. А. Попова

В теории надёжности и массового обслуживания изображение Лапласа $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ плотности распределения часто известно в явном виде, а саму плотность $f(t)$ восстанавливают численно [**1, 2, 3**]. Ошибка в программе может заметно исказить результат, но программа продолжает выдавать правдоподобные числа. Поэтому возникает задача выбора эталона — как узнать правильный ответ, с которым сравнивать результат программы [**4**].

Разработан воспроизводимый конвейер на языке Python. Он восстанавливает плотность двумя способами: методом Гавера–Стехфеста [**1, 2**] и положительными гамма-операторами, сохраняет таблицы, графики и контрольные суммы SHA-256. Проверки организованы по уровням: структурные (конечность чисел), вероятностные (неотрицательность плотности), сравнение с аналитическими эталонами (точные формулы для плотностей Эрланга и гипоэкспоненциальной, совпадение гамма-оператора при $n = 1$ с формулой Алфрея), регрессионные метрики, контрольные суммы и мутационные проверки с внесёнными ошибками.

При увеличении порядка схемы Гавера–Стехфеста с 6 до 14 средняя абсолютная ошибка снизилась с $6{,}5\cdot10^{-3}$ до $8{,}8\cdot10^{-5}$, а при порядке не ниже 12 исчезли отрицательные значения. В мутационном эксперименте проверки конечности и неотрицательности не обнаружили ни одной внесённой ошибки, а сравнение с аналитическими эталонами, регрессионные метрики и контрольные суммы обнаружили все. Следовательно, нужны проверки, опирающиеся на свойства самой вероятностной задачи. Программа и данные опубликованы в архиве [**5**].

### Литература

[1] Gaver D. P. *Observing stochastic processes, and approximate transform inversion* // Operations Research. 1966. Vol. 14, no. 3. P. 444–459.

[2] Stehfest H. *Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms* // Comm. ACM. 1970. Vol. 13, no. 1. P. 47–49.

[3] Abate J., Whitt W. *A unified framework for numerically inverting Laplace transforms* // INFORMS J. Comput. 2006. Vol. 18, no. 4. P. 408–421.

[4] Barr E. T. et al. *The oracle problem in software testing: a survey* // IEEE Trans. Softw. Eng. 2015. Vol. 41, no. 5. P. 507–525.

[5] Bubnov V. P., Blagoveshchenskaya E. A., Popova V. A. *Reproducibility archive for «Approximate positive gamma operators on the half-line»*. Version 1.0.0. Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.22054942.

*Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербург (Россия)*
*E-mail:* victorypopova1@gmail.com

## Разработка автоматизированной системы электронного документооборота кафедры

Д. М. Савельев

Работа посвящена созданию автоматизированной системы электронного документооборота (АС ЭДО) кафедры вуза. Документооборот кафедры охватывает разнородные документы, распределённые роли участников и изменяющиеся маршруты согласования; универсальные системы ЭДО избыточны для кафедрального уровня и плохо адаптируются к локальным регламентам. Цель работы — разработка АС ЭДО, допускающей формальную проверку корректности правил обработки документов.

На основе анализа документопотоков сформулированы функциональные требования: регистрация и хранение документов, версионирование, маршрутизация на согласование, разграничение прав доступа, отчётность. Система строится по трёхуровневой схеме: клиентское веб-приложение на React, серверная часть на Spring Boot с модулем маршрутизации, подсистема хранения на PostgreSQL. Модуль маршрутизации представляет собой интерпретатор декларативно описанных правил, что позволяет менять регламенты без переработки кода. Стек выбран исходя из требований к сопровождаемости: распространённые технологии с низким порогом входа упрощают поддержку системы силами кафедры, а Spring Boot и PostgreSQL дают необходимые для ЭДО транзакционную целостность и разграничение доступа.

Для явного описания сущностей и связей документооборота построена онтологическая модель, включающая множество классов концептов, множество отношений и множество аксиом. Модель задаёт семантику предметной области независимо от реализации и служит основой для схемы хранения и правил маршрутизации.

Онтология записывается на языке OWL 2 DL с семантикой дескрипционной логики, что позволяет автоматически проверять непротиворечивость и выполнимость концептов стандартными ризонерами. Типовые ограничения кафедрального документооборота (обязательность согласования, запрет циклов в маршрутах, разграничение прав подписи) выражаются в терминах выразимых аксиом дескрипционной логики, а их проверка сводится к задаче выполнимости. Это позволяет устанавливать корректность регламентов до этапа кодирования.

Система реализуется на стеке Spring Boot, PostgreSQL и React; онтологическая модель используется как основа для схемы хранения метаданных и для интерпретации правил маршрутизации в серверной части. В ходе реализации уточняются детали модели, не затрагивающие принятых проектных решений. Предполагается проверка системы на реальных документах кафедры и оценка трудозатрат на изменение регламентов. Дальнейшая работа связана с завершением реализации и проверкой на реальном документообороте кафедры.

*Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* d.savelev1@g.nsu.ru

## Методы извлечения и формализации бизнес-процессов из корпоративных текстовых документов: от нотаций к большим языковым моделям

Б. С. Свирский

Доклад содержит обзор формальных представлений бизнес-процессов и методов их автоматического построения по текстам на естественном языке. За более чем полвека представления процессов прошли путь от блок-схем (ISO 5807) и диаграмм потоков данных через формальные и функционально-декомпозиционные методы (сети Петри, IDEF0/IDEF3) и цепочки EPC к стандарту BPMN 2.0 (ISO/IEC 19510) с исполняемой семантикой и дополняющими его нотациями (DMN, BPEL).

Методы перехода «текст → BPMN-модель» разделяются на пять групп: правило-ориентированные лингвистические конвейеры [**1**]; обучаемые модели распознавания сущностей и извлечения связей, оцениваемые на корпусе PET [**2**]; большие языковые модели (LLM), генерирующие компактное промежуточное представление (POWL, JSON, DSL), которое детерминированно компилируется в BPMN [**3**]; многоэтапные конвейеры и гибриды, где LLM извлекает сущности и отношения, а топологию графа с гейтвеями строит классический алгоритм [**4**]; агентные конвейеры для нормативных текстов, переводящие юридические формулировки в булевы условия, привязанные к данным, с автоматической валидацией и проверкой исполнимости в workflow-движке.

Сравнение методов выявляет общие закономерности. Поток управления (ветвления, параллельность) восстанавливается заметно хуже, чем участники и действия. Декомпозиция задачи с явной структурной валидацией надёжнее монолитной генерации BPMN XML, но увеличивает число обращений к модели и время работы. Разделение ответственности, при котором LLM извлекает смысл, а построение и проверку графа выполняет детерминированный код, одновременно повышает качество и снижает стоимость.

### Литература

[1] F. Friedrich, J. Mendling, F. Puhlmann, *Process model generation from natural language text*, CAiSE 2011, LNCS, Springer, 2011.

[2] P. Bellan, H. van der Aa, M. Dragoni, C. Ghidini, S. P. Ponzetto, *PET: an annotated dataset for process extraction from natural language text tasks*, BPM Workshops 2022, arXiv:2203.04860.

[3] H. Kourani, A. Berti, D. Schuster, W. M. P. van der Aalst, *Process modeling with large language models*, BPMDS/EMMSAD 2024, LNBIP, Springer, 2024.

[4] A. Nour Eldin et al., *A decomposed hybrid approach to business process modeling with LLMs*, CoopIS 2024, LNCS, Springer, 2024.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* svirskybogdan@yandex.ru

## Разработка базы данных и веб-приложения для тестирования алгоритмов определения сепарабельности квантовых состояний

С. В. Слепченко

Исследование сепарабельности квантовых состояний требует не только разработки алгоритмов анализа [**1, 2**], но и создания инструментов для их систематического тестирования. Для сопоставления результатов необходимы структурированные наборы данных с известными свойствами. При этом экспоненциальный рост числа амплитуд с увеличением кубитов затрудняет хранение и организацию вычислений. Цель работы — разработка программного комплекса для хранения квантовых состояний и проверки алгоритмов их сепарабельности.

Разработанный комплекс объединяет каталог эталонных состояний, веб-интерфейс и модуль взаимодействия с внешним алгоритмом анализа. Серверная часть реализована на Python с использованием FastAPI, сведения о состояниях хранятся в базе данных SQLite. Аналитический алгоритм на Go подключается как внешний компонент. Такое разделение позволяет развивать хранение, подготовку данных и визуализацию независимо от реализации самого алгоритма.

Базовый тестовый набор включает более двадцати состояний двух, трёх и четырёх кубитов: состояния Белла, GHZ- и W-состояния, полностью сепарабельные и бисепарабельные конфигурации, а также представителей девяти семейств классификации Верстраете. При верификации результат алгоритма сопоставляется с эталоном, а при известном разбиении сравниваются группы кубитов.

В базе данных для каждого состояния фиксируются название, число кубитов, эталонная метка и тип представления. Для составных систем сохраняется разбиение на группы кубитов. Сами амплитуды или описания подсистем записываются в отдельный сжатый файл. Разреженные состояния представлены только ненулевыми элементами. Этот подход снижает затраты памяти для компактных состояний.

Веб-приложение предоставляет средства выбора эталонов, ввода пользовательских данных и сборки составных состояний. Реализованы отображение кубитов, сравнение результата с эталоном и работа с графовыми состояниями. Комплекс позволяет проводить воспроизводимые эксперименты и оперативно выявлять расхождения в работе тестируемых алгоритмов.

### Литература

[1] Yakhyaeva G. E. *Quantum Interpretation of Fuzzy Models.* Pattern Recognition and Image Analysis, 2025, Vol. 35, No. 4, 2025, pp. 1082–1089.

[2] Яхъяева Г. Э. *Взаимная независимость подмоделей размытой модели.* Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 56. С. 160–175.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: s.slepchenko@g.nsu.ru*

## Разработка программных средств для анализа и визуализации профилировочных трасс высоконагруженных систем

Е. М. Сыроежкин

Во время разработки и отладки низкоуровневого программного обеспечения, а также при мониторинге высоконагруженных систем с целью выявления аномалий в работе, часто возникает необходимость анализа данных их функционирования, включая профилировочные трассировки и метрики.

У заказчика данной работы уже есть инструментарий для сбора и сохранения профилировочных метрик и трасс программ. Однако разработчики и DevOps-специалисты нередко сталкиваются с необходимостью одновременного использования нескольких различных инструментов для полноценного анализа разрозненных данных профилирования, представленных в виде отдельных файлов (в том числе файлов трасс и файлов метрик).

В связи с указанной проблемой у заказчика возникла потребность в едином инструменте, который позволил бы пользователям осуществлять анализ всех данных профилирования высоконагруженных систем в рамках единой среды.

В работе представлен процесс разработки единого инструмента для анализа и визуализации профилировочных трасс высоконагруженных систем на основе веб-продукта с открытым исходным кодом. Также в ходе работы были спроектированы и внедрены два формата для хранения профилировочных данных разного рода в одном файле: на основе JSON и бинарный формат BSPF.

В ходе разработки использовались, в основном, технологии: TypeScript и его фреймворк Mithril, а также C++. Первая версия нашего инструмента уже способна визуализировать данные трассы в виде интерактивного графика-таймлайна, а также предоставлять пользователю подробную сводку по данным метрик: в виде графиков, сводных и фильтруемых таблиц, дашбордов. Структура этой страницы-сводки полностью настраиваемая. Также имеется возможность настроить систему подсказок для пользователя на основе значений метрик. Например, если определенная метрика меньше некоторого порогового значения, то она будет выделена цветом и пользователю будет показано сообщение с описанием возможной причины проблемы и с предложением перейти в другой раздел инструмента для поиска проблемы.

Бинарный формат, который был разработан в ходе работы, позволяет значительно экономить дисковое пространство без потери данных. BSPF занимает в среднем на 30–50% меньше места, чем JSON-формат с идентичным содержимым.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* e.syroezhkin@g.nsu.ru

## Разработка RAG-системы для поддержки диагностики неисправностей и подбора автозапчастей

Я. А. Тихомолов

Языковые модели позволяют обрабатывать запросы на естественном языке и формировать рекомендации. Однако при решении задач диагностики неисправностей и подбора автозапчастей их ответы могут содержать неточные сведения и не учитывать особенности конкретного автомобиля. Одним из подходов к решению этой проблемы является Retrieval-Augmented Generation (RAG), объединяющий поиск информации во внешних источниках и генерацию ответа языковой моделью [**1**].

Целью работы является разработка RAG-системы для поддержки диагностики неисправностей и подбора автозапчастей по пользовательскому описанию проблемы. Предлагаемый подход основан на использовании технической документации и сведений каталога в качестве базы знаний. Найденная информация используется при формировании ответа, что позволяет связывать рекомендации с данными предметной области.

На данный момент разрабатывается программная реализация системы, обеспечивающая поиск необходимых сведений и их использование в диалоге с пользователем. Для предварительного исследования подхода планируется проведение экспериментов на примерах описаний неисправностей и запросов на подбор деталей. Полученные результаты позволят оценить обоснованность рекомендаций, проанализировать влияние найденной информации на качество ответов и определить ограничения системы.

Разрабатываемый подход направлен на повышение достоверности рекомендаций и создание инструмента информационной поддержки пользователей при диагностике неисправностей и подборе автозапчастей.

### Литература

[1] Lewis P., Perez E., Piktus A., et al. *Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks.* In: Advances in Neural Information Processing Systems, 2020, vol. 33, pp. 9459–9474.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: y.tikhomolov@g.nsu.ru*

## Разработка аналитического модуля для тренировочных программ по плаванию с использованием генеративного искусственного интеллекта

С. В. Трушков

В современном мире тренерам по плаванию необходим высокотехнологичный инструмент для организации тренировочного процесса. Существующие приложения не предоставляют необходимой функциональности для тренеров по плаванию, так как направлены на самостоятельные занятия спортсменов. В связи с этим они не обеспечивают должного взаимодействия тренера и спортсмена, фиксирование результатов и их анализ, проведение тренерами научно-исследовательской деятельности.

Целью работы является разработка аналитического модуля для тренировочных программ по плаванию с использованием генеративного искусственного интеллекта, а также доработка существующей серверной части для использования ИИ-агента в соответствии с современными стандартами ИТ-индустрии.

На сегодняшний день разработанным приложением пользуются тренеры по плаванию кафедры физвоспитания Новосибирского государственного университета, которые дают обратную связь по продукту. Полученные отзывы подчёркивают практическую ценность сервиса. Приложение позволяет зарегистрированным пользователям редактировать профиль, получать обратную связь от тренера для самостоятельного совершенствования техники, взаимодействовать между собой, а тренерам — управлять тренировочным процессом. Для проектирования ИИ-агента, способного анализировать тренировки, были изучены современные подходы к проектированию ИИ-агентов с использованием генеративных нейросетей, выбраны пути и технологии для его реализации, а также сделана первая версия ИИ-агента.

В дальнейшем планируется доработка и улучшение аналитического модуля и внедрение его в работу тренеров. Предполагается, что результаты анализа с помощью модуля будут способствовать совершенствованию тренировочного процесса и поддержке научной работы тренеров.

*Работа выполнена при поддержке АО «СберТех» и ПАО «СБЕРБАНК» на базе студенческой учебно-научной лаборатории факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета.*

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: s.trushkov@g.nsu.ru*

## Методы и алгоритмы автоматического обнаружения ошибок в ответах авторегрессионных порождающих моделей языка

М. А. Фильберт

Широкое внедрение больших языковых моделей (LLM) [**1**] сталкивается с проблемой «галлюцинаций» [**2**]. Это создает потребность в надежных методах автоматической оценки. Среди внешних методов выделяется подход LLM-судьи [**3, 4**], обладающий адаптивностью. Однако его реализации [**5, 6, 7**] имеют недостатки: чувствительность к промптам, высокие вычислительные затраты и сложность адаптации.

Для преодоления этих ограничений предлагается AES-Judge — система адаптивного ансамбля LLM-судей с динамической композицией. Метод обеспечивает адаптивность за счет конфигурации ансамбля под запрос, надежность — через использование нескольких судей, а эффективность — благодаря привлечению мощных моделей только в сложных случаях. Система также обеспечивает прозрачность и обладает механизмом самообучения.

Архитектура AES-Judge предлагает универсальный и гибкий подход к автоматическому обнаружению ошибок в ответах LLM, формируя основу для создания более надежных ИИ-систем.

### Литература

[1] *Что такое большая языковая модель (LLM)?* Amazon URL: https://aws.amazon.com/ru/what-is/large-language-model/ (дата обращения: 10.11.25).

[2] *Галлюцинации и некорректные ответы LLM.* Systems analysis wiki URL: https://systems-analysis.ru/wiki/PYPəPьPьCЋCЗPчP,,PəCЗPчPч_Pч_P,,PҳPəP«CЃCЃPҳPəCЂP,,CKPҳ_P«CЂPўPҳCЂCK_LLM (дата обращения: 10.11.25).

[3] *Понимание оценки LLM: детальный разбор 4 основных подходов.* habr URL: https://habr.com/ru/articles/953684/ (дата обращения: 11.11.2025).

[4] *LLM-as-a-judge on Amazon Bedrock Model Evaluation.* amazon URL: https://aws.amazon.com/ru/blogs/machine-learning/llm-as-a-judge-on-amazon-bedrock-model-evaluation/ (дата обращения: 20.11.2025).

[5] *Prometheus-Eval.* github URL: https://github.com/prometheus-eval/prometheus-eval (дата обращения: 20.11.2025).

[6] *Evaluating the Effectiveness of LLM-Evaluators (aka LLM-as-Judge).* eugeneyan URL: https://eugeneyan.com/writing/llm-evaluators/ (дата обращения: 22.11.2025).

[7] *What is the MT-Bench test?* Telnyx - Global Communications Platform Provider URL: https://telnyx.com/resources/what-is-mt-bench (дата обращения: 22.11.2025).

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: m.filbert@g.nsu.ru*

## Архитектура аутентификации и разграничения доступа пользователей ИИ-агента для администрирования Apache Kafka

И. Р. Фиткулин

Администрирование распределенных платформ потоковой обработки событий, таких как Apache Kafka, включает операции по развертыванию, настройке и мониторингу кластеров. ИИ-агент позволяет автоматизировать часть таких операций, включая развертывание кластеров в Kubernetes и на виртуальных машинах, изменение конфигурации и получение эксплуатационных метрик. Поскольку такой агент получает возможность выполнять действия над инфраструктурой, возникает задача аутентификации пользователей и разграничения доступных им операций.

В работе рассматривается модель доступа, включающая множество пользователей, ролей и административных операций. Для каждой роли определяется набор разрешенных действий, а выполнение операции ИИ-агентом допускается только в случае, если соответствующее разрешение присутствует в политике доступа. Таким образом, задача авторизации сводится к проверке принадлежности запрошенной операции множеству действий, разрешенных для роли аутентифицированного пользователя.

Для установления личности пользователя предлагается интеграция ИИ-агента с корпоративной системой аутентификации на основе OpenID Connect. Внешний провайдер идентификации подтверждает личность пользователя и передает системе проверяемые сведения о его учетной записи. После этого модуль авторизации определяет его роль и принимает решение о допустимости выполнения запрошенной административной операции.

Предлагаемая архитектура разделяет процессы установления личности и проверки полномочий. Это позволяет независимо изменять механизм корпоративной аутентификации и правила разграничения доступа, а также использовать единую модель авторизации при различных пользовательских интерфейсах ИИ-агента. Дальнейшая работа предусматривает реализацию предложенной архитектуры и проверку корректности разграничения доступа для различных ролей и административных операций.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: i.fitkulin@g.nsu.ru*

## Выявление противоречий в текстовых документах на основе частичных моделей и больших языковых моделей

И. С. Хорьяков

Предлагается подход к автоматическому выявлению противоречий в текстовых документах, в котором семантика текста формализуется с помощью теории частичных моделей [**1, 2**], а формальное представление строится и анализируется большими языковыми моделями (LLM).

Пусть $\sigma$ — сигнатура, порождаемая текстом $t$: константы соответствуют объектам предметной области, предикатные символы — их свойствам и отношениям. Ситуации, описанной текстом, сопоставляется частичная модель, задаваемая атомарной диаграммой $D(t)$ — множеством атомарных предложений сигнатуры $\sigma$, истинность которых утверждается в тексте; остальные атомарные предложения не определены. Знания представляются теорией $T = O \cup R$, где $O$ — онтология предметной области, $R$ — регламенты, заданные в документах. Будем говорить, что совокупность фрагментов $t_1, \ldots, t_n$ содержит *противоречие*, если множество $D(t_1) \cup \ldots \cup D(t_n) \cup T$ несовместно. *Локализацией* противоречия называется минимальное по включению $\Delta \subseteq \bigcup_i D(t_i)$, для которого $\Delta \cup T$ несовместно; как правило, $\Delta$ — пара конфликтующих фактов.

Выделяются три типа противоречий: *логические* — описание конкретного случая противоречит регламенту ($D(t) \cup R$ несовместно); *онтологические* — информация документа противоречит онтологии ($D(t) \cup O$ несовместно); *содержательные* — несовместны описания ситуаций, извлечённые из разных документов ($D(t_i) \cup D(t_j) \cup O$ несовместно), при этом ситуации представляются специальными константами, а связи между ними — онтологическими гомоморфизмами частичных моделей.

Для текстов теория $T$ явно не задана и аппроксимируется знаниями LLM. Реализована двухэтапная схема на основе модели Qwen2.5-7B-Instruct [**3**]. На первом этапе по тексту строится атомарная диаграмма (JSON-структура из констант, предикатов и фактов) с проверкой корректности, на втором по ней вычисляется множество кортежей $(\Delta, \text{тип}, c, e)$, где $c \in [0, 1]$ — степень уверенности, $e$ — обоснование. Модели дообучаются методом LoRA [**4**]. Преимущество подхода — интерпретируемость: каждое противоречие привязано к атомарным фактам, а неполнота информации моделируется неопределёнными значениями частичной модели. Далее планируется оценка качества на размеченном корпусе.

### Литература

[1] Пальчунов Д. Е. *Теория моделей предметных областей. II* // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 4. С. 500–519.

[2] Пальчунов Д. Е., Чернявцева С. И. *Разработка интеллектуального помощника для автоматизированного порождения документов кафедры* // Программная инженерия. 2023. Т. 14, № 8. С. 388–400.

[3] Qwen Team. *Qwen2.5 Technical Report* // arXiv:2412.15115. 2024.

[4] Hu E. J. et al. *LoRA: Low-Rank Adaptation of Large Language Models* // ICLR. 2022.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: i.khoryakovivan@g.nsu.ru*

## Проверка требований даташитов в прошивках, создаваемых ИИ-агентами

М. А. Цуканов

ИИ-агенты уже применяются для разработки программ встраиваемых систем [**1**]. Однако успешная компиляция прошивки не гарантирует правильную настройку подключённого устройства. В даташитах важные условия часто разнесены по разделам: одно примечание задаёт порядок записи регистров, другое — момент применения настройки, третье — способ проверки. В итоге программа собирается и работает, но датчик выдаёт неверные данные.

В работе рассматривается способ представления таких условий в виде структурированных требований. Для каждого фиксируются область применимости, условие активации, порядок операций, ссылка на документацию и данные для проверки. Разработанный монитор анализирует трассу работы с устройством и возвращает один из четырёх статусов: требование выполнено, нарушено, неприменимо либо данных недостаточно. Этот результат служит объяснимой обратной связью для разработчика или ИИ-агента.

Подход проверен на датчике BME280. Согласно документации [**2**], значение регистра `ctrl_hum` применяется только после записи `ctrl_meas`. Для ESP32 были реализованы ошибочная и корректная последовательности настройки (по 10 запусков со сбросом датчика). В ошибочном варианте влажность всегда оставалась равной `0x8000` (признак пропуска измерения), и монитор фиксировал нарушение. После добавления записи `ctrl_meas` во всех запусках считывались корректные значения (24879–24951), а требование помечалось как выполненное.

В работе оценивается, как представление документации влияет на способность ИИ-агента писать и исправлять код. Сравниваются четыре задачи и четыре варианта контекста: исходная документация, неструктурированный набор тех же фактов, структурированные требования и требования с обратной связью монитора. Оценка учитывает корректность на скрытых тестах, число нарушений, время, число итераций и стоимость. Это позволяет разделить пользу структурирования знаний и автоматической проверки. В докладе рассматриваются схема эксперимента и результаты применения подхода, связывающего документацию, поведение устройства и ошибку в коде.

### Литература

[1] Li Y., Cheng Y., Ma M. et al. *Skilled AI Agents for Embedded and IoT Systems Development*. 2026. arXiv:2603.19583.

[2] Bosch Sensortec. *BME280 Data sheet*. Document BST-BME280-DS001-23, rev. 1.23, 2022. Sections 5.4.3, 5.4.5.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* m.tsukanov@g.nsu.ru

## Изотопные преобразования n-квазигрупп, улучшающие криптографические свойства

Чаплыгина С. С.

Квазигруппы и $n$-квазигруппы, как их обобщение, являются перспективным направлением современной криптографии. Для обеспечения стойкости к используемым квазигруппам и $n$-квазигруппам предъявляется ряд требований. Примерами подобных требований могут служить такие свойства как полиномиальная полнота, простота, неаффинность и отсутствие подквазигрупп. Для практических применений необходимо уметь описывать способы нахождения квазигрупп и $n$-квазигрупп с данными свойствами. Один из возможных подходов — взять некоторую квазигруппу или $n$-квазигруппу и преобразовать её в «хорошую» структуру. Рассмотрим случай $n$-квазигрупп.

**Определение.** *Назовем конечной $n$-квазигруппой порядка $k \in \mathbb{N}$ такое множество $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ с $n$-арной операцией $f\colon Q^n \to Q$, что для любых элементов $x_1, \ldots, x_n, b \in Q$ для любого $i = 1, \ldots, n$ уравнение*

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = b$$

*однозначно разрешимо. Другими словами, $f$ обратима по каждому аргументу.*

**Определение.** *Будем называть $n$-квазигруппы $(Q, f)$ и $(Q, g)$ изотопными, если существуют перестановки $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ на $Q$, что выполнено тождество*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma^{-1}(g(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n))).$$

Рассмотрим $n$-квазигрупповую операцию $f$ как функцию $k$-значной логики. Тогда $n$-квазигруппа $(Q, f)$ называется полиномиально полной, если с помощью операций суперпозиции из множества $\{f\} \cup P_k^0$ можно получить все функции $k$-значной логики, где $P_k^0$ обозначает множество всех констант.

Будем называть $n$-квазигруппу $(Q, f)$ аффинной, если найдется такая абелева группа $(Q, +)$, что для некоторых автоморфизмов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ этой группы и некоторой константы $c \in Q$ верно тождество $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \alpha_1(x_1) + \ldots + \alpha_n(x_n) + c$.

Будем называть $n$-квазигруппу $(Q, f)$ простой, если операция $f$ не сохраняет ни одного нетривиального отношения эквивалентности.

Собственное подмножество $Q' \subset Q$, замкнутое относительно операции $f$, называется собственной подквазигруппой $n$-квазигруппы $(Q, f)$.

Было найдено семейство изотопий, для которых выполнена теорема.

**Теорема.** *При $n \geq 3$, $k \geq 5$ данная $n$-квазигруппа порядка $k$ после применения изотопии из представленного семейства не содержит собственных подквазигрупп, является полиномиально полной, простой и неаффинной.*

**Следствие.** *Любая $n$-квазигруппа порядка $k \geq 5$, $n \geq 3$ изотопна полиномиально полной, простой и неаффинной $n$-квазигруппе, не содержащей собственные подквазигруппы.*

*МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва (Россия)*
*E-mail: svetlana.chaplygina@math.msu.ru*

## Влияние контекста на классификацию эмоциональной окраски мнений в русскоязычных новостных текстах

М. Черепанов

В задаче аспектного анализа эмоциональной окраски (ABEA) важно связать эмоцию с конкретным объектом (аспектом) [**1**]. Одна и та же лексика может выражать разные эмоции в зависимости от контекста [**2**].

Цель работы — проверить влияние величины контекста на качество классификации. Гипотеза: полное предложение с явно обозначенным аспектом даёт более высокое качество, чем только выражение мнения.

Эксперимент проведён на данных RuOpinionNE (3928 строк, Обучение: 2794, Валидация: 561, Тест: 573) с моделью `DeepPavlov/rubert-base-cased`. Сравниваются две постановки:

- **Sentence + target**: «Предложение: . . . [ТАРГЕТ] аспект [/ТАРГЕТ]»;
- **EXP only**: только поле `opinion_expression`.

Классы: *anger*, *disgust*, *fear*, *joy*, *sadness*, *surprise*, *neutral*. Многометочные записи исключены. Разметка: 100 примеров вручную, остальное — LLM (GLM 5.3-flash).

На тестовой выборке из 573 примеров:

| Метрика | Sentence + target | EXP only |
|---|---|---|
| Accuracy | 0,7714 | 0,7103 |
| Macro-F1 | 0,5482 | 0,3609 |
| Weighted-F1 | 0,7619 | 0,6742 |

Преимущество контекстной постановки по Macro-F1 составляет 0,1873 (пять из семи классов). Для *joy* лучше EXP only; для *surprise* обе модели дают нулевой F1.

Пример, где контекст помогает: «Селезнёв был арестован . . . и экстрадирован» (аспект: *Селезнёв*, выражение: *арестован*). Эталон — *anger*; Sentence + target: *anger*, EXP only: *joy*.

Пример, где достаточно выражения: «знаменитых курильщиков . . . Сержа Генсбура» (аспект: *Сержа Генсбура*, выражение: *знаменитых*). Эталон — *joy*; Sentence + target: *anger*, EXP only: *joy*.

Таким образом, гипотеза подтверждается. Основные ограничения: сильный дисбаланс классов и синтетический характер большей части разметки.

### Литература

[1] C. Zorenböhmer, S. Schmidt, B. Resch, *EmoGRACE: aspect-based emotion analysis for social media data*, Social Network Analysis and Mining **16** (2026). https://doi.org/10.1007/s13278-026-01585-5

[2] J. Kim et al., *Advancements in Korean Emotion Classification: A Comparative Approach Using Attention Mechanism*, Mathematics **12** (2024), no. 11, 1637. https://doi.org/10.3390/math12111637

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* *m.cherepanov@g.nsu.ru*

## Разработка программного комплекса с применением интеллектуальных технологий для адаптивного A/B-тестирования

А. М. Шевлякова

В условиях высокой конкуренции в секторах FinTech и E-commerce скорость внедрения новых функций становится ключевым фактором успеха бизнеса [**1**]. Традиционные подходы к A/B-тестированию обладают существенными недостатками: они требуют длительного времени сбора данных и приводят к финансовым потерям из-за равномерного распределения трафика, при котором половина пользователей получает заведомо худший вариант продукта. Существующие решения часто либо не имеют интеллектуальной адаптации, либо отличаются избыточной сложностью и высокой стоимостью.

Целью данной работы является разработка программного комплекса адаптивного A/B-тестирования, обеспечивающего динамическую оптимизацию трафика и автоматическое выявление аномалий в реальном времени. В отличие от классических систем, предлагаемый комплекс должен самостоятельно принимать решения о перераспределении пользовательского потока на основе текущих показателей эффективности.

Для достижения поставленной цели проводятся следующие исследования: анализ существующих методов тестирования; разработка алгоритма интеллектуального распределения трафика, способного динамически подстраиваться под изменяющиеся показатели эффективности; проектирование механизма автоматического выявления аномалий и защиты системы от деградации бизнес-показателей; создание архитектуры программного комплекса.

Научная новизна предполагаемого исследования заключается в модификации байесовских методов, позволяющей динамически смещать трафик без остановки эксперимента [**2**], а также во внедрении механизма детектирования деградации бизнес-показателей, обеспечивающего автоматический откат изменений при выявлении критических отклонений.

В рамках текущего этапа работы спроектирована архитектура программного комплекса, предусматривающая многокритериальную оптимизацию конфликтующих метрик через взвешенные функции полезности. Проведенное исследование может служить основой для дальнейшего развития системы, способной сократить цикл валидации гипотез и снизить финансовые риски при внедрении изменений за счет интеллектуального управления трафиком.

### Литература

[1] Kohavi R., Tang D., Xu Y. *Trusted Online A/B Testing at Scale: The Book of Why.* — Cambridge University Press, 2020.

[2] Page E. S. *Continuous Inspection Schemes* // Biometrika. — 1954. — Vol. 41, No. 1/2. — P. 100–115.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: a.shevlyakova@g.nsu.ru*

## Исчисления тождеств Клини, конечное и бесконечное

М. С. Шеремет

Мы рассматриваем алгебры, основные операции которых могут быть частичными, т. е. определены не всюду. В этом случае истинность формул с равенством может задаваться различными способами в зависимости от условий на определённость рассматриваемых функций.

В данном докладе рассматривается равенство Клини, впервые явно формализованное в [**1**]: $f(\overline{x}) \approx g(\overline{x})$ считается выполненным при означивании $\overline{x} \mapsto \overline{a}$, если либо $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ не определены, либо $f(\overline{a})$ и $g(\overline{a})$ определены и совпадают.

Несмотря на естественное определение, аксиоматизация логики тождеств Клини существенно сложнее таковой для всюду определённых функций: неограниченное правило подстановки не является допустимым, а замена этого правила на какое-либо допустимое ограничение приводит к неполноте [**2**].

В данной работе мы доказываем, что перечислимую аксиоматизацию из [**2**] можно заменить конечной, если в выводе появляется тождество вида

$$p(x, y, \overline{z}) \approx p(x', y', \overline{z}). \qquad (*)$$

С другой стороны, мы доказываем, что если тождества вида $(*)$ не появляются в выводе, то аксиоматизация из [**2**] может быть заменена существенно более простой.

### Литература

[1] S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, 1952.

[2] A. Robinson, *Equational logic of partial functions under Kleene equality: a complete and an incomplete set of rules*, The Journal of symbolic logic, **54**, №2 (1989), 354–362. doi: 10.2307/2274852.

[3] W. Craig, *Near-Equational and Equational Systems of Logic for Partial Functions. II*, The Journal of Symbolic Logic, **54**, №4 (1989), 1181–1215. doi: 10.2307/2274813.

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: sheremetms@yandex.ru*

## Архитектура логической надстройки для объяснения ответов больших языковых моделей

А. А. Якобсон

Современные диалоговые системы, основанные на больших языковых моделях (LLM), демонстрируют высокую эффективность при обработке естественного языка и генерации текстов. Однако их применение для решения прикладных задач сопряжено с проблемой проверки достоверности ответов, особенно затруднительной для неподготовленных пользователей. Это обусловливает необходимость разработки методов объяснения результатов работы LLM на основе формализованных знаний.

Предлагается архитектура логической надстройки, объединяющей возможности LLM по преобразованию информации с методами явного представления знаний на языке логики первого порядка. В отличие от предоставления справочной информации о предметной области, данный подход позволяет анализировать содержание ответов и обосновывать рекомендации по их корректировке с опорой на формальное представление знаний.

Основу архитектуры составляет аппарат частичных моделей [**1**], предназначенных для формального представления знаний, извлекаемых из текстов на естественном языке. Он обеспечивает операции над частичными моделями, включая расширение, сужение и построение онтологических гомоморфизмов, а также построение частичных моделей на основе описания на естественном языке.

База знаний имеет четырёхуровневую структуру [**2**]: метаонтология, определяющая верхнеуровневые классы и фундаментальные отношения; предметные знания; ситуационные знания; оценочные знания. Её первоначальное наполнение осуществляется автоматически на основе анализа текстовых материалов соответствующей предметной области.

Модуль корректировки работы LLM формирует запросы с учётом базы знаний, вырабатывает рекомендации по изменению запросов на основании полученных ответов и предоставляет логическое обоснование этих рекомендаций [**3**]. Это позволяет итеративно уточнять результаты генерации, опираясь на формализованные знания.

Интеграция системы осуществляется посредством загрузки корпуса документов, например, организационных регламентов или требований к разрабатываемому программному продукту. На основе их анализа формируются частичные модели и связи между ними. В дальнейшем база знаний пополняется новыми данными, связями и прецедентами, получаемыми при взаимодействии с пользователями.

### Литература

[1] Пальчунов Д. Е. *Теория моделей предметных областей. II* // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 2. С. 239–250. DOI: 10.1007/s10469-023-09702-5.

[2] Naydanov, C., Palchunov, D. and Sazonova, P., 2015, October. *Development of automated methods for the critical condition risk prevention, based on the analysis of the knowledge obtained from patient medical records.* In 2015 International Conference on Biomedical Engineering and Computational Technologies (SIBIRCON) (pp. 33–38). IEEE.

[3] Palchunov, D., Nemtsev, I., Yakobson, A. and Shelkovnikova, S., 2025, November. *Integration of Logical and Neural Network Methods for Creation of Digital Twins of Regulations.* In 2025 IEEE XVII International Scientific and Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE) (pp. 1–6). IEEE.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: a.yakobson@g.nsu.ru*

## Classes of universal epi- and monomorphisms in quasi-abelian categories

M. Zinchenko

In homological algebra, the snake lemma for quasi-abelian categories traditionally requires the vertical arrows to be strict. Glotko and Kuzminov [**1**] generalized this result by replacing strictness with the concept of universality. In their work, they introduced two axioms: universal monomorphisms are stable under pullback (Axiom 1), and universal epimorphisms are stable under pushout (Axiom 1*). Whether these axioms hold in an arbitrary quasi-abelian category remained an open problem [**1, 2**].

We provide a positive solution to this problem. Furthermore, we provide explicit examples of non-strict universal epimorphisms and monomorphisms, which were previously absent in the literature.

Specifically, we analyze the categories of normed spaces (**Norm**) and Banach spaces (**Ban**). We demonstrate that in **Ban**, the class of universal monomorphisms exactly coincides with the class of strict monomorphisms (which are precisely operators bounded below), and the class of universal epimorphisms coincides with strict epimorphisms (surjective operators). Similar results are established for **Norm**.

**Theorem 4.1.** *In any quasi-abelian category, Axioms 1 and* $1^*$ *hold.*

### References

[1] N. V. Glotko and V. I. Kuzminov, *On the cohomology sequence in a semiabelian category*, Sibirsk. Mat. Zh 43 (2002), no. 1, 41–50; English translation in: Siberian Math. J. 43 (2002), no. 1, 28–35.

[2] Ya. A. Kopylov and V. I. Kuzminov, *On the Ker-Coker sequence in a semi-abelian category*, Sibirsk. Mat. Zh 41 (2000), no. 3, 615–624; English translation in: Siberian Math. J. 41 (2000), no. 3, 509–517.

*Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* m.zinchenko@g.nsu.ru

# III. Секция «Неклассические логики и универсальная алгебра»

## Свойства ступенчатой временной логики с прошлым $p\mathcal{LTK}.sl$ и ее аксиоматизация

С. И. Башмаков, Ю. А. Бушакова

Современные исследования в области неклассических логик активно развивают аппарат временных логик, который востребован при спецификации поведения интеллектуальных агентов и обработке временной информации в базах знаний. К числу известных представителей этого направления относятся линейная временная логика $\mathcal{LTL}$ и логика деревьев вычислений $\mathcal{CTL}$. Особый интерес представляет класс систем, в которых время моделируется нерефлексивным и нетранзитивным («пошаговым») отношением. Такой подход позволяет адекватно описывать процессы частичной утраты или принципиальной недоступности информации при переходе между состояниями системы.

В центре доклада находится логика $p\mathcal{LTK}.sl$ из семейства $\mathrm{Ext}(\mathcal{LTL}.sl)$, с операторами доступа в будущее $N$ (Next) и прошлое $P$ (Previous). Семантика логики определяется на шкалах Крипке, где переходы между временными сгустками осуществляются пошагово, а также заданы отношения агентов $R_i$, выделяющие сегменты доступной информации внутри каждого сгустка.

В работе рассматриваются вопросы семантической характеризации логики, исследуется свойство финитной аппроксимируемости, исследуется тип унификации логики и доказывается сильная полнота относительно $p\mathcal{LTK}.sl$-шкал методом канонической модели.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).*

Литература

[1] Fisher M., *An introduction to practical formal methods using temporal logic.* John Wiley & Sons, 2011.
[2] Vardi M. Y., *An automata-theoretic approach to linear temporal logic.* Logics for concurrency: structure versus automata. Springer, 2005. P. 238–266.
[3] Башмаков С. И., Зверева Т. Ю., *Линейная ступенчатая логика знания LTK.sl.* Сиб. электрон. матем. известия 20:2, 1361–1373, 2023.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail: u_ bushakova@vk.com*

## Семантика одной кондициональной логики первого порядка с лямбда-оператором

Е. В. Борисов

Естественные языки содержат имена с нежесткой интерпретацией (т. е. имена, имеющие разные денотаты в разных возможных ситуациях) и интенсиональные выражения. Взаимодействие таких имен и выражений порождает для многих высказываний интерпретации de re и de dicto. В модальной логике первого порядка эти интерпретации можно репрезентировать с использованием $\lambda$-оператора [**1**].

Союз «если..., то...» во многих контекстах требует интенсиональной интерпретации, поэтому его взаимодействие с именами порождает интерпретации условных предложений de re и de dicto. Эти интерпретации могут быть отображены в кондициональных логиках первого порядка с $\lambda$-оператором. Таким образом, логики этого вида должны быть пригодны для моделирования рассуждений на естественном языке. Однако, насколько известно автору, попытки разработки кондициональных логик первого порядка с $\lambda$-оператором в литературе пока не предпринимались.

В докладе будет представлена одна из таких логик; обозначим ее как **QVC**$\lambda$. Ее язык представляет собой язык классической логики первого порядка с индивидными константами, дополненный кондициональным оператором и $\lambda$-оператором. Ее пропозициональную основу составляет логика **VC** Льюиса [**2**]. Модели **QVC**$\lambda$ содержат постоянный домен и нежесткую интерпретацию индивидных констант. В докладе будут показаны выразительные возможности этой логики в аспекте дистинкции *de re* / *de dicto*.

### Литература

[1] Fitting M., Mendelsohn R. L. *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Springer, 2023.
[2] Lewis D. *Counterfactuals*. Oxford: Basil Blackwell, 1973.

*Институт философии и права СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* borisov.evgeny@gmail.com

## Метод доказательства финитарного типа унификации для некоторых суперинтуиционистских логик

Е. В. Брылякова

Одним из основных направлений в исследованиях неклассических логик является теория унификации, главная задача которой заключается в поиске и построении подстановки, переводящей заданную формулу в теорему логики. Тип унификации логики определяется структурой множества максимальных унификаторов [**1**]:

- унитарный — каждая унифицируемая формула обладает наиболее общим унификатором;
- финитарный — не для всякой унифицируемой формулы существует наиболее общий унификатор, однако каждая из них имеет лишь конечное число максимальных унификаторов;
- существует хотя бы одна унифицируемая формула, для которой множество максимальных унификаторов бесконечно;
- некоторая унифицируемая формула порождает бесконечную возрастающую цепь более общих унификаторов и не имеет максимального унификатора.

В докладе рассматривается проблема унификации для класса суперинтуиционистских логик, обладающих двумя свойствами:

- конечной глубиной: ограничением длины цепей миров в корневых фреймах фиксированным числом $d$;
- слабым ко-накрытием [**2**]: к любому конечному корневому фрейму и любой непустой антицепи его миров можно добавить новый корень, который «видит» все миры этой антицепи, так что полученный фрейм остаётся фреймом данной логики.

Путём построения $n$-характеристических моделей и так называемых функций истинности (определяющих максимальные унификаторы) для рассматриваемых логик формируется полный конечный набор унификаторов.

Предложенный метод позволяет конструктивно доказывать финитарность унификации логик, обобщает ранее известные результаты и может быть адаптирован для других логических систем.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).*

Литература

[1] Jerabek E., *Blending margins: The modal logic K has nullary unification type*, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences, 2018.

[2] Rimatskiy V., *Description of modal logics which enjoy co-cover property*, Siberian Electronic Mathematical Reports, 2022, 316–325.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail: lbrylyakovv@bk.ru*

## Минимальная вполне-определённая логика

И. А. Горбунов, М. Н. Рыбаков

Понятие *вполне-определённой логики* (well-determined logic) было предложено Р. Вуйцицким [**1**]. Понимаем логику как стандартное следование $C$ (т.е. удовлетворяющее условиям экстенсивности, монотонности, идемпотентности, структурности и финитарности). Тогда $C$ задаёт вполне-определённую логику, если для $C$ выполнена слабая теорема о дедукции в виде

$$\bigwedge\Gamma \to \alpha \subseteq C(\varnothing) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in C(\Gamma).$$

В ходе исследований вполне-определённых логик в сигнатуре $\{\wedge, \to\}$ авторами были получены следующие результаты:

- найден эффективный критерий дедуктивности множества формул;
- найдена аксиоматика минимальной вполне-определённой логики $W$;
- построена семантика логики $W$;
- доказано, что множество тавтологий логики $W$ не является ни табличным, ни локально табличным, но обладает свойством конечных моделей;
- доказана полиномиальная разрешимость множества тавтологий $W$;
- описаны теории логики $W$;
- описана сложность конечно аксиоматизируемых теорий логики $W$;
- приведены примеры как вполне-определённых расширений логики $W$, так и не являющихся таковыми.

Кроме того, изучены логики, обладающие свойством конъюнкции и сильным дедуктивным свойством, т.е. для которых

$$\begin{array}{rcl} C(\alpha \wedge \beta) & = & C(\alpha, \beta); \\ \beta \to \alpha \subseteq C(\Gamma) & \Longleftrightarrow & \alpha \in C(\Gamma, \beta). \end{array}$$

Показано, что множество всех тавтологий наименьшей такой логики в сигнатуре $\{\wedge, \to\}$ совпадает с конъюнктивно-импликативным фрагментом множества интуиционистских тавтологий.

Предполагается представить и обсудить эти и некоторые другие результаты, а также вопросы, касающиеся вполне-определённых логик, их расширений, теорий и фрагментов.

*Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (HSE-BR-2025-001).*

Литература

[1] Wójcicki R., *Lectures on Propositional Calculi.* Ossolineum, Wroclaw, 1984.

*Тверской государственный университет, Тверь (Россия); Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва (Россия)*
*E-mail: i_gorbunov@mail.ru*

*Московский физико-технический институт, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва (Россия); Тверской государственный университет, Тверь (Россия)*
*E-mail: m_rybakov@mail.ru*

## К вопросу о вероятностном расширении логик динамической надежности

К. В. Грекович

В работе [**1**] была исследована интервально-кластерная темпорально-эпистемическая логика с оператором надежности. В настоящем докладе рассматривается дальнейшее развитие этого подхода, связанное с интеграцией вероятностных мер и градуированных квантификаторов доверия для оценки устойчивости систем в состязательных средах, опираясь на методы мультимодального анализа [**1, 1**].

Обсуждаются принципы построения расширенной семантики, отражающей взаимодействие темпоральных переходов, кластерной структуры и вероятностных оценок информационных потоков. Основное внимание уделяется общим исследованиям проблемы разрешимости и сохранения свойства конечной модели для полученной вероятностной системы с помощью методов темпорального усечения и кластерной фильтрации в условиях вероятностных сред [**4**].

*Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект № 25-21-20011,* https://rscf.ru/project/25-21-20011/.

Литература

[1] Grekovich K. V., Rybakov V. V., Rimatsky V. V. *Intransitive Temporal Multi-agent Logic with Agents' Multi-valuations. Decidability* // Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Math. 2025. V. 51. P. 141–150.

[2] Protsenko N. A., Rybakov V. V. *Multilinear multimodal logic with semi-reliable information operator* // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2025. V. 22, No. 2. P. 1154–1163.

[3] Fagin R., Halpern J. Y., Moses Y., Vardi M. Y. *Reasoning about Knowledge.* Cambridge: MIT Press, 1995.

[4] Halpern J. Y., Tuttle R. *Knowledge, probability, and adversarial environments* // J. ACM. 1993. V. 40, N. 4. P. 917–962.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* Propro879@gmail.com

## Об интерполяционном свойстве Линдона и амальгамируемости бисимуляций

Л. В. Дворкин

Логика $\Lambda$ обладает *интерполяционным свойством Крейга (CIP)*, если для любой выводимой в $\Lambda$ импликации $\varphi \to \psi$ существует формула $\iota$, содержащая только общие переменные $\varphi$ и $\psi$, для которой $\varphi \to \iota$ и $\iota \to \psi$ выводимы в $\Lambda$. *Интерполяционное свойство Линдона (LIP)* усиливает CIP: переменные, входящие в $\iota$ позитивно (негативно), должны входить позитивно (негативно) в $\varphi$ и $\psi$.

Согласно известному результату Максимовой [**1**], нормальная модальная логика обладает CIP тогда и только тогда, когда многообразие её алгебр суперамальгамируемо: для любых алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ с общей подалгеброй $\mathfrak{A}_0$ существует алгебра $\mathfrak{A}$ с вложениями $g_k : \mathfrak{A}_k \hookrightarrow \mathfrak{A}$, $k = 1, 2$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $g_1(a_0) = g_2(a_0)$ для всех $a_0 \in A_0$;
(2) если $g_1(a_1) \leq g_2(a_2)$, то существует $a_0 \in A_0$ такой, что $a_1 \leq a_0$ и $a_0 \leq a_2$.

Максимова также получила подобную характеризацию более слабых интерполяционных свойств: интерполяционного свойства для выводимости (IPD) [**1**] и слабого интерполяционного свойства (WIP) [**2**]. Критерий для LIP оставался открытой проблемой [**3**, проблема 1]. В настоящем докладе дан ответ на этот вопрос.

*Подчинением* между алгебрами $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ назовём отношение $S \subseteq A_1 \times A_2$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\bot\ S\ \bot$ и $\top\ S\ \top$;
(2) $(a_1 \vee b_1)\ S\ (a_2 \vee b_2)$ и $(a_1 \wedge b_1)\ S\ (a_2 \wedge b_2)$ для всех $a_1\ S\ a_2$ и $b_1\ S\ b_2$;
(3) $\Diamond a_1\ S\ \Diamond a_2$ и $\Box a_1\ S\ \Box a_2$ для всех $a_1\ S\ a_2$;
(4) если $a_1 \leq b_1\ S\ b_2 \leq c_2$, то $a_1\ S\ c_2$.

Говорим, что класс алгебр $\mathfrak{C}$ обладает *свойством амальгамируемости подчинений (SubordAP)*, если для любого подчинения $S$ между алгебрами $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{C}$ существует алгебра $\mathfrak{A} \in \mathfrak{C}$ с гомоморфизмами $g_k : \mathfrak{A}_k \to \mathfrak{A}$, $k = 1, 2$, удовлетворяющая условию $a_1\ S\ a_2 \Leftrightarrow g_1(a_1) \leq g_2(a_2)$.

**Теорема.** *Нормальная модальная логика обладает LIP тогда и только тогда, когда многообразие её алгебр обладает SubordAP.*

Известно, что подчинениям между булевыми алгебрами соответствуют замкнутые (в топологии произведения) отношения между пространствами Стоуна [**4**]. Говорим, что класс дескриптивных шкал $\mathcal{D}$ обладает *свойством амальгамируемости бисимуляций (BAP)*, если для любой замкнутой бисимуляции $Z$ между шкалами $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{D}$ существует шкала $\mathcal{G} \in \mathcal{D}$ с морфизмами $\pi_k : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_k$, $k = 1, 2$, удовлетворяющая условию $w_1\ Z\ w_2 \Leftrightarrow \exists w(\pi_1(w) = w_1 \text{ и } \pi_2(w) = w_2)$.

**Следствие.** *Нормальная модальная логика обладает LIP тогда и только тогда, когда класс её дескриптивных шкал обладает BAP.*

### Литература

[1] Максимова Л. Л., *Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр.* Алгебра и логика, 18:5 (1979), 556–586.
[2] Максимова Л. Л., *Слабая форма интерполяции в эквациональной логике.* Алгебра и логика, 47:1 (2008), 94–107.
[3] Maksimova L. L., *Amalgamation and interpolation in normal modal logics.* Studia Logica, 50 (1991), 457–471.

[4] Abbadini M., Bezhanishvili G., and Carai L., *A generalization of de Vries duality to closed relations between compact Hausdorff spaces*. Topology and its Applications, 337 (2023), 108641.

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва (Россия)*
*E-mail: lev_ 135@mail.ru*

## Отрицательное согласование в формальной семантике

У. Д. Зайцева

В интенсиональной логике Р. Монтегю [**1**] явление отрицательного согласования затрудняет композициональный анализ предложений естественного языка в рамках теории обобщённых кванторов, которую развивали Дж. Барвайс и Р. Купер [**2**]. В докладе в качестве решения проблемы предлагается рассмотреть алгоритм семантической предобработки, основанный на синтаксических зависимостях и последующем введении скулемовских функций [**3, 4**].

Пусть предложение $S = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ задано вместе с деревом зависимостей $G_S = (V, E)$. Выделяются множества отрицательных местоимений $\Sigma_{\text{neg}}$, неопределённых местоимений $\Sigma_{\text{indef}}$ и маркеров отрицания $\Sigma_{\text{part}}$, $\Sigma_{\text{pred}}$. Алгоритм состоит из двух фаз: обнаружения конфигурации отрицательного согласования по лексическим и синтаксическим признакам и её преобразование посредством замены отрицательных местоимений на неопределённые, устранения кумулятивного отрицания и введения единого сентенциального оператора.

Например, предложение «В этой лаборатории никто никогда ничего не исследовал» преобразуется в «Неверно, что в этой лаборатории кто-нибудь когда-нибудь что-нибудь исследовал». Преобразованному предложению соответствует формула

$$\neg\exists x \exists t \exists y \left(P(x) \wedge T(t) \wedge O(y) \wedge R(x, y, t, l)\right),$$

где $P(x)$ означает, что $x$ является человеком, $T(t)$ — что $t$ является рассматриваемым моментом времени, $O(y)$ — что $y$ является объектом исследования, $R(x, y, t, l)$ — отношение исследования объекта $y$ человеком $x$ в момент $t$ в лаборатории $l$.

Использование скулемовских функций выбора типа $(e \to t) \to e$ позволяет представлять неопределённые составляющие посредством термов-свидетелей при условии соответствующей интерпретации функций выбора.

### Литература

[1] Montague R. *The proper treatment of quantification in ordinary English*. Springer, 1973, 221–242.
[2] Barwise J., Cooper R. *Generalized quantifiers and natural language*. Springer, 1981, 241–301.
[3] Penzina U., Stukachev A. *Skolem Functions and Generalized Quantifiers for Negative Polarity Items Semantics*. Lecture Notes in Networks and Systems, 1198 (2025), 123–132.
[4] Zaitseva U., Stukachev A. *Skolem Functions for Russian Negative Concord: Developing Preprocessing Algorithm*. Studies in Computational Intelligence, 1280 (2026), 113–125.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* upienzina@mail.ru

## Рефлексивные и сильно рефлексивные подпространства $T_0$-пространств с аппроксимациями

М. И. Кудряшова

Ю. Л. Ершов в [**1**] установил декартову замкнутость категории $\mathbf{\Delta}$, как категории, состоящей из рефлексивных подпространств пространств (объектов) декартово замкнутой категории $\mathbf{\Delta}_d$. Используя похожий подход, введя понятие сильно рефлексивных подпространств, мы устанавливаем декартову замкнутость других полных подкатегорий $\mathbf{Top}_0$, состоящих из аппроксимационных пространств, которые не являются направленно полными. В частности, установлена декартова замкнутость полной подкатегории $\mathbf{Top}_0$, состоящей из базисных подпространств $A_d$-пространств, имеющих конечное число минимальных элементов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 24-11-00227).*

Литература

[1] Ершов Ю. Л., $\Delta$-*пространства*, Алгебра и Логика, 38, no. 6 (1999), 667–679.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)*
*E-mail:* m.kudryashova@g.nsu.ru

## О многообразии, порожденном решетками, близкими к дистрибутивным

Д. Д. Лоновенко, К. В. Селиванов

Решётка $L$ называется близкой к дистрибутивной, если для любых $x, y, z \in L$ интервалы $[(x \wedge y) \vee (x \wedge z),\ x \wedge (y \vee z)]$ и $[x \vee (y \wedge z),\ (x \vee y) \wedge (x \vee z)]$ имеют длину не более 1. Для конечных решёток получен критерий близости к дистрибутивности в терминах запрещенных минимальных подрешёток [**1, 2**]. Естественным продолжением является исследование класса $\mathcal{C}$ всех близких к дистрибутивным решёток и порождённого им многообразия $\mathcal{V} = \mathrm{HSP}(\mathcal{C})$. Сам класс $\mathcal{C}$ многообразием не является, поскольку не замкнут относительно прямых произведений.

Получено описание класса $\mathcal{C}$ через класс $\mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ всех недистрибутивных специально подпрямо неразложимых решёток из $\mathcal{C}$, а именно,

$$\mathcal{C} = \mathrm{S}\{A \times D :\ A \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}},\ D \in \mathcal{D}\},$$

где $\mathcal{D}$ — многообразие дистрибутивных решёток. При этом нами доказано, что $\mathcal{V} = \mathrm{HSP}(\mathcal{S}_{\mathrm{sp}}) = \mathrm{SP}(\mathcal{C})$.

Получена характеристика многообразия $\mathcal{V}$ через пересечения главных конгруэнций, а именно, показано, что решётка $L$ принадлежит $\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда для каждого дистрибутивного интервала $[a, b]$ и каждого $r \in [a, b]$ выполняются равенства

$$\mathrm{Cg}_L(a, r) \wedge \mathrm{Cg}_L(r, b) = 0.$$

На этой основе установлена полнота системы определяющих тождеств многообразия $\mathcal{V}$, состоящей из линейных унарных решёточных полиномов. Данное исследование развивает метод, предложенный в [**3**].

Исследованы свободные решётки многообразия $\mathcal{V}$ и приведены примеры решёток из $\mathcal{C}$, в частности простые решётки $M_\kappa$ и решётки подпространств трёхмерного векторного пространства над полем.

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения № 075-02-2026-737).*

Литература

[1] Селиванов К. В. *Минимальные решётки, не близкие к дистрибутивным, с четырьмя порождающими* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2026. Т. 32, № 1. С. 236–262.

[2] Селиванов К. В. *Минимальные решётки, не близкие к дистрибутивным* // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: тезисы докладов (Новосибирск, 10–14 ноября 2025 г.). Новосибирск, 2025.

[3] Лоновенко Д. Д. *Эквациональные свойства решёток, близких к дистрибутивным.* Выпускная квалификационная работа. Екатеринбург: УрФУ, 2025.

*Уральский математический центр, Екатеринбург (Россия); Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)*
*E-mail: dlonovenko@mail.ru*

*Институт математики и механики им.Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург (Россия)*
*E-mail: ckirill2000@mail.ru*

## Дуальность Стоуна для частично упорядоченных структур

М. М. Минготт Фернандез

В статье Л.Х. Гонсалеса и Р. Хансаны [**1**] представлена топологическая дуальность для категории частично упорядоченных множеств с сохраняющими фильтры отображениями, которая расширяет дуальность для $\wedge$-полурешёток и ограниченных решёток М.А. Мошира и П. Джипсена [**2**].

В работах [**4**]–[**5**] с использованием результатов работы [**3**] установлена обобщённая дуальность Стоуна: дуальная эквивалентность категории **DP** дистрибутивных *с*-ч. у. множеств с сохраняющими простые идеалы отображениями и категории **AS** почти собранных пространств с базой из открытых компактных множеств с сохраняющими базисные множества отображениями.

Оказывается, что при выборе алгебраического оператора замыкания $\xi = \downarrow$ и ограничении обобщённой дуальности Стоуна на подкатегорию $\mathbf{DP}_\xi$ дистрибутивных *с*-ч. у. множеств с этим оператором, она становится очень близкой к дуальности Гонсалеса–Хансаны и требует лишь незначительных изменений. Такую дуальность мы называем *штрих-дуальностью Гонсалеса–Хансаны.*

**Теорема.** *Штрих-дуальность Гонсалеса–Хансаны является ограничением обобщённой дуальности Стоуна. В частности, дуально эквивалентные категории* $\mathbf{P}'$ *и* $\mathbf{TOP}(P')$ *изоморфны полным подкатегориям дуально эквивалентных категорий* **DP** *и* **AS** *соответственно.*

Ограничение штрих-дуальности на подкатегории $\mathbf{DP}_\xi^{\wedge,1}$, $\mathbf{L}_{\xi\ \wedge}^{01}$, $\mathbf{L}_\xi^{01}$ даёт соответственно дуальности Мошиера–Джипсена для $\wedge$-полурешёток с 1, ограниченных решёток с $\wedge$-сохраняющими отображениями и ограниченных решёток с гомоморфизмами решёток.

### Литература

[1] Gonzalez Luciano J., Jansana Ramon, *A topological duality for posets*, Algebra Universalis, 76 (2016), 455–478.

[2] Moshier M. Andrew, Jipsen Peter, *Topological duality and lattice expansions, I: A topological construction of canonical extensions.*

[3] Ершов Ю.Л., Швидефски М.В., *К спектральной теории частично упорядоченных множеств II*, Сибирский математический журнал, 61, no. 2 (2020), 572–586.

[4] Швидефски М.В., *Дуальность Стоуна для дистрибутивных частично упорядоченных множеств*, Алгебра и логика, 62, no. 5 (2023), 637–664.

[5] Schwidefsky M.V., *Letter to the Editorial Board*, Algebra and Logic, 64, no. 4 (2024), 294–299.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: m.mingott_fernandez@g.nsu.ru*

## Многоагентные темпорально-эпистемические кластерные логики с операторами прошлого, будущего и общего знания

К. А. Петров, В. В. Рыбаков

Многоагентные модальные и темпоральные логики применяются при верификации распределённых систем и анализе информационного взаимодействия агентов [**1**]. Естественным подходом к разделению локальной эпистемической структуры состояния и глобальной динамики переходов между состояниями служат кластерные модели [**2, 3**], где глобальное отношение достижимости задаётся непосредственно на множестве кластеров. В настоящей работе результаты [**3**] обобщаются на случай языка, обогащённого оператором общего знания агентов внутри кластеров и двусторонними глобальными темпоральными модальностями будущего и прошлого.

Пусть $Ag = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество агентов, $Prop$ — счётное множество пропозициональных переменных. Формулы языка $\mathcal{L}_{Ag}^{C,FP}$ строятся по правилу:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid \Box_l^a \varphi \mid C\varphi \mid \Box_F \varphi \mid \Box_P \varphi \quad (p \in Prop,\, a \in Ag),$$

где $\Box_l^a \varphi$ — индивидуальное знание агента $a$, $C\varphi$ — общее знание (common knowledge) группы $Ag$, а $\Box_F \varphi$ и $\Box_P \varphi$ — глобальные операторы будущего и прошлого.

**Определение.** *Кластерной шкалой* называется кортеж

$$\mathcal{F} = \langle W, \{R_{loc}^a\}_{a \in Ag}, R_g, \{C(i)\}_{i \in I} \rangle,$$

где $I \neq \emptyset$ — множество индексов кластеров; семейство непустых попарно непересекающихся множеств $\{C(i)\}_{i \in I}$ образует разбиение $W = \bigcup_{i \in I} C(i)$; каждое отношение $R_{loc}^a \subseteq \bigcup_{i \in I}(C(i) \times C(i))$ рефлексивно и транзитивно на каждом $C(i)$; глобальное отношение $R_g \subseteq I \times I$ рефлексивно. На каждом $C(i)$ задано отношение общей достижимости $R_{loc}^C = (\bigcup_{a \in Ag} R_{loc}^a)^*$ как рефлексивно-транзитивное замыкание объединения локальных отношений всех агентов.

На модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ для мира $w \in C(i)$ истинность булевых связок и модальностей $\Box_l^a$ определяется стандартно внутри $C(i)$, а для новых операторов полагаем:

$$(\mathcal{M}, w) \Vdash C\varphi \iff \forall v \in C(i)\, (w R_{loc}^C v \Rightarrow (\mathcal{M}, v) \Vdash \varphi),$$
$$(\mathcal{M}, w) \Vdash \Box_F \varphi \iff \forall j \in I\, (i R_g j \Rightarrow C(j) \Vdash \varphi),$$
$$(\mathcal{M}, w) \Vdash \Box_P \varphi \iff \forall j \in I\, (j R_g i \Rightarrow C(j) \Vdash \varphi),$$

где $C(j) \Vdash \varphi$ означает $\forall v \in C(j)\, (\mathcal{M}, v) \Vdash \varphi$, а $C(j) \triangleright \varphi$ означает $\exists v \in C(j)\, (\mathcal{M}, v) \Vdash \varphi$.

Пусть формула $\varphi$ выполнима в модели $\mathcal{M}$. Положим фильтрационное множество $\Gamma$ равным замыканию $Sub(\varphi)$ относительно правила: $C\chi \in Sub(\varphi) \Rightarrow \Box_l^a C\chi \in \Gamma\ (\forall a \in Ag)$. Для $w \in C(i)$ полагаем $tp^i(w) = \{\psi \in \Gamma \mid (\mathcal{M}, w) \Vdash \psi\}$ и $\widehat{C}(i) = \{tp^i(w) \mid w \in C(i)\}$. Локальные отношения $\widehat{R}_{loc}^a$ на $\widehat{C}(i)$ задаются правилом:

$$\tau \widehat{R}_{loc}^a \tau' \iff \forall \Box_l^a \chi \in \Gamma\, (\Box_l^a \chi \in \tau \Rightarrow \{\chi, \Box_l^a \chi\} \subseteq \tau')\ \&$$
$$\forall C\chi \in \Gamma\, (C\chi \in \tau \Rightarrow \{\chi, C\chi\} \subseteq \tau'),$$

и $\widehat{R}_{loc}^C = (\bigcup_{a \in Ag} \widehat{R}_{loc}^a)^*$. Профилем кластера $C(i)$ назовём тройку

$$\pi(i) = \langle \widehat{C}(i), Sat_\Gamma(i), All_\Gamma(i) \rangle,$$

где $Sat_\Gamma(i) = \{\psi \in \Gamma \mid C(i) \triangleright \psi\}$, $All_\Gamma(i) = \{\psi \in \Gamma \mid C(i) \Vdash \psi\}$. Факторизуя $I$ по отношению $i \sim j \iff \pi(i) = \pi(j)$, получаем конечное множество $I^* = I/\!\sim$. Глобальное

отношение $R_g^*$ на $I^*$ в рефлексивном случае задаётся двусторонним условием:

$$[i]R_g^*[j] \iff \forall \Box_F\psi \in \Gamma\,(\Box_F\psi \in All_\Gamma(i) \Rightarrow \psi \in All_\Gamma(j)) \;\&\; \forall \Box_P\psi \in \Gamma\,(\Box_P\psi \in All_\Gamma(j) \Rightarrow \psi \in All_\Gamma(i)),$$

а в рефлексивно-транзитивном случае правые части импликаций усиливаются до $\{\psi, \Box_F\psi\} \subseteq All_\Gamma(j)$ и $\{\psi, \Box_P\psi\} \subseteq All_\Gamma(i)$ соответственно.

**Теорема.** *Всякая формула языка $\mathcal{L}_{Ag}^{C,FP}$, выполнимая в кластерной модели с рефлексивным (рефлексивным и транзитивным) глобальным отношением $R_g$, выполнима в конечной кластерной модели того же класса мощности не выше $2^m \cdot 2^{2^m+2m}$, где $m = |\Gamma| \leqslant (|Ag|+1)\cdot|Sub(\varphi)|$. Следовательно, проблема выполнимости в обоих классах шкал алгоритмически разрешима.*

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).*

Литература

[1] Fagin R., Halpern J. Y., Moses Y., Vardi M. Y. *Reasoning about Knowledge.* — MIT Press, 1995.

[2] Рыбаков В. В. *Логики ветвящегося времени с многоагентными отношениями временной достижимости* // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 619–628.

[3] Петров К. А., Рыбаков В. В. *Бимодальная кластерная темпоральная логика: локальная фильтрация, стабилизация и разрешимость* // Журн. Сиб. федер. ун-та. Сер. Матем. и физ. 2026. Т. 19, № 3. С. 417–422.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* kiryushape7rov@yandex.ru, vrybakov@sfu-kras.ru

## Нормальные формы и их унификация в модальной логике $\mathbf{Alt_1}$

А. А. Поляков

Модальные логики активно исследуются с середины прошлого века. Важное место в исследованиях занимает теория унификации, основная задача которой: поиск такой подстановки, применение которой к формуле делает её теоремой в логике. При решении задачи унификации в модальных логиках широко применяется семантическая характеризация модальных логик, в частности — реляционная семантика Крипке [**1**].

Другим полезным инструментом при работе с модальными логиками выступают нормальные формы, описанные К. Файном в [**2**]. С их помощью были показаны полнота минимальной нормальной модальной логики $\mathbf{K}$ и некоторых её классических расширений. Поскольку любая модальная формула представима в виде дизъюнкции нормальных форм соответствующей модальной степени, задачи унифицируемости и неунифицируемости формул сводятся к таковым для нормальных форм.

В работе будет приведено классическое определение нормальных форм в нормальных модальных логиках, после чего будет определён класс нормальных форм, подходящих для работы в модальной логике $\mathbf{Alt_1}$. Помимо этого, будет сформулирован и доказан критерий унифицируемости нормальных форм в $\mathbf{Alt_1}$.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).*

Литература

[1] Башмаков, С. И., Поляков, А. А., Зверева, Т. Ю. *Кортежная семантика и проективная унификация линейной логики ступенчатого времени* // Сибирские электронные математические известия. — 2026. — т. 23, ч. 1. — стр. 697–706.

[2] Fine, K. *Normal Forms in Modal Logic* // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1975. — Vol. 16, no. 2. — P. 229–237.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* sasha.polyakov.03@mail.ru

## К вопросу об аксиоматизации логики $\mathbf{MLinML_N}$

Н. А. Проценко

В работе [**1**] была рассмотрена проблема разрешимости для логики $\mathbf{MLinML_N}$.

В недавнем докладе [**2**] мы развивали этот подход и исследовали проблему допустимости для невременного фрагмента этой логики.

Настоящий доклад посвящён другому аспекту — подходам к аксиоматизации этой логики. Обсуждаются принципы построения аксиоматической системы, отражающей взаимодействие модальных операторов и структуру допустимых треков. Формулируются отдельные аксиомы и синтаксические соглашения, позволяющие описывать рассуждения о знании и доступности треков. Основное внимание уделяется общим вопросам соответствия синтаксических и семантических характеристик логики.

*Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект №25-21-20011,* https://rscf.ru/project/25-21-20011/.

Литература

[1] Protsenko N. A., Rybakov V. V. *Multilinear multimodal logic with semi-reliable information operator*. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2025, vol. 22, No. 2, pp. 1154–1163. https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.071

[2] Проценко Н. А., Рыбаков В. В. *Исследование свойств и проблемы допустимости в мультилинейной модальной логике* // VI конференция математических центров России: тезисы докладов. Казань: Изд-во КФУ, 2026. С. 268.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* nikitaprotsenko2003@gmail.com

## О специальных базисах тождеств некоторых конечных решёток

А. Р. Углев

Классическая дуальность Биркгофа устанавливает дуальную эквивалентность между категорией дистрибутивных биалгебраических $(0,1)$-решёток (с полными $(0,1)$-гомоморфизмами) и категорией частично упорядоченных множеств. При переносе этой дуальности на недистрибутивные случаи, в частности, на многообразия, порождённые конкретными конечными решётками [**2, 3**], ключевую роль играет факт совпадения многообразия и квазимногообразия, порождённых данной решёткой.

Мы исследуем решётки, получаемые из булевых решёток $B_n$ добавлением нового элемента строго над одним из их коатомов. Поскольку для $n = 2$ такая конструкция даёт классический пентагон $N_5$, мы обозначаем полученные решётки через $N_{2^n+1}$ (по числу элементов). Дуальность для многообразия $\mathcal{V}(N_5)$ была построена в [**2**]. Мы делаем следующий шаг в этом направлении — переходим к изучению решёток $N_{2^n+1}$ для произвольного $n \geq 2$.

Основным результатом работы является нахождение специального конечного базиса тождеств для $N_{2^n+1}$, связанного со свойствами минимальных покрытий неразложимых элементов. В качестве следствия получаем результат о совпадении многообразия и квазимногообразия, порождённых $N_{2^n+1}$.

Отметим структурную особенность исследуемых решёток. Если в ранее изученных случаях (включая $N_5$ и $M_3$) порождающие решётки удовлетворяли тождеству 2-дистрибутивности ($\mathsf{D}_2$), введённому А. Хуном [**1**], то решётка $N_{2^n+1}$ удовлетворяет тождеству ($\mathsf{D}_n$), но не удовлетворяет тождеству ($\mathsf{D}_m$) ни для какого $m < n$. Таким образом, семейство $N_{2^n+1}$ предоставляет естественный полигон для изучения дуальностей в многообразиях с высшими уровнями $n$-дистрибутивности.

Кроме того, мы устанавливаем аналогичный результат для двойственной решётки $N^d_{2^n+1}$, то есть находим её специальный базис тождеств. Решётку $N^d_{2^n+1}$ можно описать, как получаемую из булевой решётки $B_n$ добавлением нового элемента строго под одним из атомов.

### Литература

[1] Huhn A. P., *Schwach distributive Verbände*, Acta Sci. Math., 33 (1972), 297–305.

[2] Дзёбяк В., Швидефски М. В., *Дуальность для биалгебраических решёток, принадлежащих многообразию (0, 1)-решёток, порождённому пентагоном*, Алгебра и логика, 2024, том 63, номер 2, 167–208.

[3] Izyurova A. E., Schwidefsky M. V., *A Duality for the Variety SP(M3)*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2025, Vol. 46, No. 12, pp. 6125–6142.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.uglev@g.nsu.ru

## Кондициональная логика первого порядка с лямбда-оператором

А. С. Шарапов

В данном докладе будет представлена разработанная автором в магистерской диссертации кондициональная логика первого порядка с $\lambda$-оператором $FC_\lambda$ [**1**].

***Язык $FC_\lambda$.*** Алфавит $FC_\lambda$ состоит из предикатов (в том числе $=$), переменных, индивидных констант, скобок и запятой, логических операторов $\{\wedge, \neg, \forall, \Box, >, \lambda\}$. Определим формулу $FC_\lambda$ следующим образом:

$$\varphi ::= P(x_1, \ldots, x_n) \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid (\varphi_1 > \varphi_2) \mid \Box\varphi \mid \forall x\varphi \mid \langle\lambda x.\varphi\rangle(c),$$

где $P$ — $n$-местный предикат, $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, $c$ — индивидная константа. Связанная переменная, замкнутая формула и подстановка определяются стандартным образом (с учетом того, что переменные также связываются $\lambda$-оператором).

**Семантика для $FC_\lambda$.** Пусть $S$ — некоторое множество. Расширенный язык $L^S_{FC_\lambda}$ получается добавлением к алфавиту множества дополнительных констант $\{k_s \mid s \in S\}$ и заменой "$P(x_1, \ldots, x_n)$"на "$P(t_1, \ldots, t_n)$"в определении формулы, где $t$ — переменная или дополнительная константа. Моделью $FC_\lambda$ является упорядоченная четверка

$$M = \langle W, D, R, I\rangle,$$

где $W$ — непустое множество (миров); $D$ — непустое множество (домен); $R$ — функция, которая каждой замкнутой формуле языка сопоставляет бинарное отношение на $W$; $I$ — функция такая, что выполняются следующие условия:

(1) для каждого мира $w \in W$ и каждого предиката $P^k_n$,
$$I(w, P^k_n) \subseteq D^k;$$

(2) для каждой индивидной константы $a$,
$$I(w, a) \in D;$$

(3) для каждой дополнительной константы $k_d \in L^D_{FC_\lambda}$,
$$I(k_d) = d;$$

(4) для всякого мира $w \in W$,
$$I(w, =) = \{\langle d, d\rangle \mid d \in D\}.$$

Пусть $c^D_k$ — метапеременная по дополнительным константам, $a$ — индивидная константа. Для краткости определим истинность замкнутой формулы для мира $w$ модели $M$ только для двух случаев:

(1) Если $\varphi = P^k_n(c^D_1, \ldots, c^D_k)$, где $P^k_n(c^D_1, \ldots, c^D_k)$ — атомарная замкнутая формула $L^D_{FC_\lambda}$, то
$$M, w \models P^k_n(c^D_1, \ldots, c^D_k) \Leftrightarrow \langle I(c^D_1), \ldots, I(c^D_k)\rangle \in I(w, P^k_n).$$

(2) Если $\varphi$ имеет вид $(\lambda x, A)(a)$, то
$$M, w \models (\lambda x, A)(a) \Leftrightarrow M, w \models A[k_{I(w,a)}/x].$$

Общезначимость и логическое следование определяются стандартным образом. Для $FC_\lambda$ описан натуральный вывод в стиле Фитча и доказаны теоремы о корректности и полноте [**1**].

### Литература

[1] Шарапов А. С. *Выразительные возможности кондициональных логик первого порядка с лямбда-оператором: магистерская диссертация по направлению подготовки: 47.04.01 – Философия* / Шарапов, Александр Сергеевич — Томск: [б.и.], 2026. https://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vital:26977

*Томский государственный университет, Томск (Россия)*
*E-mail: Sleeprex@yandex.ru*

## Пример J-логики без интерполяционного свойства

В. Ф. Юн

Рассматривается проблема интерполяции в расширениях минимальной логики **J**.

Говорим, что J-логика $L$ обладает *интерполяционным свойством Крейга* CIP [**1**], если она удовлетворяет условию: если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ (здесь списки $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

В [**2**] было найдено описание всех суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством Крейга CIP. Все позитивные логики со свойством CIP были описаны в [**3**], где было также начато изучение этого свойства в J-логиках.

Сама логика J и наиболее важные ее расширения обладают свойством CIP [**4**]. Проблема интерполяции полностью решена в классе стройных J-логик, включающем в себя суперинтуиционистские и негативные логики, [**5, 6, 7**]. Доказано, что существует лишь конечное число конечнослойных предгейтинговых логик со свойством CIP [**8**].

Однако проблема интерполяции над логикой J еще далека от своего решения.

Мы рассмотрим некоторое расширение минимальной логики, порожденное алгебрами специального вида $G_{0,1}$, $G_{3,1}$. Используя алгебраические методы из [**4, 9**], доказывается, что эта J-логика не обладает интерполяционным свойством Крейга.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0032).*

Литература

[1] Craig W. *Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory.* J. Symbolic Logic, 22 (1957), 269–285.

[2] Максимова Л.Л. *Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия.* Алгебра и логика, 16, № 6 (1977), 643–681.

[3] Максимова Л.Л. *Неявная определимость в позитивных логиках.* Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 65–93.

[4] Максимова Л.Л., Юн В.Ф. *Расширение минимальной логики и проблема интерполяции.* Сибирский мат. журнал. 59, no. 4 (2018), 863–878.

[5] Максимова Л.Л. *Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках.* Сибирский мат. журнал. 53, no. 5 (2012), 1048–1064.

[6] Максимова Л.Л. *Интерполяция и проективное свойство Бета в стройных логиках.* Алгебра и логика, 51, № 2 (2012), 244–275.

[7] Максимова Л.Л. *Проективное свойство Бета в стройных логиках.* Алгебра и логика, 52, № 2 (2013), 172–202.

[8] Максимова Л.Л., Юн В.Ф. *Проблема интерполяции в конечнослойных предгейтинговых логиках.* Алгебра и логика, 2019, 58, № 2, 210–228.

[9] Максимова Л.Л. *Метод доказательства интерполяции в расширениях минимальной логики.* Алгебра и логика, 46, № 5 (2007), 627–648.

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск*
*E-mail:* yun@math.nsc.ru

## On classes of semigroups of binary relations with conjunctive operations

D. A. Bredikhin

A binary operation on relations is called *conjunctive* if it can be defined using the formula $\varphi$ of the first-order predicate calculus (containing two free variables $z_0$, $z_1$ and two binary predicate symbols $r_1, r_2$) representing the conjunction of atoms [**1**]. Any conjunctive operation can be defined using two Boolean matrices $\{a_{ij}\}_{2\times 2}$ and $\{b_{ij}\}_{2\times 2}$, where $a_{ij} = 1$ (respectively, $b_{ij} = 1$) if and only if the atomic formula $r_1(z_i, z_j)$ (respectively, $r_2(z_i, z_j)$) appears in the formula $\varphi$, and also as the binary code $\alpha = a_{00}a_{01}a_{10}a_{11}b_{00}b_{01}b_{10}b_{11}$. The binary code uniquely defines the original operation, which will be denoted by $F_\alpha$.

A *partially ordered groupoid* is an algebraic system $(A, \cdot, \leq)$, where $(A, \cdot)$ is a groupoid, that is, an algebra with one binary operation, and $\leq$ is a partial order relation on $A$ that is compatible with multiplication, that is, $x \leq y$ implies $xz \leq yz$ and $zx \leq zy$. For given code $\alpha$, denote by $R^{\leq}\{F_\alpha\}$ the class of all partially ordered groupoids isomorphic to partially ordered by set-theoretic inclusion groupoids of relations with the operation $F_\alpha$.

Conjunctive operations can be grouped into clusters containing from 1 to 4 elements. The axiomatic properties of operations in the same cluster are either the same or dual to each other [**2**]. It follows that it is sufficient to formulate the results for only one operation from the cluster. It has been established that there are 23 clusters of conjunctive operations satisfying the associativity law. All classes $R^{\leq}\{F_\alpha\}$ generated by the operations from these clusters form quasi-varieties. Finite bases of quasi-identities for 18 of these classes were found in [**2**]. A result concerning three out of five of the remaining classes is given below.

**Theorem.** *For any $\alpha \in \{11011100, 11111100, 11111101\}$, a partially ordered semigroup $(A, \cdot, \leq)$ belongs to the class $R^{\leq}\{F_\alpha\}$ if and only if it satisfies the identities $x^2y = xy$, $x^2y^2 = y^2x^2$, $xy \leq y$, $xy \leq x$, the quasi-identity $x \leq y^2 \wedge x \leq zw \Rightarrow x \leq yw$, and for any natural $n$ the quasi-identity*

$$x \leq yz_1 \wedge x \leq yz_2 \wedge \cdots \wedge x \leq yz_n \wedge z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 \leq w \wedge x \leq w \Rightarrow x \leq yw.$$

Note that the question of whether this quasi-variety is finitely based remains open.

*Research is supported by RSF (project No. 25-21-00508).*

### References

[1] Bredikhin D. A., *On algebras of binary relations with conjunctive operations* // Algebra Universalis. 2021, v. 82, Article 39.

[2] Bredikhin D. A., Kvitka A. A., Tavaniuk M. R., *On associative conjunctive operations on binary relations* // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics 2026, v. 26, iss. 3, 323–334.

*Saratov State University (Russia)*
*E-mail:* bredikhin@mail.ru

## Composites of Central Extension for Weakly Mal'tsev Categories

A. Das

G. Janelidze and G. M. Kelly introduced the notions of a trivial extension, a central extension, and an adjunction between a Barr-exact category $\mathbf{C}$ and a Birkhoff subcategory $\mathbf{X}$ of $\mathbf{C}$. T. Janelidze introduced the notion of a relative homological category with respect to normal epimorphisms. T. Janelidze and Gray introduced the notion of a relative homological category with respect to regular epimorphisms.

We study relative homological categories arising from trivial and central extensions in a pointed Barr-exact regular weakly Mal'tsev category $\mathcal{C}$ with pullbacks and cokernels relative to a Birkhoff subcategory $\mathbf{X}$. In this setting, we prove the following two results.

(1) If $\mathbf{X}$ is weakly protomodular, then the class $\mathbf{E}$ of trivial extensions makes $(\mathcal{C}, \mathbf{E})$ a relative homological category.
(2) If $\mathbf{X}$ is weakly protomodular, then the class $\mathbf{E}$ of all finite composites of central extensions makes $(\mathcal{C}, \mathbf{E})$ a relative homological category.

We study an example of the category of left pseudocancellative unital magmas.

*Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* a.das@g.nsu.ru

## Recognizing of linearly orderable finite semigroups

R. A. Farakhutdinov

A finite semigroup $S = (S, \cdot)$ is called linearly orderable if there exists a linear order $\leq$, such that $x \leq y$ implies $x \cdot z \leq y \cdot z$ and $z \cdot x \leq z \cdot y$ for all $x, y, z \in S$, and right linearly orderable if only the second implication is required. We investigate the complexity of recognizing of these properties, when the semigroup $S$ is given by its Cayley table. We prove that both problems are NP-complete — Theorem 2 and Theorem 4.

**The problem RLO**: given an integer $n$ and an $n \times n$ matrix $M$ over $\{1, \ldots, n\}$, decide if $xy := M[x][y]$ is associative, and is the semigroup right linearly orderable.

**The problem LO**: given an integer $n$ and an $n \times n$ matrix $M$ over $\{1, \ldots, n\}$, decide if $xy := M[x][y]$ is associative, and is the semigroup linearly orderable.

Let $A = (X, S, \star)$ be a complete deterministic finite semiautomaton, where $X$ is the set of states, $S$ is the set of input signals, $\star$ is the transition function. The automaton $A$ is monotonic if there exists a linear order $\leq$ on the set of states $X$, such that if $x \leq y$, then $x \star s \leq y \star s$ for all $x, y \in X$ and $s \in S$. For the right linear orderability problem we build a reduction from **the problem MONOTONIC$_2$**: given an automaton $A$ with $k$ input signals, decide if $A$ is monotonic.

**Theorem 1** [**1**]. *The problem* MONOTONIC$_2$ *is* NP*-complete.*

**Theorem 2.** *The problem* **RLO** *is* NP*-complete.* NP*-hardness persists for semigroups of nilpotency degree 3.*

For the linear orderability problem we build a reduction from **the problem BETWEENNESS**: given a finite set $V$ and a list $T$ of ordered triples $(a, b, c)$ of pairwise distinct elements of $V$, decide if there is a linear order $<$ on $V$, such that $a < b < c$ or $c < b < a$ for every $(a, b, c) \in T$.

**Theorem 3** [**2**]. *The problem* **BETWEENNESS** *is* NP*-complete.*

**Theorem 4.** *The problem* **LO** *is* NP*-complete.* NP*-hardness persists for semigroups of nilpotency degree 3.*

### References

[1] Szykuła M., *Checking whether an automaton is monotonic is NP-complete*, in: International Conference on Implementation and Application of Automata (CIAA 2015), Lecture Notes in Computer Science, vol. 9223, Springer, Cham, 2015, pp. 283–295.

[2] Opatrný J., *Total ordering problem*, SIAM Journal on Computing, vol. 8, no. 1, pp. 111–114, 1979.

*Saratov State University, Saratov (Russia)*
*E-mail:* renatfara@mail.ru

# IV. Секция «Теория вычислимости»

## Вычислительная сложность вычислимых абелевых групп

П. Е. Алаев

Говоря о сложности алгоритмов, мы подразумеваем, что они выполняются на машине Тьюринга с конечным числом лент. Понятие линейного времени зависит от выбора конкретного вычислительного устройства.

Скажем, что абелева группа $\mathcal{A} = (A, +, -, 0)$ вычислима за линейное время, если $A \subseteq \Sigma^*$, где $\Sigma$ — конечный алфавит, и само множество $A$ и операции $+, -$ вычислимы за линейное время. Например, $x + y$ вычисляется за время $O(|x| + |y| + 1)$.

**Теорема.** *Пусть $\mathcal{A} = (A, +, -, 0)$ — вычислимая абелева группа. Тогда $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$, где $\mathcal{A}'$ — группа, вычислимая за линейное время.*

Поскольку длина результата работы алгоритма не может быть длиннее времени его работы, в построенной структуре $\mathcal{A}'$ выполняются оценки $|x + y| \leqslant c(|x| + |y| + 1)$ и $|-x| \leqslant c(|x| + 1)$, где $c$ — константа. Такую структуру можно назвать *структурой с линейным ростом*.

Если $\mathcal{A}$ не является периодической группой, то $\mathcal{A}'$ содержит все слова вида $\mathrm{bin}(k) * W$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $\mathrm{bin}(k)$ — стандартное бинарное представление числа $k$, а $W$ — некоторое фиксированное слово. В этом смысле $\mathcal{A}'$ можно назвать *линейно вычислимой структурой с плотным носителем*.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия); Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* alaev@math.nsc.ru

## Функции выбора неподвижной точки и их обобщения

Р. Р. Багавиев

В работе [**1**] М.М. Арсланов ввёл понятие *функции выбора неподвижной точки*, т.е. такой функции, которая по индексу тьюрингового функционала, отвечающего $A$-вычислимой функции $f$, возвращает неподвижную точку $f$.

**Определение** [**1**]. *Одноместная функция $\psi$ называется функцией выбора неподвижной точки (FP-функцией выбора*, англ. fixed point selection function) *для $A$*, если $\langle \nu e \rangle [f = \Phi_e^A \Rightarrow \Phi^A_{\psi(e)} \simeq \Phi^A_{f(\psi(e))}]$.

Одним из основных результатов работы [**1**] является следующая теорема.

**Теорема 1** [**1**]. *Вычислимо перечислимое (в.п.) множество $A$ имеет вычислимую FP-функцию выбора тогда и только тогда, когда $A$ вычислимо.*

В настоящей работе даются ответы на некоторые вопросы, поставленные в [**1**], в частности, теорема 1 обобщается на случаи $\eta$- и $\omega$-сводимостей. Кроме того, вводится обобщение понятия FP-функции выбора, при котором для $A$-вычислимой функции $f$ указывается конечное множество, содержащее неподвижную точку $f$.

**Определение.** *Одноместная функция $\psi$ называется $\omega$-FP-функцией выбора для $A$*, если $\langle \nu e \rangle [f = \Phi_e^A \Rightarrow (\exists z \in D_{\psi(e)})[\Phi_z \simeq \Phi_{f(z)}]]$. Если дополнительно выполнено $\langle \nu e \rangle [|D_{\psi(e)}| \leqslant k]$, мы будем говорить о $k$-FP-функции выбора.

Здесь $D_e$ обозначает конечное множество с номером $e$ в канонической нумерации всех конечных подмножеств натурального ряда.

В докладе будут рассмотрены множества и ассоциированные с ними $k$-FP- и $\omega$-FP-функции выбора, даны описания в.п. множеств, обладающих вычислимой $k$-FP-функцией выбора, и в.п. множеств, обладающих вычислимой $\omega$-FP-функцией выбора, а также приведены следствия из полученных описаний.

*Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект №24-11-00227) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение №075-02-2025-1725/1).*

### Литература

[1] Arslanov M. M. *Fixed-point Selection Functions.* Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**: 4 (2021), 685–692.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)*
*E-mail:* ramilbagaviev@mail.ru

## Универсальная и экзистенциальная определимость негативно представимых моделей

Р. Н. Дадажанов

Всюду далее под словом система, если не оговорено противное, будем понимать произвольную алгебраическую систему эффективной сигнатуры, т.е. язык предикатных и функциональных символов должен быть перечислимым **[1, 2]**. При этом, если $\Sigma = \langle F, P\rangle$, где $F, P$ списки функциональных (включая константные) и предикатных символов соответственно, то будем полагать, что $p_0 \in P$ — символ равенства.

**Определение 1.** *Нумерованная система* $(\mathfrak{M}, \mu)$ *называется вычислимой (позитивной, негативной) если множество* $\{(m, \bar{t}) \mid \mathfrak{M} \models p_m(\mu\bar{t}), p_m \in P\}$ *вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо).*

Для заданной нумерации $\mu$ системы $\mathfrak{M}$ стандартным $\mu$-обогащением системы $\mathfrak{M}$ будем называть систему $\mathfrak{M}_\mu$ сигнатуры $\Sigma \cup C$, где $C \cap \Sigma = \varnothing, C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ и интерпретацией символа $c_n$ является элемент $\mu(n)$ системы $\mathfrak{M}$. Через $T(F \cup C)$ будем обозначать множество всех замкнутых термов сигнатуры $\Sigma \cup C$ и запись $\bar{t} \in T(F \cup C)$ означает, что все замкнутые термы из списка $\bar{t}$ принадлежат $T(F \cup C)$.

Позитивной (негативной) диаграммой системы $\mathfrak{M}_\mu$ называется множество предложений $\{p(\bar{t}) \mid \mathfrak{M}_\mu \models p(\bar{t})\}$ (соответственно $\{\neg p(\bar{t}) \mid \mathfrak{M}_\mu \models \neg p(\bar{t})\}$), где $p(\bar{t})$ — атомарная формула без свободных переменных от замкнутых термов $\bar{t} \in T(F \cup C)$.

**Теорема 1.** *Для негативной системы* $(\mathfrak{M}, \mu)$ *сигнатуры* $\Sigma$ *следующие условия равносильны:*

1. *$\mu$ вычислима;*
2. *существует такое вычислимо перечислимое множество $\Phi$ универсальных предложений сигнатуры $\Sigma \cup C$, реализующееся в $\mathfrak{M}_\mu$, что для всякой $\Phi$-системы ее подсистема, порожденная константами изоморфна $\mathfrak{M}_\mu$.*

**Предложение 1.** *Если алгебраическая система имеет невычислимое негативное представление, то любое вычислимо перечислимое множество универсальных предложений, реализующееся в ней, реализуется и в некотором собственном гомоморфном прообразе этой системы.*

**Предложение 2.** *Существует экзистенциально определимая невычислимая негативная система.*

### Литература

[1] Ершов Ю.Л. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* М.: Наука, 1980.

[2] Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени.* Казань: Казанское математическое общество, 2000.

[3] Касымов Н.Х., Дадажанов Р.Н. *Негативные плотные линейные порядки* // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1306–1331.

*Университет общественной безопасности Республики Узбекистан, Ташкент (Узбекистан)*
*E-mail: dada_jono@mail.ru*

## Низкие линейные порядки, изоморфные вычислимым

М. В. Зубков

Порядок называется *низким*, если $L' \equiv_T \mathbf{0}'$. Давно известен вопрос Дж. Найт (1980-е): верно ли, что каждый низкий линейный порядок имеет вычислимую копию? Р. Дауни и М. Мозес [**1**] показали, что каждый низкий дискретный порядок имеет вычислимую копию, а К. Джокуш и Р. Соар [**2**] доказали, что к каждой непустой вычислимо перечислимой степени существует линейный порядок без вычислимой копии. В связи с этим Р. Дауни [**3**] поставил задачу описать свойства $P$ порядковых типов, гарантирующие, что всякий низкий порядок, обладающий свойством $P$, изоморфен вычислимому порядку.

Как уже отмечалось первым свойством такого рода была дискретность: Р. Дауни и М. Мозес доказали, что всякий низкий дискретный линейный порядок имеет вычислимую копию. Следующий шаг был сделан А. Н. Фроловым [**4**]: всякий низкий сильно $\eta$-сходный порядок имеет вычислимую копию. Позднее А. Н. Фролов [**5**] показал, что каждый низкий $k$-квазидискретный линейный порядок $\mathbf{0}''$-изоморфен вычислимому. В силу указанных выше включений этот результат покрывает все три перечисленных класса; более того, получена оценка сложности изоморфизма: для $k$-дискретных порядков изоморфизм может быть выбран $\mathbf{0}''$-вычислимым, а для сильно $\eta$-сходных — $\mathbf{0}'$-вычислимым. А. Н. Фролов и М. В. Зубков [**6**] показали, что если $L$ — низкий разрешимый линейный порядок и $Inf_c \in \Delta^0_2$, то $L$ имеет $\mathbf{0}''$-изоморфную вычислимую копию.

Возникает естественный вопрос: насколько сложным вообще может быть такой изоморфизм, в частности, является ли оценка $\mathbf{0}''$ универсальной для всех низких порядков, имеющих вычислимую копию?

**Теорема.** *Для любого $n \geqslant 1$ существует низкий линейный порядок $L$, имеющий вычислимую копию, такой, что некоторый вычислимый линейный порядок $L'$ $\Delta^0_{n+1}$-изоморфен $L$, но ни один вычислимый порядок не $\Delta^0_n$-изоморфен $L$.*

### Литература

[1] Downey R. G., Moses M. F. *On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orderings* // Math. Logic Quart. 1989. V. 35, 3. P. 237–246.
[2] Jockusch C. G., Soare R. I. *Degrees of orders not isomorphic to recursive linear orderings* // Ann. Pure Appl. Logic. 1991. V. 52, 1–2. P. 39–64.
[3] Downey R. G. *Computability theory and linear orderings* // Handbook of Recursive Mathematics. V. 2. Amsterdam: Elsevier, 1998. P. 823–976.
[4] Фролов А. Н. *Линейные порядки низкой степени* // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, 5. С. 1147–1162.
[5] Frolov A. N. *Low linear orderings* // J. Logic Comput. 2012. V. 22, 4. P. 745–754.
[6] Frolov A. N., Zubkov M. V. *Low scattered linear orders* // J. Logic Comput. 2025. V. 35, 2. Art. exae008.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)*
*E-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru*

## О нумерованной модели с перечислимым эффективно подпрямо неразложимым отношением

Н. Х. Касымов

Как обычно, для нумерованной модели $(M, \nu)$ подмножество $M_0 \subseteq M^k$ $(k \geqslant 1)$ называется $\nu$-вычислимым ($\nu$-перечислимым), если множество $\nu^{-1}M_0$ вычислимо (вычислимо перечислимо) (см. [**1**]). Далее, для краткости, будем опускать префикс $\nu$, а ядром нумерации $\nu$ назовем ее нумерационную эквивалентность.

Перечислимое подмножество $M_0 \subseteq M^k$ $(k \geqslant 1)$ нумерованной модели назовем *эффективно подпрямо разложимым*, если существует такое непустое подмножество $M_1$ множества $M_0$, которое разлагается в прямое произведение подходящих перечислимых множеств $N_1 \times \cdots \times N_k = M_1 \subseteq M_0$. В противном случае подмножество $M_0$ назовем *эффективно подпрямо неразложимым*. Легко показать, что всякое вычислимое отношение любой нумерованной модели имеет подмножество, разлагающееся в прямое произведение подходящих вычислимых множеств, откуда следует непрерывность всякой операции (заданной действием подходящей вычислимой функции на $\nu$-номерах) любой нумерованной модели $(M, \nu)$ в топологии, порожденной базой вычислимых множеств [**2**]. Верно ли это для пространств, топология в которых порождена базой перечислимых множеств?

**Теорема 1.** *Существует нумерованная модель, в которой некоторое перечислимое бинарное отношение является эффективно подпрямо неразложимым.*

**Следствие 1.** *Существует нумерованная модель, в которой некоторая операция не является непрерывной в топологии, порожденной базой перечислимых множеств.*

**Предложение 1.** *Всякая нумерованная модель с отделимым ядром и отношением, все кортежи из $\nu$-головных которых имеют окрестности, выделяемые прямыми произведениями перечислимых множеств, не пересекающиеся с областью истинности данных отношений, аппроксимируется нумерованными моделями с эффективно отделимыми ядрами и негативными отношениями.*

**Следствие 2.** *Аналог критерия вычислимой отделимости нумерованной модели (а именно нумерованная модель вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется нумерованными моделями с негативными ядрами и разрешимыми отношениями) не имеет места для отделимых моделей (при замене негативности ядер аппроксимирующих нумерованных моделей на эффективную отделимость и разрешимости отношений в них на негативность).*

### Литература

[1] Ю. Л. Ершов, *Теория нумераций*, М.: Наука, 1977.

[2] Kasymov N. Kh., Dadazhanov R. N., Ibragimov F. N. *Separable Algorithmic Representations of Classical Systems and their Applications*, J. Math. Sci., 2024, 278, No. 3, 476–519.

*Национальный университет Узбекистана, Ташкент (Узбекистан)*
*E-mail:* nadim590@mail.ru

## Аксиоматизации арифметики Бюхи

К. А. Ковалёв

Мы исследуем арифметику Бюхи $\mathrm{BA}_k$, то есть, элементарную теорию структуры натуральных чисел со сложением и функцией $V_k$, отображающей ненулевое число $x$ в наибольшую степень $k$, делящую $x$. Известно, что произвольная структура является автоматной тогда и только тогда, когда она интерпретируема в $\mathrm{BA}_k$ [**1**]; в частности, $\mathrm{BA}_k$ разрешима. Однако, до сих пор не было найдено ее естественной аксиоматизации. В нашей предыдущей работе [**4**] мы установили некоторую аксиоматизацию арифметики Бюхи, основанную на ограничении размера свидетелей формул, начинающихся с квантора $\exists$. В этой работе мы предлагаем более естественную аксиоматизацию этой теории, основанную на схеме аксиом свертки, ограниченной на $\Delta_0$-формулы, при интерпретации натуральных чисел как конечных множеств степеней $k$ с помощью $k$-ичных разложений. Доказательство полноты нашей аксиоматизации основано на формализации теоремы Бюхи–Брюэра [**2, 3**] об эквивалентности определимости в арифметике Бюхи и распознаваемости конечными автоматами.

### Литература

[1] Blumensath, A., Grädel, E.: *Finite Presentations of Infinite Structures: Automata and Interpretations*. Theory of Computing Systems **37**(6), 641–674 (2004).

[2] Büchi, J. R.: *Weak Second-Order Arithmetic and Finite Automata*. Mathematical Logic Quarterly **6**(1–6), 66–92 (1960).

[3] Bruyère, V., Hansel, G., Michaux, C., Villernaire, R.: *Logic and p-recognizable sets of integers*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin **1**(2), 191–238 (1994).

[4] Ковалёв, К.: *Об аксиоматизации арифметики Бюхи*. Труды МФТИ **17**(2(66)), 42–49 (2025).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва (Россия)*
*E-mail:* kovalyov.ka@mi-ras.ru

## Пунктуальные и $P$-вычислимые представления колец и алгебр

J. O. Ruzimov

В теории вычислимых структур естественно возникает вопрос о сохранении различных уровней эффективной представимости при стандартных алгебраических конструкциях. Наряду с примитивно-рекурсивными структурами рассматриваются пунктуальные структуры, носителем которых является $\mathbb{N}$, а основные операции и отношения примитивно-рекурсивны, а также $P$-вычислимые структуры. Теория пунктуальных представлений систематически развивалась в [**2**], а теория $P$-вычислимых алгебраических структур — в [**3**].

В работе рассматриваются три класса алгебраических конструкций.

Первый класс — кольца частных коммутативных областей целостности. В коммутативной области целостности (без делителя нуля) условие Ope выполняется автоматически. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования примитивно-рекурсивных, пунктуальных и $P$-вычислимых представлений кольца частных.

Второй класс — кольца многочленов $R[x]$ и $R[x_1, \ldots, x_n]$. Их элементы кодируются конечными последовательностями коэффициентов и показателей степеней, что позволяет исследовать сохранение пунктуальной и $P$-вычислимой представимости. Для случая одной переменной соответствующие результаты получены в [**1**].

Третий класс — групповые кольца $RG$, где $R$ — коммутативное кольцо, а $G$ — абелева группа. Эффективное кодирование кольца поддержки и коэффициентов позволяет исследовать условия существования примитивно-рекурсивных и пунктуальных представлений групповых колец и групповых алгебр.

Таким образом, в работе предложен единый подход к исследованию сохранения эффективной представимости при стандартных алгебраических конструкциях для колец частных, колец многочленов и групповых колец.

### Литература

[1] Ruzimov J. *On punctual and polynomial-time computable presentations of the polynomial ring* // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. 2026. Vol. 131, No. 3. DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS131320265.

[2] Kalimullin I., Melnikov A., Ng K. M. *Algebraic structures computable without delay* // Theoretical Computer Science. 2017. Vol. 674. P. 73–98.

[3] Alaev P. E. *Description of Structures Computable in Polynomial Time* // Annals of Pure and Applied Logic. 2026. Vol. 206. Article 103636. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apal.2025.103636.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: z.ruzimov@g.nsu.ru*

**Семейства особых элементов полных нумераций**

М. Х. Файзрахманов

В докладе будут изложены результаты о семействах особых элементов полных и $e$-полных обобщенно вычислимых нумераций семейств арифметических множеств.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)*
*E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com*

## Сложность изоморфизмов относительно регулярных булевых алгебр

И. Н. Шиманогов, М. Н. Вялый

Важным классом алгоритмических задач является проверка существования в фиксированном языке слова, удовлетворяющего некоторому регулярному условию. Формальная постановка следующая: язык $\mathrm{DRR}_L = \{\langle A\rangle \mid L \cap \mathcal{L}(A) \neq 0\}$ назовем задачей регулярной реализуемости для языка $L$. Также можно рассмотреть и задачу бесконечной регулярной реализуемости для языка $L$: $\mathrm{DRR}_L^\infty = \{\langle A\rangle \mid L \cap \mathcal{L}(A) = \infty\}$.

В данной статье мы работаем со следующим алгебраическим обобщением задачи регулярной реализуемости. По любому языку $L$ можно построить относительно регулярную булеву алгебру $\mathrm{REG}_L = \{R \cap L \mid R \in \mathrm{REG}\}$ с операциями объединения, пересечения и дополнения до $L$. Класс алгебр такого вида весьма широк: для любой счётной атомной булевой алгебры существует изоморфная ей относительно регулярная алгебра [**1**]. Таким образом задача регулярной реализуемости является задачей проверки того, что данный элемент алгебры (регулярный язык) не лежит в ядре гомоморфизма $\varphi(R) = R \cap L$ из REG в $\mathrm{REG}_L$.

В данном докладе речь идет про случай, когда $\mathrm{REG}_L \cong \mathrm{REG}$. Оказывается, существует сколько угодно сложные языки с таким свойством, но достаточно простые языки, всегда им обладают. В статье [**3**] доказано, что если $\mathrm{REG}_L \cong \mathrm{REG}$, то для вычислимости изоморфизма достаточно разрешимости задач $\mathrm{DRR}_L$ и $\mathrm{DRR}_L^\infty$, а для вычислимости изоморфизма их фактором Фреге достаточно разрешимости только задачи $\mathrm{DRR}_L^\infty$. В данной работе показывается, что с точки зрения вычислительной сложности данные ситуации принципиально различны.

**Теорема 1.** *Пусть $L$ — такой язык, что $\mathrm{REG}_L \cong \mathrm{REG}$ и $\mathrm{DRR}_L^\infty \in \mathrm{P}$. Тогда существует вычислимый изоморфизм $f_L$ из фактора по идеалу Фреге $\mathrm{REG}_L$ в фактор по идеалу Фреге* REG*, такой, что его сложность не зависит от языка $L$.*

**Теорема 2.** *Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — монотонно возрастающая функция, для которой $C_f = \{\langle 1^k\rangle \mid f(k) \leqslant n\} \in \mathrm{P}$. Тогда существует такой язык $L$, что $\mathrm{DRR}_L \in \mathrm{P}, \mathrm{DRR}_L^\infty \in \mathrm{P}, \mathrm{REG}_L \cong \mathrm{REG}$ и любой вычислимый изоморфизм из $\mathrm{REG}_L$ в* REG *имеет сложность не меньше времени $\Omega(f(n))$.*

Под условия теоремы 2 попадет, например, функция Аккермана.

### Литература

[1] Шиманогов И. Н., Вялый М. Н. *Классификация относительно регулярных алгебр* // Труды МФТИ. 2024. № 4 (64).

[2] Шиманогов И. Н., Вялый М. Н. *Задачи бесконечной регулярной реализуемости* // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2025. № 4 (32).

[3] Шиманогов И. Н., Вялый М. Н. *Вычислимые изоморфизмы относительно регулярных булевых алгебр* // Сибирский математический журнал. 2026. № 5 (67).

*Московский физико-технический институт, Москва (Россия)*
*E-mail:* shimanogov.in@phystech.edu

### Точные пары для арифметических идеалов полурешеток Роджерса

З. К. Щедрикова

В докладе будет рассмотрен вопрос о существовании точных пар для идеалов полурешеток Роджерса (верхних полурешеток вычислимых нумераций) семейств рекурсивно перечислимых множеств и частично рекурсивных функций.

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань (Россия)*
*E-mail: zlata.shchedrikova@yandex.ru*

## Notes on maximal sets and $Q_1$-reducibility

I. O. Chitaia, R. Sh. Omanadze

According to Rogers [**?**, ]p. 159]rogers1967, the notion of $Q$-reducibility was introduced by Tennenbaum: a set $A$ is $Q$-reducible to a set $B$ (denoted by $A \leqslant_Q B$) if there exists a computable function $f$ such that for every $x \in \omega$ (where $\omega$ denotes the set of natural numbers),

$$x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B.$$

In this case, we say that $f$ $Q$-reduces $A$ to $B$, or $A \leqslant_Q B$ via $f$.

If $A \leqslant_Q B$ via $f$ and for all $x \neq y$,

$$W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \varnothing,$$

then we say that $Q_1$-reducibility holds, denoted by $A \leqslant_{Q_1} B$. Being reflexive and transitive, these notions generate corresponding degree structures. Even though $Q$-reducibility has been widely examined and numerous important properties identified, our knowledge of $Q_1$-reducibility is still quite limited. In [**1**], some interesting connections between $Q_1$-reducibility and maximal sets are presented. Recall that a *c.e. set* $M$ is called *maximal* if there is no c.e. set $W$ such that both $W \cap \overline{M}$ and $\overline{W} \cap \overline{M}$ are infinite.

Our notation and terminology are standard and can be found, for example, in [**2, 3**].

In this talk, we will present the following results.

**Theorem 1.** *The $Q_1$-degree of a maximal set is not the least upper bound of any pair of incomparable $Q_1$-degrees.*

**Theorem 2.** *No pair of incomparable $Q_1$-degrees of maximal sets has the least upper bound in the $Q_1$-reducibility ordering.*

*Acknowledgment: Omanadze's work was partially supported by Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (SRNSFG) [grant number: FR-25-19092. Komori type epistemic MV-algebras with constants].*

### References

[1] R. Sh. Omanadze and I. O. Chitaia. *Some properties of maximal sets.* Log. J. IGPL, **23**(4):628–639, 2015.

[2] H. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* MIT Press, 1967.

[3] R. I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets.* Springer Science & Business Media, 1999.

*I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi (Georgia)*
*E-mail: irakl.chitaia@tsu.ge*

*I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi (Georgia)*
*E-mail: roland.omanadze@tsu.ge*

## The problem of ∀-representability for sentences

N. T. Kogabaev

Let $\sigma$ be an at most countable signature admitting an effective Gödel numbering $\gamma$ of all formulas of the signature $\sigma$. The *problem of ∀-representability for sentences* is the following set of natural numbers

$$E_\forall(\sigma) = \{\gamma(\Phi) \mid \Phi \text{ is a sentence of the signature } \sigma \text{ and there exists a } \forall\text{-sentence } \Psi \text{ of the signature } \sigma \text{ such that } \Phi \equiv \Psi\}.$$

We are interested in the algorithmic complexity of the set $E_\forall(\sigma)$. The calculation of the complexity of $E_\forall(\sigma)$ can be divided into the following cases:

(1) $\sigma$ contains at least one predicate or function symbol of arity $k \geqslant 2$;
(2) $\sigma$ contains only unary predicate symbols;
(3) $\sigma$ contains at least two unary function symbols;
(4) $\sigma$ consists of one unary function symbol and arbitrarily many unary predicate symbols.

In my previous talk at "Mal'tsev meeting" **[1]**, it was proved that in cases 1 and 3 the set $E_\forall(\sigma)$ is *creative*, i.e., $m$-complete $\Sigma^0_1$. In case 2, it was established that $E_\forall(\sigma)$ is computable. In case 4, the question on exact complexity estimate for $E_\forall(\sigma)$ remained open.

In the present talk, we prove that in case 4 the set of ∀-representable sentences is definable in the monadic second-order theory S$\omega$S of the structure of $\omega$ successor functions. Since the theory S$\omega$S is decidable, it follows that in case 4 the set $E_\forall(\sigma)$ is computable.

### References

[1] N.T. Kogabaev, *Complexity of the problem of ∀-representability for sentences*, International Conference "Mal'tsev Meeting", November 11–15, 2024, Collection of Abstracts, p. 151.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* kogabaev@math.nsc.ru

## Numbered diagrams of projective limits

A. V. Seliverstov

Let us consider finite signatures. A diagram is a labeled directed graph so that vertices are assigned algebraic structures and arcs are assigned homomorphisms, i. e., the diagram is a covariant functor to a category of algebraic structures [**1**]. Let us assume that each structure is finite and serves as the domain of only a finite set of homomorphisms in the diagram. This set may be empty. Different diagrams may have the same projective limit.

A diagram numbering is a set of three numberings: a numbering of the diagram structures, a numbering of the diagram homomorphisms, and a continuous numbering of all elements from all structures. Elements of different structures have different numbers. Any homomorphism connects exactly two structures.

The elements of the projective limit, which may be uncountable, are not numbered, but only the elements of the structures in the diagram. However, calculations over such structures allow for efficient approximation of elements of the projective limit.

Any number is identified with its binary notation. One can define the concept of polynomial-time computability of a numbered diagram as well as some polynomial-time reducibility of one numbering to another. The polynomial-time reducibility is based on a subdiagram so that its projective limit is isomorphic to the projective limit of the original diagram. However, the support of this subdiagram may have high computational complexity. Next, there is an equivalence relation on such numberings. Previously, the author considered examples of diagrams in which all structures consist of closed terms [**2**], but this assumption is excessive. In the general case, a minor refinement is needed. There are diagrams so that only one equivalence class exists. Such diagrams are called polynomial-time computably categorical.

Let an algebraic structure $A$ be finite. Let a polynomial-time computable diagram with finite structures have the Cartesian power $\prod_{k=0}^{\infty} A$ as its projective limit. This diagram is polynomial-time computably categorical. On the other hand, there is a diagram so that different polynomial-time computable numberings are not equivalent to each other.

*The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for IITP RAS.*

### References

[1] I. Bucur & A. Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*, John Wiley & Sons Inc. (1968).

[2] A. V. Seliverstov, *Polynomial-time computable diagrams with finite rings*, Prikladnaya Diskretnaya Matematika, No. 73, 121–129 (2026).

*Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow (Russia)*
*E-mail: SLVSTV@iitp.ru*

**On the complexity of the theory of atomless finitely-additive probability spaces**

S. O. Speranski

Let $\mathsf{QPL}$ be the elementary language of probability spaces, which includes:

- *Boolean variables* $X$, $Y$, $Z$, ..., intended to range over events;
- *field variables* $x$, $y$, $z$, ..., intended to range over reals.

We write $\mathsf{QPL}^{\mathrm{e}}$ for the sublanguage of $\mathsf{QPL}$ obtained by excluding field variables. See also [**2**] for details. Take

$$\mathsf{T}_\star \;:=\; \text{the } \mathsf{QPL}\text{-theory of the class of all atomless probability spaces.}$$

It is known that $\mathsf{T}_\star$ is complete and algorithmically decidable. We shall discuss what happens when we pass to *weak* probability spaces, in which measures are required to be finitely-additive, but not necessarily countably-additive.

More precisely, given a weak space $\mathscr{P} = \langle \Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P} \rangle$, we say that $\mathscr{P}$ is:

- *atomless* if it satisfies the $\mathsf{QPL}^{\mathrm{e}}$-sentence
$$\forall X \, (\mu(X) \neq 0 \to \exists Y \, (0 < \mu(Y \cap X) < \mu(X)));$$
- *strongly continuous* if for each positive real number $\varepsilon$ there exists a partition $\{A_0, \ldots, A_n\}$ of $\Omega$ such that $\mathsf{P}(A_i) < \varepsilon$ for all $i \in \{0, \ldots, n\}$;
- *strongly atomless* if it satisfies the $\mathsf{QPL}$-sentence
$$\forall X \, \forall x \, (0 \leqslant x \leqslant \mu(X) \to \exists Y \, (\mu(Y \cap X) = x)).$$

For convenience, we introduce the following notation:

$$\mathcal{K}^\flat \;:=\; \text{the class of all atomless weak spaces;}$$
$$\mathcal{K}^\natural \;:=\; \text{the class of all strongly continuous weak spaces;}$$
$$\mathcal{K}^\sharp \;:=\; \text{the class of all strongly atomless weak spaces.}$$

Obviously, $\mathcal{K}^\flat$ includes $\mathcal{K}^\natural$, which in turn includes $\mathcal{K}^\sharp$; see Section 5.1 in [**1**] for more information. It is not hard to show that the $\mathsf{QPL}$-theory of $\mathcal{K}^\sharp$ coincides with $\mathsf{T}_\star$. At the same time, the $\mathsf{QPL}^{\mathrm{e}}$-theory of $\mathcal{K}^\natural$ turns out to be $\Pi^1_1$-hard, and the $\mathsf{QPL}$-theory of $\mathcal{K}^\natural$ is $\Pi^1_\infty$-hard; similarly for $\mathcal{K}^\flat$.

## References

[1] Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M. *Theory of Charges: A Study of Finitely Additive Measures.* Academic Press, 1983.

[2] Speranski S. O. *An 'elementary' perspective on reasoning about probability spaces.* Logic Journal of the IGPL **33**(2), jzae042, 2025.

*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow (Russia)*
*E-mail:* katze.tail@gmail.com

# V. Секция «Теория групп и ее приложения»

## Два вопроса В. Д. Мазурова об автоморфизмах периодических групп

В. С. Атабекян

Для фиксированного простого числа $p$ группа называется $p'$-группой, если порядки всех её элементов взаимно просты с $p$. Хорошо известно, что в конечной $p'$-группе автоморфизм порядка $p$ регулярен тогда и только тогда, когда он является расщепляющим автоморфизмом периода $p$ (см., например, [**1**]). В Коуровской тетради (см. [**2**, вопрос 17.71(b)]) В. Д. Мазуров сформулировал вопрос о том, совпадают ли эти два понятия для периодических $p'$-групп. Мы отвечаем на данный вопрос отрицательно, строя периодическую группу простого периода $q$, которая допускает регулярный автоморфизм порядка $p \neq q$, не являющийся расщепляющим.

Ещё один вопрос, поставленный В. Д. Мазуровым в Коуровской тетради ([**2**, вопрос 17.70]): *обязан ли автоморфизм простой степени $m$ бесконечной свободной группы Бернсайда $B(m, q)$ простого периода $q$, циклически переставляющий свободные порождающие, иметь неподвижную точку?*

Мы даём отрицательный ответ на этот вопрос для всех достаточно больших простых периодов $q$. Более того, мы доказываем чуть более сильный результат, в котором для $m \geq 3$ простота $m$ заменяется более слабым условием нечётности $m$.

*Данное исследование было проведено в соответствии с Положением о конкурсе НИОКР в рамках Программы развития РАУ № 26DP-07M.*

### Литература

[1] Khukhro, E.I.: *Nilpotent Groups and Their Automorphisms*. De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 8. Walter de Gruyter, Berlin–New York (1993).

[2] V. D. Mazurov, E. I. Khukhro (eds.), *The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, 17th ed., Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010.

*Российско-Армянский Университет, Ереван (Армения)*
*E-mail:* varujan@atabekyan.com

## О пересечениях $\pi$-холловых подгрупп в $D_\pi$-группах с цоколем $L_2(q)$

И. Н. Белоусов, В. И. Зенков

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Целью данной работы является описание пересечений $\pi$-холловых подгрупп в $D_\pi$-группах с цоколем $L_2(q)$, $q = p^n \geq 4$. Главные результаты статьи в случае, когда множество $\pi$ содержит число 2, подтверждают гипотезу 18.31 из «Коуровской тетради», которую будем называть гипотезой Вдовина—Ревина.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — $D_\pi$-группа, $\mathrm{Soc}(G) = L_2(q)$, $q = p^n \geq 4$, $H$ — $\pi$-холлова подгруппа в $G$, $1 \neq H \cap \mathrm{Soc}(G) \neq \mathrm{Soc}(G)$ и $2 \in \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *$H \cap H^x \cap H^y = 1$ для некоторых $x$ и $y$ в $G$;*
(b) *если $G = L_2(q)$, то $H \cap H^t = 1$ для некоторого элемента $t$ в $G$;*
(c) *если $G = PGL_2(q)$, то $H \cap H^u \neq 1$ для любого элемента $u$ в $G$ тогда и только тогда, когда $H = D_{2(q+1)}$, $q > 11$ и либо $q \equiv 7 \pmod{12}$, либо $q = 3^{2m+1}$, $m \geq 1$;*
(d) *если $G \cap PGL_2(q) \neq PGL_2(q)$, то $H \cap H^g = 1$ для некоторого $g$ в $G$;*
(e) *если $G > PGL_2(q)$, то одним из достаточных условий для $H \cap H^u \neq 1$ для любого $u$ в $G$ является выполнение пункта (c) для $H \cap PGL_2(q)$;*
(f) *$G = \mathrm{Aut}(L_2(q))$, $q \in \{7, 9\}$ и $H \in \mathrm{Syl}_2(G)$.*

Заметим, что теорема 1(a) подтверждает гипотезу Вдовина—Ревина в случае, когда $2 \in \pi$.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — $D_\pi$-группа, $\mathrm{Soc}(G) = L_2(q)$, $q = p^n \geq 4$, $H$ — $\pi$-холлова подгруппа в $G$, $1 \neq H \cap \mathrm{Soc}(G) \neq \mathrm{Soc}(G)$ и $2 \notin \pi$, $p \in \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *$H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$ для некоторых элементов $x, y$ и $z$ в $G$;*
(b) *$H \cap H^{x_1} \cap H^{y_1} \neq 1$ для любых элементов $x_1$ и $y_1$ в $G$ тогда и только тогда, когда группа полевых автоморфизмов $\langle f \rangle$ имеет неединичную $p$-часть и для некоторого $p$-элемента простого порядка $\langle f \rangle_p$ из $\langle f \rangle$ и $\langle f \rangle$-инвариантных подгрупп $U$ и $C$, где $B = U \leftthreetimes C$ — подгруппа Бореля, $U$ — унипотентная подгруппа и $C$ — подгруппа Картана, имеем $H \geq U \leftthreetimes ([C, \langle f \rangle_p] \leftthreetimes \langle f \rangle_p)$.*

Теорема 2(b) опровергает гипотезу Вдовина—Ревина.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — $D_\pi$-группа, $\mathrm{Soc}(G) = L_2(q)$, $q = p^n \geq 4$, $H$ — $\pi$-холлова подгруппа в $G$, $1 \neq H \cap \mathrm{Soc}(G) \neq \mathrm{Soc}(G)$ и $2, p \notin \pi$. Тогда $H \cap H^x = 1$ для некоторого элемента $x$ в $G$.*

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург (Россия)*
*E-mail: i_ belousov@mail.ru, v1i9z52@mail.ru*

## О многообразиях двумерных представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением

В. В. Беняш-Кривец

Пусть $G$ — конечно порожденная группа, $K$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Через $R_k(G)$ будем обозначать многообразие представлений группы $G$ в $GL_k(K)$, а через $X_k(G) = R_k(G)//GL_k(K)$ — соответствующее многообразие характеров (см. [**1**]). Рассмотрим группу $G = \langle a, b \mid [a^n, b^m] = 1\rangle$, $n \geq 1$, $m \geq 1$. Если $n = m = 1$, то имеем свободную абелеву группу $H = \langle a, b \mid [a, b] = 1\rangle$. Известно, что $R_k(H)$ — неприводимое рациональное многообразие размерности $k^2 + k$ [**2**]. Далее мы считаем, что $n \geq 2, m \geq 2$. В этом случае строение $R_k(H)$ иное. Наша цель — дать описание многообразий представлений и характеров $R_2(G)$, $X_2(G)$. Пусть $\varepsilon, \delta$ — примитивные корни из 1 степеней $n$ и $m$ соответственно. Рассмотрим морфизмы $\alpha : R_2(H) \to R_2(G)$, $\alpha_{i,j}, \beta_{s,t} : K^* \times GL_2(K)^2 \to R_2(G)$ и $\gamma_{i,j,s,t} : (K^*)^2 \times GL_2(K)^2 \to R_2(G)$, заданные следующими формулами:

$$\alpha(A, B) = (A, B),$$
$$\alpha_{i,j}(x, A, B) = \left(A \begin{pmatrix} \varepsilon^i x & 0 \\ 0 & \varepsilon^j x \end{pmatrix} A^{-1},\ B\right),$$
$$\beta_{s,t}(x, A, B) = \left(A,\ B \begin{pmatrix} \delta^s x & 0 \\ 0 & \delta^t x \end{pmatrix} B^{-1}\right),$$
$$\gamma_{i,j,s,t}(x, y, A, B) = \left(A \begin{pmatrix} \varepsilon^i x & 0 \\ 0 & \varepsilon^j x \end{pmatrix} A^{-1},\ B \begin{pmatrix} \delta^s y & 0 \\ 0 & \delta^t y \end{pmatrix} B^{-1}\right).$$

Здесь $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq s < t \leq m$. Положим $W = \overline{\operatorname{Im}\alpha}$, $V_{i,j} = \overline{\operatorname{Im}\alpha_{i,j}}$, $U_{s,t} = \overline{\operatorname{Im}\beta_{s,t}}$, $L_{i,j,s,t} = \overline{\operatorname{Im}\gamma_{i,j,s,t}}$. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Многообразия $W$, $V_{i,j}$, $U_{s,t}$, $L_{i,j,s,t}$ — все различные неприводимые компоненты $R_2(G)$. Каждая из них является рациональным многообразием, при этом $\dim W = \dim L_{i,j,s,t} = 6$, $\dim V_{i,j} = \dim U_{s,t} = 7$. Число неприводимых компонент равно $(C_n^2 + 1)(C_m^2 + 1)$. Если $n \geq 2$, $m = 1$, то компоненты $U_{s,t}$, $L_{i,j,s,t}$ в многообразии $R_2(G)$ отсутствуют и общее число компонент равно $C_n^2 + 1$.*

Пусть $\pi : R_2(G) \to X_2(G)$ — естественный морфизм факторизации.

**Теорема 2.** *Многообразия $\pi(W)$, $\pi(V_{i,j})$, $\pi(U_{s,t})$, $\pi(L_{i,j,s,t})$ — все различные неприводимые компоненты $R_2(G)$. Каждая из них является рациональным многообразием, при этом $\dim \pi(W) = \dim \pi(V_{i,j}) = \dim \pi(U_{s,t}) = 4$, $\dim \pi(L_{i,j,s,t}) = 3$. Число неприводимых компонент равно $(C_n^2 + 1)(C_m^2 + 1)$. Если $n \geq 2$, $m = 1$, то компоненты $\pi(U_{s,t})$, $\pi(L_{i,j,s,t})$ в многообразии $X_2(G)$ отсутствуют и общее число компонент равно $C_n^2 + 1$.*

### Литература

[1] A. Lubotzky, and A. Magid. *Varieties of representations of finitely generated groups.* Memoirs AMS. 58 (1985), 1–116.

[2] Benyash-Krivetz V.V., Rapinchuk A.S., Chernousov V.I. *Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces.* Israel J. Math., 1996, vol. 93, pp. 29–71.

*Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)*
*E-mail:* benyashvv@gmail.com

## Квандлы с вариациями тождества ассоциативности

А. Н. Бородин

*Квандл* **[2, 1]** — алгебраический инвариант узла, который определяет узел с точностью до изотопии и зеркального отражения.

*Квандл* **[2, 1]** — группоид $\mathcal{Q}(\circ)$, операция умножения «$\circ$» удовлетворяет аксиомам:

(Q1) Аксиома идемпотентности: $x \circ x = x$ для всех $x \in Q$.

(Q2) Аксиома правой обратимости: для любых $y, z \in Q$ существует единственный $x \in \mathcal{Q}$ такой, что $x \circ y = z$.

(Q3) Аксиома правой самодистрибутивности: для любых $x, y, z \in \mathcal{Q}$ выполняется $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

Фараго в работе **[3]** рассмотрел группоиды, в которых аксиома ассоциативности для группоида заменена на некоторый его вариант. Он показал, что можно составить 15 не эквивалентных между собой вариантов тождества ассоциативности (система Фараго):

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{A}_1)\ (ab)c = a(cb); & (\mathcal{A}_2)\ (ab)c = b(ac); & (\mathcal{A}_3)\ (ab)c = b(ca);\\
(\mathcal{A}_4)\ (ab)c = c(ab); & (\mathcal{A}_5)\ (ab)c = c(ba); & (\mathcal{A}_6)\ a(bc) = a(cb);\\
(\mathcal{A}_7)\ a(bc) = b(ac); & (\mathcal{A}_8)\ a(bc) = b(ca); & (\mathcal{A}_9)\ a(bc) = c(ab);\\
(\mathcal{A}_{10})\ \ a(bc) = c(ba); & (\mathcal{A}_{11})\ (ab)c = (ac)b; & (\mathcal{A}_{12})\ (ab)c = (ba)c;\\
(\mathcal{A}_{13})\ (ab)c = (bc)a; & (\mathcal{A}_{14})\ (ab)c = (ca)b; & (\mathcal{A}_{15})\ (ab)c = (cb)a.
\end{array}
$$

В работе исследуются квандлы с тождествами из системы Фараго.

Работа имеет следующую структуру:

В параграфе 1 даётся определение квандла и устанавливаются общие свойства для квандла с одним из тождеств системы Фараго.

В параграфе 2 рассматривается квандл сопряжения с одним из тождеств системы Фараго.

В параграфе 3 рассматривается сердцевинный квандл с одним из тождеств системы Фараго.

В параграфе 4 рассматривается квандл Госсу, или, по-другому, обобщенный квандл Александера с одним из тождеств системы Фараго.

### Литература

[1] С.В. Матвеев, *Дистрибутивные группоиды в теории узлов*, Матем. сб., Т. 119 (161), № 1(9) (1982) 78–88.

[2] D. Joyce, *A classifying invariant of knots: the knot quandle*. Journal of Pure and Applied Algebra, (1982) 37–65.

[3] Tibor Farago, *Contribution to the definition of group*, Publicationes Mathematicae Debrecen, Vol. 3, 1953.

*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск (Россия)*
*E-mail:* serajsova@yandex.ru

## Покрытия и частичные трансверсали латинских гиперкубов

С. О. Бородин

*Латинским гиперкубом* $L_n^d$ порядка $n$ размерности $d$ будем называть множество $n^d$ кортежей

$$(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \in \{0, \ldots, n-1\}^{d+1},$$

такое, что при фиксации любых $d$ координат оставшаяся определяется однозначно. Множества ячеек с фиксированным значением одной из $d+1$ координат будем называть *координатными классами*.

*Частичной трансверсалью* называется множество ячеек $T$, пересекающее каждый координатный класс не более чем по одной ячейке. *Дефицитом* называют величину $\delta = n - |T|$. *Покрытием* называется множество ячеек, имеющее непустое пересечение с каждым координатным классом. Через $C(L)$ обозначим минимальный размер покрытия, а через $\delta(L)$ — минимальный дефицит максимальной частичной трансверсали гиперкуба $L$.

**Теорема 1.** *Пусть $T$ — частичная трансверсаль латинского гиперкуба $L_n^d$ дефицита $\delta$. Тогда $T$ содержится в покрытии $C$ таком, что*

$$|C| \leq n + \left\lceil \frac{\delta}{d} \right\rceil.$$

Обратная оценка получается двойным подсчетом непредставленных значений координат.

**Теорема 2.** *Любое покрытие мощности $n + a$ латинского гиперкуба размерности $d$ содержит максимальную частичную трансверсаль дефицита не более $ad$.*

Из этих двух утверждений непосредственно получается точная связь двух инвариантов.

**Следствие.** *Для любого латинского гиперкуба $L_n^d$*

$$C(L) = n + \left\lceil \frac{\delta(L)}{d} \right\rceil.$$

Для изучения структуры малых покрытий вводится мультиграф конфликтов $\Gamma_C$: его вершины соответствуют ячейкам покрытия, а кратность ребра между двумя ячейками равна числу координатных классов, которым принадлежат обе ячейки.

**Теорема 3.** *Если $C$ — минимальное покрытие латинского гиперкуба $L_n^d$ мощности $n+1$, то сумма кратностей всех ребер мультиграфа $\Gamma_C$ равна $d+1$.*

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* s.borodin@g.nsu.ru

## Конструкции квандлов над группами, модулями и почти-кольцами

А. Н. Бородин, М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Квандл — это алгебраическая система $\langle Q; \circ, / \rangle$ с тождествами $(x \circ y)/y = (x/y) \circ y = x$, $x \circ x = x$, $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$; квандл *абелев*, если $(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ z) \circ (y \circ t)$.

**Квандлы Александера.** Обобщённый квандл Александера над группой $G$ с $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ задаётся одной из операций а) $y\varphi(y^{-1}x)$, б) $\varphi(xy^{-1})y$, в) $y\varphi(xy^{-1})$, г) $\varphi(y^{-1}x)y$. Типы квандлов в) и г) взаимно обратны. При помощи антиавтоморфизма $\iota\colon x \mapsto x^{-1}$ для квандла типа а) с автоморфизмом $\varphi$ можно построить изоморфный ему квандл типа б) с автоморфизмом $\iota\varphi\iota$. В итоге, по существу имеется только два типа независимых квандлов.

**Произведение с подкручиванием.** Пусть $x \circ_i y = y\varphi_i(y^{-1}x)$ — квандлы Александера над $G$ и $H$ $(i = 1, 2)$, $f\colon G \to Z(H)$ — гомоморфизм, $\varphi_2|_{Z(H)} = \mathrm{id}$.

**Теорема 1.** *Операция* $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = \big(x_1 \circ_1 y_1,\ f(y_1^{-1}x_1)\,(x_2 \circ_2 y_2)\big)$ *задаёт квандл на* $G \times H$.

Как и в полупрямом произведении групп, первая квандловая компонента независима и «подкручивает» вторую квандловую операцию.

**Модули. Теорема 2.** *Если* $M$ *— модуль над коммутативным кольцом* $R$, $f\colon M \times M \to R$ *— билинейная форма и* $f(x, x) = 0$, *то* $x \circ y = x + f(x, y)y$, $x/y = x - f(x, y)y$ *задают квандл на* $M$ (для свободных модулей см. [**1**]).

**Почти-кольца.** В правом почти-кольце $\langle R; +, \cdot \rangle$ справедливо тождество $(x+y)z = xz + yz$ (группа $\langle R; + \rangle$ может быть некоммутативной). Рассмотрим множество $R^* \subset R \setminus \{0\}$ с групповой по умножению операцией.

**Теорема 3.** *Для* $a \in R^*$ *операции* $x \circ y = a(x - y) + y$, $x/y = a^{-1}(x - y) + y$ *задают квандл на* $R \iff a\big(a(u - t) + t\big) = a(au - at) + at$ *для всех* $u, t \in R$.

Пример: $\mathbb{R}^3$ с $x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)$, $x \odot y = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, x_1y_3 + x_2(1 - y_1) + x_3y_1)$ и $a = (a_1, 0, a_3)$, $a_1 \neq 0$. Левая дистрибутивность нарушена, но условие теоремы 3 выполнено; квандл абелев.

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2026-0029).*

Литература

[1] А.А. Симонов, М.В. Нещадим, А.Н. Бородин. *Конструкции квандлов над группами и кольцами.* Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.

*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск (Россия)*
*E-mail:* serajsova@yandex.ru

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* neshch@math.nsc.ru

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.simonov@g.nsu.ru

## Независимость аксиом квандла

А. Н. Бородин, М. В. Нещадим, А. А. Симонов

В работе [**1**] показано, что все четыре аксиомы из ниже приведенного определения квандла существенны.

Квандлом называют алгебраическую систему $\langle Q; \circ, / \rangle$, с двумя бинарными операциями $Q \times Q \to Q$, $(x, y) \mapsto x \circ y \in Q$, $(x, y) \mapsto x/y \in Q$, $x, y \in Q$, удовлетворяющую следующим аксиомам для произвольных $x, y, z \in Q$:

(1) идемпотентности: $x \circ x = x$;
(2) правой дистрибутивности: $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$;
(3) разрешимости 1 (правое сокращение): $(x \circ y)/y = x$;
(4) разрешимости 2 (восстановление аргумента): $(x/y) \circ y = x$.

Аксиомы 3 и 4 называются аксиомами разрешимости, так как они обеспечивают однозначную разрешимость уравнений $x \circ y = z$ и $x/y = z$ соответственно.

В частности, в работе доказана следующая теорема:

**Теорема.** *Алгебраическая система, удовлетворяющая всем аксиомам квандла за исключением разрешимости 1 либо 2, может быть построена только над бесконечным множеством.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2026-0029).*

Литература

[1] A.N. Borodin, M.V. Neshchadim, and A.A. Simonov. *Independence of Quandle Axioms.* Algebra and Logic. 2026. V.64. N 5. pp. 311–320. DOI: 10.1007/s10469-026-09836-2

*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск (Россия)*
*E-mail:* serajsova@yandex.ru

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* neshch@math.nsc.ru

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.simonov@g.nsu.ru

## Мощности решеток квазимногообразий 3-ступенно нильпотентных групп

А. И. Будкин

В процессе развития теории квазимногообразий достаточно быстро стало известно, что решётки квазимногообразий часто имеют непростое строение. В данной работе устанавливается континуальность ряда решёток квазимногообразий нильпотентных групп без кручения ступени не более трёх.

В работе используются следующие обозначения:

$\mathcal{N}_3$ — многообразие нильпотентных групп ступени не выше 3;

$F_2(\mathcal{N}_3)$ — свободная в $\mathcal{N}_3$ группа ранга 2;

$qG$ — квазимногообразие, порождённое группой $G$;

$[qF_2(\mathcal{N}_3), \mathcal{M}]$ — это множество квазимногообразий $\mathcal{R}$ таких, что $qF_2(\mathcal{N}_3) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$.

**Теорема 1.** *Пусть группа $G$ имеет в $\mathcal{N}_3$ представление*

$$G = \langle x, y, z; [y, x, x] = 1, [y, x, y] = 1 \rangle.$$

*Тогда интервал $[qF_2(\mathcal{N}_3), qG]$ в решётке квазимногообразий групп континуален.*

**Теорема 2.** *Пусть 3-ступенно нильпотентная группа $H$ без кручения содержит 2-ступенно нильпотентную подгруппу $R$, коммутант которой не содержится в центре $H$. Тогда интервал $[qF_2(\mathcal{N}_3), qH]$ в решётке квазимногообразий групп континуален.*

*Алтайский госуниверситет, Барнаул (Россия)*
*E-mail:* budkin@math.asu.ru

## Нетеровость по уравнениям для нильпотентных групп

И. М. Бучинский

Напомним некоторые основные понятия алгебраической геометрии над группами [**1**]. Пусть $G$ — произвольная группа. Под уравнением от переменных $X$ с константами из $G$ (так называемый диофантов случай) мы будем иметь в виду слово в группе $F(X) * G$, где $F(X)$ — свободная группа с базисом $X$. Две системы уравнений над $G$ называются эквивалентными, если их алгебраические множества совпадают. Группа $G$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного $n$ любая система уравнений $S(X)$ над $G$ от $n$ переменных $X$ эквивалентна над $G$ своей некоторой конечной подсистеме $S_0(X) \subseteq S(X)$. Аналогичным образом вводятся понятия группы, нётеровой по уравнениям от одной переменной, и группы, нётеровой по совместным системам уравнений.

Нётеровость по уравнениям (или, следуя [**2**], геометрическая нётеровость) является важным свойством для универсальной алгебраической геометрии [**3, 4**].

Следующие основные результаты будут представлены в докладе:

(1) описание всех нётеровых по уравнениям двуступенно нильпотентных частично коммутативных (графовых, RAAG) групп [**5**];
(2) нётеровость по уравнениям от одной переменной двуступенно нильпотентной группы эквивалентна выполнимости свойства min-c в ней [**6**];
(3) нётеровость по уравнениям двуступенно нильпотентной группы эквивалентна её нётеровости по совместным системам уравнений (для случая одной переменной см. [**6**]).

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2026-0033.*

### Литература

[1] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory*, Journal of Algebra, **219**, 1999, No. 1, pp. 16–79.
[2] B. I. Plotkin, *Algebras with the Same (Algebraic) Geometry*, Proc. Steklov Inst. Math., **242**, 2003, pp. 176–207.
[3] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами*, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016, 243 с.
[4] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Unification theorems in algebraic geometry*, Aspects of infinite groups. A Festschrift in honor of Anthony Gaglione. World Scientific: Hackensack, 2008, pp. 80–111.
[5] И. М. Бучинский, *О связи уравнений над частично коммутативными двуступенно нильпотентными группами с уравнениями над графами*, Сиб. электрон. матем. изв., **22**, 2025, № 2, с. 961–988.
[6] И. М. Бучинский, Н. С. Романовский, *Нетеровость по уравнениям от одной переменной двуступенно нильпотентных групп и цепочки централизаторов*, принята к публикации в Сибирском математическом журнале, 10 с.

*Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск (Россия)*
*E-mail:* buchvan@mail.ru

## MDS-коды с 2-транзитивной группой подстановочных автоморфизмов

А. В. Васильев

Пусть $C$ — $[n,k]_q$ MDS-код (линейный код над полем $\mathbb{F}_q$ с параметрами $n$, $k$ и $d = n-k+1$, т. е. код с максимальной достижимой разделимостью). В докладе речь пойдет о MDS-кодах, допускающих 2-транзитивную подстановочную группу автоморфизмов. Мы покажем, что при $4 \le k \le q-3$ для таких кодов выполняется неравенство $n \le q+1$, т. е. для них верна известная MDS-гипотеза. Доклад основан на совместной работе [**1**] с китайскими математиками Хайхуа Денгом и Тао Фенгом.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0017).*

Литература

Литература

[1] H. Deng, T. Feng, A. V. Vasil'ev, *On the lengths of MDS codes with a two-transitive permutation automorphism group*, 2026, subm. to IEEE Trans. Information Theory, see also arXiv:2609.05292.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* vasand@math.nsc.ru

## О конечных $p$-группах с заданными порядками порождающих элементов по модулю 1 или по модулю ее коммутанта

Б. М. Веретенников

В данном сообщении $d(G)$ означает ранг конечной $p$-группы $G$, т.е. минимальное число порождающих группы $G$.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — конечная $p$-группа, порожденная элементами $a_1, \dots, a_n$, причем $a_1^{p^{k_1}}, \dots, a_n^{p^{k_n}} \in G'$ для некоторых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$. Тогда*

$$d(G') \le (n-1)m_1 \dots m_n - \left( \sum_{j=1}^{n} m_1 \dots \widehat{m_j} \dots m_n \right) + 1,$$

*где крышка над $m_j$ означает, что в произведении $n$ множителей $m_1 \dots m_n$ множитель $m_j$ отсутствует при наличии остальных, и $m_i = p^{k_i} + 1$ для любого $i \in [1, n]$.*

При $n = 2$ и условиях $a_1^{p^{k_1}} = \dots = a_{n-1}^{p^{k_{n-1}}} = 1$, $a_n^{p^{k_n}} \in G'$ имеются точные оценки $d(G')$, которые меньше оценки, указанной в теореме 1 (см. [**1, 2**]).

В [**3**] доказано, что если конечная 2-группа $G$ порождается $n$ инволюциями, то

$$d(G') \le \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \dots + (n-1)\binom{n}{n},$$

причем равенство достижимо для некоторой группы $G$ с данным условием.

**Теорема 2.** *Для любого $k \ge 1$ существует конечная 2-группа $G$, порожденная $n$ инволюциями, с гомоциклическим коммутантом ранга*

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \dots + (n-1)\binom{n}{n}$$

*и с минимальным периодом $2^k$, причем эта группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

В связи с теоремой 2 следует также отметить тезисы А. Д. Устюжанинова [**4**].

### Литература

[1] N. Blackburn, *On prime-power groups with two generators*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **54**: 3, (1958), 327–337.

[2] Б. М. Веретенников, *О числе порождающих элементов коммутанта конечной $p$-группы*, Международная конференция «МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ», (2025), 10–14 ноября 2025 г., Новосибирск, 137.

[3] Б. М. Веретенников, *О коммутантах конечных 2-групп, порожденных инволюциями*, Труды института математики и механики УрО РАН, **23**: 4, (2017), 77–84.

[4] А. Д. Устюжанинов, *Конечные 2-группы, порожденные точно тремя инволюциями.* В сб. Всесоюз. алгебр. симпозиум (1975), тез. докл., ч. I, Гомель, (1975), 72.

*Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)*
*E-mail:* boris@veretennikov.ru

## Тождества решеток формаций

Н. Н. Воробьев

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [**1, 2, 3**]. Напомним, что класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Следуя Л.А. Шеметкову [**2**], символом $\sigma$ обозначается некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Символ $F_{\sigma_i}(G)$ обозначает произведение всех нормальных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы $G$.

Всякая функция $f$ вида

$$f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}, \qquad (1)$$

называется *формационной $\sigma$-функцией* (см. [**3**]) и полагают

$$LF_\sigma(f) = \Big(G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma\big(G\big)\Big).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ для некоторой формационной $\sigma$-функции $f$ вида (1), то $\mathfrak{F}$ называют *$\sigma$-локальной формацией* с *$\sigma$-локальным* заданием $f$ (см. [**3**]).

Для произвольной $n$-кратно $\sigma$-локальной формации $\mathfrak{F}$ через $L_n^\sigma(\mathfrak{F})$ будем обозначать решетку всех $n$-кратно $\sigma$-локальных подформаций из $\mathfrak{F}$. Основной результат представляет следующая

**Теорема.** *Пусть $\Pi$ — некоторое фиксированное бесконечное подмножество из $\sigma$, $\mathfrak{H}$ — такая формация, что $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \Pi$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\Pi\mathfrak{H}$. Тогда для любых целых неотрицательных чисел $m$ и $n$ множества тождеств решеток $L_m^\sigma(\mathfrak{F})$ и $L_n^\sigma(\mathfrak{F})$ совпадают.*

**Следствие 1** [**4**]. *Пусть $n$ — целое положительное число. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех формаций $l_0^\sigma$, выполняется и в решетке всех $n$-кратно $\sigma$-локальных формаций $l_n^\sigma$.*

В случае $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ из основного результата получаем два известных результата А. Н. Скибы:

**Следствие 2** [**1**]. *При любых целых неотрицательных $m$ и $n$ множества тождеств решеток $l_m$ и $l_n$ совпадают.*

**Следствие 3** [**1**]. *Решетка всех $n$-кратно локальных формаций $l_n$ модулярна, но не дистрибутивна для любого целого неотрицательного $n$.*

*Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция—2030» (рег.№ 20260378).*

Литература

[1] А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*. Мн.: Беларуская навука, 1997.
[2] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978 (Соврем. алгебра).
[3] Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba, *On $n$-multiply $\sigma$-local formations of finite groups*. Comm. Algebra, **17**: 3 (2019), 957–968.
[4] A. Tsarev, *Laws of the Lattices of $\sigma$-Local Formations of Finite Groups*. Mediterr. J. Math., **17**: 3 (2020), 75:(13 pages).

*Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск (Беларусь)*
*E-mail: vornic2001@mail.ru*

## О характеризации инъекторов во множестве Фиттинга $\sigma$-разрешимой группы

Н. Т. Воробьев, А. А. Стайнова

Рассматриваемые в работе группы являются конечными. В обозначениях и терминологии будем следовать [**1**]. Множество подгрупп $\mathcal{F}$ группы $G$ называется *множеством Фиттинга* в $G$, если оно замкнуто относительно нормальных подгрупп, нормальных произведений подгрупп и сопряжений.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа $n$, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы $G$. Пусть $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа $G$ называется: *$\sigma$-примарной*, если $G$ является $\sigma_i$-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; *$\sigma$-нильпотентной*, если $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ для некоторых $\sigma$-примарных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$; *$\sigma$-разрешимой*, если каждый главный фактор $G$ $\sigma$-примарен [**2**].

Всякое отображение вида $h : \sigma \to \{\text{множества Фиттинга в группе } G\}$ называется *$\sigma$-функцией Хартли $G$* или *$H_\sigma$-функцией $G$*.

Пусть $LH_\sigma(h)$ — множество Фиттинга вида $\cap_{\sigma_i\in\sigma} h(\sigma_i) \odot (\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{N}_{\sigma_i})$. Множество Фиттинга $\mathcal{H}$ группы $G$ назовем *$\sigma$-множеством Хартли* в $G$, если $\mathcal{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой $H_\sigma$-функции $h$ группы $G$. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, то $\mathcal{H}$ называют множеством Хартли $G$ [**3**].

Пусть $h$ — $H_\sigma$-функция $\sigma$-множества Хартли $\mathcal{H}$ группы $G$. Тогда $h$ назовем: (1) *внутренней*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathcal{H}$ для всех $i \in I$; (2) *полной*, если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j) \circ \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \neq j$; (3) *полной внутренней*, если $h$ является одновременно полной и внутренней $H_\sigma$-функцией.

Для множества Хартли $\mathcal{H} = HS(h)$ группы $G$, где $h$ — $H_\sigma$-функция $\mathcal{H}$, подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i\in\sigma} G_{h(\sigma_i)}$ назовем *$h$-радикалом $G$*.

**Теорема.** *Пусть $\mathcal{H}$ — $\sigma$-множество Хартли группы $G$, определяемое полной внутренней $H_\sigma$-функцией $h$ группы $G$ и $G_h$ — $h$-радикал $G$. Если фактор $G/G_h$ — $\sigma$-разрешим, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *подгруппа $V$ группы $G$ является $\mathcal{H}$-инъектором $G$ в том и только том случае, если $V/G_h$ является $\sigma$-нильпотентным инъектором $G/G_h$;*
(2) *в $G$ существуют $\mathcal{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

### Литература

[1] Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*, Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
[2] Skiba A.N. *On $\sigma$-properties of Finite groups I*, Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2014, № 4 (21), p. 89–96.
[3] Hartley B. *On Fischer's dualization of formation theory*, Proc. London Math. Soc., 1969. Vol. 3, №2, p. 193–207.

*Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск (Беларусь)*
*E-mail: ntvorobyov@mail.ru, stainova.aa@mail.ru*

## Порождающие множества сопряженных инволюций групп $PSL_n(2^m)$

Р. И. Гвоздев

Для конечной группы $G$, порожденной инволюциями, обозначим через $n_c(G)$ минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно 1. Вопрос о нахождении числа $n_c(G)$ для каждой конечной простой неабелевой группы $G$ записан в статье Г. Малле, Я. Сакcла и Т. Вайгеля [**1**] (см. также [**1**, вопрос 14.69в)]).

К настоящему времени число $n_c(G)$ известно для спорадических и знакопеременных групп, групп с одним классом сопряженных инволюций, групп $PSL_n(q)$ и групп лиева типа ранга 2, исключая группы $PSL_n(2^m)$ при $n \geq 5$, $PSL_6(q)$ при $q \equiv 3 \pmod 4$, ${}^2F_4(2^{2m+1})'$.

Основным результатом является

**Теорема.** *Пусть $n \geq 5$ нечетно, тогда $n_c(PSL_n(2^m)) = 5$.*

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Красноярского краевого фонда науки (проект № 25-21-20059, https://rscf.ru/project/25-21-20059/ ).*

Литература

[1] G. Malle, J. Saxl, T. Weigel, *Generation of classical groups*, Geom. Dedicata, **49** (1994), 85–116.
[2] *The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, Eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2022, № 20.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail: gvozdev.rodion@bk.ru*

## Об одном классе бесконечномерных линейных групп конечного нормального ранга

О. Ю. Дашкова

Л. А. Курдаченко ввел определение нормального ранга группы [**4**].

**Определение 1.** *Говорят, что группа $G$ имеет конечный нормальный ранг $r$, если $r$ — наименьшее число с тем свойством, что для любого конечного множества элементов $g_1, g_2, \cdots, g_n$ группы $G$ найдутся элементы $h_1, h_2, \cdots, h_m$ из $G$ такие, что $m \leq r$ и*

$$\langle g_1, g_2, \cdots, g_n \rangle^G = \langle h_1, h_2, \cdots, h_m \rangle^G.$$

*В случае, когда такого числа $r$ не существует, нормальный ранг группы $G$ считается бесконечным.*

Пусть $F$ — поле, $V$ — векторное пространство над полем $F$, $GL(F,V)$ — группа всех $F$-автоморфизмов векторного пространства $V$. Группа $GL(F,V)$ и ее подгруппы называются линейными группами. Если размерность векторного пространства $V$ над полем $F$ конечна, любой элемент группы $GL(F,V)$ можно отождествить с невырожденной квадратной матрицей размерности $n$ над полем $F$, где $n$ — размерность векторного пространства $V$ над полем $F$. Исследования бесконечномерных линейных групп требуют дополнительных ограничений. Одним из таких ограничений является конечность центральной размерности некоторых подгрупп данной бесконечномерной линейной группы [**2**].

**Определение 2** [**2**]. *Пусть $H$ — подгруппа группы $GL(F,V)$. Тогда $H$ действует на фактор-пространстве $V/C_V(H)$ естественным образом. Размерность фактор-пространства $V/C_V(H)$ называется центральной размерностью группы $H$.*

В настоящей работе автор продолжает исследование линейных групп конечного нормального ранга. Доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть $G$ — локально разрешимая подгруппа группы $GL(F,V)$, имеющая бесконечную центральную размерность и бесконечный абелев секционный ранг. Если каждая собственная подгруппа бесконечного абелева секционного ранга имеет конечную центральную размерность, то группа $G$ имеет конечный нормальный ранг.*

Отметим, что центр $Z$ группы $G$ конечен, а нормальный ранг группы $G$ не превосходит величины $2 + r(Z)$, где $r(Z)$ — специальный ранг центра $Z$.

### Литература

[1] O. Yu. Dashkova, *On groups of finite normal rank*. Algebra Discrete Math., **1**: 1 (2002), 64–68.

[2] M. R. Dixon, M. J. Evans, L. A. Kurdachenko, *Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension*. J Algebra, **277**: 1 (2004), 172–186.

*Филиал Московского государственного университета в г. Севастополе, Севастополь (Россия)*

*E-mail:* odashkova@yandex.ru

## Центроиды некоторых обобщенных групп Баумслага–Солитера с нетривиальным центром

Ф. А. Дудкин, А. П. Ядова

Для данной группы $G$ обозначим через $\Gamma(G)$ множество отображений из группы $G$ в $G$ такое, что для любых $\phi, \psi \in \Gamma(G)$ и для любых $g, h \in G$ выполнено: $(h^{-1}gh)^{\phi} = h^{-1}g^{\phi}h$, $[g,h] = 1 \Rightarrow (gh)^{\phi} = g^{\phi}h^{\phi}$.

Если определить на $\Gamma(G)$ операции «+» и «·» так, что $g^{\phi\cdot\psi} = (g^{\phi})^{\psi}$, $g^{\phi+\psi} = g^{\phi}g^{\psi}$, то получится ассоциативное кольцо с единицей. Это кольцо называется *центроидом* [**1**].

Конечно порожденная группа $G$, которая действует на дереве так, что все реберные и вершинные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *$GBS$-группой*. По теореме Басса—Серра группа $G$ может быть представлена в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ фундаментальной группы графа групп $\mathbb{A}$, где все вершинные и реберные группы — бесконечные циклические.

В случае, когда граф групп $\mathbb{A}$ не имеет четных меток, было показано, что централизаторы гиперболических элементов самонормализуемы. Этот факт и информация о строении централизаторов группы $G$ [**2**] позволяют доказать следующую теорему о структуре центроида.

**Теорема.** *Пусть $G$ — неэлементарная $GBS$-группа с центром, представленная графом с метками $\mathbb{A}$. Если $\mathbb{A}$ не имеет четных меток, то $\Gamma(G) \cong \mathbb{Z} \bigoplus_{\triangleright} N$, где $N$ — идеал центроида $\Gamma(G)$, изоморфный*

$$\prod_{r\in I}(\mathbb{Z} \oplus_{\triangleright} \mathbb{Z}),$$

*а $I$ — счетное множество представителей классов сопряженности централизаторов гиперболических элементов группы $G$.*

**Замечание 1.** *На каждом сомножителе $\mathbb{Z} \oplus_{\triangleright} \mathbb{Z}$ в идеале $N$ умножение задается формулой*

$$(f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_1 g_2).$$

**Замечание 2.** *Умножение в центроиде $\Gamma(G) \cong \mathbb{Z} \oplus_{\triangleright} N$ задается формулой*

$$(n, f) \cdot (m, g) = (n \cdot m, f \cdot m + n \cdot g + f \cdot g).$$

### Литература

[1] S. Lioutikov, A. Myasnikov, *Centroids of groups*. Journal of Group Theory, **3**: 2 (2000), 177–197.

[2] F. A. Dudkin, *Computation of the centralizer dimension of generalized Baumslag–Solitar groups*. Сиб. электрон. матем. изв., **15** (2018), 1823–1841.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* DudkinF@math.nsc.ru

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.yadova@g.nsu.ru

## Алгоритмическая неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной нильпотентной группы $F_n(\mathfrak{N}_2)$

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина

Проблема эндоморфной сводимости для наборов элементов группы $G$. По произвольным двум наборам $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ и $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ элементов группы $G$ определить, существует ли такой эндоморфизм $\varphi$ группы $G$, для которого выполняются равенства

$$\&_{i=1}^{m} \varphi(g_i) = h_i.$$

При $m = 1$ получается Проблема эндоморфной сводимости для элементов группы $G$.

Через $F_n(\mathfrak{N}_c)$, как обычно, обозначается свободная группа ранга $n$ многообразия $\mathfrak{N}_c$ нильпотентных групп ступени нильпотентности $\leq c$ со свободными образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В.А. Романьков [**1**] доказал алгоритмическую неразрешимость проблемы эндоморфной сводимости для элементов свободной нильпотентной группы $F_n(\mathfrak{N}_c)$ при $c \geq 9$ и достаточно большом $n$. Проблема эндоморфной сводимости для элементов свободной нильпотентной группы $F_2(\mathfrak{N}_2)$ алгоритмически разрешима.

В то же время справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Можно указать такие числа $n$ и $m$, что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному набору*

$$(w_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, w_m(a_1, \ldots, a_n))$$

*элементов группы $F_n(\mathfrak{N}_2)$ определить, существует ли такой эндоморфизм $\varphi$ этой группы, для которого выполняются равенства*

$$\&_{i=1}^{m} \varphi(w_i(a_1, \ldots, a_n)) = [a_1, a_2].$$

### Литература

[1] Романьков В.А. *О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах* // Алгебра и логика. 1977. Том 16, № 4. С. 457–471.

## О построении вложений в классе частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп

А. Л. Евтягин

Данная работа уточняет и продолжает исследования, результаты которых опубликованы в работе [**1**].

Пусть $\Gamma(X, E)$ — простой граф с множеством вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством ребер $E \subseteq X \times X$, а $\mathfrak{N}_2$ — многообразие нильпотентных групп ступени не выше 2. В данной работе исследуются частично коммутативные группы многообразия $\mathfrak{N}_2$, которые определяются через порождающие элементы и определяющие соотношения следующим образом:

$$F(\Gamma, \mathfrak{N}_2) = \langle X \mid x_i x_j = x_j x_i \iff \{x_i, x_j\} \in E; \mathfrak{N}_2 \rangle.$$

В работе [**1**] сформулирована

**Теорема.** *Существует алгоритм, определяющий возможность вложения одной группы в другую в классе конечно порожденных частично коммутативных нильпотентных групп ступени 2.*

В доказательстве приводится описание некоторого алгоритма, устанавливающего возможность вложения группы $F_1(\Gamma_1, \mathfrak{N}_2)$ в группу $F_2(\Gamma_2, \mathfrak{N}_2)$. При этом авторы вводят некоторые параметры, но не указывают, как их выбирать алгоритмически в произвольном случае.

В данной работе алгоритм из [**1**] формулируется более точно, доказано, что перебор возможных значений параметров конечен. Также рассматривается вопрос явного построения вложения (если таковое существует) с помощью алгоритма из [**1**].

*Результат получен при поддержке гранта РНФ, проект 25-11-20023.*

Литература

[1] Евтягин А. Л., Романьков В. А. *О вложениях в классе частично коммутативных нильпотентных групп* // Математические заметки. 2024. Т.116. №2. с.236–244. DOI: 10.4213/mzm14144

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал), Омск (Россия)*
*E-mail:* a.l.evtyagin@gmail.com

## О периодических группах, насыщенных конечными простыми унитарными группами

А. Х. Журтов, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

По определению, периодическая группа $G$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, если каждая конечная подгруппа из $G$ содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу из $\mathfrak{M}$.

Анонсируется следующий результат:

**Теорема.** *Пусть $p$ — нечётное простое число и $G$ — периодическая группа с локально конечными централизаторами инволюций, насыщенная множеством $\mathfrak{M} = \{\mathrm{PSU}_m(p^n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда либо $G \simeq \mathrm{PSU}_m(p^n)$ для некоторых натуральных $m$ и $n$, либо $G \simeq \mathrm{PSU}_m(F)$ для бесконечного локально конечного поля $F$ характеристики $p$ с автоморфизмом порядка 2. В частности, $G$ локально конечна, счётна и является объединением возрастающей последовательности подгрупп, изоморфных $\mathrm{PSU}_m(p^{n_i})$.*

*Исследование выполнено за счёт гранта РНФ, проект № 25-41-10008.*

*Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик (Россия)*
*E-mail: zhurtov_a@mail.ru*

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: daria.lytkin@gmail.com*

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: vic.mazurov@gmail.com*

## О сложности проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы $F_n$

А. И. Зеткина, В. Г. Дурнев

Проблема эндоморфной (автоморфной) сводимости для наборов элементов группы $G$: по произвольным двум наборам $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ и $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ элементов группы $G$ определить, существует ли такой эндоморфизм (автоморфизм) $\varphi$ группы $G$, для которого выполняются равенства

$$\&_{i=1}^{m} \varphi(g_i) = h_i.$$

Проблема эндоморфной сводимости для элементов свободных групп (при $m = 1$) впервые рассмотрена в работе Р. Линдона [**1**] и получила название Проблема подстановки. Для свободной группы $F_2$ она решена П. Шуппом [**2**]. Алгоритмическая разрешимость Проблемы эндоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы следует из фундаментального результата Г.С. Маканина [**3**] об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в свободных группах. Проблема автоморфной сводимости для наборов элементов свободных групп поставлена и решена А. Уайтхедом. В то же время представляет определенный интерес вопрос о сложности их решения.

**Теорема 1.** *Можно указать такое число $n$, что Проблема эндоморфной сводимости для элементов свободной группы $F_n$ $g(a_1, \ldots, a_n)$ и $[a_1, a_2]$ является* ***NP****-трудной.*

**Теорема 2.** *Проблема автоморфной сводимости для наборов элементов свободной группы $F_2$ полиномиально сводится к вопросу о разрешимости в этой группе для уравнений вида $w(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [a_1, a_2]$, а значит к Проблеме эндоморфной сводимости для элементов $w(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и $[a_1, a_2]$ свободной группы $F_5$.*

Литература

[1] Lyndon R.C. *Dependence in groups* // Colloq. Math. 1966. № 4. P. 275–283.

[2] Schupp P.E. *On the substitution problem for free groups* // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 23, № 2. P. 421–423.

[3] Маканин Г.С. *Уравнения в свободных группах* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Том 46, № 6. С. 1199–1273.

## О существовании спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах

М. Р. Зиновьева

Графом Грюнберга—Кегеля (графом простых чисел) конечной группы $G$ называется граф $GK(G)$, в котором вершинами служат простые делители порядка группы $G$ и две различные вершины $p$ и $q$ смежны тогда и только тогда, когда $G$ содержит элемент порядка $pq$. Известны графы Грюнберга–Кегеля конечных простых неабелевых групп. Одним из популярных направлений исследований в теории конечных групп является изучение групп по свойствам графа Грюнберга–Кегеля.

А. М. Старолетов в **[1]** изучил конечные группы со спектром как у конечной простой неабелевой группы, имеющие спорадический композиционный фактор.

Мы рассматриваем следующую более общую задачу: может ли конечная группа с графом простых чисел как у конечной простой неабелевой группы иметь композиционный фактор, изоморфный простой спорадической группе. Автор в **[2]** изучил конечные группы с графом простых чисел как у исключительной группы лиева типа, отличной от ${}^3D_4(q)$ и $G_2(q)$, или как у классических групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $O_{2n+1}(q)$, $S_{2n}(q)$. В случае простых групп $L_n(q)$, $U_n(q)$ был рассмотрен случай $n \geq 12$ и композиционный фактор группы не изоморфен $F_1$. В **[3]** изучены конечные группы с графом простых чисел как у исключительной группы лиева типа ${}^3D_4(q)$ или $G_2(q)$, или как у классических групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, где $n \geq 11$, $O^+_{2n}(q)$, $O^-_{2n}(q)$, где $n \geq 9$.

Далее $q = p^f$, где $p$ — простое число и $f \in \mathbb{N}$.

В рамках рассматриваемой задачи мы получили следующий результат:

**Теорема.** *Пусть $H \in \{L_n(q), U_n(q)\}$ — конечная простая линейная или унитарная группа над полем порядка $q$, $n \geq 9$, $G$ — конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и $S$ — композиционный фактор группы $G$. Тогда $S$ не является спорадической группой.*

### Литература

[1] А. М. Старолетов, *Sporadic composition factors of finite groups isospectral to simple groups*, Сиб. электрон. матем. изв., **8** (2011), 268–272.

[2] М. Р. Зиновьева, *О существовании спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах*, Труды Инст. матем и мех. УрО РАН, **30**:4 (2024), 134–148.

[3] М. Р. Зиновьева, *О существовании спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах. II*, Сиб. электр. матем. изв., **23**:1 (2026), 608–622.

*Институт математики и механики УрО РАН им.Н.Н. Красовского, Екатеринбург (Россия)*
*E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru*

## Конечные порядки произведений двух транспозиций классов

А. Л. Искра

Пусть $r(m) = \{r + mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где $r, m \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq r < m$. Для двух непересекающихся классов $r_1(m_1)$ и $r_2(m_2)$ *транспозицией классов* называется перестановка

$$\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} (r_1 + m_1k, r_2 + m_2k) \in \mathrm{Sym}(\mathbb{Z}).$$

Группа $\mathrm{CT}(\mathbb{Z})$, порождённая всеми транспозициями классов, введена Ш. Колем в работе [**2**].

В Коуровской тетради [**2**, вопрос 18.48] Коль поставил следующий вопрос: *конечно ли множество натуральных чисел, которые являются порядками произведений двух транспозиций классов?* В докладе даётся положительный ответ на этот вопрос.

**Теорема.** *Пусть $a$ и $b$ — две транспозиции классов. Если произведение $ab$ имеет конечный порядок, то все его циклы имеют длину не более* 8 *и*

$$\mathrm{ord}(ab) \mid 840.$$

Полученная граница точна: для транспозиций

$$a = \tau_{0(40),18(28)}, \qquad b = \tau_{4(42),5(15)}$$

выполняется равенство $\mathrm{ord}(ab) = 840$. Порядок этого произведения проверен Колем с помощью пакета RCWA системы GAP.

Доказательство развивает графовый подход из работы [**3**]. Пути в графе пары транспозиций классов кодируются словами над восьмибуквенным алфавитом, а их существование описывается целочисленными решениями систем линейных диофантовых уравнений. Анализ слов длины 7 даёт критерий бесконечности порядка и ограничение на длины циклов в случае конечного порядка.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-11-00119,* https://rscf.ru/project/24-11-00119/.

### Литература

[1] S. Kohl, *A simple group generated by involutions interchanging residue classes of the integers*, Math. Z., 264, no. 4 (2010), 927–938.

[2] *Коуровская тетрадь: Нерешённые вопросы теории групп*, 21-е изд., под ред. Е. И. Хухро и В. Д. Мазурова, Новосибирск, 2026.

[3] В. Г. Бардаков, А. Л. Искра, *Порядки произведений горизонтальных транспозиций классов*, Матем. заметки, 118, № 5 (2025), 654–669.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия); Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.iskra@g.nsu.ru

## $\sigma$-Проблема Кегеля–Виландта для групп с ограничениями на их композиционные факторы

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

В работе рассматриваются только конечные группы.

Зафиксируем разбиение $\sigma$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно непересекающиеся непустые подмножества $\sigma_i$, индексированные элементами некоторого множества индексов $I$.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\sigma$-субнормальной, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа $H_{i-1}$ нормальна в $H_i$, либо группа $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является $\sigma_j$-группой для некоторого $j \in I$.

Если подгруппа $H$ является $\sigma$-субнормальной в группе $G \in \bigcap_{i\in I} E_{\sigma_i}$ (т.е. группа $G$ обладает по крайней мере одной $\sigma_i$-холловой подгруппой для любого $i \in I$), то для каждого $i \in I$ любая $\sigma_i$-холлова подгруппа $S_i$ группы $G$ редуцируется в $H$ (т.е. $H \cap S_i$ — $\sigma_i$-холлова подгруппа в $H$). В связи с этим результатом в «Коуровской тетради» под номером 19.86 сформулирован следующий аналог известной гипотезы Кегеля–Виландта, который называется сегодня *$\sigma$-проблемой Кегеля–Виландта*.

**Теорема.** *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — произвольное разбиение множества всех простых чисел и $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, порядки всех композиционных факторов которых имеют не более четырех простых делителей. Подгруппа $H$ группы $G \in \bigcap_{i\in I} E_{\sigma_i}$, принадлежащей классу $\mathfrak{X}$, является $\sigma$-субнормальной в $G$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ любая $\sigma_i$-холлова подгруппа группы $G$ редуцируется в $H$.*

Таким образом, в классе всех групп, все композиционные факторы которых имеют не более четырех простых делителей, $\sigma$-проблема Кегеля–Виландта положительно решается для любого разбиения $\sigma$ множества всех простых чисел.

С учетом ранее полученных результатов имеем

**Следствие.** *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — произвольное разбиение множества всех простых чисел и $\mathfrak{Y}$ — класс всех групп, композиционные факторы которых являются либо знакопеременными группами, либо спорадическими группами, либо лиевыми группами ранга 1, либо имеют порядки, делящиеся не более чем на четыре простые числа. Подгруппа $H$ группы $G \in \bigcap_{i\in I} E_{\sigma_i}$, принадлежащей классу $\mathfrak{Y}$, является $\sigma$-субнормальной в $G$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ любая $\sigma_i$-холлова подгруппа группы $G$ редуцируется в $H$.*

*Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20261953).*

*Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)*
*E-mail: sfkamornikov@mail.ru*

*Гомельский филиал Международного университета «МИТСО», Гомель (Беларусь)*
*E-mail: vtutanov@gmail.com*

## О «больших» 2-подгруппах автотопизмов полуполевых проективных плоскостей

О. В. Кравцова

Пусть $\pi$ — полуполевая проективная плоскость порядка $p^N$, $p$ — простое число, $\Lambda$ — ее группа автотопизмов, то есть коллинеаций, фиксирующих треугольник. Размерность $N = 2^m(2k-1)$ координатизирующего полуполя $Q$ над простым подполем $\mathbb{Z}_p$ дает естественное ограничение порядков 2-подгрупп автотопизмов, в которых нет центральных коллинеаций.

В частности, если $p \equiv 1 \pmod 4$, $H < \Lambda$ — элементарная абелева 2-подгруппа, $\langle\beta\rangle < \Lambda$ — циклическая 2-подгруппа без перспективностей, то $|H| \leq 2^m$ и $|\beta| \leq 2^m$. Объяснением служит конечность длины последовательности вложенных подплоскостей

$$\pi = \pi_0 \supset \pi_1 \supset \pi_2 \supset \dots$$

с условием $|\pi_{i+1}| = \sqrt{|\pi_i|}$, соответствующая такой подгруппе. Ограничение на порядок подгруппы исчезает при $p = 2$ или $p \equiv -1 \pmod 4$, если элементы подгруппы фиксируют поточечно одну и ту же подплоскость.

Если полуполевая проективная плоскость $\pi$ порядка $p^4$, $p \equiv -1 \pmod 4$ — простое, допускает подгруппу автотопизмов $\langle\beta\rangle$ порядка 8, то $\beta^4$ является бэровской инволюцией, фиксирующей поточечно подплоскость $\pi_1$ порядка $p^2$. Элемент $\beta^2$ может действовать на $\pi_1$ либо тождественно, либо как центральная коллинеация. Построено матричное представление регулярного множества такой плоскости $\pi$ и такой коллинеации $\beta$.

Существование «большой» циклической 2-подгруппы автотопизмов подтверждается построением, совместно с Д. С. Скок, примеров полуполевых плоскостей порядка $7^4$ с обобщенной кватернионной подгруппой автотопизмов $Q_{16}$.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).*
*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* ol71@bk.ru

## О некоторых соотношениях в свободной бернсайдовой группе $B(2,5)$

А. А. Кузнецов

Пусть $B = B(2,5)$ — свободная двупорождённая группа Бернсайда периода 5, а $B_0 = B_0(2,5)$ — её наибольшая конечная факторгруппа порядка $5^{34}$ и класса нильпотентности 12. В работе [**1**] показано, что равенства между положительными словами длины не более 29 совпадают для $B$ и $B_0$. Поэтому длина 30 является первой возможной точкой расхождения: соответствующие равенства выполняются в $B_0$, но пока не доказаны в $B$.

Рассмотрим одно из двух таких соотношений длины 30, приведённых в работе [**1**]:

$$\begin{gathered}\mathtt{yxyxyxxyyxxyyxyxyxxyyxxyyxyxyx} = \\ \mathtt{xyyxyxxyxyyxxyxyxyyxxyxyyxyxxy}.\end{gathered} \tag{1}$$

Второе получается из (1) автоморфизмом $x \leftrightarrow y$ с перестановкой сторон.

Положим

$$\begin{aligned} p &= \mathtt{xyyxxyxyyxyxxyyxyxxy}, \\ q &= \mathtt{xyyxxyxyxyyxxyyxyxyx}. \end{aligned} \tag{2}$$

**Теорема.** *В группе $B(2,5)$ соотношение (1) выполняется тогда и только тогда, когда $pq = qp$. При выполнении этих условий $\langle p, q\rangle \cong C_5 \times C_5$.*

*Идея доказательства.* Положим $s = \mathtt{xyyxxyxy}$. Непосредственно проверяется, что $pq = sA$, $qp = sD$, где $A, D$ — положительные слова длины 32; поэтому $pq = qp \iff A = D$. Обратимые преобразования соотношений (свободные и циклические сокращения, обращение соответствующих слов, автоморфизмы и применение закона $z^5 = 1$) устанавливают эквивалентность (1) и равенства $A = D$. Необходимое для обратного перехода вспомогательное тождество также выводится из закона пятой степени. Соответствующая цепочка преобразований проверена программно. В группе $B_0$ образы $p, q$ порождают подгруппу, изоморфную $C_5 \times C_5$ (проверка GAP/ANUPQ). Поэтому все 25 элементов $p^i q^j$, $0 \le i, j \le 4$, попарно различны и в группе $B$. Если $pq = qp$, то эти элементы определяют подгруппу $\langle p, q\rangle \cong C_5 \times C_5$.

Таким образом, выполнение рассматриваемого соотношения длины 30 эквивалентно тому, что элементы $p, q$ порождают в $B(2,5)$ нециклическую абелеву подгруппу порядка 25.

Вопрос о справедливости (1) в группе $B(2,5)$ остаётся открытым.

### Литература

[1] А. А. Кузнецов, А. К. Шлёпкин. *О различии бернсайдовых групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 133–138.

*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* alex_kuznetsov80@mail.ru

## О решении экзистенциальной проблемы информационных действий

А. М. Кукарцев

Для задач обработки информации интерес представляют операции над двойными орбитами действия группы Джевонса на множестве булевых функций (далее — БФ). Пусть $n$ — целое неотрицательное число, $B(n)$ — множество БФ местности $n$, $E_n$ и $S_n$ — группы инвертирования и перестановок переменных БФ соответственно. Вместе они образуют группу Джевонса $D_n = E_n \leftthreetimes S_n$. К действиям $D_n$ над аргументами БФ добавим группу инвертирования значения БФ $D_1$, в совокупности они образуют группу нулевых действий $\Delta_n = D_n \times D_1$. Пусть $(f)$ — орбиты относительно $D_n$ и $[f]$ — относительно $\Delta_n$ (двойные орбиты), где $f \in B(n)$. По определению $[f] = (f) \bigcup (\bar{f})$, при этом возможны случаи $(f) = (\bar{f})$.

Информационными действиями (далее — действиями) будем называть элементы множества $W$, которые биективно поставлены орбитам $[f]$. Абстрактно такое множество описывается, но не удаётся задать «хорошие» для задач обработки информации операции (унарные, бинарные и пр.). При этом операции возможны.

**Лемма (О наивной простой сумме действий).** *$\forall f' \in [f]$, $\forall g' \in [g]$ верно $f' \oplus g' \in [f \oplus g]$, если БФ $f', g'$ не имеют общих существенных аргументов и БФ $f, g$ не имеют общих существенных аргументов.*

Простая сумма бесполезна для обработки информации. Она, по сути, описывает просто комбинацию действий. Не происходит качественного преобразования орбит. Без операций $W$ не имеет смысла для обработки информации. В этом и состоит проблема существования действий. Почти два десятка лет не удавалось получить какие-то общие решения, но одна из гипотез получила подтверждение.

Она состоит в том, что орбиты $[f]$ могут быть связаны подстановками из нормализатора $D_n$ в группе $S_{2^n}$, которая естественным образом действует на множестве значений БФ. Вычислительно показано, что $D_n$ самонормализуемы для $n = 1, 2, 3$ в $S_{2^n}$. Для $n = 4$ задача сводится к анализу 16! элементов. Это удалось сделать в августе 2025 года. Найдены элементы $N_{S_{2^4}}(D_4)$, не являющиеся $D_4$. Удалось доказательно распространить решение на большие $n$.

**Теорема (Об элементах $N_{S_{2^n}}(D_n)$).** *Если $\rho : \{y_i = f_i(x_{n-1}, \ldots, x_0)\}$, причём $f_i \in [x_{n-2} \oplus \cdots \oplus x_0]$, $0 \le i < n$ и $\forall i_1, i_2 : i_1 < i_2$ верно $f_{i_1} \ne f_{i_2}$ и $f_{i_1} \ne \overline{f_{i_2}}$ и $n \ge 4$ и $n$ — чётно, то $\rho \in N_{S_{2^n}}(E_n) \bigcap N_{S_{2^n}}(S_n)$, $\rho \in N_{S_{2^n}}(D_n)$, $\rho \notin D_n$.*

Все $\rho$ для заданного $n$ и $D_n$ образуют $N'_{S_{2^n}}(D_n) \le N_{S_{2^n}}(D_n)$ и фактор-группа $\alpha_n \cong N'_{S_{2^n}}(D_n)/D_n$ описывает унарную операцию над $W$. Для $n = 2$ и нечётных нужно добавлять фиктивные аргументы. $\alpha_n$ является простой порядка два, содержащая $\rho$. Для случая $n = 4$ вычислительно установлено $N_{S_{2^4}}(D_4) = D_4 \leftthreetimes \alpha_4$.

**Заключение.** Доказана возможность задания нетривиальных операций над действиями, что доказывает принципиальное само их существование.

*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* amkukarcev@yandex.ru

## О структуре группы обобщенных транспозиций классов

М. А. Кулешов

Работа выполнена совместно с А. Л. Искрой, Е. Д. Искрой, Е. И. Лисицыной и В. Д. Шепелевым.

Пусть $r(m) = r + m\mathbb{Z}$ — класс вычетов целых чисел. Для двух непересекающихся классов $A = a(m)$ и $B = b(n)$ и $\ell \in \mathbb{Z}$ рассмотрим перестановку

$$\tau_{A,B}^{(\ell)} = \prod_{t\in\mathbb{Z}} (a + mt,\ b + n(t - \ell)),$$

называемую *обобщенной транспозицией классов*. Через $\mathrm{ECT}(\mathbb{Z})$ обозначим группу, порожденную всеми такими перестановками. Она была введена в работе [**1**] как обобщение группы транспозиций классов $\mathrm{CT}(\mathbb{Z})$, исследованной Ш. Колем [**2**].

Для $k \geq 2$ обозначим через $\mathrm{ECT}_k$ подгруппу, порожденную обобщенными транспозициями классов по модулю $k$, и положим $\mathrm{ECT}_\infty = \langle \mathrm{ECT}_k \mid k \geq 2\rangle$. Также $\mathrm{ECT}_{(k)} = \langle \mathrm{ECT}_i \mid 2 \leq i \leq k\rangle$.

**Теорема 1.** *Для каждого $k \geq 2$ справедливы изоморфизмы*

$$\mathrm{ECT}_k \cong \mathbb{Z}^{k-1} \rtimes \mathrm{Sym}_k\,.$$

*Кроме того,* $\mathrm{ECT}_{(k)} = \mathrm{ECT}_{N_k}$*, где* $N_k = \mathrm{lcm}(2, \ldots, k)$.

**Теорема 2.** *Группы $\mathrm{ECT}_\infty$ и $\mathrm{ECT}(\mathbb{Z})$ просты. Коммутаторная ширина $\mathrm{ECT}_\infty$ не превосходит 3. Более того, подгруппа, порожденная сдвигами классов с одинаковыми модулями, действует $s$-транзитивно на $\mathbb{Z}$ при любом $s \geq 1$.*

Кроме того, для числа $\mathcal{C}(M)$ обычных транспозиций классов с модулями не выше $M$ получена асимптотика

$$\mathcal{C}(M) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}\right) M^4 + O\big(M^3 (\log M)^{2/3} (\log\log M)^{1/3}\big).$$

Ключевой инструмент — сдвиги, представимые произведениями двух обобщенных транспозиций. При фиксированном модуле они образуют свободную абелеву группу ранга $k-1$, а перестановки классов действуют на ней перестановкой координат. Отсюда получается полупрямое произведение в теореме 1.

### Литература

[1] Нещадим М. В., Нещадим С. М. *Группа обобщенных транспозиций классов и ее автоморфизмы* // Матем. тр. 2025. Т. 28, no. 3. С. 50–62.

[2] Kohl S. *A simple group generated by involutions interchanging residue classes of the integers* // Math. Z. 2010. Vol. 264. P. 927–938.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* m.a.kuleshov@g.nsu.ru

## Условия покрытия конечных квазиполей Холла

В. С. Логинова

Квазиполе $Q$ порядка $q^2$ ($q = p^n$, $p$ — простое), двумерное над центром $K \simeq GF(q)$, называется квазиполем Холла, если все элементы из $Q \setminus K$ являются корнями одного неприводимого квадратичного многочлена $\varphi(x) = x^2 - rx - s \in K[x]$. Квазиполе *правопримитивно*, если его мультипликативная лупа совпадает с множеством правоупорядоченных степеней одного элемента:

$$Q^* = \{1, a, a^2, (a^2)a, ((a^2)a)a, \dots\}.$$

Изучая проблему примитивности для квазиполей, М. Кордеро и В. Джа в 2009 году обратили внимание [**1**] на непримитивность квазиполей Холла с покрытием собственными подквазиполями. Один из их результатов представлен теоремой.

**Теорема 1 (М. Кордеро и В. Джа).** *Квазиполе Холла $Q$ порядка $q^2$, $q = p^n$, где $n > 1$ и не является степенью 2, допускает покрытие собственными подквазиполями Холла, такими, что любые два из этих подквазиполей пересекаются в точности по собственному подполю ядра.*

Более подробное изучение подквазиполей в квазиполе Холла [**2**] привело к необходимости уточнения этой теоремы. Пусть $P = \mathbb{Z}_p(r, s)$ — минимальное подполе в $K$, содержащее коэффициенты многочлена $\varphi(x)$, $|P| = p^t$. Если $P = K$ и $\varphi(x)$ — примитивный неприводимый многочлен, то квазиполе Холла $Q$ правопримитивно и не содержит поэтому собственных подквазиполей.

**Теорема 2.** *Квазиполе Холла $Q$ порядка $q^2$, $q = p^n$, допускает покрытие конечными полями тогда и только тогда, когда $p = 2$, $n$ нечётно и $\varphi(x) = x^2 + x + 1$. Квазиполе Холла $Q$ допускает покрытие собственными подквазиполями Холла тогда и только тогда, когда $n/t > 1$ является нечётным составным числом.*

Предположение о существовании не-холлова подквазиполя (то есть размерности более 2 над своим ядром) в квазиполе Холла не содержит очевидных противоречий. Квазиполе $Q$ порядка $q^m$, $m > 2$, с центром $K \simeq GF(q)$, все элементы которого из $Q \setminus K$ являются корнями неприводимого квадратичного многочлена $\varphi(x) \in K[x]$ (*квазиполе с условием Холла*), допускает покрытие изоморфными квазиполями Холла порядка $q^2$, пересекающихся по $K$; оно не порождается одним элементом и не является ни лево-, ни правопримитивным.

### Литература

[1] Cordero M., Jha V. *On the multiplicative structure of quasifields and semifields: cyclic and acyclic loops* // Note di Matematica. 2009. Vol. 29 (№ 1). P. 45–59.

[2] Кравцова О. В., Логинова В. С. *Вопросы строения конечных квазиполей Холла* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30 (№1). С. 128–141.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail: loginovavs011001@mail.ru*

## О фильтрах в решетке квазимногообразий нильпотентных групп без кручения

М. С. Лукьянов

Д.М. Смирнов в [**1**] поставил следующую задачу: существует ли нетривиальный счетный фильтр в решетке квазимногообразий групп? Это проблема стала основным толчком к изучению фильтров в решетках квазимногообразий. С тех пор было получено много серьезных результатов. Приведем некоторые из них. В [**2**] найдены условия на квазимногообразия, при выполнении которых главные фильтры, порожденные этими квазимногообразиями, будут континуальны. В работах [**3, 4, 5**] установлены мощности фильтров в ряде решеток квазимногообразий групп. В [**5**] найдено условие, при выполнении которого любой нетривиальный фильтр в решетке квазимногообразий групп континуален. В данной работе продолжено изучение этой темы и доказан новый результат о мощности фильтров в решетке квазимногообразий нильпотентных групп без кручения.

Введем обозначения:

$\mathcal{N}_{c,\infty}$ — квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени не выше $c$;

$L_q(\mathcal{N})$ — решетка квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{N}$.

Фильтром в решетке называется непустое подмножество $M$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) если $a, b \in M$, то $a \wedge b \in M$;
2) если $a \in M$ и $a \leq b$, то $b \in M$.

В настоящей работе доказан следующий результат.

**Теорема.** *Всякий нетривиальный фильтр в решетке $L_q(\mathcal{N}_{c,\infty})$ $(c > 1)$ имеет мощность континуума.*

Литература

[1] D.M. Smirnov, *Varieties and quasivarieties of algebras*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **29** (1977), 745–751. Zbl 0483.08009.

[2] А. И. Будкин, *О фильтрах в решетке квазимногообразий групп*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **52**:4 (1988), 875–881.

[3] С. В. Ленюк, *О решетке квазимногообразий метабелевых групп*, Алгебра и логика, **35**:5 (1996), 552–561.

[4] С. В. Ленюк, *Фильтры в решетке квазимногообразий метабелевых групп*, Сиб. матем. журн., **39**:1 (1998), 67–73.

[5] С. В. Ленюк, *Фильтры в решетках квазимногообразий групп, замкнутых относительно сплетений*, Сиб. матем. журн., **41**:4 (2000), 858–862.

*Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)*
*E-mail:* michael.lukianov.03@mail.ru

## Классификация $Q$-полиномиальных графов Шилла с $b_2 = c_2$

А. А. Махнев, В. С. Климин

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф $\Gamma$ диаметра 3, второе собственное значение которого $\theta_1$ равно $a_3$ (см. [**1**]). Для $Q$-полиномиального графа Шилла с $b_2 = c_2$ по предложению Юришича–Видали [**2**] (см. также [**3**]) имеем $b = 2r$, $c_2 = r(t + r)$ и массив пересечений

$$\{2rt(2r + 1), (2r - 1)(2rt + t + 1), r(r + t); 1, r(r + t), t(4r^2 - 1)\}.$$

При этом для любой вершины $u$ подграф $\Gamma_3(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений

$$\{t(2r + 1), (2r - 1)(t + 1), 1; 1, t + 1, t(2r + 1)\}.$$

**Теорема.** *$Q$-полиномиальный граф Шилла с $b_2 = c_2$ либо имеет массив пересечений $\{6, 4, 2; 1, 2, 3\}$ и изоморфен графу Хэмминга $H(3, 3)$, либо имеет массив пересечений $\{18, 10, 4; 1, 4, 9\}$ и изоморфен графу Джонсона $J(9, 3)$.*

В доказательстве используются тройные числа пересечений [**4**]; вычисления выполнены с использованием [**5**]. Из формул для [113] и [123] получаем $h_1 = [133] = r(r-t-2)$. Так как $h_1 \geq 0$, то $t \leq r-2$. С другой стороны, в случае $d(u, v) = d(u, w) = 3$, $d(v, w) = 1$ имеем $[311] = 2(t-r) \geq 0$, то есть $t \geq r$. При $r > 2$ эти неравенства несовместимы. Случай $r = 1$ дает ровно два указанных графа, а случай $r = 2$ исключается результатом из [**6**] о $Q$-полиномиальных графах Шилла с $b = 4$.

**Следствие 1.** *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений*

$$\{80, 63, 12; 1, 12, 60\} \qquad \text{и} \qquad \{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$$

*не существуют.*

**Следствие 2.** *Дистанционно регулярные графы Шилла с $b = 6$ и массивами пересечений $\{42t, 35t + 5, 3t + 9; 1, 3t + 9, 35t\}$, $t \in \{7, 12, 17, 27, 57\}$, не существуют* [**7**].

*Работа Климина В.С. поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект FEUZ-2026-0007).*

Литература

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.

[2] A. Jurishic, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr. **65** (2012), 29–47.

[3] J. Vidali, *Kode v razdaljno regularnih grafih*, Doctorska Dissertacija, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, 2013.

[4] K. Coolsaet, A. Jurishich, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), 1086–1095.

[5] J. Vidali, *Using Symbolic Computation to Prove Nonexistence of Distance-Regular Graphs*, Electron. J. Combin. **25** (2018), no. 4, DOI: 10.37236/7763.

[6] И.Н. Белоусов, М.П. Голубятников, А.А. Махнев, *О $Q$-полиномиальных графах Шилла с $b = 4$*, Труды ИММ УрО РАН **28** (2022), no. 2, 176–186.

[7] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, *Shilla graphs with $b = 5$ and $b = 6$*, Ural Math. J. **7** (2021), no. 2, 51–58.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург (Россия); Уральский федеральный университет, Екатеринбург (Россия)*

*E-mail:* makhnev@imm.uran.ru, kliminvasily@yandex.ru

## Конечные группы с циклическими $z$-подгруппами

В. С. Монахов

Конечную группу, в которой каждая силовская подгруппа циклическая, называют $z$-группой.

Доказана следующая

**Теорема.** *(1) Класс всех конечных групп, в которых каждая $z$-подгруппа циклическая, является радикальной наследственной локальной формацией, и в каждой группе из этого класса силовская* 2*-подгруппа нормальна.*

*(2) В конечной группе каждая $z$-подгруппа циклическая тогда и только тогда, когда каждая сверхразрешимая бипримарная подгруппа нильпотентна.*

*Работа выполнена в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция — 2030» при финансовой поддержке НАН Беларуси, проект 20260384.*

*Институт математики НАН Беларуси (Беларусь)*
*E-mail: victor.monakhov@gmail.com*

## Классификация брэйсов на свободной абелевой группе ранга 2

И. Новиков

Брэйсом $A$ называется алгебраическая система с двумя бинарными операциями $(x, y) \mapsto x + y$ и $(x, y) \mapsto x \circ y$, такими, что $(A, +)$ и $(A, \circ)$ — группы, и тождество

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) - a + (a \circ c)$$

выполнено для всех $a, b, c \in A$. Здесь $-a$ обозначает обратный к $a$ элемент по отношению к операции $+$.

Брэйсы были впервые введены в работе Румпа 2007 года [**1**] как инструмент для построения решений теоретико-множественного уравнения Янга–Бакстера.

Для фиксированного $a \in A$ отображение $\lambda_a : b \mapsto -a + (a \circ b)$ является автоморфизмом группы $(A, +)$. Заметим, что $a \circ b = a + \lambda_a(b)$.

Пусть $(A, +) = (\mathbb{Z}^2, +)$ — свободная абелева группа ранга 2. Цоколем брэйса $A$ называется подгруппа $\mathrm{Soc}(A) = \ker \lambda = \{a \in A : \lambda_a = \mathrm{id}\}$. Она является идеалом брэйса, а её ранг — инвариант изоморфизма, принимающий значения 0, 1 или 2. Ранг цоколя разбивает задачу классификации на случаи, для которых нужны разные методы. Если цоколь имеет ранг 2, то образ $\lambda(A)$ — конечная подгруппа в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Если цоколь имеет ранг 1, то образ $\lambda(A)$ бесконечен, но сохраняет прямую в $\mathbb{Z}^2$.

Ранее [**2, 3**] была получена классификация $\lambda$-гомоморфных брэйсов на $(\mathbb{Z}^2, +)$, то есть таких, для которых $\lambda_{a+b} = \lambda_a \lambda_b$. Она охватывает, в частности, брэйсы с цоколем ранга 2. В настоящем докладе будут представлены результаты для брэйсов с цоколем ранга 1, в том числе не являющихся $\lambda$-гомоморфными.

**Теорема.** *Брэйсы на $\mathbb{Z}^2$ с цоколем ранга 1 допускают явное описание с точностью до изоморфизма:*

(1) *они образуют несколько бесконечных серий, зависящих от натурального параметра и конечного набора дискретных параметров;*
(2) *мультипликативная группа каждого такого брэйса изоморфна одной из плоских кристаллографических групп.*

### Литература

[1] W. Rump. *Braces, radical rings, and the quantum Yang–Baxter equation*, J. Algebra, V. 307, 2007, 153–170.
[2] V. Bardakov, M. Neshchadim, M. Yadav. *On λ-homomorphic skew braces*, J. Pure App. Algebra, V. 226, N. 6, 2022, 106961.
[3] T. Nasybullov, I. Novikov. *Classification of λ-homomorphic braces on $\mathbb{Z}^2$*. Communications in Algebra, 53(11), 4695–4709, 2025.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: i.novikov1@g.nsu.ru*

## О ковровых группах и ковровых кольцах Ли

Я. Н. Нужин

Пусть $\Phi$ — приведенная неразложимая система корней, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа $\Phi$ над коммутативным кольцом $K$. Группа $E(\Phi, K)$ порождается корневыми подгруппами

$$x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\},\ r \in \Phi.$$

Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

*Ковром типа* $\Phi$ *над* $K$ называется набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца $K$ с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js},\ \text{при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0,$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j),\ r, s, ir+js \in \Phi.$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ определяет *ковровую* подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ группы $E(\Phi, K)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством $M$. Ковер $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над кольцом $K$ называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть если $E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r),\ r \in \Phi$.

Простая комплексная алгебра Ли типа $\Phi$ обладает базисом Шевалле

$$\{e_r,\ r \in \Phi;\quad h_s,\ s \in \Pi\}, \tag{1}$$

структурные константы которого являются целыми числами. Поэтому можно определить кольцо (алгебру) Ли $L(\Phi, K)$ с базисом Шевалле (1) над произвольным коммутативным кольцом $K$. По определению считаем, что подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ кольца Ли $L(\Phi, K)$ порождается (относительно обеих операций) всеми множествами $\mathfrak{A}_r e_r,\ \ r \in \Phi$, где элементы $e_r$ из базиса (1). Будем называть $L(\Phi, \mathfrak{A})$ *ковровым* подкольцом Ли. Отметим, что базисные элементы $e_r,\ h_s$ не обязаны лежать в $L(\Phi, \mathfrak{A})$.

Группа $E(\Phi, K)$ действует на $L(\Phi, K)$, следовательно, подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ также действует на кольце Ли $L(\Phi, K)$, но его ковровое подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ уже не обязано быть инвариантным относительно ковровой подгруппы $E(\Phi, \mathfrak{A})$.

В докладе будут указаны связи условий инвариантности коврового кольца Ли относительно соответствующей ковровой подгруппы с замкнутостью производного ковра и существованием коврового замыкания исходного ковра.

*Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект 25-21-20059,* https://rscf.ru/project/25-21-20059/.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* nuzhin2008@rambler.ru

## Порождающие тройки сопряженных инволюций группы $\mathrm{PSU}_4(q^2)$ при нечетном $q$

Я. Н. Нужин, Т. С. Петруть

В 1994 году Г. Малле, Я. Сакcл и Т. Вайгель в работе [**1**] поставили следующую задачу.

А) Для каждой конечной простой неабелевой группы $G$ найти $n_c(G)$ — минимальное число порождающих сопряжённых инволюций, произведение которых равно 1.

Мы подтверждаем эту гипотезу для групп $\mathrm{PSU}_4(q^2)$. Получены следующие результаты.

**Теорема 1.** *Пусть $K$ — конечное поле нечетного порядка $q^2$, $q \neq 3$, и мультипликативный порядок элемента $t$ из $K$ равен $q+1$. Тогда группа $\mathrm{PSU}_4(q^2)$ порождается тремя инволюциями $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, первые две из которых перестановочны. Более того, все четыре инволюции $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\alpha\beta$ сопряжены.*

Из теоремы 1 следует ответ на задачу А) для групп $\mathrm{PSU}_4(q^2)$ при нечетном $q$.

**Теорема 2.** *Пусть $q$ — степень простого нечетного числа. Тогда*

а) $n_c(\mathrm{PSU}_4(q^2)) = 5$, *при* $q \neq 3$.
б) $n_c(\mathrm{PSU}_4(9)) = 6$.

### Литература

[1] G. Malle, J. Saxl, T. Weigel. *Generation of classical groups* // Geom. Dedicata. — 1994. — Vol. 49. — P. 85–116.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail: nuzhin2008@rambler.ru, petryt88@mail.ru*

## Об одной гипотезе Пеллегрини–Залесского

Я. Н. Нужин, А. М. Соколовская

В [**1**] записана и подтверждается для некоторых групп лиева типа ранга не больше 4 и для групп $SL_n(q)$ следующая гипотеза.

**Гипотеза 1.** *Пусть $G$ — конечная квазипростая группа лиева типа, отличная от $SL_2(2^k)$. Тогда $G$ порождается двумя регулярными унипотентными элементами.*

Два регулярных унипотентных элемента не всегда сопряжены, поэтому в [**1**] указан следующий усиленный вариант гипотезы 1.

**Гипотеза 2.** *Пусть $G$ — конечная квазипростая группа лиева типа, отличная от $SL_2(2^k)$, $SL_2(9)$ и $PSL_2(9)$. Тогда $G$ порождается двумя сопряженными регулярными унипотентными элементами.*

Нами доказана

**Теорема 1.** *Для любого целого числа $k \geq 1$ группы $Sp_4(2^{k+1})$, $SU_4(2^{2k})$, $SU_5(2^{2k})$ и $G_2(2^k)$ порождаются двумя сопряженными регулярными унипотентными элементами.*

Объединяя теорему 1 и результаты статьи [**1**], получаем

**Следствие.** *Для групп лиева типа ранга 2 над полем характеристики 2 гипотеза 2 справедлива.*

*Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект 25-21-20059,* https://rscf.ru/project/25-21-20059/.

Литература

[1] M. A. Pellegrini, A. E. Zalesski. *Minimal generation of finite simple groups of Lie type by regular unipotent elements*. European Journal of Mathematics, **12**: 2 (2026), 1–33.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* nuzhin2008@rambler.ru, sokolovskaya-anna-24@mail.ru

## О группах, порожденных неединичными пересечениями со всеми корневыми подгруппами группы Шевалле над полем

Я. Н. Нужин, Е. Н. Троянская

Пусть $\Phi$ — приведенная неразложимая система корней, $\Phi(F)$ — группа Шевалле типа $\Phi$ над полем $F$. Группа $\Phi(F)$ порождается корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(F) = \{x_r(t) \mid t \in F\},\ r \in \Phi.$$

**Теорема 1.** *Пусть подгруппа $G$ группы $\Phi(F)$ имеет неединичные пересечения со всеми корневыми подгруппами $X_r$, $r \in \Phi$, и порождается этими пересечениями, причем корневая подгруппа $X_{r_0}$ лежит в $G$ для какого-то корня $r_0 \in \Phi$. Тогда либо $G = \Phi(F)$, либо $\Phi$ типа $B_n$, $n \geq 2$, $C_n$, $n \geq 2$, $F_4$ или $G_2$, поле $F$ несовершенно, $r_0$ — короткий корень, и с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле $\widehat{\Phi}(F)$ справедливо одно из следующих утверждений.*

(а) *$\Phi$ типа $B_n$, $n \geq 3$, или $F_4$, $F$ — несовершенное поле характеристики 2, и $G \cap X_r = x_r(F)$ для всех коротких корней $r$, а для длинных корней $G \cap X_r = x_r(P)$, где $P$ — подполе поля $F$ с условием $F^2 \subseteq P \subset F$.*

(б) *$\Phi$ типа $C_n$, $n \geq 2$, $F$ — несовершенное поле характеристики 2, и $G \cap X_r = x_r(F)$ для всех коротких корней $r$, а для длинных корней $G \cap X_r = x_r(P)$, где $P$ — некоторая подгруппа аддитивной группы поля $F$ с условиями $F^2 \subseteq P \subset F$ и $t^{-1} \in P$ для любого $t \in P \setminus \{0\}$.*

(в) *$\Phi$ типа $G_2$, $F$ — несовершенное поле характеристики 3, и $G \cap X_r = x_r(F)$ для всех коротких корней $r$, а для длинных корней $G \cap X_r = x_r(P)$, где $P$ — некоторое подполе поля $F$ с условием $F^3 \subseteq P \subset F$.*

Теорема 1 в определенной степени дополняет известные результаты Дж. Маклафлина [**1**] и В. М. Левчука [**2**].

*Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект 25-21-20059,* https://rscf.ru/project/25-21-20059/.

Литература

[1] McLaughlin J. E. *Some groups generated by transvections.* Arch. Math., 1967, vol. 18, pp. 364–368.

[2] Левчук В. М. *О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем* // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 504–517.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* nuzhin2008@rambler.ru, troyanskaya.elizaveta@yandex.ru

## Неразрешимые конечные группы с минимальным числом несопряженных максимальных разрешимых подгрупп

Д. О. Ревин

Доклад основан на совместной работе с В. Н. Тютяновым.

*Максимальной разрешимой подгруппой* группы называется максимальная по включению разрешимая подгруппа. Из теоремы Силова легко вытекает следующий факт: *конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда в ней все максимальные разрешимые подгруппы сопряжены.* Таким образом, в неразрешимой конечной группе имеется не менее двух классов сопряженности максимальных разрешимых подгрупп. Удается также доказать следующее утверждение.

**Теорема.** *Не существует конечных групп с двумя классами сопряженности максимальных разрешимых подгрупп.*

Наименьшее число классов сопряженности максимальных разрешимых подгрупп в неразрешимой конечной группе — три. Этим свойством обладает группа $\mathrm{PSL}_2(7)$. В докладе будет обсуждаться возможность полного описания всех конечных групп ровно с тремя классами максимальных разрешимых подгрупп.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-41-10008,* https://rscf.ru/project/25-41-10008/.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия); Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* revin@math.nsc.ru

## Группы автоморфизмов малых четных порядков конечных полуполей

Д. С. Скок

Полуполя $(Q,+,*)$ и $(Q',+,\circ)$ называются *изотопными*, если существует тройка $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$ изоморфизмов аддитивной группы $(Q,+)$ на аддитивную группу $(Q',+)$, удовлетворяющая условию $x^\alpha\circ y^\beta=(x*y)^\gamma$ $(x,y\in Q)$. Такая тройка называется *изотопизмом*. При $Q=Q'$ изотопизм называют *автотопизмом* полуполя $Q$. Если $\alpha=\beta=\gamma$, то изотопизм есть изоморфизм. Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}Q$ полуполя, таким образом, является подгруппой в его группе автотопизмов $\operatorname{At}Q$.

По известному предположению Д. Хьюза 1959 года, группа автотопизмов $\operatorname{At}Q$ любого неассоциативного конечного полуполя $Q$ разрешима. В связи с этой гипотезой интересует перечисление полуполей с фиксированными подгруппами автотопизмов и автоморфизмов малых четных порядков. Такое перечисление вносит вклад и в решение структурных вопросов В.М. Левчука (2013) о конечных квазиполях и полуполях.

Дополняя и обобщая предыдущие результаты для полуполевых проективных плоскостей порядка $p^4$, получаем результаты о подгруппах автоморфизмов.

**Теорема 1.** *Полуполе $Q$ порядка $p^4$, где $p>2$ — простое число, не допускает подгруппы автоморфизмов порядка 8, изоморфной диэдральной группе $D_8$.*

**Теорема 2.** *Пусть $Q$ — неассоциативное полуполе порядка $p^4$, $p>2$ — простое число, и $H<\operatorname{Aut}Q$ — подгруппа автоморфизмов.*

1. *Если $H\simeq Q_8$, то $p\equiv -1 \pmod 4$, и полуполе $Q$ содержит единственное подполе порядка $p^2$.*
2. *Если $H\simeq A_4$, то $\operatorname{Aut}Q\simeq A_4$, и полуполе $Q$ содержит точно семь подполей порядка $p^2$.*

Существование подгруппы автоморфизмов $H\simeq Q_8$ подтверждается построением примеров полуполей порядков $3^4$ и $7^4$. В случае $p=3$ для единственного полуполя с таким условием $\operatorname{Aut}Q\simeq Q_8$, в случае $p=7$ для всех неизоморфных примеров $\operatorname{Aut}Q\simeq Q_{16}$ (обобщенной группе кватернионов).

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия); Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* skokdarya@yandex.ru

## О полинильпотентной аппроксимируемости древесных произведений групп

Е. В. Соколов

Большая часть утверждений об аппроксимируемости древесных произведений доказана в предположении, что аппроксимирующий класс групп является корневым (т. е. замкнутым относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений). Результатов об аппроксимируемости данной конструкции некорневыми классами нильпотентных и полинильпотентных групп имеется очень мало. В случае, когда дерево имеет две вершины, их исчерпывающий обзор приводится в [**1**]. Помимо этого известны, по-видимому, лишь критерии нильпотентной аппроксимируемости фундаментальных групп произвольного графа конечных групп [**2**, теорема 6] и конечного графа бесконечных циклических групп [**3**, теоремы 5 и 6]. Данный перечень дополняет следующая

**Теорема.** *Пусть $\mathcal{N}^{\mathfrak{tf}}$ — класс всех нильпотентных групп без кручения и для каждого $k \geqslant 1$ символ $Poly_k\mathcal{N}^{\mathfrak{tf}}$ обозначает класс групп, обладающих субнормальными рядами длины, не превосходящей $k$, с факторами из класса $\mathcal{N}^{\mathfrak{tf}}$. Пусть также $T$ — древесное произведение $n$ (вершинных) групп ($2 \leqslant n < \infty$) с нетривиальными локально циклическими реберными подгруппами. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если все вершинные группы $\mathcal{N}^{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируемы, то группа $T$ аппроксимируется $(Poly_n\mathcal{N}^{\mathfrak{tf}})$-группами.*

(2) *Если все вершинные группы являются свободными, то группа $T$ аппроксимируется конечно порожденными $(Poly_n\mathcal{N}^{\mathfrak{tf}})$-группами. В частности, все так называемые циклически защепленные группы с одним определяющим соотношением (cyclically-pinched one-relator groups) аппроксимируются конечно порожденными $(Poly_2\mathcal{N}^{\mathfrak{tf}})$-группами.*

В общем случае остается открытым вопрос о том, можно ли в приведенной теореме уменьшить ограничения на длины полинильпотентных рядов гомоморфных образов группы $T$. Если $n = 2$ (и, в частности, если $T$ — циклически защепленная группа с одним соотношением), полученная в теореме оценка является точной.

*Исследование выполнено в рамках поддержанного ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет» гранта № 2026-03.*

Литература

[1] Sokolov E. V. *On the residual nilpotence of generalized free products of groups*, J. Algebra 657 (2024) 292–326.

[2] Varsos D. *The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups*, Houston J. Math. 22 (2) (1996) 233–248.

[3] Sokolov E. V. *Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups*, J. Algebra 582 (2021) 1–25.

*Ивановский государственный университет, Иваново (Россия)*
*E-mail:* ev-sokolov@yandex.ru

## О свойствах $\omega$-веерных формаций конечных групп

М. М. Сорокина, В. Н. Сорокина

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп называется формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Изучаются $\omega$-веерные формации, построенные В.А. Ведерниковым в [**1**], где $\omega$ — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел.

Используется стандартная терминология из [**2**]. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп; $\mathfrak{N}_q$ и $\mathfrak{G}_{q'}$ — классы всех $q$-групп и всех $q'$-групп соответственно ($q \in \mathbb{P}$); $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы $G$. Если $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп, то $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{X}} \pi(G)$.

Пусть $\delta\colon \mathbb{P} \to \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ и $f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации}\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, — функции. Формация

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\}$$

называется *$\omega$-веерной формацией с направлением $\delta$*, где $G_{\delta(p)}$ — наибольшая нормальная подгруппа группы $G$, принадлежащая классу $\delta(p)$. Направление $\delta$ называется *$b$-направлением*, если $\delta(q) = \delta(q)\mathfrak{N}_q$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *$p$-направлением*, если $\mathfrak{G}_{q'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbb{P}$; *$s$-направлением*, если для любого $q \in \mathbb{P}$ класс $\delta(q)$ содержится в классе всех $q$-разрешимых групп; через $\delta_1$ и $\delta_3$ обозначаются направления $\omega$-локальной и $\omega$-центральной формаций соответственно [**1**].

Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ через $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех $\omega$-веерных формаций с направлением $\delta$, содержащихся в $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — неединичная $\omega$-веерная формация с направлением $\delta$, то $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ является решеткой с нулем $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{E}$ — класс всех единичных групп) и единицей $\mathfrak{F}$ [**3**].

В теореме 1 получена характеризация групп, принадлежащих $\omega$-веерной формации $\mathfrak{F}$ с *bps*-направлением $\delta$, для которой в решетке $\omega\delta F(\mathfrak{F})$ имеются дополняемые атомы.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega$-веерная формация с bps-направлением $\delta$, удовлетворяющим условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Если для любого $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $\omega\delta F(\mathfrak{F})$, то каждая $\omega d$-группа из $\mathfrak{F}$ нильпотентна.*

В качестве следствий из теоремы 1 вытекают результаты для веерных формаций, $\omega$-локальных (локальных) формаций.

### Литература

[1] Ведерников В. А. *О новых типах $\omega$-веерных формаций конечных групп.* Тр. «Український математичний конгрес – 2001». Секція 1. Киев. 2002, 36–45.

[2] Шеметков Л. А. *Формации конечных групп.* М.: Наука. 1978.

[3] Максаков С. П., Сорокина М. М. *Об алгебраичности решеток $\omega$-веерных формаций конечных групп.* Дискретная математика. **34**:1 (2022), 23–35.

*Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Брянск (Россия)*
*E-mail:* mmsorokina@yandex.ru, v.n.sorokina@mail.ru

## Конечные группы с монотонными максимальными цепями

И. Л. Сохор

Пусть $G$ — неединичная конечная группа. Цепь подгрупп

$$1 = M_0 \lessdot M_1 \lessdot \ldots \lessdot M_{i-1} \lessdot M_i \lessdot \ldots \lessdot M_{n-1} \lessdot M_n = G, \tag{1}$$

в которой $M_i$ — максимальная в $M_{i+1}$ подгруппа для каждого $i$, называется максимальной цепью группы $G$. Каждой максимальной цепи (1) соответствует конечная последовательность натуральных чисел $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, где $j_i = |M_i : M_{i-1}|$ — индекс подгруппы $M_{i-1}$ в группе $M_i$, $i = 1, \ldots, n$. Максимальную цепь (1) группы $G$ будем называть монотонной, если последовательность $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ является неубывающей или невозрастающей.

Получена классификация конечных групп с монотонными максимальными цепями в собственных подгруппах. Зафиксируем следующие обозначения: $p$, $q$, $r$ — различные простые числа, $m$ — показатель $p$ по модулю $q$, $t \in \mathbb{N}$.

**Теорема.** *Пусть $G$ — конечная группа такая, что все максимальные цепи в каждой собственной подгруппе группы $G$ монотонны. Тогда группа $G$ является группой одного из следующих типов.*

(1) *Если все максимальные цепи группы $G$ монотонны, то*
  (1.1) *$G$ — примарная группа;*
  (1.2) *$G$ — циклическая группа порядка $pq$;*
  (1.3) *$G$ — $p$-замкнутая группа Фробениуса порядка $p^{mt}q$ и либо $G$ — группа типа $A$, либо $p < q$ и $t > 1$.*

(2) *Если группа $G$ содержит немонотонную максимальную цепь, то*
  (2.1) *при $|\pi(G)| = 3$*
    (2.1.1) *$G \cong A_5$;*
    (2.1.2) *$G$ — группа порядка $pqr$;*
    (2.1.3) *$G = C_p^{mt} \rtimes C_{qr}$ — группа Фробениуса, $C_p^{mt}$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$ и $m$ — показатель $p$ по модулю $q$ и $r$.*
  (2.2) *при $|\pi(G)| = 2$*
    (2.2.1) *$G$ — сверхразрешимая группа порядка $p^2q$;*
    (2.2.2) *$G$ — группа Шмидта с подгруппой Фраттини простого порядка;*
    (2.2.3) *$G = P \rtimes Q$ — группа Фробениуса, $|Q| = q^2$, $P$ — минимальная нормальная подгруппа порядка $p^{mt}$, $mt$ показатель $p$ по модулю $q^2$;*
    (2.2.4) *$G = P \rtimes Q$ — группа Фробениуса, $|Q| = q$, $|P| = p^{2m}$, $p > q$;*
    (2.2.5) *$G = C_p \times K$, $K$ — $p$-замкнутая группа типа $A$;*
    (2.2.6) *$G = C_p^{mt} \rtimes (C_q \rtimes C_p)$, $p$ делит $(q-1)$, $t \geq 1$, $C_p^{mt}$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$.*

Напомним, что группой типа $A$ называется группа Шмидта с единичной подгруппой Фраттини. Ясно, что каждая группа типа $A$ является группой Фробениуса.

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)*
*E-mail: irina.sokhor@gmail.com*

## О бесконечных группах Цассенхауза

Н. М. Сучков

Группой Цассенхауза ($Z$-группой) называется дважды транзитивная группа подстановок с тривиальным стабилизатором каждых трех точек. Инволюция $y$ группы $X$ называется конечной, если $|yy^x| < \infty$ для каждого $x \in X$.

Если в $Z$-группе $G$ локально конечный стабилизатор точки $B = G_\alpha$ и неединичный стабилизатор двух точек $H = G_{\alpha\beta}$, то $B = U \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром $U$ и дополнительным множителем $H$.

**Теорема 1.** *Пусть $Z$-группа $G$ содержит конечную инволюцию, а её стабилизатор точки $B$ — локально конечная группа Фробениуса, ядро $U$ которой является 2-подгруппой. Тогда $G$ изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля $Q$ характеристики 2.*

Приведём одно из следствий этого результата для абстрактных групп. Напомним, что неединичная подгруппа $U$ группы $X$ называется сильно изолированной в $X$, если она содержит централизатор каждого своего неединичного элемента.

**Теорема 2.** *Если группа $G$ с конечной инволюцией содержит сильно изолированную в $G$ локально конечную 2-подгруппу $U$ ранга $> 1$, то либо $U$ нормальна в $G$, либо для группы $G$ выполняется заключение теоремы 1.*

*Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 24-41-10004.*

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail: ns7654321@mail.ru*

## О контрпримерах к гипотезе Мюллера

Д. А. Тауснев, А. К. Шлепкин, А. А. Шлепкин

**Задача 21.99 (П. Мюллер, [1]).** Пусть $G \le \mathrm{Sym}(X)$ — транзитивная группа подстановок конечного множества $X$. Верно ли, что для любых $x \neq y$ из $X$ существует $g \in G$, для которого

$$g(x) = y, \qquad |\operatorname{Fix}(g)| \neq 1\,?$$

Обозначим указанное свойство через $(P)$. Контрпример уже построен К. Мулярчиком [**2**]. Нас интересует структура возможных контрпримеров.

**Определение.** *Минимальный контрпример* — это конечная транзитивная группа $G \le \mathrm{Sym}(X)$, не удовлетворяющая $(P)$, для которой $|X|$ минимально среди степеней всех контрпримеров.

**Теорема 1 (группы, порождённые циклами).** *Если транзитивная группа $G$ порождена подстановками, каждая из которых имеет ровно один нетривиальный цикл, то $G$ удовлетворяет $(P)$.* В частности, $(P)$ верно для транзитивных групп, порождённых подстановками с попарно взаимно простыми длинами нетривиальных циклов, и для примитивных групп, содержащих нетривиальный цикл.

**Теорема 2 (редукция по циклам).** Пусть $J(G)$ — подгруппа, порождённая всеми нетривиальными циклами $G$, а $\mathcal{B}$ — множество её орбит на $X$. *Если индуцированная группа $G^{\mathcal{B}}$ удовлетворяет $(P)$ на $\mathcal{B}$, то $G$ удовлетворяет $(P)$ на $X$.* При этом $J(G) \lhd G$, а $\mathcal{B}$ — система блоков.

**Теорема 3 (редукция по деренжментам).** Пусть $D(G)$ порождена всеми деренжментами $G$, то есть подстановками без неподвижных точек. *Тогда $D(G) \lhd G$ и $D(G)$ транзитивна на $X$; каждый элемент $g \in G \setminus D(G)$ имеет ровно одну неподвижную точку.* Доказательство использует усреднение $\sum_{h \in H} |\operatorname{Fix}(ht)| = |H|$ для транзитивной $H$ и $t \in \mathrm{Sym}(X)$ (см. также [**3**]).

**Теорема 4 (структура минимального контрпримера).** *Если $(P)$ опровергается, то существует минимальный контрпример $(G, X)$, для которого*

$$J(G) = 1, \qquad D(G) = G,$$

*причём действие $G$ на $X$ нерегулярно.* По теореме 2 для всякого минимального контрпримера $J(G) = 1$. Теорема 3 позволяет заменить $G$ на $D(G)$, сохранив степень и свойство быть контрпримером.

**Замечание.** Приведённые результаты были получены до публикации контрпримера К. Мулярчика. Этот контрпример согласуется с теоремами, изложенными в настоящей работе.

### Литература

[1] Khukhro E. I., Mazurov V. D. (eds.). *The Kourovka Notebook*. No. 21. Novosibirsk, 2026. Problem 21.99.
[2] Muliarchyk K. *A counterexample to Problem 21.99 of the Kourovka Notebook*. Preprint, 2026.
[3] Bailey R. A., Cameron P. J., Giudici M., Royle G. F. *Groups generated by derangements* // J. Algebra. 2021. Vol. 572. P. 245–262.

*Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, Красноярск (Россия)*

## О финитной аппроксимируемости и слабой мощности обобщенных свободных произведений

А. И. Ткачев

Обозначим через $G = *_{i\in I}G_i(H)$ обобщенное свободное произведение групп $G_i$ с одной объединенной подгруппой $H$. Пусть здесь и далее $\Omega$ — семейство всех подгрупп конечного индекса группы $H$, нормальных в $G$. Семейство подгрупп группы называется фильтрацией, если их пересечение совпадает с единичной подгруппой. Группа имеет конечный общий ранг, если существует натуральное $r$ такое, что каждое конечное множество ее элементов содержится в подгруппе, порожденной не более чем $r$ элементами.

**Теорема 1.** *Пусть $G = *_{i\in I}G_i(H)$ и индексы $[G_i : H]$ конечны и ограничены в совокупности. Группа $G$ финитно аппроксимируема, если выполнено хотя бы одно из следующих условий.*

(1) *Семейство $\Omega$ — фильтрация.*
(2) *Семейство $\Omega$ непусто, а группа $H$ финитно аппроксимируема и имеет конечный общий ранг.*

**Теорема 2.** *Пусть $G = *_{i\in I}G_i(H)$ и множество $I$ конечно и содержит более одного элемента, $H \neq G_i$ и индексы $[G_i : H]$ конечны для всех $i \in I$. Если группа $G$ финитно аппроксимируема и все свободные множители $G_i$ удовлетворяют нетривиальным тождествам, то семейство $\Omega$ является фильтрацией.*

Элемент группы называется слабо мощным элементом, если существует натуральное $m$ такое, что для каждого натурального $n$ найдется гомоморфизм данной группы на конечную группу, при котором образ данного элемента имеет порядок $mn$.

**Теорема 3.** *Пусть $G = *_{i\in I}G_i(H)$ и подгруппа $H$ финитно отделима в $G$. Тогда каждый элемент $g \in G$, не сопряженный ни в какой свободный множитель $G_i$, является слабо мощным в $G$.*

**Следствие.** *Пусть $G = *_{i\in I}G_i(H)$ и множество $I$ содержит более одного элемента, $H \neq G_i$ для каждого $i \in I$, и все свободные множители $G_i$ удовлетворяют нетривиальным тождествам. Если группа $G$ финитно аппроксимируема, то каждый элемент группы $G$, не сопряженный ни в какой свободный множитель $G_i$, является слабо мощным в $G$.*

*Исследование выполнено за счет гранта по приоритетным направлениям деятельности РНФ (проект 30-2025-003994 «Аппроксимационные свойства групп»).*

*Ивановский государственный университет, Иваново (Россия)*
*E-mail:* aaalextk@yandex.ru

## Конечные факторизуемые группы с заданной системой $F(G)$-перестановочных подгрупп из сомножителей

А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. А.Н. Скиба в [**1**] предложил концепцию $X$-перестановочных подгрупп. Данная концепция позволяет анализировать случаи, когда классическая перестановочность нарушается, но сохраняется при сопряжении элементами некоторого подмножества $X \subseteq G$. Таким образом, подгруппа $H$ называется $X$-*перестановочной* с $K$, если существует элемент $x \in X$ такой, что

$$HK^x = K^xH.$$

Дальнейшим обобщением понятия $X$-перестановочных подгрупп стала концепция $X$-полуперестановочных подгрупп [**2**]: подгруппа $A$ группы $G$ называется $X$-полуперестановочной в $G$, если $A$ обладает добавлением $T$ в $G$ (то есть $G = AT$) таким, что $A$ $X$-перестановочна с каждой подгруппой $T_1$ из $T$. Множество всех таких добавлений $T$ обозначается через $X(A)$. Таким образом, $A$ является $X$-полуперестановочной тогда и только тогда, когда $X(A) \neq \varnothing$.

Особый интерес представляет случай, когда множество $X$ совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$. В статье [**2**] В. Го, К.П. Шумом и А.Н. Скибой в этом случае были установлены признаки сверхразрешимости в терминах $F(G)$-полуперестановочности максимальных подгрупп, холловых подгрупп, максимальных из силовских подгрупп.

В настоящей работе рассматривается случай, когда примарные циклические подгруппы из сомножителей $F(G)$-полуперестановочны.

**Определение.** *Подгруппа $A$ называется $c$-$F(G)$-**полуперестановочной** в $G$, если существует добавление $T$ в $G$ такое, что $A$ и каждая циклическая примарная подгруппа из $A$ $F(G)$-перестановочна с каждой подгруппой из $T$.*

Доказана следующая

**Теорема.** *Пусть $A$ и $B$ — сверхразрешимые подгруппы группы $G$ и $G = AB$ такие, что $(|A|, |B|) = 1$. Если $A$ и $B$ $c$-$F(G)$-полуперестановочны в $G$, то $G$ сверхразрешима.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РНФ (грант №Ф26РНФ-101).*

Литература

[1] Скиба А. Н. *$H$-перестановочные подгруппы* // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2003. Т. 19, № 4. С. 90–92.

[2] Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. *$X$-semipermutable subgroups of finite groups* // Journal of Algebra. 2007. Vol. 315. P. 31–41.

*Брестский университет им. А.С. Пушкина, Брест (Беларусь)*
*E-mail:* alexander.trofimuk@gmail.com

## Централизаторная размерность HNN-расширений с абелевой базой

А. В. Усиков

Пусть $A, B \leqslant H$, где $H$ — конечно порожденная абелева группа, и пусть $\varphi\colon A \to B$ — изоморфизм. Тогда группа

$$G = \langle H, t \mid t^{-1}at = \varphi(a),\ \forall a \in A\rangle$$

называется *HNN-расширением с абелевой базой* $H$. В работе [**1**] установлен критерий финитной аппроксимируемости таких групп в терминах ассоциированных подгрупп $A$, $B$ и изоморфизма $\varphi$. Позже в [**2**] было доказано, что финитная аппроксимируемость для этих групп равносильна линейности.

*Централизаторная размерность* группы $G$ (обозначение: $\operatorname{cdim} G$) определяется как точная верхняя грань длин цепочек строго вложенных централизаторов в группе $G$.

В настоящей работе доказана следующая

**Теорема.** *Для группы $G$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\operatorname{cdim} G < \infty$;
(2) $\operatorname{cdim}\langle\langle H\rangle\rangle_G < \infty$.

Используя критерий из [**1**], можно показать, что условие (2) влечет финитную аппроксимируемость группы $G$. Сопоставляя это с результатами работы [**2**], получаем следующее

**Следствие.** *Для группы $G$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\operatorname{cdim} G < \infty$;
(ii) $G$ финитно аппроксимируема;
(iii) $G$ линейна.

Литература

[1] Andreadakis S., Raptis E., Varsos D. *A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated abelian groups* // Archiv der Mathematik. — 1988. — Т. 50. — №. 6. — С. 495–501.
[2] Metaftsis V., Raptis E., Varsos D. *On the linearity of HNN-extensions with abelian base* // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2012. — Т. 216. — №. 5. — С. 997–1003.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.usikov@g.nsu.ru

## О сложности решетки квазимногообразий нильпотентных ступени не выше двух групп

С. А. Шахова

В [**1**] М.И. Каргаполов поставил проблему (вопрос 4.31): описать решётку квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп. Оказалось, что эта решётка имеет довольно сложное строение.

Обозначим через $qG$ — квазимногообразие, порождённое группой $G$, $L_q(\mathcal{N})$ — решётка квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{N}$; $F_2(\mathcal{N})$ — свободная в квазимногообразии $\mathcal{N}$ группа ранга 2; $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ — многообразие нильпотентных ступени не выше двух групп экспоненты $p^\delta$ с коммутантом экспоненты $p^\lambda$, $p$ — простое число, $\delta, \lambda$ — натуральные числа, $\delta \geq \lambda$.

В [**2, 3**] получены теоремы, характеризующие сложность решётки $L_q(\mathcal{R}_{\delta,\lambda})$ при $\delta \geq 2$. В работе [**2**] показано, что при $\delta \geq 2$ существует бесконечное множество квазимногообразий $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{\delta,1}$, порождённых конечной группой, и таких, что для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющего свойству $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{\delta,1}$, интервал $[\mathcal{M},\ \mathcal{N}]$ в решётке квазимногообразий континуален. В частности, континуален интервал $[qF_2(\mathcal{R}_{\delta,1}),\ \mathcal{N}]$ для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$, удовлетворяющего свойству $qF_2(\mathcal{R}_{\delta,1}) \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{\delta,1}$.

В [**3**] доказано, что если $\delta \geq \lambda \geq 2$, и $\delta > \lambda \geq 2$ при $p = 2$, $G \in \mathcal{R}_{\delta,\lambda}$, $G$ — конечная группа, заданная в $\mathcal{R}_{\delta,\lambda}$ коммутаторными определяющими соотношениями, $qF_2(\mathcal{R}_{\delta,\lambda}) \subsetneq qG$, то интервал $[qF_2(\mathcal{R}_{\delta,\lambda}),\ qG]$ в решётке $L_q(\mathcal{R}_{\delta,\lambda})$ имеет мощность континуума.

В настоящей работе доказана

**Теорема.** *Если $p \neq 2$, квазимногообразие $\mathcal{M}$ содержит группу, в которой есть нецентральный элемент порядка $p$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{3,2}$, $F_2(\mathcal{R}_{3,2}) \in \mathcal{M}$, то интервал $[qF_2(\mathcal{R}_{3,2}), \mathcal{M}]$ в решётке $L_q(\mathcal{R}_{3,2})$ имеет мощность континуума.*

### Литература

[1] *Коуровская тетрадь. Нерешённые задачи теории групп*, 20-е изд. / Под ред. В.Д. Мазурова и Е.И. Хухро, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2022.

[2] А.И. Будкин, *О квазимногообразиях, порождённых конечной группой и не имеющих независимых базисов квазитождеств*, Сиб. мат. журн., **61**:6 (2020), 1234–1246.

[3] А.И. Будкин, С.А. Шахова, *О сложности решётки квазимногообразий нильпотентных групп*, Сиб. электрон. матем. изв., **21**:2 (2024), 1118–1131.

*Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)*
*E-mail:* sashakhova@gmail.com

## Существование континуума множеств $\pi$ простых чисел, для которых существование холловой $\pi$-подгруппы влечёт сильную $\pi$-теорему Силова

В. Д. Шепелев

Пусть $\pi$ — множество простых чисел. Подгруппа $H$ конечной группы $G$ называется *холловой $\pi$-подгруппой*, если $|H|$ является $\pi$-числом, а индекс $|G : H|$ — $\pi'$-числом. Через $E_\pi$ обозначим класс групп, для которых существует холлова $\pi$-подгруппа. Класс $D_\pi$ состоит из групп, в которых такие подгруппы существуют, сопряжены, а каждая $\pi$-подгруппа содержится в одной из них. Обозначим через $W_\pi$ класс групп, все подгруппы которых принадлежат $D_\pi$. Следуя терминологии Х. Виланда, про группы из класса $W_\pi$ также говорят, что они удовлетворяют *сильной $\pi$-теореме Силова*. Всегда $W_\pi \subseteq D_\pi \subseteq E_\pi$; оба включения в общем случае могут быть строгими.

В задаче 17.103 Коуровской тетради **[2]** Д. О. Ревиным поставлен вопрос о существовании континуума множеств простых чисел $\pi$, для которых $E_\pi = D_\pi$. Мы даем положительный ответ в более сильной форме. Обозначим через $\mathbb{P}$ множество всех простых чисел и положим

$$A = \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv 1 \pmod 3 \text{ или } p \equiv 1 \pmod 4\},$$
$$B = \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv 11 \pmod{12},\ p > 11\}.$$

**Теорема.** *Для любого $X \subseteq B$ и $\pi = A \cup X$ выполнено $E_\pi = D_\pi = W_\pi$. В частности, существует континуум множеств простых чисел $\pi$, для которых наличие холловой $\pi$-подгруппы в конечной группе влечёт сильную $\pi$-теорему Силова.*

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-41-10008,* https://rscf.ru/project/25-41-10008/.

Литература

[1] *Коуровская тетрадь: нерешённые задачи теории групп.* 21-е изд. Новосибирск, 2026. Задача 17.103.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Математический центр в Академгородке, Новосибирск (Россия); Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* v.shepelev@g.nsu.ru

## О локально конечных группах, содержащих прямые произведения обобщенных обратных полудиэдральных групп

А. А. Шлепкин, В. С. Сенашов

Группу $G = \langle d, i \mid d^{2^n} = i^2 = 1, d^i = d^{2^{n-1}+1}, n \geqslant 3\rangle$ будем называть обратной полудиэдральной группой (общепринятого названия для данной группы нет, например, в [**1**] эта группа называется модулярной максимально-циклической группой порядка $2^{n+1}$). Группу $G = \langle r, s \mid r^{8m} = s^2 = 1, srs = r^{4m+1}, m \in \mathbf{N}\rangle$ будем называть обобщенной обратной полудиэдральной группой. В случае, когда $m$ — степень двойки, $G$ — в точности обратная полудиэдральная группа. Таким образом, обобщенная обратная полудиэдральная группа не обязательно 2-группа.

Будем называть группу $G$ обобщенной локально конечной обратной полудиэдральной группой, если она является объединением возрастающей цепочки обобщенных обратных полудиэдральных групп $G_i$:

$$G_1 < \ldots < G_i < \ldots, \qquad G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

В данной работе получен следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть $d$ — фиксированное натуральное число, $G$ — локально конечная группа, насыщенная группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{R_1^{(k)} \times \cdots \times R_d^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\},$$

*$d$ — фиксированное натуральное число, где $R_i^{(k)}$ — обобщенные обратные полудиэдральные группы. Тогда*

$$G = A_1 \times \cdots \times A_d,$$

*где $A_i$ — обобщенные локально конечные обратные полудиэдральные группы.*

*Работа поддержана РНФ, проект 24-41-10004.*

Литература

[1] Даммит, Д. С., Фут, Р. *Абстрактная алгебра* (3 изд.). Wiley, 2004. С. 71–72. ISBN 9780471433347.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail: Vasily.Senashov@yandex.ru*

## Порядки внешних диагональных автоморфизмов конечных простых симплектических групп

Н. Е. Яковлев

Работа является частью проекта по описанию множеств порядков элементов конечных почти простых групп, т.е. таких групп $G$, что $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$ для некоторой простой группы $L$. Для решения данной задачи достаточно решить следующую задачу: для любой конечной простой группы $L$ и любого автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} L$ найти множество $\omega(L\alpha)$ порядков элементов из смежного класса $L\alpha$.

Мы рассматриваем случай, когда $L = PSp_{2n}(q)$ — проективная симплектическая группа над полем нечётного порядка $q$ и $\alpha$ — внешний диагональный автоморфизм группы $L$. Группа внутренне-диагональных автоморфизмов группы $L$ совпадает с $PCSp_{2n}(q)$ — проективной группой подобий соответствующей кососимметрической формы, при этом факторгруппа $PCSp_{2n}(q)/L$ имеет порядок 2. Таким образом, для любого $\alpha \in PCSp_{2n}(q) \setminus L$ выполнено $L\alpha = PCSp_{2n}(q) \setminus L$.

**Теорема.** *Пусть $q = p^m$, где $p$ — нечётное простое число, $n \geq 2$. Если $a \in \omega(PCSp_{2n}(q) \setminus PSp_{2n}(q))$, то $a$ делит одно из следующих чисел:*

1) *$e[q^{n_1} - 1, \ldots, q^{n_s} - 1]$, где $n_1 + \cdots + n_s = n$, $s \geq 1$, и $e = 1$, если либо $n$ нечётно, либо $s \geq 2$, и $e = 1/2$ в противном случае;*
2) *$e[q^{m_1} + 1, \ldots, q^{m_l} + 1]$, где $m_1 + \cdots + m_l = n$, $l \geq 1$, и $e = 1$, если все $m_i$ имеют одинаковую чётность, и $e = 2$ в противном случае;*
3) *$e[q^{n_1} - 1, \ldots, q^{n_s} - 1, q^{m_1} + 1, \ldots, q^{m_l} + 1]$, где $n_1 + \cdots + n_s + m_1 + \cdots + m_l = n$, $s, l \geq 1$, и $e = 1$, если среди $n_i$ есть чётные, и $e = 2$ в противном случае;*
4) *$ep^k[q - 1, q^{n_1} - 1, \ldots, q^{n_s} - 1, q^{m_1} + 1, \ldots, q^{m_l} + 1]$, где $k \geq 1$, $s, l \geq 0$, $n_1 + \cdots + n_s + m_1 + \cdots + m_l = n - p^{k-1} - 1$, и $e = 1$, если $l = 0$, или $l \geq 1$ и среди $n_i$ есть чётные, и $e = 2$ в противном случае;*
5) *$ep^k[q + 1, q^{n_1} - 1, \ldots, q^{n_s} - 1, q^{m_1} + 1, \ldots, q^{m_l} + 1]$, где $k \geq 1$, $s, l \geq 0$, $n_1 + \cdots + n_s + m_1 + \cdots + m_l = n - p^{k-1} - 1$, и $e = 1$, если либо $s = 0$ и все $m_i$ нечётны, либо $s \geq 1$ и среди $n_i$ есть чётные, и $e = 2$ в противном случае.*

*И обратно, каждое из указанных чисел лежит в множестве $\omega(PCSp_{2n}(q) \setminus PSp_{2n}(q))$.*

Доказательство использует критерий того, что линейное преобразование является подобием невырожденной кососимметрической формы из [**1**].

### Литература

[1] Britnell J.R. *Cycle index methods for matrix groups over finite fields*: PhD Thes. — Oxford: Univ. Oxford, 2003.—120 p.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* n.yakovlev2@g.nsu.ru

## Units of integral group rings of groups of prime orders

R. Zh. Aleev

We hold to the following notations.

(1) $G = \langle x \rangle$ is a cyclic group of prime order $p = 2m + 3 \geqslant 5$.
(2) $\alpha$ is a primitive complex root of 1 of degree $p$.
(3) $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}(\alpha)$ is the $p$-th cyclotomic field.
(4) $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p)$ is the Galois group of the field $\mathbf{Q}_p$.
(5) $g$ is a primitive root modulo $p$.
(6) $\sigma$ is an automorphism of the field $\mathbf{Q}_p$ satisfying the condition $\sigma(\alpha) = \alpha^g$.
(7) $\rho_i = \sigma^{i-1}\left(\dfrac{1-\sigma(\alpha)}{1-\alpha}\right) = \dfrac{1-\sigma^i(\alpha)}{1-\sigma^{i-1}(\alpha)}$ for $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.
(8) $\chi_j$ for $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ is a character of the group $G$, where $\chi_j(x) = \alpha^j$.
(9) $e(\chi_j)$ for $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ is the minimal idempotent of the complex group algebra $\mathbf{C}G$ corresponding to the character $\chi_j$.
(10) $u(\lambda) = e(\chi_0) + \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p)} \tau(\lambda) e(\chi_1^\tau)$ for $\lambda \in \mathbf{Q}_p^*$.

**Theorem.** *For any prime* $p \geqslant 5$

$$\langle -x \rangle \times \langle u(-\rho_m^{\frac{p-1}{2}}) \rangle \times \prod_{i=1}^{m-1} \langle u(\rho_i \rho_m^{-1}) \rangle$$

*is a subgroup of the finite index of the group of units* $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$ *of an integer group ring* $\mathbf{Z}G$. *Moreover, this index takes the form*

$$d \cdot \frac{p-1}{2},$$

*where* $d$ *divides* $h_+(p)$ *— the class number of the field* $\mathbf{Q}_p \cap \mathbf{R}$.

In [**1**], a study of the units of integral group rings of groups of any prime order was announced. Unfortunately, the full proof has not been published. Also, in the article [**2**], a similar result was obtained under certain restrictions. Therefore, an improved version of the result from [**1**] is proposed.

### References

[1] R. Zh. Aleev, *Circular units in group rings of finite abelian groups.* Algebra and Logic: Proceedings of the International Russian-Chinese Seminar. Irkutsk: Publishing House of Irkutsk State Pedagogical University, 2007, P. 11–14.
[2] R. A. Ferraz, *Units of* $\mathbb{Z}C_p$ // Contemporary Mathematics. 2009. Vol. 499. P. 107–119.

*South Ural State University (NRU); Chelyabinsk State University, Chelyabinsk (Russia)*
*E-mail: aleevrifhat@gmail.com, aleev@csu.ru*

## Non-Frobenius equivalenced schurian schemes

A. A. Buturlakin

The talk is based on a joint paper with A.V. Vasil'ev.

An association scheme is called *equivalenced* if all its irreflexible basic relations are of the same size. Here we are concerned with schurian equivalenced schemes — the schemes associated with groups whose non-diagonal 2-orbits are of the same size. We are wondering which of them are not *Frobenius*, that is cannot be obtained as 2-orbits of some Frobenius group. Any schurian equivalenced scheme is a set of 2-orbits of a $\frac{3}{2}$-transitive group. There is a classification of these groups (it was finished in [**1**]), using which one can describe all non-Frobenius equivalenced schurian schemes using quite simple arguments and computations in GAP with the exception of so-called *one-dimensional affine schemes*. A one-dimensional affine group is a subgroup of $A\Gamma L_1(q)$ containing the subgroup of translations, and the scheme corresponding to such a group is called one-dimensional affine scheme.

For one-dimensional affine groups we provide criteria of half-transitivity and semiregularity. We also give a necessary and sufficient condition for a relatively closed one-dimensional half-transitive group to contain a Frobenius subgroup with the same 2-orbits.

*The authors acknowledge the support of the Russian Science Foundation, Project No. 24-11-00127.*

### References

[1] M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J. Saxl, *The classification of $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups and $\frac{1}{2}$-transitive linear groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **147** (2019), 5023–5037.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* buturlakin@math.nsc.ru

## The fundamental theorem of affine geometry on the first Heisenberg group

A. V. Greshnov

We define the canonical first Heisenberg group $\mathbb{H}^1_\alpha$ **[1, 2]** in the standard Euclidean space $\mathbb{R}^3$ with the coordinate system $(x, y, t)$ induced by standard coordinate frame $(O, e_1, e_2, e_3)$ using the commutator table $[e_1, e_2] = \alpha e_3$, $\alpha > 0$. Then the left-invariant basis vector fields $\{X, Y, T\}$ of the Lie algebra of $\mathbb{H}^1_\alpha$ are given by

$$X = e_1 - \frac{\alpha}{2} y e_3, \quad Y = e_2 + \frac{\alpha}{2} x e_3, \quad T = e_3.$$

Affine subspace of $\mathbb{R}^3$ defined as

$$h = h_{\lambda,\mu,A}(s) = A + s(\lambda X(A) + \mu Y(A)) = \exp(s(\lambda X + \mu Y))(A), \quad s \in \mathbb{R},$$

where $\lambda, \mu$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ are some numbers, is called the horizontal straight line $h$ passing through the point $A \in \mathbb{H}^1_\alpha$. Consider a surjective mapping $F : \mathbb{H}^1_\alpha \to \mathbb{H}^1_\alpha$ that has the following **2-point horizontal property**: for any two points $A, B \in h$ ($h$ is some horizontal line), we have $F(A) \neq F(B)$, and the straight line $p_{F(A)F(B)}$, passing through the points $F(A)$, $F(B)$, is also horizontal.

**Theorem.** *Surjective mapping $F : \mathbb{H}^1_\alpha \to \mathbb{H}^1_\alpha$, which satisfies the 2-point horizontal property, is affine in the usual sense.*

The classical Fundamental Theorem of Affine Geometry, going back to Von Staudt's work in the 1840s **[3]**, characterizes invertible affine maps $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for $n \geq 2$. Namely, if $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a bijection so that for any line $l$, the image $f(l)$ is also a line, then $f$ is affine. Recall that a mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is affine (transformation) if there is an invertible $(n \times n)$-matrix $M$ and a vector $b \in \mathbb{R}^n$ such that $f(x) = Mx + b$ for every $x \in \mathbb{R}^n$.

### References

[1] A. V. Greshnov and M. V. Tryamkin, *Exact Values of Constants in the Generalized Triangle Inequality for Some $(1, q_2)$-Quasimetrics on Canonical Carnot Groups*, Math. Notes, **98** (2015), 694–698.

[2] A. Koranyi and H. M. Reimann, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg groups*, Adv. Math, **111** (1995), 1–87.

[3] G. Von Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg: F. Korn, 1847.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: greshnov@math.nsc.ru*

## On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw

A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, M. S. Nirova

The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of a finite group $G$ is the graph, in which the vertex set is the set of all prime divisors of the order of $G$ and two different vertices $p$ and $q$ are adjacent if and only if there exists an element of order $pq$ in $G$. The paw is a graph on four vertices whose degrees are 2, 2, 3, and 1, respectively. A. S. Kondrat'ev has described finite groups with the same Gruenberg–Kegel graphs as groups $\mathrm{Aut}(J_2)$ (see **[1]**) and $A_{10}$ (see **[2]**). The Gruenberg–Kegel graphs of all these groups are isomorphic as abstract graphs to the paw. In **[3]**, the following more general problem was established: to describe finite groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic as abstract graphs to the paw. In **[3, 4, 5, 6, 7]**, the problem was reduced to the case when $p \leq 3$ and $q > 3$ for the vertex $p$ of degree 3 and the vertex $q$ of degree 1 in the Gruenberg–Kegel graph of a non-solvable investigated group.

In this talk, we discuss a recent progress in investigating the case $p = 3$.

*The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project «Ural Mathematical Center»; Agreement 075-02-2026-737).*

### References

[1] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups with prime graph as in the group* $\mathrm{Aut}(J_2)$. Proc. Steklov Inst. Math. **283(1)** (2013) 78–85.

[2] A. S. Kondrat'ev, *Finite groups that have the same prime graph as the group* $A_{10}$. Proc. Steklov Inst. Math. **285(1)** (2014) 99–107.

[3] A.S. Kondrat'ev, N.A. Minigulov, *Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group* $A_{10}$. Siberian Electr. Math. Rep. **15** (2018) 1378–1382.

[4] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *Finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw.* Trudy Inst. Math. i Mekh. UrO RAN **28(2)** (2022) 269–273.

[5] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw.* Commun. Math. Stat. **10(4)** (2022) 653–667.

[6] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, M. S. Nirova, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. Case* $q \leq 3$. Vladikavkaz Math. J. **27(3)** (2025) 90–100.

[7] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, M. S. Nirova, *Finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. Case* $p > 3$. Siberian Electr. Math. Rep. **23(1)** (2026) 707–713.

*N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Ural Mathematical Center, Yekaterinburg (Russia)*
*E-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru, n.a.minigulov@imm.uran.ru*

*Berbekov Kabardino-Balkarian University, Nalchik (Russia)*
*E-mail: nirova_m@mail.ru*

## Translation invariant linear functionals and the first Orlicz cohomology

Ya. A. Kopylov

Let $G$ be a locally compact topological group and let $E$ be a topological vector space of complex or real functions on $G$ that is invariant under left translations. Given $g \in G$ and $f \in E$, we put $(\lambda_G(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$, $x \in G$. A linear functional $\varkappa$ on $E$ is called *translation invariant* if $\varkappa(\lambda_G(g)f) = \varkappa(f)$ for any $g \in G$ and $f \in E$. Of interest is the question of the existence of discontinuous translation invariant linear functionals on $E$.

We discuss the relationship between the first $\ell^\Phi$-cohomology of an infinite finitely generated group, with $\Phi$ an $N$-function such that $\Phi$ and its complementary $N$-function satisfy the doubling condition, and translation-invariant linear functionals on the quotient $\mathcal{D}^\Phi(G)$ of the space of $\Phi$-Dirichlet finite functions by the constants.

**Theorem 1.** *Suppose that $G$ is an infinite finitely generated group, and let $\Phi$ be an $N$-function such that $\Phi$ and its complementary $N$-function satisfy the doubling condition. The following assertions are equivalent:*

(i) *the first reduced $\ell^\Phi$-cohomology $\overline{H}^1_\Phi(G)$ is zero;*
(ii) *the zero functional is the only continuous translation-invariant linear functional on $\mathcal{D}^\Phi(G)$;*

*If $G$ is nonamenable, then these assertions are also equivalent to the following:*

(iii) *the zero functional is the only translation-invariant linear functional on $\mathcal{D}^\Phi(G)$.*

**Theorem 2.** *Suppose that $G$ is an infinite finitely generated group, and let $\Phi$ be an $N$-function such that $\Phi$ and its complementary $N$-function satisfy the doubling condition. If $G$ is amenable then there exists a discontinuous translation-invariant linear functional on $\mathcal{D}^\Phi(G)$.*

*The research was carried out in the framework of the State Task to the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF-2022-0006).*

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: yakop@math.nsc.ru*

## On IBIS groups

D. Malinin, A. Vasilevich

Let $G \subseteq \mathrm{Sym}(\Omega)$ be a finite permutation group. An ordered sequence of elements of $\Omega$, $\Sigma := (\omega_1, \ldots, \omega_t)$, is irredundant for $G$ if no element in $\Sigma$ is fixed by the stabiliser of its predecessors; if $\Sigma$ is a base of $G$ and it is irredundant, we call it an irredundant base. If all irredundant bases of $G$ have the same size, $G$ is called an IBIS group. In [**1**], Cameron and Fon-Der-Flaass showed that all irredundant bases for a permutation group $G$ have the same size if and only if all the irredundant bases for $G$ are preserved by reordering. Groups satisfying one of the previous equivalent properties are called *Irredundant Bases of Invariant Size groups*, *IBIS groups* for short.

Moreover, Cameron and Fon-Der-Flaass [**1**] also proved that for a permutation group $G$ to be IBIS is a necessary and sufficient for the irredundant bases of $G$ to be the base of a combinatorial structure known with the name of matroid. If this condition holds, then $G$ acts geometrically on the matroid and when $G$ acts primitively and is not cyclic of prime order, then the matroid is geometric (see [**1**] for more details). This brought Cameron to ask for a possible classification of the IBIS groups. As explained by Cameron himself in [**2**, Section 4-14], there is no hope for a complete classification of IBIS groups, when the cardinalities of the bases are large. But it might be reasonable to pose this question for primitive groups. The first attempt of classifying finite primitive IBIS groups has been done in [**3**]. We give a classification of quasi-primitive soluble irreducible IBIS linear groups, and we also describe nilpotent, metacyclic IBIS linear groups and IBIS linear groups of odd order [**4**].

We continue our study of IBIS groups of affine type.

### References

[1] P. J. Cameron and D. G. Fon-Der-Flaas, *Bases for Permutation Groups and Matroids*, Europ. J. Combin. **16** (1995), 537–544.

[2] P. J. Cameron, *Permutation Groups*, London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1999.

[3] A. Lucchini, M. Morigi, M. Moscatiello, *Primitive permutation IBIS groups*, J. Combin. Theory Ser. A 184 (2021), Paper No. 105516, 17 pp.

[4] A. Lucchini, D. Malinin, *IBIS soluble linear groups*, Communications in Algebra, 2024.

*Belarusian State University, Minsk (Belarus)*
*E-mail:* dmalinin@gmail.com

## On the realizability of a simple labeled graph as the Gruenberg–Kegel graph of a finite group

N. V. Maslova

The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of a finite group $G$ is a simple graph whose vertex set is the set of prime divisors of $|G|$ and in which two distinct vertices $r$ and $s$ are adjacent if and only if there exists an element of order $rs$ in $G$.

A simple graph $\Gamma$ is a labelled graph if its vertices are labelled by pairwise distinct primes. We denote by $\pi(\Gamma)$ the set of labels of $\Gamma$, and let

$$h(\Gamma) = |\{H \mid H \text{ is a finite group such that } \Gamma(H) = \Gamma\}|.$$

It is clear that $h(\Gamma) \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Denote by $S(G)$ the largest normal solvable subgroup of a finite group $G$. Recall that a finite group $G$ is almost simple if there is a finite nonabelian simple group $S$ such that $S \cong \mathrm{Inn}(S) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(S)$.

Continuing the research begun in **[1, 2]**, we prove the following theorem.

**Theorem 1.** *Let $\pi$ be a finite set of primes and $p = \max(\pi)$. For each labelled graph $\Gamma$ such that $\pi(\Gamma) \subseteq \pi$, the following statements are equivalent:*

(1) $h(\Gamma) = \infty$;
(2) $h(\Gamma) > 144|\pi|^5 + 876|\pi|^4 + 1956|\pi|^3 + 1934|\pi|^2 + 780|\pi| + 115$;
(3) *there is a finite group $G$ such that $\Gamma(G) = \Gamma$ and $|G| \geq p^{p^2}$;*
(4) *there is a finite group $G$ such that $\Gamma(G) = \Gamma$ and $S(G) \neq 1$;*
(5) *there is a finite group $G$ such that $\Gamma(G) = \Gamma$ and $G$ is not almost simple.*

Also we prove the following theorem.

**Theorem 2.** *Let $\pi$ be a finite set of primes and $p = \max(\pi)$. Then for each disconnected labelled graph $\Gamma$ such that $\pi(\Gamma) = \pi$, the following statements are equivalent:*

(1) $h(\Gamma) > 0$;
(2) *there is a finite group $G$ such that $\Gamma(G) = \Gamma$ and $|G| < p^{p^{p^2}+p^2+1}$.*

*The work is supported by Russian Science Foundation, project 24-11-00119, https://rscf.ru/en/project/24-11-00119/.*

### References

[1] P. J. Cameron, N. V. Maslova, *Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg-Kegel graph* // J. Algebra, 2022, vol. 607, Part A, pp. 186–213. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021.12.005

[2] M. A. Grechkoseeva, A. V. Vasil'ev, *On the prime graph of a finite group with unique nonabelian composition factor* // Communications in Algebra, 2022, vol. 50, no. 8, pp. 3447–3452.

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg (Russia), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* butterson@mail.ru

## On characterization by Gruenberg–Kegel graph of finite simple groups $PSL_3(q)$, where $q$ is even

N. V. Maslova, K. V. Selivanov

The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*) $\Gamma(G)$ of a finite group $G$ is a simple graph whose vertex set is the set of prime divisors of $|G|$ and in which two distinct vertices $r$ and $s$ are adjacent if and only if there exists an element of order $rs$ in $G$.

In this talk we discuss the question of characterization by Gruenberg–Kegel graph of finite simple groups $PSL_3(q)$, where $q$ is even.

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg (Russia), Ural Mathematical Center, Yekaterinburg (Russia)*
*E-mail:* butterson@mail.ru, ckirill2000@mail.ru

## On effectiveness or explicitness of the Higman Embedding Theorem for recursive groups

V. H. Mikaelian

In 1961 Higman established that a *recursive group*, i.e., a group admitting an effectively enumerable set of generators and a recursively enumerable set of defining relations, can be embedded into a *finitely presented* group [**1**]. His original proof guarantees the existence of an embedding while leaving its actual construction aside.

By widely accepted consensus in computability theory, a procedure is called *effective* if there theoretically exists an algorithm — formalized as a Turing machine — to carry out that procedure. The actual algorithm itself does *not* have to be explicitly given [**2**]. Under the Church-Turing Thesis, effective is equivalent to *recursive* in the sense of Kleene [**2**].

By contrast, a procedure is *constructive* if the executing algorithm is directly provided rather than merely proven to exist [**3**]. A synonym for constructive is *explicit*, which avoids tautological phrasing such as "constructive construction."

Higman or his successors have never stated that the embedding in [**1**] is explicit. Moreover, for certain groups with uncomplicated recursive presentations, such as $\mathbb{Q}$ or $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$, explicitly embedding them into finitely presented groups remains open — or did until very recently [**4, 5**]. Effectiveness or explicitness of Higman's embedding were discussed by Valiev [**6**], by Bridson and Nyberg-Brodda [**7**], and others.

The outlined context motivates a consideration of the construction in [**1**], to indicate which of its parts can easily be covered by a manageable algorithm, which parts require an extraordinarily vast number of steps (but are still constructive), and which parts suggest no explicit algorithms (i.e., are non-constructive) [**8, 5, 9**].

### References

[1] G. Higman, *Subgroups of finitely presented groups*, Proc. R. Soc. Ser. A (1961), 262, 455–475.
[2] M.D. Davis, *Computability and unsolvability*, McGraw-Hill (1958).
[3] A.S. Troelstra, D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics: An Introduction*. Vols. 1–2, North-Holland (1988).
[4] J. Belk, J. Hyde, F. Matucci, *Embedding $\mathbb{Q}$ into a finitely presented group*, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (2022), 561–567.
[5] V. H. Mikaelian, *On explicit embeddings of $\mathbb{Q}$ into finitely presented groups*, J. Group Theory, vol. 29 (2026), no. 2, 371–417.
[6] M.K. Valiev, *Examples of universal finitely presented groups*, Sov. Math., Dokl. 14, 987–991 (1973); translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 211, 265–268 (1973).
[7] M.R. Bridson, C-F. Nyberg-Brodda, *HNN extensions and embedding theorems for groups*, arXiv: 2512.10800.
[8] V. H. Mikaelian, *The Higman operations and embeddings of recursive groups*, J. Group Theory, 26 (2023), 6, 1067–1093.
[9] V. H. Mikaelian, *An explicit algorithm for the Higman Embedding Theorem*, preprint, arXiv:2507.04347.

*Yerevan State University, Yerevan (Armenia)*
*E-mail: v.mikaelian@gmail.com, vmikaelian@ysu.am, vmikaelian@aua.am*

## New results on ternary CRCs in the Hamming metric

I. Yu. Mogilnykh

This talk concerns completely regular codes (CRCs) and is motivated by the table of open cases for codes in the ternary Hamming graph in [**1**, Section 7]. We summarize several new ideas and results which are recorded in the table in [**2**]. Some of them were obtained with the assistance of the AI agent Aristotle (https://aristotle.harmonic.fun). The main approaches are listed below.

(1) The existence of a CRC with parameter matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}.$$

The construction is based on the following elementary observation, applied to coset graphs.

**Proposition 1.** *Let $\mathcal{C}$ be a CRC with the same distance partition in the Cayley graphs* $\mathrm{Cay}(G, A)$ *and* $\mathrm{Cay}(G, B)$*, with parameter matrices $M_A$ and $M_B$, respectively. Then $\mathcal{C}$ is a CRC in* $\mathrm{Cay}(G, A \uplus B)$ *with parameter matrix $M_A + M_B$, where $\uplus$ denotes multiset union.*

(2) Linear programming relaxations over the reals of binary integer programming formulations for the existence of completely regular codes.

(3) Nonexistence of families of completely regular codes in $H(n, 3)$ whose spectra consist of the graph valency and its three smallest eigenvalues, established via a combinatorial application of the orthogonal array property. In particular, we show that no completely regular codes with the same spectra as extended perfect codes exist in $H(n, 3)$, generalizing a result of Bespalov [**3**].

*Acknowledgements.* The author is grateful to Ilya Dudin for drawing his attention to the AI agent Aristotle and to Vsevolod Gubarev for fruitful discussions on the use of AI in mathematics.

*The work was carried out within the state assignment of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, project no. FWNF-2026-0011.*

### References

[1] M. Shi and P. Solé (eds.), *Completely Regular Codes in Distance-Regular Graphs*, Chapman and Hall/CRC, 2025.

[2] I. Yu. Mogilnykh, *New bounds for open intersection arrays of completely regular codes in the Hamming graph $H(n, 3)$*. GitHub repository (source material).

[3] E. Bespalov, *On the non-existence of extended 1-perfect codes and MDS codes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **189** (2022), 105607.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
*E-mail: ivmog84@gmail.com*

## Orbit series tree as an invariant of quandles

T. R. Nasybullov

A quandle $Q$ is an algebraic system with one binary operation $(x, y) \mapsto x * y$ which satisfies the following three axioms:

(q1) $x * x = x$ for all $x \in Q$,
(q2) the map $S_x : y \mapsto y * x$ is a bijection of $Q$ for all $x \in Q$,
(q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ for all $x, y, z \in Q$.

If $G$ is a group, then $\mathrm{Conj}(G) = (G, *)$, where $x * y = y^{-1}xy$ for $x, y \in G$, is a quandle called the conjugation quandle on $G$.

Quandles were introduced by Joyce [**1**] and Matveev [**2**] as an invariant for knots in $\mathbb{R}^3$. By every knot $K \subset \mathbb{R}^3$ one can construct the fundamental quandle $Q(K)$. Joyce and Matveev proved that two knot quandles $Q(K_1)$ and $Q(K_2)$ are isomorphic if and only if $K_1$ and $K_2$ are weakly equivalent, hence, in order to solve the equivalence problem for knots it can be useful to study the isomorphism problem for quandles. Unfortunately, the isomorphism problem for quandles is known to be Borel complete [**3**].

The isomorphism problem for quandles can be approached by studying quandle invariants — characteristics that are the same for isomorphic quandles. The orbit series tree $\Gamma(Q)$ is a tree which can be constructed by a quandle $Q$ and which is invariant of $Q$. The notion of orbit series tree was introduced in [**4**].

During the talk we are going to discuss the following questions about orbit series trees of quandles.

(1) Which trees can be constructed as orbit series trees of quandles?
(2) Which quandles are uniquely defined by their orbit series tree?

We will introduce the recent results obtained jointly with B. Li (Nantong University) and Y. Xueqi (Novosibirsk State University) and discuss future research directions.

### References

[1] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra V. 23, 1982, 37–65.
[2] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory* (Russian), Mat. Sb. (N.S.), V. 119(161), N. 1(9), 1982, 78–88.
[3] A. Brooke-Taylor, S. Miller, *The quandary of quandles: The Borel completeness of a knot invariant*, J. Australian Math. Soc., V. 108, N. 2, 2019, 262–277.
[4] M. Bonatto, A. Crans, T. Nasybullov, G. Whitney, *Quandles with orbit series condition*, J. Algebra, V. 567, 2021, 284–309.

*Nantong University, Nantong (China); Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia); Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: timur.nasybullov@mail.ru*

## Nonlinear additive perfect codes over finite fields

A. M. Romanov

Let $\mathbb{F}_q^n$ be a vector space of dimension $n$ over a finite field $\mathbb{F}_q$, where $q = p^t$, $p$ is a prime number, and $t$ is a positive integer. In this paper, we propose a construction for a subgroup of the additive group of the space $\mathbb{F}_q^n$ that possesses specific properties: namely, the vectors belonging to this subgroup form an additive perfect $q$-ary code that is not equivalent to the $q$-ary Hamming code.

An arbitrary subset $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ is called a *$q$-ary error-correcting code* of length $n$ (a $q$-ary code for short). A code is called *linear* if it forms a linear subspace over $\mathbb{F}_q$. A code $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ that is closed under addition is called *additive* over $\mathbb{F}_q$. Linear code is additive, but not vice versa. For example, the dodecacode $(12, 4^6, 6)_4$ is additive over $\mathbb{F}_4$ but not linear [**1**]. Additive codes have applications in quantum error-correcting codes [**1**] and also have numerous connections to other areas of discrete mathematics and combinatorics.

For any pair of vectors $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{F}_q^n$, we define the *Hamming distance* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\{\, i \mid x_i \neq y_i \,\}|$. A *Hamming sphere* of radius $r$ centered at $\mathbf{x}$ is the set $B_r(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}$. The *packing radius* $e(\mathcal{C})$ of a code $\mathcal{C}$ of length $n$ is the maximum number $e \in \{0, 1, \ldots, n\}$ such that $B_e(\mathbf{u}) \cap B_e(\mathbf{v}) = \varnothing$ for all $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. The *covering radius* $\rho(\mathcal{C})$ of a code $\mathcal{C}$ of length $n$ is the smallest number $\rho \in \{0, 1, \ldots, n\}$ such that $\bigcup_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}} B_\rho(\mathbf{c}) = \mathbb{F}_q^n$.

A code $\mathcal{C}$ is called *perfect* if $\rho(\mathcal{C}) = e(\mathcal{C})$. A linear perfect $q$-ary code $\mathcal{C}$ with packing radius $e(\mathcal{C}) = 1$ is called the $q$-ary *Hamming code*. The $q$-ary Hamming code of length $n$ is unique.

In 1969, Bernt Lindström [**2**] applied Veblen–Wedderburn systems from the theory of finite projective planes to the construction of nonlinear additive perfect $q$-ary codes of length $q + 1$. In this paper, we generalize Lindström's result.

**Theorem.** *For all admissible lengths $n \geq q+1$ and for $q > 8$, where $q = p^t$ and $t \neq 1$, there exists an additive perfect $q$-ary code that is not equivalent to any linear code.*

### References

[1] A.R. Calderbank, E.M. Rains, P.M. Shor, N.J.A. Sloane, *Quantum error correction via codes over GF(4)*, IEEE Trans. Inf. Theory, **44**:4 (1998), 1369–1387.

[2] B. Lindström, *On group and nongroup perfect codes in q symbols*, Math. Scandin. **25** (1969), 149–158.

*Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* rom@math.nsc.ru

## Element Orders in the Extension of a Linear or Unitary Group by a Graph Automorphism

S. S. Saidov

The talk is based on the paper [**1**].

One of the basic numerical sets associated with a finite group is the set of its element orders. For this reason, it seems useful to have an explicit description of the sets of element orders of finite simple groups, as well as of groups close to them, in particular, almost simple groups. Recall that a group $G$ is called almost simple if $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$ for some non-abelian simple group $L$.

We consider the case where $L = PSL_n(q)$ or $PSU_n(q)$, with $n \geq 3$, and $G = L \rtimes \langle\gamma\rangle$, where $\gamma$ is the automorphism of $L$ induced by the map $A \mapsto A^{-\top}$ (note that for $n = 2$ this map induces an inner automorphism). If $q$ is odd, the set of element orders of $G$ was found in [**2**], so we assume that $q$ is even.

For a subset $H$ of some finite group, denote by $\omega(H)$ the set of orders of elements in $H$. If $\omega \subseteq \mathbb{N}$ then denote by $\overline{\omega}$ the closure of the set $\omega$ under taking divisors. In this work, we explicitly specify a set of numbers $\nu(n, q)$ such that

$$\overline{\omega(PSL_n(q)\gamma)} = \overline{\omega(PSU_n(q)\gamma)} = \overline{\nu(n, q)}$$

for all $n \geq 3$ and even $q$. Since $\omega(PSL_n(q))$ and $\omega(PSU_n(q))$ are described in [**3**], the obtained result gives a description of the sets $\omega(PSL_n(q) \rtimes \langle\gamma\rangle)$ and $\omega(PSU_n(q) \rtimes \langle\gamma\rangle)$.

*The work is supported by the Russian Science Foundation, project 24-11-00127,* https://rscf.ru/project/24-11-00127/.

### References

[1] S. S. Saidov. *Element orders in the graph automorphism extensions of finite linear and unitary groups in characteristic two.* Algebra and Logic, **65**: 1 (2026), 69–78.

[2] M. A. Grechkoseeva. *On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle.* J. Group Theory, **20**: 6 (2017), 1191–1222.

[3] A. A. Buturlakin. *Spectra of finite linear and unitary groups.* Algebra and Logic, **47**: 2 (2008), 91–99.

*Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* s.saidov@g.nsu.ru

## Automorphism groups of quandle algebras

B. Sangare

Recall that a *magma* is a set $Q$ equipped with a binary operation $(x, y) \mapsto x * y$, and a *magma homomorphism* is a map between magmas that preserves the binary operations $*$. We say that a magma $(Q, *)$ is a *quandle* if the following axioms hold:

(Q1) $x * x = x$ for all $x \in Q$,

(Q2) For all $x \in Q$, the right-multiplication map $S_x \colon Q \to Q$ defined by $y \mapsto y * x$ is a magma automorphism of $(Q, *)$. Equivalently, each $S_x$ is a permutation, and $*$ is right-distributive.

Let $\Bbbk$ be a unital associative commutative ring. Recall that, for each $n \geq 0$, the *general affine group* $\mathrm{Aff}_n(\Bbbk)$ is defined to be the obvious semidirect product $\Bbbk^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$. Equivalently, $\mathrm{Aff}_n(\Bbbk)$ is the group of invertible affine transformations of the affine space $\mathbb{A}^n_\Bbbk = \Bbbk^n$.

We compute the automorphism groups of integral quandle algebras of all finite trivial quandles and dihedral quandles.

**Theorem.** *Let $\Bbbk$ be a unital associative commutative ring, and let $\mathrm{T}_n = \{x_1, \dots x_n\}$ be the trivial quandle of order $n \geq 1$. Then*

$$\mathrm{Aut}(\Bbbk[\mathrm{T}_n]) \cong \mathrm{Aff}_{n-1}(\Bbbk).$$

**Proposition.** *Let $n \geq 1$ be odd, and let $\mathrm{R}_n$ be the dihedral quandle with underlying set $\mathbb{Z}_n$. Then there are canonical isomorphisms*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}[\mathrm{R}_n]) \cong \mathrm{Aut}(\mathrm{R}_n) \cong \mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_n).$$

**Theorem.** *Let $\Bbbk$ be a unital associative commutative ring. Then for all odd integers $n \geq 1$, there exists an action of $\mathrm{Aut}(\Bbbk[\mathrm{R}_n])$ on $\mathrm{Aff}_1(\mathrm{SC}_n(\Bbbk))$ such that*

$$\mathrm{Aut}(\Bbbk[\mathrm{R}_{2n}]) \cong \mathrm{Aff}_1(\mathrm{SC}_n(\Bbbk)) \rtimes \mathrm{Aut}(\Bbbk[\mathrm{R}_n]).$$

*In particular,*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}[\mathrm{R}_{2n}]) \cong \mathrm{Aff}_1(\mathrm{SC}_n(\mathbb{Z})) \rtimes \mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_n),$$

*where $\mathrm{Aff}_1(\mathbb{Z}_n)$ acts on $\mathrm{Aff}_1(\mathrm{SC}_n(\mathbb{Z}))$ by conjugation.*

**Theorem.** *Let $\Bbbk$ be an integral domain with $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Then for each even integer $n \geq 2$, there exists a canonical embedding*

$$\mathrm{Aut}(\Bbbk[\mathrm{R}_{2n}]) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \times \mathrm{Aut}(\Bbbk[\mathrm{R}_n]).$$

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia); Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: sangrebirama686@gmail.com*

## Rota—Baxter operators on a free group of infinite rank

A. Savelyev

In 2021, L. Guo, H. Lang, and Yu. Sheng generalized the concept of a Rota—Baxter operator of weight 1 defined on an algebra by introducing a corresponding operator on a group [**1**].

**Definition** ([**1**]). *Let $G$ be a group. A mapping $B\colon G \to G$ is called a Rota—Baxter operator on the group $G$ if the equality holds for any $g, h \in G$:*

$$B(g)B(h) = B(gB(g)hB(g)^{-1}).$$

The talk will prove the following

**Theorem.** *Let $F$ be a free group of infinite rank, and let $H \leq F$. Then there exists a Rota—Baxter operator $B$ on $F$ such that* $\mathrm{Im}(B) = H$.

The proof was obtained with the help of Aristotle (Harmonic). This theorem is a partial solution to a question posed by V. Bardakov in the Kourovka Notebook in 2022 [**2**].

We apply the proof in advancing the construction of bijective Rota—Baxter operators on groups:

**Proposition.** *Let $B$ be a Rota—Baxter operator on a group $G$, and let the operator $\widetilde{B}(g) = g^{-1}B(g^{-1})$ be bijective. Then there exists an endomorphism $\tau\colon G \to G$ such that $B = \tau \circ \rho_\tau^{-1}$, where $\rho_\tau(g) = g\tau(g)^{-1}$.*

### References

[1] L. Guo, H. Lang, Yu. Sheng, *Integration and geometrization of Rota—Baxter Lie algebras*, Adv. Math. **387**, 107834 (2021).

[2] E. I. Khukhro and V. D. Mazurov (eds.), *Unsolved Problems in Group Theory: The Kourovka Notebook*, 21st ed., Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2026; arXiv:1401.0300.

*Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* andrsav2zz2@gmail.com

## Lattice of normal subgroups of permutational wreath products

R. V. Skuratov

The lattice of normal subgroups and their properties for finite and infinite iterated wreath products $W = S_n \wr \ldots \wr S_n$, $n \in \mathbb{N}$ are found. The infinite wreath product $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\wr}} S_n$ is denoted by $W_\infty$.

**Definition 1.** *The permutational* ***subwreath product*** $G \wr\wr H$ *is the semi-direct product* $G \ltimes \tilde{H}^X$, *where* $G$ *acts on the subdirect product* $\tilde{H}^X$ *by the respective permutations of the subdirect factors. Provided the specification of* $\tilde{H}^X$ *is established separately.*

Subwreath product also appears in the research of pronormality [**1**] and in [**2**].

**Definition 2.** *The set of elements from* $S_n \wr S_n, n \geqslant 3$ *which are presented by the Kaloujnine tableaux* [**3**] *of form:* $[e]_0, [a_1, a_2, \ldots, a_n]_1$, *satisfying the condition*

$$\prod_{i=1}^{n} sgn([a_i]_1) = 1, \tag{1}$$

*is called the* ***generalized alternating level subgroup*** $\widetilde{A}_n^{(1)}$ *and is denoted by* $E \wr\wr \widetilde{A}_n$. *Note that condition (1) uniquely identifies subdirect product.*

The set $E \wr\wr \widetilde{A}_n$ is a normal subgroup having **normal rank** $n-1$ [**4**] in $S_n \wr S_n$. We spread this definition to the 3-multiple wreath product in a recursive way.

**Definition 3.** *The subgroup* $E \wr \widetilde{A}_n^{(1)}$ *is denoted by* $\widetilde{A}_n^{(2)}$.

The order of $E \wr \widetilde{A}_n^{(2)}$ is $(n!)^{3n} : 2^3$. Furthermore, we prove that $E \wr \widetilde{A}_n^{(2)} \lhd S_n \wr S_n \wr S_n$.

**Theorem 1.** *The subgroup* $\widetilde{A}_n^{(1)}$ *has* ***normal rank*** $n-1$ *in* $S_n \wr S_n$.

**Theorem 2.** *There are exactly 8 proper normal subgroups in* $S_n \wr S_m$, *where* $n, m > 4$ *and 3 additional subgroups:* $E \wr K_4, K_4 \wr \widetilde{A}_4$, $K_4 \wr S_4$ *provided by the condition* $n = 4$. *Furthermore* $S_n \wr S_m$ *is the monolithic group.*

**Theorem 3.** *There are exactly 50 normal subgroups in* $S_n \wr S_m \wr S_k$, $m, n, k > 4$.

**Theorem 4.** *The topological group* $W_\infty$ *is homeomorphic to the Cantor set* $\mathbb{C}$.

### References

[1] N. V. Maslova, D. O. Revin, *On the Pronormality of Subgroups of Odd Index in Some Direct Products of Finite Groups*, Journal of Algebra and Its Applications, 22:04 (2023), 2350083. https://doi.org/10.1142/S0219498823500834

[2] Ruslan Skuratovskii. *Involutive irreducible generating sets and structure of Sylow 2-subgroups of alternating groups*. ROMAI J., v.13, no. 1 (2017), 117–139.

[3] Kaloujnine L. A. *Sur les p-group de Sylow.* // C. R. Acad. S. Paris. — 1945. — **221**. — P. 222–224.

[4] Dashkova O. Yu. *On groups of finite normal rank*. Algebra Discrete Math. 2002. 1, No. 1. P. 64–68.

*IAMM*
*E-mail:* ruslcomp@mail.ru

## Coset graphs of finite groups with a $BN$-pair of rank 1

L. Yu. Tsiovkina

Coset graphs of finite groups admitting a $BN$-pair of rank 1 provide a natural framework for constructing and studying symmetric covers of complete graphs. Such a group $G$ acts doubly transitively on the right cosets of a Borel subgroup $B$. For a subgroup $H \leq B$, the fibres of the natural projection $Hx \mapsto Bx$ form a $G$-invariant partition. We study adjacency relations on the right cosets of $H$ for which this projection defines a cover of the complete graph on the $B$-cosets. In general, covers of complete graphs are closely connected with important objects in algebraic combinatorics and discrete geometry, including association schemes and, in the regular abelian case, equiangular line systems. This motivates the study of how the choice of $H$ and the adjacency relation influences the symmetry, distances and regularity of the resulting covers.

The present work continues the author's study of coset graphs whose vertex stabiliser $H$ in $G$ is a subgroup of the unipotent radical $U$ of a Borel subgroup. By choosing appropriate adjacency relations and subgroups $H$, we construct several new infinite families of double covers of known arc-transitive distance-regular coset graphs. We also study how passing to these double covers affects distances and neighbourhood intersections, when antipodal structures arise, and describe their full automorphism groups.

*The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No 075-02-2026-1315, for the development of the regional scientific and educational mathematical center «Ural Mathematical Center».*

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Federal University; Ural Mathematical Center, Yekaterinburg (Russia)*
*E-mail: l.tsiovkina@gmail.com*

## On completely regular codes with large covering radius in $n$-dimensional rectangular grid

A. Yu. Vasil'eva

A vertex partition $(C_0, C_1, \dots, C_\rho)$ of a graph is called the perfect $k$-coloring if for every $i, j \in \{0, 1, \dots, \rho\}$ there exists the integer $a_{ij}$ such that every vertex of $C_i$ has exactly $a_{ij}$ neighbors in $C_j$. Then the matrix $A = (a_{ij})$ is called the parameter matrix. If $A$ is tridiagonal, the coloring is called distance regular and $C_0$ is called completely regular code with covering radius $\rho$. In this case we call the matrix $A$ as a parameter matrix of the code and we will use the following compact notation of the matrix as the sequence of its tridiagonal elements: $[a_0, b_0|c_1, a_1, b_1|c_2, a_2, b_2| \dots |c_\rho, a_\rho]$.

The $n$-dimensional infinite rectangular grid is the graph $G_n$ with vertex set $\mathbf{Z}^n$, where $\mathbf{Z}$ denotes the set of integers and edge set $\{(x, y) : \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 1\}$. The graph metric in $G_n$ is often called Manhattan metric. A distance regular coloring of $G_n$ is called reducible if it can be represented as a function $f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\delta_1 x_1 + \dots + \delta_n x_n)$, and $x = (x_1, \dots, x_n) \in C_i$ iff $i = f(x_1, \dots, x_n)$. It is known that the covering radius of an irreducible completely regular code is no more than $2n$.

**Theorem 1.** *For any $n \geq 2$ and $\rho, n+1 \leq \rho \leq 2n$, there exist $[(2n-\rho)/2]+1$ nonequivalent irreducible distance regular colorings of $G_n$ with parameter matrix*

$$[2n - \rho, \rho|1, 2n - \rho, \rho - 1| \dots |i, 2n - \rho, \rho - i| \dots |\rho - 1, 2n - \rho, 1|\rho, 2n - \rho].$$

**Theorem 2.** *For any $n \geq 2$ there exist four parameter matrices of irreducible distance regular colorings of $G_n$ with $n + 1$ colors:*

1) $[0, 2n|2, 0, 2n - 2| \dots |2i, 0, 2n - 2i| \dots |2n - 2, 0, 2|2n, 0]$;
2) $[0, 2n|1, 0, 2n - 1| \dots |i, 0, 2n - i| \dots |n - 1, 0, n + 1|2n, 0]$;
3) $[0, 2n|1, 1, 2n - 1| \dots |i, i, 2n - i| \dots |n - 1, n - 1, 2|n, n]$;
4) $[n, n|1, n, n - 1| \dots |i, n, n - i| \dots |n - 1, n, 1|n, n]$.

**Conjecture.** *The list of feasible parameter matrices of irreducible distance regular colorings of $G_n, n > 4$, is exhausted by the matrix from Theorem 1 in case of $\rho > n + 1$ colors and is exhausted by four matrices from Theorem 2 in case of $\rho = n + 1$ colors.*

*The work was performed according to the Government research assignment for IM SB RAS, project № FWNF-2026-0011.*

### References

[1] S.V. Avgustinovich, A.Yu. Vasil'eva, *Completely regular codes in the n-dimensional rectangular grid*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **19**(2) (2022), 861–869.

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: vasilan@math.nsc.ru*

## On one-dimensional affine schemes of rank 4

R. Wang

A *one-dimensional affine group* $G$ is a subgroup of $\mathrm{A\Gamma L}_1(q)$ containing the subgroup of translations. A *one-dimensional affine scheme* $\mathcal{X} = \mathrm{Inv}(G)$ is the association scheme associated with one-dimensional affine group $G$. In this talk we provide a classification of the one-dimensional affine association schemes of rank 4. The result is based on the recent classification of the minimal nontrivial one-dimensional affine association schemes and schemes of rank 4 in [**1**].

### References

[1] A. A. Buturlakin, A. V. Vasil'ev, *Relatively closed subgroups of permutation groups with a cyclic regular normal subgroup*, Algebra Analiz, 2026, Vol. 38, no. 3, 53–86.

*Novosibirsk State University, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: z.van1@g.nsu.ru*

## On $\{2,3,5\}$-groups with conjugacy classes of distinct sizes

W. Zhou

This is joint work with Ilya Gorshkov.

Throughout, all groups are finite and non-trivial. A group is called an *ah*-group if any two distinct conjugacy classes have distinct sizes. In 1973, F. M. Markel [**1**] conjectured that every *ah*-group is isomorphic to the symmetric group $S_3$. This conjecture, known as the $S_3$-conjecture, was proved for solvable groups in the 1990s, independently by J. Zhang [**2**] and by R. Knörr, W. Lempken and B. Thielcke [**3**]. The general case remains open.

Let $\pi(G)$ denote the set of prime divisors of $|G|$. In this talk, we present the following result [**4**].

**Theorem.** *If $G$ is an ah-group and $\pi(G) \subseteq \{2,3,5\}$, then $G \cong S_3$.*

### References

[1] F. M. Markel, *Groups with many conjugate elements*, Journal of Algebra, **26**(1) (1973), 69–74.
[2] J. Zhang, *Finite groups with many conjugate elements*, Journal of Algebra, **170**(2) (1994), 608–624.
[3] R. Knörr, W. Lempken, B. Thielcke, *The $S_3$-conjecture for solvable groups*, Israel Journal of Mathematics, **91** (1995), 61–76.
[4] W. Zhou, I. Gorshkov, *On $\{2,3,5\}$-groups with conjugacy classes of distinct sizes*, preprint, arXiv:2606.22244 (2026).

*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* zhouwyx@outlook.com

# VI. Секция «Теория колец»

## Конструкция дубля для оператора Роты — Бакстера на алгебре Хопфа

М. Е. Гончаров

Пусть $H = (H, m, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ — кокоммутативная алгебра Хопфа.

**Определение [1]** *Морфизм коалгебр $B : H \to H$ называется оператором Роты — Бакстера на алгебре Хопфа $H$, если для любых $x, y \in H$:*

$$B(x)B(y) = B(x_{(1)}B(x_{(2)})yS(B(x_{(3)}))).$$

Известно, что операторы Роты — Бакстера веса 1 на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с операторами Роты — Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$, рассматриваемой как алгебра Хопфа.

В работе **[2]** дано определение дубля для алгебры, на которой задан оператор Роты-Бакстера, обобщающий понятие дубля Дринфельда для биалгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, на которой задано линейное отображение $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств $D_R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \bar{\mathfrak{g}}$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ изоморфная копия $\mathfrak{g}$. Определим умножение на $D_R(\mathfrak{g})$ следующим образом:

$$[a + \bar{b}, x + \bar{y}]_D = [a, x] + R([a, y]) - [a, R(y)] + R([b, x]) - [R(b), x] \\ + \overline{[a, y] + [b, x] - [R(b), y] - [b, R(y)] - [b, y]},$$

$a, b, x, y \in \mathfrak{g}$. В **[2]** было доказано, что если $R$ — оператор Роты — Бакстера на $\mathfrak{g}$ веса 1, то алгебра $D_R(\mathfrak{g})$ удовлетворяет тем же тождествам, что и алгебра $\mathfrak{g}$.

В данной работе строится аналогичная конструкция для кокоммутативных алгебр Хопфа, на которых задан оператор Роты — Бакстера. В частности доказывается, что универсальная обертывающая алгебра алгебры $D_R(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, на которой задан оператор Роты — Бакстера $R$ веса 1, изоморфна тензорнуму произведению коалгебр $H = \overline{U(\mathfrak{g})} \otimes U(\mathfrak{g})$, где $\overline{U(\mathfrak{g})}$ — изоморфная копия коалгебры $U(\mathfrak{g})$, с умноженим

$$(\overline{a} \otimes b) * (\overline{c} \otimes d) = \overline{Ad_{B_1(a_{(1)})b_{(1)}}(c_{(1)})a_{(1)}} \otimes S(B_1(Ad_{b_{(2)}}(c_{(2)})))b_{(3)}B_1(c_{(3)})d.$$

где $B : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ — продолжение оператора $R$ с алгебры Ли на её универсальную обертывающую алгебру, $B_1(h) = B(S(h))$ для любого $h \in U(\mathfrak{g})$, $Ad_x(y) = x_{(1)}yS(x_{(2)})$ и $a, b, c, d \in U(\mathfrak{g})$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0017. Результаты получены совместно с Королёвой Д. С.

### Литература

[1] Goncharov M. Rota-Baxter operators on cocommutative Hopf algebras. J. Algebra **582** (2021) 39–56.
[2] Goncharov M., Rota-Baxter operators of non-scalar weights, connections with coboundary Lie bialgebra structures, Comm. in Algebra **53:7** (2025) 5–10.

*ИМ СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* gme@math.nsc.ru

## О факторизации многочленов с коэффициентами в алгебрах с делением

А. Г. Гутор

Пусть $R$ — некоммутативное ассоциативное кольцо с делением. $R[x]$ обозначает кольцо многочленов от переменной $x$ с коэффициентами в $R$, считаем, что переменная $x$ коммутирует с элементами кольца $R$. Таким образом, всякий многочлен из $R[x]$ имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_0, \ldots, a_n \in R.$$

Сложение и умножение многочленов из $R[x]$ определяется естественным образом. Основные свойства многочленов над кольцами с делением описаны в [**1**, Ch. 5, P. 16]. (см. также [**2**], [**3**]). Многочлен $P(x)$ называется центральным, если все его коэффициенты $a_i$ лежат в центре кольца $R$.

Важной является задача факторизации многочленов. В [**4**, Prop. 6] получен критерий неприводимости центральных многочленов для случая алгебр кватернионов с делением. Нами получено следующее обобщение данного критерия на случай произвольной алгебры с делением.

**Теорема.** [**5**] *Пусть $D$ — центральная алгебра с делением над центром $K$ и пусть многочлен $f(x) \in K[x]$ неприводим над $K$. Обозначим через $L$ поле $K[x]/(f(x))$. Тогда $f(x)$ остаётся неприводимым в $D[x]$ тогда и только тогда, когда в алгебре $D \otimes_K L$ нет делителей нуля.*

Нами получены следующие следствия из этой теоремы.

**Следствие.** [**5**] *Пусть $D$ — центральная $K$-алгебра с делением степени $n$. Пусть многочлен $f(x) \in K[x]$ неприводим в $K[x]$ и НОД$(\deg(f(x)), n) = 1$. Тогда $f(x)$ остаётся неприводимым в $D[x]$.*

**Следствие.** [**5**] *Пусть $D$ — центральная $K$-алгебра с делением. Пусть многочлен $f(x) \in K[x]$ неприводим в $K[x]$. Предположим, что $\deg(D) = \deg(f(x))$ является простым числом. Если многочлен $f(x)$ приводим в $D[x]$, то $f(x)$ является произведением линейных множителей в $D[x]$.*

### Литература

[1] Lam T. Y. A first course in noncommutative rings. - Springer-Verlag, 1991. 397 p.
[2] Gordon B. Motzkin T.S. On the zeros of polynomials over division rings // Transactions of the American Mathematical Society. 1965. № 116. P. 218-226.
[3] Bray U. Polynomials with coefficients from a division ring // Canadian Journal of Mathematics. 1983. №35. P. 509-515.
[4] Koprowski P. Factorization and root-finding for polynomials over division quaternion algebras // Proceedings of the International Symposium on Symbolic & Algebraic Computation. ACM, New York. 2023. P. 417–424.
[5] Goutor A. G., Tikhonov S.V. Factorization of central polynomials over division algebras [Preprint]: https://arxiv.org/abs/2609.04529.

*БГУ, Минск (Беларусь)*
*E-mail:* goutor7@gmail.com

## О классификации конечных коммутативных локальных колец

Е. В. Журавлев

Пусть $R$ – конечное коммутативное локальное кольцо с единицей, $\mathrm{char}R = p$ – простое число, $J$ – радикал Джекобсона, $J^n = 0$, $J^{n-1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Пусть $R/J \cong GF(p^l) = F$, $l \in \mathbb{N}$ и

$$\dim_F J/J^2 = m,\ \dim_F J^k/J^{k+1} = 1,\ m \geq 2,\ 2 \leq k \leq n-1.$$

Кольцо $R$ – конечномерное векторное пространство над $F$ и согласно **[1, 2]** существует базис $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_1^2, \ldots, u_1^{n-1}\}$ такой, что

$$R = F \oplus J,\quad J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus \ldots \oplus Fu_m \oplus Fu_1^2 \oplus \ldots \oplus Fu_1^{n-1},$$

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus \ldots \oplus Fu_m + J^2,\ J^k = Fu_1^k + J^{k+1},\ 2 \leq k \leq n-1.$$

Так как $u_iu_j \in J^2$, то

$$u_iu_j = a_{ij}^{(2)}u_1^2 + a_{ij}^{(3)}u_1^3 + \ldots + a_{ij}^{(n-1)}u_1^{n-1}$$

для некоторых $a_{ij}^{(k)} \in F$, $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times m}$, $2 \leq k \leq n-1$.

Пусть $I_k, O_k \in M_k(F)$ соответственно единичная и нулевая матрицы, $k \in \mathbb{N}$, и $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Кольцо $R$ указанного выше типа с точностью до изоморфизма определяется одной из следующих последовательностей матриц умножения:

a) при $n = 4$

$$A_2 = e_{11},\ A_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right);$$

b) при $n \geq 5$

$$A_2 = e_{11},\ A_3 = \ldots = A_{n-2} = 0,\ A_{n-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

где $B \in M_{(m-1)\times(m-1)}(F)$ – либо нулевая матрица, либо матрица ранга $r$ и

(1) если $p = 2$, то $B = I_r \oplus O_{(m-1)-r}$ или $B = (r/2)T \oplus O_{(m-1)-r}$;

(2) если $p \neq 2$, то $B = I_r \oplus O_{(m-1)-r}$ или $B = gI_1 \oplus I_{r-1} \oplus O_{(m-1)-r}$ $(r \neq 1)$, $g$ – некоторый фиксированный не квадрат в $F$.

### Литература

[1] *Raghavendran R.* Finite associative rings, Compos. Math. 21, 195–229 (1969).

[2] *Akers C., Szabo S.* A partial classification of local rings of order $p^6$, Involve a Journal of Mathematics 16 (1), 151–165 (2023).

*Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)*
*E-mail:* evzhuravlev@mail.ru

## Об экстремальных $L$-многообразиях над конечным полем

И. М. Исаев, А. В. Кислицин

Пусть $F$ — произвольное поле, $F\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, $A$ — ассоциативная алгебра полем $F$, $E$ — подпространство алгебры $A$, порождающее $A$ как алгебру. Под *тождеством пары* $(A, E)$ понимается такой многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, что $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$ при всех $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$. В этом случае будем также говорить о тождестве пространства $E$, а само пространство $E$ назовем *мультипликативным векторным пространством*.

Класс всех пар, в которых выполняются все тождества пары $(A, E)$ назовем *$L$-многообразием, порожденным парой* $(A, E)$ (*пространством* $E$), и обозначать $\mathrm{Var}_L(A, E)$ ($\mathrm{Var}_L E$).

На множестве мультипликативных векторных пар можно ввести понятия подпары и гомоморфного образа пары. *Фактором* пары $(A, E)$ будем называть всякую собственную подпару пары $(A, E)$, либо гомоморфный образ пары $(A, E)$ при гомоморфизме $\varphi : A \to A_1$, $\varphi(E) = E_1$. Если $\varphi$ не является изоморфизмом, либо $E_1 \subsetneqq E$, то фактор называется *собственным*. Пару $(A, E)$ назовем *критической*, если алгебра $A$ конечна, и пара $(A, E)$ не лежит в $L$-многообразии, порожденном ее собственными факторами [**2**]. Ю. Н. Мальцев показал критичность кольца матриц над критическим кольцом [**1**]. Авторами показано, что пара $(M_2(GF(q)), M_2(GF(q)))$ является критической [**2**].

Пусть $\theta$ — некоторое свойство. Многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр произвольной сигнатуры называется *почти $\theta$-многообразием*, если само $\mathfrak{M}$ не удовлетворяет свойству $\theta$, но всякое его собственное подмногообразие удовлетворяет этому свойству [**3, 4, 5**]. Иногда такие многообразия называют экстремальными. Одним из авторов частично описаны почти коммутативные и почти энгелевы $L$-многообразия [**6, 7**].

В работе [**8**] показана критичность пары $(T_2(\mathbb{Z}_2), E_0)$, где $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_{\mathbb{Z}_2}$, а также экстремальность $L$-многообразия $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L E_0$ в некоторых классах пространств над полем $\mathbb{Z}_2$. В настоящей работе ограничения на конечное поле сняты.

**Теорема.** *Пусть $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22}\rangle_{GF(q)}$ — мультипликативное векторное пространство, $\mathcal{M} = \mathrm{Var}_L E_0$. Тогда $\mathcal{M}$ — почти коммутативное, почти энгелево и почти конечно базируемое $L$-многообразие, а пара $(T_2(GF(q)), E_0)$ является критической.*

### Литература


[1] Мальцев Ю. Н. Кольцо матриц над критическим кольцом является критическим // Успехи математических наук. 1984. Т. 39. №4 (238). С. 171–172.

[2] Исаев И. М. Кислицин А. В. О тождествах векторных пространств, вложенных в конечные ассоциативные алгебры // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. 2015. Т. 15. №3. С. 69–77.

[3] Newman, M.F. Just non-finitely based varieties of groups // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1971. Vol. 4. pp. 343–348.

[4] Мальцев Ю.Н. Почти коммутативные многообразия ассоциативных колец // Сиб. мат. журн. 1976. Т.17. №5. С. 1086–1096.

[5] Finogenova O.B. Characterizing non-matrix properties of varieties of algebras in the language of forbidden objects // Serdica Math. J. 2012. №38. P. 473–496.

[6] Кислицин А.В. О ненильпотентных почти коммутативных $L$-многообразиях векторных пространств // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59. №3. С. 580–586.

[7] Кислицин А.В. О почти энгелевых $L$-многообразиях векторных пространств // Сибирские электронные математические известия. 2021. Т. 18. №2. С. 1705–1713.

[8] Кислицин А.В. Критические векторные пространства и экстремальные $L$-многообразия // Математический сборник. 2026. Т. 217. №1. С. 89–97.


*Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул (Россия)*
*E-mail:* isaev@altspu.ru, kislitsin@altspu.ru

## Обобщенные скрещенные произведения простых алгебр

В. В. Курсов

Пусть $A$ — простая конечномерная алгебра над полем $K$, $G$ — группа, $(A, G, (w, A))$ — обобщенное скрещенное произведение [**1**]. Если $G$ — конечная группа, индуцирующая на $K$ конечную группу автоморфизмов, изоморфную $G$, то $(A, G, (\omega, A))$ — простая алгебра. Полное описание таких произведений осуществлено в работе [**2**]. Когда указанное условие не выполнено, то скрещенное произведение перестает быть, вообще говоря, простой алгеброй, что показывает случай циклических групп. Полное описание циклических скрещенных произведений приведено в работах [**1**] и [**3**]. Следующее утверждение связывает диэдральные скрещенные произведения с циклическими.

**Теорема.** *Пусть $A$ — простая конечномерная $K$-центральная алгебра, $D_n$ — диэдральная группа порядка $2n$, причем $n$ свободно от квадратов. Если $K_0$ — подполе инвариантов в $K$ относительно системы факторов $(\omega, f)$, то имеет место разложение*

$$(A, D_n, (\omega, f)) = S \otimes_{K_0} Z,$$

*где $S$ — циклическое скрещенное произведение, $Z$ — центр алгебры $(A, D_n, (\omega, f))$.*

### Литература

[1] Курсов В.В. Скрещенные произведения простых алгебр. *Вопросы алгебры.* 1995, вып. 8. с. 81–92.
[2] Курсов В.В., Янчевский В.И. Скрещенные произведения простых алгебр и их групп автоморфизмов. *Доклады АН БССР.* 1988, т. 32, № 9. С. 777–780.
[3] Курсов В.В. Циклические скрещенные произведения простых алгебр. *Изв. АН БССР.* 1991, № 1. С. 8–13

*Белорусский государственный университет, Минск (Беларусь)*
*E-mail:* kursov@bsu.by

## Условия покрытия конечных квазиполей Холла

В. С. Логинова

Квазиполе $Q$ порядка $q^2$ ($q = p^n$, $p$ — простое), двумерное над центром $K \simeq GF(q)$, называется квазиполем Холла, если все элементы из $Q \setminus K$ являются корнями одного неприводимого квадратичного многочлена $\varphi(x) = x^2 - rx - s \in K[x]$. Квазиполе *правопримитивно*, если его мультипликативная лупа совпадает с множеством правоупорядоченных степеней одного элемента:

$$Q^* = \{1, a, a^2, (a^2)a, ((a^2)a)a, \dots\}.$$

Изучая проблему примитивности для квазиполей, М. Кордеро и В. Джа в 2009 году обратили внимание [**1**] на непримитивность квазиполей Холла с покрытием собственными подквазиполями. Один из их результатов представлен теоремой.

**Теорема 1 (М. Кордеро и В. Джа).** *Квазиполе Холла $Q$ порядка $q^2$, $q = p^n$, где $n > 1$ и не является степенью 2, допускает покрытие собственными подквазиполями Холла, такими, что любые два из этих подквазиполей пересекаются в точности по собственному подполю ядра.*

Более подробное изучение подквазиполей в квазиполе Холла [**2**] привело к необходимости уточнения этой теоремы. Пусть $P = \mathbb{Z}_p(r, s)$ — минимальное подполе в $K$, содержащее коэффициенты многочлена $\varphi(x)$, $|P| = p^t$. Если $P = K$ и $\varphi(x)$ — примитивный неприводимый многочлен, то квазиполе Холла $Q$ правопримитивно и не содержит поэтому собственных подквазиполей.

**Теорема 2.** *Квазиполе Холла $Q$ порядка $q^2$, $q = p^n$, допускает покрытие конечными полями тогда и только тогда, когда $p = 2$, $n$ нечетно и $\varphi(x) = x^2 + x + 1$. Квазиполе Холла $Q$ допускает покрытие собственными подквазиполями Холла тогда и только тогда, когда $n/t > 1$ является нечетным составным числом.*

Предположение о существовании не-холлова подквазиполя (то есть размерности более 2 над своим ядром) в квазиполе Холла не содержит очевидных противоречий. Квазиполе $Q$ порядка $q^m$, $m > 2$, с центром $K \simeq GF(q)$, все элементы которого из $Q \setminus K$ являются корнями неприводимого квадратичного многочлена $\varphi(x) \in K[x]$ (*квазиполе с условием Холла*), допускает покрытие изоморфными квазиполями Холла порядка $q^2$, пересекающихся по $K$; оно не порождается одним элементом и не является ни лево-, ни правопримитивным.

### Литература

[1] Cordero M., Jha V. On the multiplicative structure of quasifields and semifields: cyclic and acyclic loops // Note di Matematica. 2009. Vol. 29 (№ 1). P. 45–59.

[2] Кравцова О. В., Логинова В. С. Вопросы строения конечных квазиполей Холла // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30 (№1). С. 128–141.

*Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)*
*E-mail:* loginovavs011001@mail.ru
n@ped-uni.ru

## Коммутативность ассоциативного кольца с автоморфизмами

М. Н. Мартышкина

Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с единицей, $\alpha, \beta$ — автоморфизмы $R$ и для любых $x, y \in \mathrm{R}$ выполняется соотношение $\alpha(y^n)+\beta(x^k) \in CentR$, $n$, $k$ — фиксированные целые разной четности, причем $n > k$. Тогда кольцо $R$ коммутативно.

Н. Джекобсон доказал, что любое кольцо в котором каждый элемент равен самому себе в некоторой степени $n > 1$ коммутативно, этот результат подвергался множеству обобщений и вариаций. Например, И. Херстейн доказал, что если для каждого $x \in R$ существует целое число $n = n(x) > 1$ такое, что $x^n - x \in \mathrm{Cent}R$, то кольцо $R$ коммутативно. МакХейл расширил результат Херстейна и доказал, что если $\alpha$ — эпиморфизм $\langle R, + \rangle$ такой, что $x^2 - \alpha(x) \in \mathrm{Cent}R$ для всех $x \in R$, то $R$ коммутативно [**1**]. Томинага показал, что если $n > 1$ — фиксированное целое и найдется сюръективный гомоморфизм $\alpha$, действующий на $\langle R, + \rangle$ такой, что $x^n - \alpha(x) \in \mathrm{Cent}R$ для всех $x \in R$, то $R$ коммутативно.

М. Хан исследовал коммутативность ассоциативных колец с условием $\alpha(x^{n+1}) + \beta(x^n) \in \mathrm{Cent}R$, где $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}R$ [**1**].

В работе исследован вопрос коммутативности ассоциативного кольца $R$, удовлетворяющего условию $\alpha(x^n) + \beta(x^k) \in \mathrm{Cent}RR$, $\alpha, \beta$ — автоморфизмы $R$, $n$ — нечетное, причем $n > k$. Доказана коммутативность кольца $R$ с указанными условиями для небольших значений $k$ ($k = 1$ и $k = 2$).

**Теорема 1**. Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с единицей, без 2-кручения, $\alpha, \beta$ — автоморфизмы $R$ и для любого $x \in R$ выполняется соотношение $\alpha(x^n) + \beta(x) \in \mathrm{Cent}R$, где $n$ — четное, причем $n > 1$. Тогда кольцо $R$ коммутативно.

**Теорема 2**. Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с единицей, без 2-кручения, $\alpha, \beta$ — автоморфизмы $R$ и для любого $x \in R$ выполняется соотношение $\alpha(x^n)+\beta(x^2) \in \mathrm{Cent}R$, где $n$ — нечетное, причем $n > 2$. Тогда кольцо $R$ коммутативно.

### Литература

[1] Khan M.A. Commutativity of rings with constraints on pair of automorphisms // Advances in Theoretical and Applied Mathematics. – 2006. – № 2. – Vol 1. – P. 119–126.

[2] Buckley S. M., MacHale D. Z-Polynomials and Ring Commutativity // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. — 2012. — Vol. 112A, № 2. — P. 51–57.

[3] Khan M. A. Commutativity of rings with constraints on pair of automorphisms//Advances in Theoretical and Applied Mathematics. – 2006. – № 2. – Vol 1. – 119 – 126.

[4] Мальцев Ю.Н. Почти коммутативные многообразия ассоциативных колец // Сиб. мат. журн. 1976. Т.17. № 5. С. 1086–1096.

[5] Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн ; пер. с англ. Е. Н. Кузьмина ; под ред. А. И. Ширшова. — Москва : Мир, 1972. — 190.

*Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул (Россия)*

## Графы коммутативности конечномерных эластичных композиционных алгебр

Д. А. Павлинов

*Графом коммутативности* $\Gamma_C(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$, коммутативный центр которой равен $C_\mathcal{A}$, называется граф с вершинами $[a] = \mathbb{F}a + C_\mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A} \setminus C_\mathcal{A}$, в котором различные вершины $[a]$ и $[b]$ смежны, если $ab = ba$. Всякая конечномерная эластичная композиционная алгебра является либо гурвицевой, либо симметрической, причём последние состоят из алгебр Окубо и форм пара-гурвицевых алгебр [**1, 2**]. Продолжая исследования [**3**], мы описываем компоненты связности графов коммутативности таких алгебр и вычисляем их диаметры.

Пусть $(\mathcal{O}, *, \mathrm{n})$ — алгебра Окубо над полем $\mathbb{F}$. Порожденная элементом $x$ подалгебра $\mathrm{alg}\langle x\rangle = \mathrm{span}\{x, x*x\}$ одномерна, если $x$ пропорционален ненулевому идемпотенту либо $x * x = 0$; множество таких $x \neq 0$ обозначим через $\mathcal{E}$. Подалгебра $\mathrm{alg}\langle x\rangle$ не содержит элементов из $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда многочлен $\chi_x(t) = t^3 - 3\mathrm{n}(x)t - \mathrm{n}(x, x*x)$ неприводим над $\mathbb{F}$, и в этом случае она совпадает с централизатором любого своего ненулевого элемента.

**Теорема 1.** *Если* $x, y \in \mathcal{E}$, *то* $d([x],[y]) \leq 2$ *в* $\Gamma_C(\mathcal{O})$, *причём при* $d([x],[y]) = 2$ *промежуточную вершину пути можно выбрать вида* $[z]$, *где* $z \in \mathcal{E}$.

**Теорема 2.** *Множествами вершин компонент связности графа* $\Gamma_C(\mathcal{O})$ *являются* $\{[x] = \mathbb{F}x \mid x \neq 0,\ \chi_x$ *приводим*$\}$, *а также множества* $\{[y] \mid 0 \neq y \in \mathrm{alg}\langle x\rangle\}$ *для каждого* $x$ *с неприводимым* $\chi_x$. *Первое множество непусто тогда и только тогда, когда* $\mathcal{O}$ *содержит ненулевые идемпотенты, и в этом случае диаметр соответствующей компоненты равен* 3, *если* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 3$ *и алгебра* $\mathcal{O}$ *не является расщепляемой, и* 4 *иначе.*

**Теорема 3.** *Пусть* $\mathcal{C}$ — *алгебра октонионов над полем* $\mathbb{F}$ *со следом* t *и нормой* n. *Графы коммутативности алгебры* $\mathcal{C}$ *и соответствующей ей пара-гурвицевой алгебры совпадают и несвязны: вершины* $[x] = \mathbb{F} + \mathbb{F}x$ *с условием* $\mathrm{t}(x)^2 - 4\mathrm{n}(x) \neq 0$ *изолированы. Если* $\mathcal{C}$ *не расщепляемая, то других вершин нет, а иначе они образуют компоненту связности диаметра* 3 *при* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ *и диаметра* 2 *при* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$.

Доклад основан на совместной работе с С. А. Жилиной. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению № 075-15-2025-345.

### Литература

[1] Elduque A., Myung H. C., Composition algebras satisfying the flexible law, Comm. Algebra **32** (2004), no. 5, 1997–2013.

[2] Elduque A., Order 3 elements in $G_2$ and idempotents in symmetric composition algebras, Canad. J. Math. **70** (2018), no. 5, 1038–1075.

[3] Жилина С. А., Павлинов Д. А., О графах коммутативности алгебр Окубо, Зап. научн. сем. ПОМИ **542** (2025), 81–99.

*МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва (Россия)*
*E-mail:* pavlinov.d.aa@gmail.com

## Радикал Кёте алгебр Новикова

А. С. Панасенко

Алгебра называется ***алгеброй Новикова***, если она удовлетворяет следующим тождествам:

$$(x, y, z) = (y, x, z), \quad (xy)z = (xz)y.$$

Алгебра называется ***слабо правонильпотентной***, если на любом конечном подмножестве алгебры выполнено тождество правонильпотентности некоторой степени.

Алгебра называется ***r-нильь***, если на любом одноэлементном подмножестве алгебры выполнено тождество правонильпотентности некоторой степени.

**Лемма 1.** *Алгебра Новикова является r-ниль тогда и только тогда, когда она слабо правонильпотентна.*

**Теорема 1.** *В каждой алгебре Новикова $A$ существует наибольший r-ниль идеал $I$, причем алгебра $A/I$ не содержит ненулевых r-ниль идеалов.*

Наибольший r-ниль идеал алгебры Новикова называется ***радикалом Кёте*** этой алгебры.

**Теорема 2.** *В каждой алгебре Новикова пересечение всех идеалов, фактор по которым не содержит ненулевых r-ниль идеалов, совпадает с радикалом Кёте.*

Пусть $A = F[x_1, x_2, \dots]/(x_1^p, x_2^p, \dots)$ — кольцо усеченных многочленов от бесконечного числа переменных над полем $F$ характеристики $p > 0$ и $D : A \to A$ — дифференцирование, заданное на порождающих следующим образом: $D(x_i) = x_{i+1}$. Рассмотрим конструкцию Гельфанда-Дорфман $\mathrm{Sk}_p$ от алгебры $A$ с дифференцированием $D$: пространство $A$ с умножением $a \circ b = aD(b)$.

**Теорема 3.** *Алгебра $\mathrm{Sk}_p$ является двупорожденной первичной r-ниль алгеброй ограниченного индекса $p + 1$.*

Это означает, что в общем случае алгебр Новикова радикал Бэра строго вкладывается в радикал Кёте. Остается открытым вопрос, существует ли первичная r-ниль алгебра Новикова над полем характеристики 0.

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.panasenko@g.nsu.ru

## О стандартном тождестве в подалгебре алгебры строго верхнетреугольных матриц

Е. П. Петров

В 1982 г. Л.А. Бокутем в Днестровской тетради [**1**] была поставлена задача (№ 1.23) об описании тождеств, выполняющихся во всех $n$-мерных ассоциативных алгебрах над полем ($n$ – фиксированное число). Ранее, в 1980 году С.А.Пихтильковым [**2**] эта задача была решена для алгебр с единицей при $n \leq 18$. В 1986 году Ю.Н.Мальцевым [**3**] изучалось многообразие $\mathfrak{M}_n$ ассоциативных алгебр над произвольным полем, порожденное всеми $n$-мерными нильпотентными алгебрами. Такие многообразия там были описаны для $n = \overline{1,6}$, а также доказано, что каждая $n$-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет тождествам:
$x_1x_2\dots x_{n-2} = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n-2)},\ \sigma \in S_{n-2},\ n \geq 6;\ [x_1, x_2, \dots, x_k] = 0,$
где $k = [\frac{n+1}{2}]+1$. В 1989 г. И.Л.Гусевой [**4**] было доказано, что $n$-мерная нильпотентная алгебра удовлетворяет стандартному тождеству

$$S_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0, \text{ где } k = [\tfrac{n}{3}] + 2.$$

В 1991 г. автором [**5**] была сформулирована гипотеза:

*Произвольная $n$-мерная нильпотентная алгебра над любым полем удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$.*

В качестве подтверждения этой гипотезы в [**5**] приводится пример $n$ - мерной алгебры, удовлетворяющей стандартному тождеству указанной степени, но не удовлетворяющей никакому полилинейному тождеству меньшей степени, и доказано, что $n$-мерная нильпотентная алгебра $R$ с условием $\dim R^2/R^3 \leq 2$ удовлетворяет данной гипотезе.

Выяснилось также, что для класса так называемых 2-алгебр, введенных Ю.М. Рябухиным и Р.С. Флоря в [**6**] (под 2-алгеброй понимается локально нильпотентная алгебра, порожденная такими элементами $x$, что квадрат соответствующего главного идеала $(x)$ равен нулю), вышеуказанная гипотеза остается верной. Именно, в работе автора [**7**] доказано, что для многообразия $\mathfrak{M}$, порожденного всеми $n$-мерными 2-алгебрами, идеал тождеств $T(\mathfrak{M}) = \{x_1x_2\cdots x_k\}^T$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$.

В 1980 г. в работе [**8**] И.В. Львовым доказывается вложимость произвольной ассоциативной нильпотентной индекса $N$ алгебры над полем в алгебру строго верхнетреугольных матриц порядка $N$ (с нулями на диагонали) над коммутативной нильпотентной индекса $N$ алгеброй. В связи с этим возникает естественный частный вопрос: будет ли вышеуказанная гипотеза справедлива для подалгебры максимального индекса нильпотентности алгебры строго верхнетреугольных матриц над произвольным полем?

Ответ на этот вопрос положительный. Именно, имеет место следующий факт. **Теорема.** *Пусть $T$ – алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка $N$ над произвольным полем $F$.*

*Тогда всякая подалгебра $R$ в $T$ индекса нильпотентности $N$ удовлетворяет стандартному тождеству $S_k(x_1, \dots, x_k) = 0$, где $k = [\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}]$, $n = \dim R$.*

### Литература

[1] *The Dniester Notebook (Unsolved problems in the theory of rings and modules)* V.A. Andrunakievich (ed.), Third edition, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd., Inst. Mat., Novosibirsk, 1982.

[2] Pikhtil'kov S.A., On varieties generated by n-dimensional algebras, Tula Polytechnic Inst., Tula, (1980), Manuscript deposited at VINITI, No. 1213-80 Dep.

[3] Mal'tsev Yu.N., On identities of nilpotent algebras, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72.

[4] Guseva I.L., On identities of finite-dimensional nilpotent algebras, in: Internat. Conf. on Algebra, dedicated in the memory A.I. Mal'tsev, August 1989, Novosibirsk, p. 43.
[5] Petrov E.P., On identities of finite-dimensional nilpotent algebras, Algebra i Logika, Vol. 30, **5** (1991), 540–556.
[6] Pyabukhin Y.M., Florya R.S., 2-algebras and identities in them, Mat. research (Chisinau), **76**: (1984), 107–132.
[7] Petrov E.P., The ideal of identities of a varity generated by $n$-dimensional 2-algebras, Russian Mathematics, **69**, No. 2, (2025), 52–55.
[8] Lvov I.V., Representation of nilpotent algebra by matrix ring, Sib. Mat. Zh., **21**, №5, (1980), 158-161.

*Алтайский государственный университет, Барнаул (Россия)*
*E-mail:* pep@mail.asu.ru

## О слабом делении в конечномерных алгебрах

А. П. Пожидаев

В теории колец и алгебр свойство делимости обычно связывают с возможностью однозначно или многозначно разрешать уравнения вида $ax = b$ и $ya = b$ для любых элементов. П. М. Кон в работе [**1**] изучал бесконечномерные алгебры Ли с делением — алгебры Ли, в которых для любых $a \neq 0$ и $b$ существует $x$, такой что $ax = b$. Позднее, при изучении монокомпозиционных алгебр у А. Т. Гайнова возникли так называемые алгебры со слабой делимостью (см., например, [**2**]). А именно, алгебра $A$ обладает слабой делимостью, если для каждого $a \in A$ существует $x \in A$ такой, что $a \cdot x = a$.

Вопрос о том, существуют ли конечномерные антикоммутативные алгебры над бесконечным полем до настоящего времени оставался открытым. Мы показываем, что ответ на данный вопрос отрицателен. Однако, немного ослабляя условие антикоммутативности, строится класс простых конечномерных алгебр с тождеством $x^2x + xx^2 = 0$ и слабой делимостью.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0017.*

### Литература

[1] Cohn P. M., Simple rings without zero-divisors and Lie division rings, Mathematika 6, 11 (1959), 14–18.

[2] Гайнов А. Т., О конечномерных специальных монокомпозиционных алгебрах, Алгебра и логика 35, 2 (1996), 125–144.

*ИМ СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* app@math.nsc.ru

## Простые правоальтернативные супералгебры с двумерной нильпотентной чётной частью

С. В. Пчелинцев

Всюду ниже предполагается, что $B = B_0 \oplus B_1$ – простая правоальтернативная супералгебра над основным полем $F$ характеристики не 2, чётная часть которой $B_0$ является двумерной ниль-алгеброй.

Если $B_0^2 = 0$, то такие супералгебры классифицированы в [**1**], [**2**].

Если $B_0^2 \neq 0$, то $B_0 = \langle a, a^2 \rangle$ для подходящего элемента $a \in B_0$ такого, что $a^3 = 0$.

**Определение**. Если $0 \neq \alpha, \lambda \in F$, то обозначим через $C_{2|3}(\alpha, \lambda)$ супералгебру $B = B_0 \oplus B_1$, где $B_0 = \langle a, a^2 | a^3 = 0 \rangle$, $B_1 = \langle p, x, y \rangle$ и умножение задано таблицей, содержащей только ненулевые произведения:

$$\begin{array}{c|c} ap = x, \quad xa = -y, \quad ay = -ya = \lambda p, & xp = \alpha a, \\ bp = y, \quad xb = -bx = p, & yp = 2\alpha b. \end{array}$$

Получены следующие результаты.

**Теорема 1.** *Пусть $B = B_0 \oplus B_1$ — простая конечномерная правоальтернативная супералгебра. Если её чётная часть $B_0 = \langle a, a^2 | a^3 = 0 \rangle$, то такая алгебра существует только в случае характеристики 3 основного поля и она изоморфна супералгебре $C_{2|3}(\alpha, \lambda)$.*

Если основное поле алгебраически замкнуто, то супералгебра $C_{2|3}(\alpha, \lambda)$ изоморфна супералгебре $C_{2|3}(1, 1)$.

**Теорема 2.** *Супералгебры $C_{2|3}(\alpha, \lambda)$ и $C_{2|3}(\alpha', \lambda')$ изоморфны тогда и только тогда, когда существуют скаляры $\sigma, \tau$ такие, что $\alpha' = \alpha\sigma^2$, $\lambda' = \lambda\tau^3$.*

Кроме того, указана бесконечная серия простых конечномерных правоальтернативных супералгебр над полем характеристики 3, чётная часть которых является нильпотентной алгеброй индекса 3.

### Литература

[1] Пчелинцев С.В., Шашков О.В., Простые 5-мерные правоальтернативные супералгебры с тривиальной четной частью, Сиб. Матем. Журн., 58, № 6 (2017), 1078-1089.

[2] Пчелинцев С.В., Шашков О.В., Строение сингулярных супералгебр с 2-мерной чётной частью и новые примеры сингулярных супералгебр, Алгебра и Логика, том 61, №6 (2022), 742-765.

*Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва (Россия)*
*E-mail:* pchelinzev@mail.ru

## Дифференцирования в алгебрах инверсных полугрупп Клиффорда

Р. Ю. Репеев

Хорошо изученным классом классом дифференцирований являются дифференцирования в групповых алгебрах. Удобным инструментом их исследования являются характеры на группоиде присоединенного действия (см. **[1, 2]**). Ранее в работе **[3]** предложенный подход был использован при рассмотрении случая инверсных полугрупп, образованных из двух групп, связанных гомоморфизмом. В данной работе рассматривается обобщение таких полугрупп, а именно инверсные полугруппы Клиффорда.

Полугруппа Клиффорда $S$ представляется в виде объединения групп $\bigsqcup_{e\in E(S)} G_e$, где $E(S)$ — множество идемпотентов $S$, а идемпотент $e$ есть единица группы $G_e$. Группы связаны между собой гомоморфизмами: $\varphi_{f,e} : G_f \to G_e; \varphi_{f,e}(g) = eg$ для $e \leqslant f$, где порядок на $E(S)$ задан соотношением $e \leqslant f \iff ef = e$.

**Теорема 1.** *Для полугруппы Клиффорда $S$ существует разложение в прямое произведение групповых алгебр $\mathbb{C}[S] \cong \prod_{f\in E(S)} \mathbb{C}[G_f]$.*

**Предложение.** *Элемент $\varepsilon_e = \sum_{f\leqslant e} \mu(f,e)f$ соответствует единице алгебры $\mathbb{C}[G_e]$ в разложении выше ($\mu$ — функция Мёбиуса).*

**Теорема 2.** $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[S]) \cong \prod_{e\in E(S)} \mathrm{Der}(\mathbb{C}[G_e])$, *причем изоморфизм справа налево вычисляется по формуле*

$$d(s) = \sum_{e\leqslant f} \varepsilon_e \cdot d_e(\varphi_{f,e}(s)), \quad s \in G_f \subseteq S.$$

Также были рассмотрены $\delta$- и $(\alpha,\beta)$-дифференцирования, для которых

$$d(xy) = \delta \cdot (d(x)y + xd(y)) \quad \text{и} \quad d(xy) = \alpha \cdot d(x)y + \beta \cdot xd(y).$$

Для них также дифференцирования разбиваются в произведение дифференцирований групповых алгебр. Помимо этого, для операторов, не являющихся обычными дифференцированиями выполняется $\delta = \frac{1}{2}$, $\alpha + \beta = 1$.

### Литература

[1] Арутюнов А. А., Мищенко А. С., Штерн А. И., Деривации групповых алгебр, Фундамент. и прикл. матем., 21:6 (2016), 65–78.

[2] Арутюнов А. А., Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах, Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН, 308, МИАН, М., 2020, 28–41.

[3] Repeev R., Derivations for a Special Case of Inverse Semigroup Algebras. (2026). Advances in Systems Science and Applications, 26(1), 85–96.

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова, Москва (Россия)*
*E-mail:* roman.repeev@gmail.com

## Конструкции квандлов над группами, модулями и почти-кольцами

А. Н. Бородин, М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Квандл — это алгебраическая система $\langle Q; \circ, / \rangle$ с тождествами $(x \circ y)/y = (x/y) \circ y = x$, $x \circ x = x$, $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$; квандл *абелев*, если $(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ z) \circ (y \circ t)$.

**Квандлы Александера.** Обобщённый квандл Александера над группой $G$ с $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ задаётся одной из операций а) $y\varphi(y^{-1}x)$, б) $\varphi(xy^{-1})y$, в) $y\varphi(xy^{-1})$, г) $\varphi(y^{-1}x)y$. Типы квандлов в) и г) взаимно обратны. При помощи антиавтоморфизма $\iota\colon x \mapsto x^{-1}$ для квандла типа а) с автоморфизмом $\varphi$ можно построить изоморфный ему квандл типа б) с автоморфизмом $\iota\varphi\iota$. В итоге, по существу имеется только два типа независимых квандлов.

**Произведение с подкручиванием.** Пусть $x \circ_i y = y\varphi_i(y^{-1}x)$ — квандлы Александера над $G$ и $H$ $(i = 1, 2)$, $f\colon G \to Z(H)$ — гомоморфизм, $\varphi_2|_{Z(H)} = \mathrm{id}$.

**Теорема 1.** *Операция* $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = \big(x_1 \circ_1 y_1,\ f(y_1^{-1}x_1)\,(x_2 \circ_2 y_2)\big)$ *задаёт квандл на* $G \times H$.

Как и в полупрямом произведении групп, первая квандловая компонента независима и «подкручивает» вторую квандловую операцию.

**Модули. Теорема 2.** *Если* $M$ *— модуль над коммутативным кольцом* $R$, $f\colon M \times M \to R$ *— билинейная форма и* $f(x, x) = 0$, *то* $x \circ y = x + f(x, y)y$, $x/y = x - f(x, y)y$ *задают квандл на* $M$ (для свободных модулей см. [1]).

**Почти-кольца.** В правом почти-кольце $\langle R; +, \cdot \rangle$ справедливо тождество $(x+y)z = xz + yz$ (группа $\langle R; + \rangle$ может быть некоммутативной). Рассмотрим множество $R^* \subset R \setminus \{0\}$ с групповой по умножению операцией.

**Теорема 3.** *Для* $a \in R^*$ *операции* $x \circ y = a(x - y) + y$, $x/y = a^{-1}(x - y) + y$ *задают квандл на* $R \iff a\big(a(u - t) + t\big) = a(au - at) + at$ *для всех* $u, t \in R$.

Пример: $\mathbb{R}^3$ с $x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1y_2 - x_2y_1)$, $x \odot y = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, x_1y_3 + x_2(1 - y_1) + x_3y_1)$ и $a = (a_1, 0, a_3)$, $a_1 \neq 0$. Левая дистрибутивность нарушена, но условие теоремы 3 выполнено; квандл абелев.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2026-0029).

### Литература

[1] Симонов А.А., Нещадим М.В., Бородин А.Н., Конструкции квандлов над группами и кольцами. Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.

*Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск (Россия)*
*E-mail:* serajsova@yandex.ru
*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* neshch@math.nsc.ru
*Новосибирский государственный университет, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.simonov@g.nsu.ru

## Мономиальные операторы Роты — Бакстера и операторы усреднения на алгебре многочленов Лорана

А. Ф. Ходзицкий

Пусть $A$ – алгебра над полем $F$. Линейный оператор $R$ на $A$ называется оператором Роты — Бакстера, если

$$R(a)R(b) = R\big(R(a)b + aR(b) + \lambda ab\big)$$

выполнено для всех $a, b \in A$. Здесь $\lambda \in F$ – фиксированный скаляр, вес оператора $R$. Линейный оператор $T$ на $A$ называется оператором усреднения, если выполнены соотношения $T(a)T(b) = T(T(a)b) = T(aT(b))$ для всех $a, b \in A$.

Линейный оператор $L$ на $A \in \{F[x], F[x, x^{-1}]\}$ называется мономиальным, если для любого монома $t \in A$ найдутся моном $z_t \in A$ и скаляр $\alpha_t \in F$ такие, что $L(t) = \alpha_t z_t$. Мономиальные операторы Роты — Бакстера на $F[x]$ были введены в **[1]** и в случае поля нулевой характеристики описаны в **[2]**. В работе **[3]** были описаны мономиальные операторы усреднения на алгебрах многочленов от одной переменной.

В своей работе мы классифицируем мономиальные операторы усреднения и мономиальные операторы Роты — Бакстера на алгебре многочленов Лорана $F[x, x^{-1}]$ в случае поля произвольной характеристики.

### Литература

[1] Guo L., Rosenkranz M., Zheng S.H., Rota-Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators, Pacific J. Math. (2) **275** (2015) 481–507.

[2] Yu H., Classification of monomial Rota-Baxter operators on $k[x]$. J. Algebra Appl. **15** (2016), 1650087, 16 p.

[3] Khodzitskii A., Monomial Rota–Baxter operators of weight zero and averaging operators on the polynomial algebra, arXiv:2412.18236.

*НГУ, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* a.khodzitskii@g.nsu.ru

## Бимодули скрученного типа

О. В. Шашков

Изучение строения правоальтернативных бимодулей не только имеет важную роль для построения теорий правоальтернативных алгебр и супералгебр, но и представляет самостоятельный интерес.

В 2001 вышла знаковая работа [**1**], в которой изучались свойства правоальтернативных бимодулей над алгеброй матриц порядка 2. В частности, были описаны все неприводимые бимодули порядка 2 и 4, построен неприводимый бимодуль порядка 6, доказано, что не всякий правоальтернативный бимодуль вполне приводим. В [**2**] изучались некоторые свойства бимодулей над алгеброй матриц порядка большего 2. В частности, доказано, что все правоальтернативные бимодули над алгебрами матриц разлагаются в прямую сумму ассоциативного бимодуля и неассоциативного бимодуля, у которого умножение справа левоассоциативно. Неассоциативные бимодули представляются как суммы линейных копий алгебр $H$ и $S$ — симметричных и кососимметричных матриц. Там же был доказан критерий правоальтернативности таких бимодулей: *Бимодуль правольтенативен тогда и только тогда, когда для каждой компоненты* $[H]$ *или* $[S]$ *найдутся такие элементы* $v, w$, *что* $[h] = vh$ *и* $[s] = ws$.

Изучено строение неассоциативных бимодулей, составленных из двух йордановых компонент $[H]$ и $[S]$ и доказана

**Теорема.** *Всякий правоальтернативный унитальный конечномерный бимодуль* $M = [H] + [S]$ *является бимодулем скрученного типа* $\mathrm{HS}(g)$, *заданным ненулевой матрицей связи* $g$, *у которой нет противоположных собственных значений. Два бимодуля изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы связи пропорциональны.*

Из теоремы следует, что над бесконечным полем существует бесконечное число неизоморфных бимодулей.

### Литература

[1] Murakami L. I., Shestakov I. Irreducible unital right alternative bimodules // J. Algebra. 2001. V. 246, N 2. P. 897–914.

[2] Л. И. Мураками, С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков, “Правоальтернативные унитальные бимодули над алгебрами матриц порядка $\geq 3$”, Сиб. матем. журн., 63:4 (2022), 893–910.

*Финансовый университет при правительстве Российской Федерации, Москва (Россия)*
*E-mail:* o.v.shashkov@yandex.ru

## Big subgroups of Abelian $p$-groups

A. R. Chekhlov, P. V. Danchev

The subgroup $S$ of a $p$-group $G$ is called a *big subgroup* if $S$ is fully inert in $G$ and $S+B=G$ for any basic subgroup $B$ of $G$.

Recall that two subgroups $U, V$ of a group $G$ are *commensurable*, provided that both quotients $(U+V)/U$ and $(U+V)/V$ are finite. A subgroup $H$ of a group $G$ is said to be *fully inert* if, for every endomorphism $\phi$ of $G$, the factor-group $(H+\phi(H))/H$ is finite. A number of properties of big subgroups have been obtained, listing some of them.

(1) Every fully inert subgroup of a bounded $p$-group is big.

(2) If $S$ is a big subgroup of a $p$-group $G$, then $p^nS$ is also a big subgroup of $G$ for each $n \geq 1$.

(3) Let $G$ be a unbounded reduced $p$-group. Then, the intersection $H \cap B$ is not bounded for each basic subgroup $B$ of $G$.

(4) If $G$ is an unbounded $p$-group and $H$ is a big subgroup of $G$, then $H$ too is unbounded.

(5) If $H$ is a big subgroup of a $p$-group $G$ and $\alpha$ is an automorphism of $G$, then $\alpha(H)$ remains big in $G$.

(6) The divisible part $D$ of a $p$-group $G$ is always contained in a big subgroup $H$ of $G$.

**Lemma.** *(1) Let $H$ be a big subgroup of a separable group $G$, and suppose $|H| > 2^{\aleph_0}$. Then, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $H + (p^mG)[p^n]$ is commensurable with $H$ for every $m \in \mathbb{N}$.*

*(2) Let $H$ be a subgroup of a reduced $p$-group $G$, and let $B$ be some basic subgroup of $G$. If $H+B=G$, then $H+F=G$ for every basic subgroup $F$ of $G$.*

*(3) Let $H$ be a fully inert subgroup in a group $G$, and let $H \cap B_n$ be infinite for some $n \in \mathbb{N}$. Then, $H + p^{n-m}G[p^m]$ is commensurable with $H$ for some natural number $m \leq n$.*

Recall that the basic subgroup $B$ of a group $G$ is called *lower* if $r(G/B) = \inf_n r(p^nG)$, where $r(F)$ is the rank of a group $F$.

**Theorem.** *The fully inert subgroup $H$ of a group $G$ is a big if, and only if, each lower basic subgroup $B$ of $G$ is dense in $H+B$ and $G[p] \leq H+B$.*

**Funding:** The work of A.R. Chekhlov is supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia under agreement No. 075-02-2026-1339.

*Department of Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk (Russia)*
*E-mail:* cheklov@math.tsu.ru
*Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia (Bulgaria)*
*E-mail:* danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com

## New results on Rota—Baxter operators

V. Yu. Gubarev

**I**. In 2021, the author and A. Perepechko [4] proved that every injective Rota—Baxter operator of weight 0 on $F[x]$, when $\operatorname{char} F = 0$, is a composition of the multiplication by a fixed nonzero polynomial and formal integration at some fixed point.

Now, we describe all injective Rota—Baxter operators $R$ of weight 1 on $F[x]$. When $\operatorname{char} F = p > 0$, the only one is $R = -\mathrm{id}$. When $\operatorname{char} F = 0$, we have either $R = -\mathrm{id}$ or, up to conjugation with automorphisms of $F[x]$, $R(1) = x$, and $R$ is uniquely defined via this equality. Since there are no nonzero Rota—Baxter operators of weight 0 on $F[x]$, when $\operatorname{char} F > 0$ [5], this finished the description of injective Rota–Baxter operators of an arbitrary weight on $F[x]$.

**II**. Let $\mathrm{RB}_\lambda(A)$ denote the set of all Rota–Baxter operators of weight $\lambda$ on an algebra $A$. By [2], the Rota–Baxter $\lambda$-index of $A$ is

$$\mathrm{rb}_\lambda(A) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{for all } R \in \mathrm{RB}_\lambda(A) \text{ exists } 0 \le k \le n : \ R^k(R + \lambda\mathrm{id})^{n-k} = 0\}.$$

If $\operatorname{char} F = 0$, then $\mathrm{rb}_\lambda(M_n(F)) = 2n - 1$ for every $\lambda \in F$ [2]. Let $R$ be a Rota—Baxter operator of weight $\lambda$ on $M_n(F)$, $\operatorname{char} F = 0$, whose minimal polynomial has degree $2n - 1$. We prove that, up to the known equivalence, $R$ is unique.

**III**. In 2022, the author and M. Goncharov introduced a notion of double Lie algebra of nonzero weight $\lambda$ [1]. Now, we construct, as far as we know, the first example of a simple $\lambda$-double Lie algebra for every nonzero $\lambda \in F$. For this example, the limit of the extremal Rota—Baxter operators of weight $\lambda$ on $M_n(F)$ was used.

**IV**. We provide two-dimensional examples of preLie and postLie algebras such that there are no finite-dimensional envelopping preassociative and postassociative algebra, respectively. Thus, the analogue of the Ado theorem fails for the pairs (preLie, preAs) and (postLie, postAs). For the examples, the embedding of pre- and postassociative algebras into associative Rota—Baxter algebras is used [3].

The results were obtained with the assistance of AI.

### References

[1] Goncharov M., Gubarev V., Double Lie algebras of a nonzero weight, Adv. Math. **409** (2022), Paper No 108680.
[2] Gubarev V., Spectrum of Rota-Baxter operators, Internat. J. Algebra Comput. (5) **35** (2025), 687–712.
[3] Gubarev V., Kolesnikov P., *Embedding of dendriform algebras into Rota–Baxter algebras*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), no. 2, 226–245.
[4] Gubarev V., Perepechko A., *Injective Rota-Baxter operators of weight zero on $F[x]$*, Mediterr. J. Math., (6) **18** (2021), N267.
[5] Khodzitskii A., *Monomial Rota-Baxter and averaging operators on $F[x, x^{-1}]$*, arXiv:2607.29312 [math.RA[, 11 p.

*Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* vsevolodgu@math.nsc.ru

## The girth of the compressed zero-divisor graph of a finite associative ring

A. S. Monastyreva

For any associative ring $R$ and any element $a \in R$, denote $l(a) = \{x \in R;\ xa = 0\}$, $r(a) = \{x \in R;\ ax = 0\}$. $D(R)$ denotes the set of all (one-sided and two-sided) zero-divisors of $R$. Let $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$.

For $x, y \in D(R)$, we say that $x \sim y$ if and only if $r(x) \cup l(x) = r(y) \cup l(y)$. It is clear that $\sim$ is an equivalence relation. We denote by $[x]$ the equivalence class of an element $x \in D(R)$.

Denote by $\Gamma_\sim(R)$ the graph whose set of vertices is $\{[x];\ x \in D(R)^*\}$ and two vertices $[x]$ and $[y]$ (not necessarily distinct) are joined by an edge (or a loop) if and only if $xy = 0$ or $yx = 0$. We refer to $\Gamma_\sim(R)$ as *the compressed zero-divisor graph* of $R$ (see [**1**]).

The girth of a graph is the length of the shortest cycle it contains. If a graph has no cycles, then by definition its girth is infinite.

In 2002, Redmond proved that the girth of the zero-divisor graph of a finite ring is either infinite or does not exceed four [**2**]. Later, it was proved that for a Noetherian ring, as well as for a commutative ring with unity, the girth of the compressed zero-divisor graph is either infinite or equal to three [**3, 4**]. In this paper, we prove the following result:

**Theorem.** *If the compressed zero-divisor graph of a finite ring is not acyclic, then it contains a cycle of length three.*

### References

[1] Zhuravlev E. V., Monastyreva A. S., Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings, Sib. Math. J., **61(1)** (2020), 76–84.
[2] Redmond S.P. The zero-divisor graph of a noncommutative ring. *Int.J.Commut.Rings* (2002) **1(4)**, 203–211.
[3] Coykendal J. and et al., On Zero Divisor Graphs, Progress Comm. Alg., **2** (2012), 241–299.
[4] Anderson D. F., LaGrange J. D., Some remarks on the compressed zero-divisor graph, J. Algebra, **447** (2016), 297–321.

*Altai State University, Barnaul (Russia)*
*E-mail:* akuzmina1@yandex.ru

## A non-linearizable action of $S_3$ on free metabelian Lie and associative algebras

A. Naurazbekova

Let $M$ be the free metabelian Lie algebra of rank 4 over the field of complex numbers $\mathbb{C}$. We construct a non-linearizable action of the symmetric group $S_3$, the smallest nonabelian group, on $M$ by automorphisms. We also construct a non-linearizable action of $S_3$ on free metabelian associative algebras of rank 4.

This is joint work with U. Umirbaev.

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana (Kazakhstan)*
*E-mail:* naurazbekova82@gmail.com

**Trace identities of special Jordan algebras**

I. P. Shestakov

We study the trace identities of special Jordan matrix algebras over a field of zero characteristic.

More exactly, we found bases of trace identities of the full Jordan matrix algebra and of the algebras of Hermitian matrices with respect to orthogonal and symplectic involutions.

Furthermore, we establish the Specht property for the ideal of all trace identities for these Jordan algebras as well.

Finally, we found conditions for inclusion of a Jordan algebra with trace into a Jordan matrix algebra over an associative commutative ring, conserving the trace.

It is a joint work with P.Koshlukov and C.Fideles.

*São Paulo University, São Paulo (Brazil)*
*E-mail:* ivan.shestakov@gmail.com

## Genus of quaternion algebras over formally real fields

S. V. Tikhonov

Let $F$ be a field and $\mathrm{Br}(F)$ its Brauer group. The genus $\mathbf{gen}(D)$ of a finite-dimensional central division algebra $D$ over a field $F$ is defined as the set of classes $[D'] \in \mathrm{Br}(F)$, where $D'$ is a central division $F$-algebra having the same maximal subfields as $D$. Various modifications of the concept of genus are discussed in [**1**] and [**3**].

In [**4**], we prove the finiteness of the genus of quaternion division algebras over some formally real fields. The proofs are based on methods from the theory of quadratic forms, in particular employing Pfister's local-global principle for quadratic forms over formally real fields.

Let $F$ be a formally real field (i.e., $-1$ is not a sum of squares in $F$). We denote by $I^n(F)$ the $n$-th power of the fundamental ideal $I(F)$ in the Witt ring $W(F)$ of $F$. Let $W_t(F)$ be the additive torsion subgroup of $W(F)$, and define $I^n_t(F) := I^n(F) \cap W_t(F)$.

**Theorem 1.** *Let $F$ be a formally real field such that the ideal $I^2(F)$ is torsion-free. Then the genus is trivial for any quaternion division $F$-algebra.*

As a corollary, we obtain that the genus of any quaternion division algebra over a formally real pythagorean field is trivial.

For a finitely generated field extension $F/k$, $W_{nr}(F/k)$ denotes the unramified Witt group (see [**2**]). Let $I^2_{nr}(F/k) := W_{nr}(F/k) \cap I^2(F)$.

**Theorem 2.** *Let $F$ be a formally real field which is a finitely generated extension of some subfield $k$. Assume that the torsion of $I^2_{nr}(F/k)$ is finite. Let $n$ be the number of torsion elements in $I^2_{nr}(F/k)$. Then $|\mathbf{gen}(A)| \leq n$ for any quaternion division $F$-algebra $A$.*

The research was conducted under the 2026 grant from the President of the Republic of Belarus in the field of science.

### References

[1] Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A., Division algebras with the same maximal subfields, Uspekhi Mat. Nauk **70** (2015), no. 1, 89–122 (in Russian). English translation: Russian Math. Surveys **70** (2015), no. 1, 83–112.

[2] Colliot-Thélène J.-L., Sujatha R., Unramified Witt groups of real anisotropic quadrics, Duke Math. J. **91** (1998), no. 2, 393–404.

[3] Krashen D., Matzri E., Rapinchuk A., Rowen L., Saltman D., Division algebras with common subfields. *Manuscripta Math.* **169**: 1-2 (2022), 209–249.

[4] Tikhonov S. V., Genus of quaternion algebras over formally real fields. arXiv:2610.05392.

*Belarusian State University, Minsk (Belarus)*
*E-mail:* tikhonovsv@bsu.by

## Primitive Jordan Banach algebras

V. N. Zhelyabin, A. S. Mamontov

In the present work, we consider the space of primitive ideals of a $JB$-algebra. It is shown that the topological spaces of primitive ideals of a $C^*$-algebra and its $JB$-algebra of self-adjoint elements are homeomorphic. Furthermore, we establish that a separable primary $JB$-algebra is primitive.

Let $J$ be a Jordan algebra over the field of real numbers $\mathbb{R}$, which is a Banach algebra with respect to a norm $\|\cdot\|$. Then $J$ is called a $JB$-algebra if the norm satisfies the following requirements:

$$\|a^2\| = \|a\|^2,\ \|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \text{ for } a, b \in J.$$

Let $A$ be a $C^*$-algebra. An element $a$ of $A$ is called self-adjoint if $a^* = a$. Let $J = H(A, *)$ be the set of all self-adjoint elements of $A$. Define a multiplication $(\circ)$ on $J$ by the rule

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx),\ x, y \in J.$$

Then $J = H(A, *)$ is a $JB$-algebra with respect to the norm of the $C^*$-algebra $A$.

A Jordan algebra $J$ is called primitive if there exists an $e$-modular inner ideal $Q$ of the algebra $J$ such that $Q \neq J$, and for every nonzero ideal $I$ of the algebra $J$, the equality $Q+I = J$ is valid. Note that the concept of a primitive unital Jordan algebra was introduced by Zelmanov in [**1**]. Subsequently, this concept was extended to arbitrary Jordan algebras (see [**2**]). Primitive Jordan algebras were described in [**3, 4**].

Let $A$ be an associative algebra with an involution $j$. In [**3**], Proposition 2, it is proved that the primitivity of the algebra $A$ implies the primitivity of the Jordan algebra $H(A, j)$. However, the converse is not true in general.

Naturally, the following question arises: let $A$ be a $C^*$-algebra such that $H(A, *)$ is primitive. Is $A$ primitive?

The following theorem holds.

**Theorem 1.** *Let $A$ be a $C^*$-algebra and $J = H(A, *)$. Then the $C^*$-algebra $A$ is primitive if and only if the $JB$-Jordan algebra $J$ is primitive.*

Let $\mathrm{Prim}(A)$ be the set of primitive ideals of an associative algebra $A$. Then $\mathrm{Prim}(A)$ is a topological space with respect to the closure operation $\overline{G} = \{I \in \mathrm{Prim}(A) \mid I(G) \subseteq I)\}$, where $G \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ and $I(G) = \bigcap_{\{P \in G\}} P$. Similarly, we introduce a topology on the set $\mathrm{Prim}(J)$ of primitive ideals of the Jordan algebra $J$.

**Corollary 1.** *Let $A$ be a $C^*$- algebra and $J = H(A, *)$. Then $I \in \mathrm{Prim}(J)$ if and only if $I = H(P, *)$ and $P \in \mathrm{Prim}(A)$.*

**Theorem 2.** *Let $A$ be a $C^*$- algebra and $J = H(A, *)$. Then topological spaces* $\mathrm{Prim}(A)$ *and* $\mathrm{Prim}(J)$ *are homeomorphic.*

It is well known that a separable primary $C^*$- algebra is primitive. For Jordan $JB$-algebras the following holds

**Theorem 2.** *Let $J$ be a separable prime $JB$-algebra. Then $J$ is a primitive algebra.*

The research was carried out within the framework of the Sobolev Institute of Mathematics state contract (project FWNF-2026-0017).

### References

[1] Zel'manov E. I., Primary Jordan algebras, Algebra and Logic, 1979, 18:2, 103–111.
[2] Hogben L., McCrimmon K., Maximal Modular Inner Ideals and the Jacobson Radical, Journal Algebra, 1981, 68, 155–169.
[3] Skosyrskii V. G., Primitive Jordan algebras, Algebra and Logic, 1992, 31:2, 110–120.
[4] Anquela J.A., Montaner F., Cortes T., On Primitive Jordan algebras, Journal of algebra 1994, 163, 663–674.

*Sobolev Institute of Mathematics,Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* vicnic@math.nsc.ru
*Sobolev Institute of Mathematics,Novosibirsk (Russia)*
*E-mail:* andreysmamontov@gmail.com

# VII. Секция «Теория моделей»

## О свойстве локального строгого порядка в упорядоченных структурах

В. В. Вербовский

Цель данной работы — исследовать локальный аналог свойства строгого порядка внутри сечения, которое используется для описания упорядоченно стабильных теорий.

Линейно упорядоченная структура $\mathcal{M}$ называется *упорядоченно стабильной в* $\lambda$, если для любого подмножества $A \subseteq M$ мощности не больше $\lambda$ и для любого сечения $\langle C, D\rangle$ в $\mathcal{M}$ существует самое большее $\lambda$ 1-типов над $A$, которые совместны с сечением $\langle C, D\rangle$.

Линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ обладает *свойством строгого порядка внутри сечения*, если существует формула $\phi(x, \bar{y})$, такая что для любого натурального числа $n$ существуют кортежи $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ и сечение $\langle C_n, D_n\rangle$ в $\mathcal{M}$, такие что в некотором $|M|^+$-насыщенном элементарном расширении $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$ имеет место:

$$\phi(\mathcal{N}, \bar{a}_1) \cap \langle C_n, D_n\rangle(\mathcal{N}) \subset \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_2) \cap \langle C_n, D_n\rangle(\mathcal{N}) \subsetneq \dots \subsetneq \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_n) \cap \langle C_n, D_n\rangle(\mathcal{N})$$

Теория обладает *свойством строгого порядка внутри сечения*, если некоторая ее модель обладает этим свойством.

Известно следующее. Пусть $T$ является элементарной теорией линейно упорядоченной структуры. Тогда теория $T$ является упорядоченно стабильной тогда и только тогда, когда она не обладает свойством независимости и не обладает свойством строгого порядка внутри сечения.

Однако данное свойство локального строгого порядка не является элементарным.

В докладе будет дана вариация локального строгого порядка — свойство вложенности выпуклых компонент. Это свойство (точнее, его отрицание) является элементарным.

**Теорема.** *Элементарная теория $T$ линейно упорядоченной структуры обладает свойством строгого порядка внутри сечения тогда и только тогда, когда каждая ее модель обладает равномерным свойством вложенности выпуклых компонент.*

*Институт математики и математического моделирования, Алматы (Казахстан)*
*E-mail: viktor.verbovskiy@gmail.com*

## Применения полумодельных расстояний, вопросы теории моделей и новые кластеризации многозначных логических высказываний с вероятностями

А. А. Викентьев

Сходство экспертных высказываний, так и их различие имеет фундаментальное значение в машинном обучении. В настоящее время достаточно хорошо развиты теория и методы машинного обучения на основе эмпирических данных и другие в этом русле. Наряду с анализом данных, существует потребность в анализе знаний высказываний экспертов или данных интернета с вероятностями. Это необходимо и для распознавания высказываний экспертов, ускорения поиска высказываний, наиболее подходящих конкретной решаемой задаче. Упорядочение знаний экспертов по степени близости дает возможность ранжировать их источники (экспертов, интернет-пользователей и т.д.) по похожести. В качестве примеров приложений разрабатываемых методов можно привести медицинские экспертные системы, рекомендательные системы по поиску информации по теме, выбору туристических маршрутов, кластеризации различных высказываний с вероятностями и распознавание новых высказываний по полученным кластеризациям.

Доклад также посвящен обобщению и уточнению результатов автора и коллег *(Мусина, Гаслина, Ласкова)* с ограничения теории на формулу или семейство формул на разного рода интерпретаций (восходит к Тарскому, Мальцеву и другим), определимости одной теории в другой, доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности[1]. На примере формул с вероятностями по глазным болезням проблемам исследования на непротиворечивость конкретных таких знаний и изучены их взаимосвязи, полезные специалистам.

*Работа выполнена в рамках Госзадания ИМ СО РАН, проект FWNF-2026-0005.*

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail: vikent@math.nsc.ru*

[1]Некоторые из них вошли в диссертацию автора «Теории с окрестностями и формульные полумодели». ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с. для семейств формул теорий с локальными (насыщенными, однородными) изоморфизмами и вычислимыми эквивалентными моделями с свойством $y$ отделимости новых элементов, реализующих вычислимые типы (над малыми подмножествами модели) совместных с этими множествами, от элементов новой модели и наличием реализаций в большей интерпретации (с богатым множеством) модели введены определения, среди которых стабильных (слабо) стабильных и неразличимых элементов. Приведем несколько достаточно условий на теорию, включающих бесконечное число моделей в не обязательно счетной онтологии. Предложено изучение двукардинальных моделей и их автоморфизмов в классах теорий с окрестностями и его обобщения на образ интерпретации. Все это служит для введения новых расстояний на классах эквивалентных формул и типов на языках подклассах измеримых, вычислимых (метрических) моделей, необходимых для разработки машинных методов и алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий а также новых классов кластеризаций многозначных логических формул знаний с вероятностями, например, логика Лукасевича с привлечением многозначных полумоделей. Найдены новые кластеризации по метрикам для множества формул с вероятностями различных более выразительных логик (модальных), и в изучаемых различные кластеризации на конечное число классов (кластеров) для сравнения и введения кластерных метрик. Приведены модельные эксперименты с помощью программ, поддерживающих все нужные алгоритмы для получения кластеризаций. Количественные расстояния имеют более непротиворечивость конкретных таких знаний и изучены их взаимосвязи, полезные специалистам.

## Спектры полных алгебр бинарных изолирующих формул для циклов

Д. Ю. Емельянов

В работе продолжается изучение алгебр бинарных изолирующих формул [**1**]. Описаны спектры порядков графов с полными алгебрами, изоморфными алгебрам циклов.

Для конечного простого графа $G$ обозначим через $\mathfrak{B}(G)$ алгебру всех бинарных отношений, определимых без параметров, с булевыми операциями, композицией, обращением и выделенным отношением равенства $\Delta_G = \{(x,x) : x \in V(G)\}$. Базовые отношения — орбитали полной группы $\mathrm{Aut}(G)$, соответствующие изолированным типам пар.

**Определение.** *Спектром порядков* $\mathrm{Spec}(G)$ *графа* $G$ *назовём множество чисел* $|V(H)|$, *где* $H$ *— конечный связный простой граф и* $\mathfrak{B}(H) \cong \mathfrak{B}(G)$. *Изоморфизм алгебр не обязан переводить отношение смежности графа* $G$ *в отношение смежности графа* $H$.

Реализуем $\mathfrak{B}(G)$ бинарными отношениями на множестве $X$, сохраняя все операции и различие элементов. Равенство переходит в равенство на $X$, а универсальное отношение $V(G)^2$ — в $X^2$.

**Теорема.** *Пусть* $C_n$ *— цикл,* $n \geqslant 4$, $n \neq 6$. *Тогда для любой такой реализации* $\mathfrak{B}(C_n)$ *на* $X$ *существует биекция* $X \to V(C_n)$, *переводящая базовые отношения в соответствующие отношения расстояний цикла* $C_n$. *Множество* $X$ *содержит ровно* $n$ *элементов.*

Для циклов получены следующие спектры:

$$\mathrm{Spec}(C_n) = \begin{cases} \{3,4,5,\dots\}, & n = 3, \\ \{6,8,10,\dots\}, & n = 6, \\ \{n\}, & n \geqslant 4,\ n \neq 6. \end{cases}$$

При $n = 3$ получаем $K_m$; при $n = 6$ — $K_{m,m}$ без совершенного паросочетания и их дополнения ($m \geqslant 3$). В частности, $\mathfrak{B}(C_6) \cong \mathfrak{B}(Q_3)$ для графа куба $Q_3$. Неизоморфные графы $C_7$ и его дополнение имеют одну и ту же алгебру.

Спектры $C_4$ и $C_5$ известны [**2**]. Для $C_7$ оценка $|X| \leqslant 16$ [**3**, предложение 4.13] уточнена до $|X| = 7$ с единственностью реализации с точностью до изоморфизма.

### Литература

[1] Емельянов Д. Ю., Судоплатов С. В. *О детерминированных и поглощающих алгебрах бинарных формул полигонометрических теорий* // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т. 20. С. 32–44.

[2] Andreĭka H., Maddux R. D. *Representations for Small Relation Algebras* // Notre Dame J. Formal Logic. 1994. Vol. 35, no. 4. P. 550–562.

[3] Bodirsky M., Jahn M., Knäuer S., Konečný M., Winkler P. *Network Satisfaction over Four-Atom Relation Algebras: Complexity and Representations*. arXiv:2507.09324v3, 2026.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* dima-pavlyk@mail.ru

## О группах автоморфизмов линейно упорядоченных унаров

Е. Л. Ефремов, А. А. Степанова, С. Г. Чеканов

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A; f^{(1)}, \leqslant \rangle$ называется *линейно упорядоченным унаром*, если $\langle A; f^{(1)} \rangle$ — унар, $\langle A; \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное множество и неравенство $a \leqslant b$ влечёт $fa \leqslant fb$. В докладе представлены результаты, полученные в ходе изучения групп автоморфизмов линейно упорядоченных унаров.

Если $B, C \subseteq A$ и $b \leqslant c$ для любых $b \in B$, $c \in C$, то будем писать $B \leqslant C$ и говорить, что множества $B$ и $C$ сравнимы. Подунары $B$ и $C$ линейно упорядоченного унара $\mathcal{A}$ называются сравнимыми, если сравнимы их носители.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейно упорядоченный унар, $\mathcal{A} = \coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Отношение порядка на $\mathcal{A}$ индуцирует отношение $\preccurlyeq$ на $I$:

$$i \preccurlyeq j \iff A_i \leqslant A_j.$$

Через $\mathrm{Sym}(I)$ обозначим симметрическую группу, т.е. группу всех подстановок множества $I$. Пусть $G$ — группа, $I$ — множество и $H$ — подгруппа группы $\mathrm{Sym}(I)$. *Сплетением* $G \wr H$ групп $G$ и $H$ называется группа $G^I \rtimes H$ относительно операции, определяемой следующим образом:

$$((g_i)_{i \in I}, h) \cdot ((g'_i)_{i \in I}, h') = ((g_{h(i)} g'_i)_{i \in I}, hh').$$

**Теорема 1.** *Пусть $\mathcal{A} = \coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ — линейно упорядоченный унар, $(I; \preccurlyeq)$ — линейно упорядоченное множество и линейно упорядоченные унары $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ попарно сравнимы и попарно изоморфны. Тогда $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_{i_0}) \wr \mathrm{Aut}(I; \preccurlyeq)$, где $i_0 \in I$.*

На множестве $I$ определим отношение $\delta$:

$$i \delta j \iff i = j \text{ или унары } \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j \text{ несравнимы.}$$

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{A} = \coprod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ — линейно упорядоченный унар, $J = I/\delta$, $\mathcal{B}_j = \coprod_{i \in I/\delta} \mathcal{A}_i$ $(j \in J)$ и линейно упорядоченные унары $\mathcal{B}_{j_1}$ и $\mathcal{B}_{j_2}$ изоморфны для любых $j_1, j_2 \in J$. Тогда $(J; \preccurlyeq)$ — линейно упорядоченное множество и $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{B}_{j_0}) \wr \mathrm{Aut}(J; \preccurlyeq)$, где $j_0 \in J$.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026 г.).*

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток (Россия)*
*E-mail: efremov-el@mail.ru, steptld@mail.ru, chekanov.sg@dvfu.ru*

## Расширение фрактальных моделей и опускание в них типов

А. Р. Ешкеев, А. К. Исаева, Н. В. Попова, К. Д. Тимошина

**Актуальность.** Фрактальная теория моделей изучает согласованное действие конечных систем преобразований на синтаксическом и семантическом уровнях [**1**]. При построении малых моделей и опускании типов необходимо сохранять соответствующую фрактальную структуру.

**Исходные понятия.** Пусть $T$ — теория счётного языка, $\Psi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ — конечная система элементарных синтаксических эндоморфизмов, а $\Phi = \{f_1, \dots, f_n\}$ — конечная система элементарных семантических эндоморфизмов модели $M \models T$. Фрактальный корпус определяется равенствами

$$T^{[0]} = T, \qquad T^{[k+1]} = \mathrm{Th}\left(\bigcup_{j=1}^{m} \sigma_j(T^{[k]})\right).$$

Системы $\Psi$ и $\Phi$ согласованы, если каждому $\sigma_j$ соответствует $f_i$ и для любой формулы $\varphi$ и набора $\bar{a}$

$$M \models \sigma_j(\varphi)(\bar{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad M \models \varphi(f_i(\bar{a})).$$

**Теорема 1 (фрактальная теорема Лёвенгейма-Сколема).** *Пусть $M \models T$ и системы $\Psi, \Phi$ согласованы. Для всякого счётного $A \subseteq M$ существует счётная $N \preccurlyeq M$, содержащая $A$, такая, что ограничения $f_i|_N$ элементарны и согласованы с $\Psi$. Если $M = \bigcup_i f_i[M]$, то $N$ можно выбрать так, что $N = \bigcup_i f_i[N]$. Коридор, определённый парой $(T, \Psi)$, сохраняется.*

Для опускания типа $p$ требуется отражение изоляции: если $\sigma_j(p)$ изолируется формулой $\theta$, то $\theta$ эквивалентна по $T$ некоторой $\sigma_j(\varphi)$, а совместность и логическое следование отражаются $\sigma_j$. Тогда из изоляции $\sigma_j(p)$ следует изоляция $p$, поэтому неизолированность $p$ сохраняется при действии $\Psi$.

**Теорема 2 (фрактальное опускание типов).** *Пусть $T$ непротиворечива, $p$ — неизолированный частичный тип и выполнено условие отражения изоляции. Если каждая счётная модель $T$ допускает конечную согласованную систему семантических эндоморфизмов $\Phi$ с фрактальным покрытием, то существует счётная фрактальная модель $T$, опускающая $p$, с согласованными системами $\Psi$ и $\Phi$.*

**Существенность условий.** Классическая теорема опускания типов не гарантирует согласованного действия $\Psi$ и $\Phi$. Поэтому условия отражения изоляции и существования согласованной фрактальной структуры необходимы.

### Литература

[1] Yeshkeyev A. R., Popova N. V., Issayeva A. K., Kassymetova M. T. *Fractal Completeness and Compactness in First-Order Model Theory* // Bulletin of Karaganda University. Mathematics Series. 2026.

*Карагандинский исследовательский университет им. академика Е. А. Букетова, г. Караганда (Казахстан)*
*E-mail: aibat.kz@gmail.com, isaevaaigaa@gmail.com, popovanv092024@gmail.com, timoshina2001n30@gmail.com*

## Малые модели $K_T$-малых теорий

А. Р. Ешкеев, Н. М. Мусина, А. С. Шульгина-Таранчук

В работе [**1**] изучаются различные виды атомных моделей и их связи с алгебраической простотой. В этой работе эти понятия развиты для ёнонсоновских теорий с использованием операторов замыкания и ёнонсоновских множеств. В настоящей работе рассматривается их связь с $K_T$-малостью.

Пусть $T$ — ёнонсоновская теория, $C_T$ — её семантическая модель, $T^* = \mathrm{Th}(C_T)$ — центр $T$. Оболочкой Каждера модели $M \models T$ называется теория $M^0 = \mathrm{Th}_{\forall\exists}(M)$. Положим

$$K_T = \{M \models T : M^0 \text{ — ёнонсоновская теория}\}.$$

Теория $T$ называется *$K_T$-малой относительно класса* $S_T$, если $K_T \cap S_T \neq \varnothing$. В качестве $S_T$ рассматриваются классы атомных, слабо атомных, почти атомных, почти слабо атомных, алгебраически простых, наименьших, жёстких, ядерных и голографических моделей. Модель $M \models T$ называется *наименьшей*, если не существует собственной подмодели $N \subsetneq M$, удовлетворяющей $T$. Класс наименьших моделей обозначается $L_T$ (*least*), а класс алгебраически простых моделей — $AP_T$. Модель $M$ называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в каждую модель $T$. Модель $M \models T$ называется $(\Gamma_1, \Gamma_2)$-*атомной*, если каждый её конечный кортеж удовлетворяет некоторой формуле из $\Gamma_1$, полностью нетривиальной $\Gamma_2$-формулы. Для слабой $(\Gamma_1, \Gamma_2)$-атомности требуется, чтобы соответствующая формула порождала положительный $\Gamma_2$-тип кортежа. Обобщения этих понятий с оператором замыкания cl определяют соответствующие классы cl-атомных моделей.

**Теорема 1.** *Пусть $M \in K_T$ порождается конечным кортежем $\bar{a}$. Если существует экзистенциальная формула $\varphi(\bar{x})$, истинная на $\bar{a}$, реализуемая в каждой модели $T$ и полная относительно бесквантворных формул, то $M$ является алгебраически простой моделью $T$. В частности, $K_T \cap AP_T \neq \varnothing$.*

**Теорема 2.** *Если $K_T \cap AP_T \cap L_T \neq \varnothing$, то любые две алгебраически простые наименьшие модели $T$ изоморфны. Каждая модель $T$ содержит изоморфную копию такой модели, а каждое её самовложение является автоморфизмом.*

**Теорема 3.** *Пусть $T$ — совершенная ёнонсоновская теория, полная относительно $\Pi_1$-предложений. Тогда существует модель $M \in K_T$, которая одновременно является хорошей почти слабо $(\Sigma_1, \Sigma_1)$-cl-атомной и $(\Sigma_1, \Sigma_1)$-cl-алгебраически простой. При этом $M^0 = T^*$. Следовательно, $K_T \cap AP_T \cap N_T \neq \varnothing$, где $N_T$ — класс хороших почти слабо $(\Sigma_1, \Sigma_1)$-cl-атомных моделей.*

Литература

[1] Yeshkeyev A. R., Ulbrikt O. I., Issayeva A. K. *Algebraically Prime and Atomic Sets* // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics.

*Карагандинский национальный исследовательский университет им. Е. А. Букетова, Караганда (Казахстан)*
*E-mail: aibat.kz@gmail.com, nazerke.mussina@bk.ru, alevtinash79@mail.ru*

## О псевдо-сильно минимальных частичных порядках высоты два

А. А. Избасаров, Б. Ш. Кулпешов

Вспомним, что отношением *частичного порядка* на множестве называется бинарное отношение $<$, удовлетворяющее следующим свойствам:

*Асимметрия* $\forall x \forall y[x < y \to \neg(y < x)]$;

*Транзитивность* $\forall x \forall y \forall z[(x < y \wedge y < z) \to x < z]$.

Множество, снабженное отношением частичного порядка, называется *частично упорядоченным множеством* или просто *частичным порядком*.

Пусть $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — бесконечный частичный порядок. Вспомним, что *цепью* (или $\leq$-*цепью*) в $\mathcal{M}$ называется линейно упорядоченное подмножество структуры $\mathcal{M}$. Элементы $a, b \in \mathcal{M}$ называются *несравнимыми* (обозначаем $a \diamond b$), если имеет место следующее: $a \neq b$, $\neg(a < b)$ и $\neg(b < a)$. *Антицепью* (или $\leq$-*антицепью*) в $\mathcal{M}$ называется подмножество попарно несравнимых элементов. *Высотой* частичного порядка $\mathcal{M}$ (обозначаем через $h(\mathcal{M})$) называется супремум длин цепей в $\mathcal{M}$.

Будем говорить, что элемент $a$ частичного порядка $\mathcal{M}$ имеет *верхнюю степень* (*нижнюю степень*) $m$ для некоторого $m \in \omega$, если существуют в точности $m$ элементов структуры $\mathcal{M}$, являющихся непосредственными последователями (предшественниками) элемента $a$.

Будем говорить **[1]**, что элементарная теория $T$ бесконечной структуры $\mathcal{M}$, не являющейся сильно минимальной, называется *псевдо-сильно минимальной*, если любое предложение, истинное в $\mathcal{M}$, имеет сильно минимальную модель. В этом случае, $\mathcal{M}$ также называется *псевдо-сильно минимальной*.

Ранее в работах **[1]**–**[2]** исследовались сильно минимальные и псевдо-сильно минимальные частичные порядки. Здесь мы представляем следующую теорему:

**Теорема.** *Пусть $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — бесконечный связный частичный порядок высоты 2, не являющийся сильно минимальным. Тогда $Th(\mathcal{M})$ — псевдо-сильно минимальная тогда и только тогда, когда для любого $1 \leq n < \omega$ существует максимальный (или минимальный) элемент, имеющий нижнюю (верхнюю) степень более чем $n$.*

*Исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31714735).*

### Литература

[1] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V., Pseudo-strongly-minimal structures and theories // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 12, pp. 6515–6525.

[2] Kulpeshov B.Sh., Netaliyeva Ye.K., Strongly minimal partial orderings of height two // Herald of the Kazakh-British Technical University, 2025, Vol. 22, No. 1, pp. 223–228.

*Казахстанско-Британский технический университет, Институт математики и математического моделирования МНВО РК, Алматы (Казахстан)*
*E-mail: azam_ izbasarov@kbtu.kz, b.kulpeshov@kbtu.kz*

## О сильной минимальности тотально категоричных частичных порядков

Б. Ш. Кулпешов, Е. К. Неталиева

Вспомним, что отношением *частичного порядка* на множестве называется бинарное отношение $\leqslant$, удовлетворяющее следующим свойствам:

*Антисимметрия* $\forall x \forall y (x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \implies x = y$;

*Транзитивность* $\forall x \forall y \forall z (x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \implies x \leqslant z$.

Множество, снабженное отношением частичного порядка, называется *частично упорядоченным множеством* или просто *частичным порядком*.

Пусть $M = \langle M, \leqslant \rangle$ — бесконечный частичный порядок. Вспомним, что *цепью* (или $\leqslant$-цепью) в $M$ называется линейно упорядоченное подмножество структуры $M$. Элементы $a, b \in M$ называются *несравнимыми* (обозначаем $a \circ b$), если имеет место следующее: $a \not\leqslant b$, $\neg(a = b)$ и $\neg(b \leq a)$. *Антицепью* (или $\leqslant$-антицепью) в $M$ называется подмножество попарно несравнимых элементов. *Высотой* частичного порядка $M$ (обозначаем через $h(M)$) называется супремум длин цепей в $M$. *Шириной* частичного порядка $M$ (обозначаем через $w(M)$) называется супремум мощностей антицепей в $M$. Будем говорить, что связная компонента является *тривиальной*, если она является цепью. Будем говорить, что тривиальная связная компонента является *$n$-компонентой*, если она является цепью длины $n$, где $1 \leqslant n < \omega$. 1-компоненту будем называть *синглетоном*.

Значение $w(M)$ определяется как тривиальными связными компонентами, так и объединениями максимальных антицепей в нетривиальных связных компонентах: $w(M) = w_0(M) + w_1(M)$, где $w_0(M)$ — ширина тривиальной части (тривиальная ширина), $w_1(M)$ — ширина нетривиальной части (нетривиальная ширина).

Ранее в работах **[2, 1]** исследовались сильно минимальные частичные порядки. Здесь мы представим следующую теорему:

**Теорема.** *Пусть $M = \langle M, \leq \rangle$ — тотально категоричный частичный порядок высоты 2, имеющий бесконечную нетривиальную ширину. Если $M$ состоит из конечного числа связных компонент, то $M$ — сильно минимальна.*

*Настоящее исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR31714735).*

### Литература

[1] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V., *Pseudo-strongly-minimal structures and theories* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 12, pp. 6515–6525.

[2] Kulpeshov B.Sh., Netaliyeva Ye.K., *Strongly minimal partial orderings of height two* // Herald of the Kazakh-British Technical University, 2025, Vol. 22, No. 1, pp. 223–228.

*Институт математики и математического моделирования МНВО РК, Казахстанско-Британский технический университет, Алматы (Казахстан); Назарбаев Университет, Астана (Казахстан)*

*E-mail:* b.kulpeshov@kbtu.kz, yeldana.netaliyeva@nu.edu.kz

## Достаточные условия предгеометричности тернарного замыкания

С. Б. Малышев

Пусть $T$ — полная теория счётного языка, $\mathfrak{M} \models T$ — $\omega$-насыщенная сильно $\omega$-однородная модель, $p \in S_1(\varnothing)$ и $S = p(\mathfrak{M})$.

**Определение.** Формулу $\psi(x, y, z)$ назовём *тернарной изолирующей* для тройки типов $(p, p, p)$, если выполнены следующие условия.

(1) Множество $p(x) \cup p(y) \cup p(z) \cup \{\psi(x, y, z)\}$ имеет единственное продолжение до полного 3-типа $r$, все реализации которого состоят из попарно различных элементов.

(2) Для каждой пары $(a, b) \models r|_{x,y}$ сечение $R_\psi(a, b) = \{c \in S : \mathfrak{M} \models \psi(a, b, c)\}$ конечно и непусто.

Далее считаем $\psi$ симметричной на $S$ относительно перестановок координат и полагаем

$$\delta(A) = A \cup \bigcup_{a,b \in A} R_\psi(a, b), \qquad \mathrm{cl}_\psi(A) = \bigcup_{n<\omega} \delta^n(A).$$

Оператор $\mathrm{cl}_\psi$ экстенсивен, монотонен, идемпотентен и финитарен. Таким образом, вопрос о его предгеометричности сводится к выполнению остальной аксиомы замыкания:

$$c \in \mathrm{cl}_\psi(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}_\psi(A) \implies b \in \mathrm{cl}_\psi(A \cup \{c\}).$$

Для пары с непустым сечением положим $\ell(a, b) = \{a, b\} \cup R_\psi(a, b)$. Формула называется *линейно регулярной*, если на каждой такой прямой любая тройка попарно различных точек удовлетворяет $\psi$. Тогда прямые образуют частичное линейное пространство, а $\mathrm{cl}_\psi$ согласован с замыканием по этим прямым. *Комплементарная полнота* означает, что любые две различные точки одной связной компоненты графа коллинеарности лежат на общей прямой. Аксиома Веблена–Янга требует, чтобы всякая прямая, пересекающая две стороны треугольника вне его вершин, пересекала и третью сторону.

Показано, что симметрия, линейная регулярность и аксиома Веблена–Янга вместе ещё не обеспечивают замены. Построен контрпример в $\omega$-категоричной теории с единственным неизбежным 1-типом, причём все непустые сечения $\psi$ одноточечны. В основе конструкции лежит произведение двух плоскостей Фано с горизонтальными и вертикальными прямыми.

**Теорема.** *Если симметричная тернарная изолирующая формула $\psi$ линейно регулярна и комплементно полна на $S$, а её прямые удовлетворяют аксиоме Веблена–Янга, то $(S, \mathrm{cl}_\psi)$ является предгеометрией.*

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2026-0032.*

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск (Россия)*
*E-mail:* sergei2-mail@yandex.ru

## Об аксиоматизируемости некоторых свойств топологий Зарисского

В. А. Миллер

Для произвольной системы $\mathbf{A}$ сигнатуры $\Sigma$ на множестве $\mathbf{A}^n$ определяется $n$-мерная топология Зарисского, канонической замкнутой предбазой которой являются все $\mathbf{A}$-местные отношения, определимые атомарными формулами с параметрами из $\mathbf{A}$. В докладе исследуется, для каких топологических свойств класс всех $\Sigma$-систем, $n$-мерные топологии Зарисского которых обладают соответствующим свойством, аксиоматизируем в инфинитарном языке $L_{\infty,\infty}(\Sigma)$ с помощью предложений.

Для этой цели строится специальный двуступенчатый язык $L_{\infty,\infty}(\Sigma')$ (далее просто $L_{\infty,\infty}(\Sigma')$), в котором удобно записывать некоторые топологические свойства. В качестве моделей этого языка рассматриваются пары $(\mathbf{A}^n, \mathcal{B})$, где $\mathbf{A}$ — $\Sigma$-система, а $\mathcal{B}$ — замкнутая база некоторой топологии на множестве $\mathbf{A}^n$. Затем, для каждой размерности $n$ определяется операция $*$, переводящая предложения этого языка в предложения языка $L_{\infty,\infty}(\Sigma)$.

**Основная лемма.** Пусть $\mathcal{B}$ — каноническая замкнутая база $n$-мерной топологии Зарисского системы $\mathbf{A}$. Тогда для любого предложения $\varphi$ языка $L_{\infty,\infty}(\Sigma')$

$$(\mathbf{A}^n, \mathcal{B}) \models \varphi \iff \mathbf{A} \models \varphi^*.$$

Поскольку по данному $\varphi$ предложение $\varphi^*$ строится явным образом, эта лемма позволяет не только устанавливать $L_{\infty,\infty}(\Sigma)$-аксиоматизируемость топологических свойств, выразимых в языке $L_{\infty,\infty}(\Sigma')$, но и получать сами аксиоматизации.

**Теорема 1.** *Для любого $n$ свойства дискретности, хаусдорфовости, урысона, регулярности, сепарабельности, линейной связности, несвязности, первой и второй счетности и $k$-компактности (для любого $k \in \mathrm{Card}$) $n$-мерной топологии Зарисского $\Sigma$-системы инфинитарно аксиоматизируемы.*

Приведены примеры топологических свойств, которые не аксиоматизируемы в языке $L_{\infty,\infty}(\Sigma)$ одним предложением.

**Теорема 2.** *Для любого $n$ свойства компактности, связности, линейделефовости $n$-мерной топологии Зарисского $\Sigma$-системы инфинитарно аксиоматизируемы тогда и только тогда, когда сигнатура $\Sigma$ не содержит функциональных и предикатных символов арности больше 1.*

Также получено несколько результатов о финитарной аксиоматизируемости, включая следующий.

**Теорема 3.** *Для любой размерности $n$ любое топологическое свойство, которое слабо дискретно и в сочетании с аксиомой отделимости $T_1$ сильно несвязно, не является финитарно аксиоматизируемым.*

*Московский Физико-Технический Институт, Москва (Россия)*
*E-mail: miller.va@phystech.edu*

## Обобщенные ультрапределы и их приложения в теории ультрафильтров

Н. Л. Поляков

*Ультрапредел* множества $M$ (предельного) ранга $\alpha$ обычно определяется [**1**] как предел последовательности $\{M_\beta\}_{\beta<\alpha}$ по системе естественных вложений, где $M_0 = M$, а $M_\beta$ есть $\prod_{\gamma<\beta} M_\gamma$, если $\beta = \gamma + 1$, и ультрапредел $M_\gamma$ ранга $\beta$, если $\beta$ предельный. При этом естественные вложения образованы композициями диагональных вложений $M_\gamma$ в $M_{\gamma+1}$ и канонических вложений $M_\gamma$ в $M_\beta$, если $\beta$ предельный. Хорошо известно, что естественные вложения определяют элементарные вложения для любой модели $\mathfrak{M}$ с носителем $M$ (при канонической интерпретации нелогических символов в ультрапределах и пределах).

Используя теорему Бласса [**2**] о теоретико-модельной характеризации предпорядка Рудин-Кейслера и теорему Фрейна-Морелла-Скотта [**3**], легко показать, что помимо естественного вложения для каждого множества $M$ и натуральных чисел $m < n$ существуют иные (не менее естественные) отображения из $n$-кратного ультрапредела $M$ в $n$-кратный ультрапредел $M$, которые также и в том же смысле определяют элементарные вложения для любых моделей $\mathfrak{M}$ с носителем $M$. Один из вариантов конечных ультрапределов, основанный на альтернативной системе естественных вложений, был использован в [**4**] для теоретико-модельной характеризации предпорядка Комфорта.

Переходя к более общей ситуации, мы модифицируем определение ультрапредела, заменяя условие диагональности каждого отображения $M_\gamma$ в $M_{\gamma+1}$ на требование: каждое естественное отображение из $M_\gamma$ в $M_\beta$ (где $\gamma < \beta < \alpha$) определяет элементарное вложение для любой модели $\mathfrak{M}$ с носителем $M$ (при канонической интерпретации нелогических символов в ультрапределах и пределах). В случае, когда все $u$ суть ультрафильтры над $\omega$ и совпадают между собой, мы даем чисто теоретико-множественное (т.е. не использующее теоретико-модельных понятий) описание этой конструкции. Из этого описания следует, что каждый ультрапредел (в обобщенном смысле) может быть использован для теоретико-модельной характеризации предпорядка Комфорта.

### Литература

[1] S. Kochen, *Ultraproducts in the Theory of Models*, The Annals of Mathematics, Second Series, **74:2** (1961), 221–261.
[2] A. R. Blass, *Orderings on ultrafilters*, PhD Thesis, Harvard University, Cambridge, Mass., 1970.
[3] T. E. Frayne, A. C. Morel, D. S. Scott, *Reduced direct products*, Fund. Math., **51** (1962), 195–228.
[4] N. L. Polyakov, D. I. Saveliev, *Generalizations of the Rudin-Keisler preorder and their model-theoretic applications*, Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University, Mathematics, Computer Science, Mechanics series, **151:2** (2025), 6–11.

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва (Россия)*
*E-mail:* polyakov@hse.ru

## Проективные линейно упорядоченные унары

И. А. Сахаров

Линейно упорядоченный унар $\mathcal{P}$ называется *проективным* (*слабопроективным*), если для любого гомоморфизма $\varphi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ и для любого эпиморфизма $\alpha\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ (где $\mathcal{B}$ — линейно упорядоченная полуцепь) существует гомоморфизм $\bar{\varphi}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{B}$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$. Линейно упорядоченный унар $\mathcal{P}$ называется *квазипроективным* (*псевдопроективным*), если для любого гомоморфизма (эпиморфизма) $\varphi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ и любого эпиморфизма $\alpha\colon \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ существует эндоморфизм $\bar{\varphi} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ такой, что $\varphi = \alpha\bar{\varphi}$.

В работе изучаются (слабо-, квази-, псевдо-) проективные линейно упорядоченные унары. Унары, являющиеся (слабо-, квази-, псевдо-) проективными, описаны в [**1**].

Структура $\mathcal{A} = (A; f)$, где $f$ — унарная операция, называется *унаром*. Элемент $a \in A$ называется *листом*, если в $A$ нет элемента $b$ такого, что $fb = a$. Унар $\mathcal{A}$ называется *циклом длины* $n$, если $A = \{a_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$, где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, $fa_i = a_{i+1}$ при $i < n-1$ и $fa_{n-1} = a_0$. Унар $\mathcal{A}$ называется *петлёй*, если $A$ — цикл длины 1. Структура $\mathcal{A} = (A; f, \leq)$ называется *линейно упорядоченным унаром*, если $\mathcal{A} = (A; f)$ является унаром и $\leq$ является отношением линейного порядка на $A$, согласованным с $f$. Будем говорить, что линейно упорядоченный унар $\mathcal{A}$ *упорядочен вверх* (*вниз*), если $a \leq fa$ ($fa \leq a$) для любого $a \in A$.

**Теорема 1.** *Не существует проективных и слабопроективных линейно упорядоченных унаров.*

**Теорема 2.** *Линейно упорядоченный унар $\mathcal{P}$ является квазипроективным (псевдопроективным) тогда и только тогда, когда $(P; f)$ является квазипроективным (псевдопроективным) унаром и выполняется одно из условий:*

1) *$\mathcal{P}$ не содержит петель и все компоненты связности $\mathcal{P}$ упорядочены в одну сторону;*
2) *$\mathcal{P}$ содержит петли и компоненту связности с двумя различными листьями;*
3) *$\mathcal{P}$ содержит петли, не содержит компоненту связности с двумя различными листьями и все компоненты связности $\mathcal{P}$ упорядочены в одну сторону.*

### Литература

[1] Сахаров И. А. *Проективные и инъективные унары* // Дальневосточный математический журнал, 2024. Т. 24:1 С. 107–119. https://doi.org/10.47910/FEMJ202410

*Дальневосточный Федеральный Университет, Владивосток (Россия)*
*E-mail: sakharov.ial@dvfu.ru*

## Структура линейно упорядоченных унаров

С. Г. Чеканов, А. А. Степанова, Е. Л. Ефремов

Упорядоченная алгебраическая структура — это алгебраическая система, на которой задано отношение частичного или линейного порядка, согласованное с операциями этой алгебры. Теория упорядоченных алгебраических структур находится на стыке теории решёток, универсальной алгебры, теории моделей и функционального анализа. Линейно упорядоченные группы, поля, кольца хорошо изучены (Кокорин А.И., Копытов В.М. 1972, 1973, Блубов В.В., Бадмаев Л. Э. 2014, Пестов Г.Г. 1980, Бибаева В.Н., Ширяева Е.Е. 2011, Галамова Н.Ю. 2017 и др.). Упорядоченные унары изучались словацкой школой универсальной алгебры (D. Jakubíková-Studenovská. On ordered mono-unary algebras // Math. Slovaca. 1993. Vol. 43, No. 2. P. 147–156).

В докладе приводятся некоторые структурные утверждения о линейно упорядоченных унарах. Алгебра $\langle A; f^{(1)}\rangle$ с одной унарной операцией называется *унаром*. Унар $\langle A; f^{(1)}\rangle$ называется *связным*, если для любых $a, b \in A$ найдутся $n, m \in \omega$ такие, что $f^n a = f^m b$. Подунар $\langle C; f^{(1)}\rangle$ унара $\langle A; f^{(1)}\rangle$ называется *циклом длины* $k$, если $C = \{c_1, \cdots, c_k\}$, где $fc_i = c_{i+1}$, $1 \leqslant i < k$, и $fc_k = c_1$. *Петлей* унара $\langle A; f^{(1)}\rangle$ называется цикл длины 1. Для $a \in A$ и $n \in \omega$ через $f^{-n}a$ обозначим множество $\{b \in A \mid f^n b = a\}$. Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A; f^{(1)}, \leqslant\rangle$ называется *линейно упорядоченным унаром*, если $\langle A; f^{(1)}\rangle$ — унар, $\langle A; \leqslant\rangle$ — линейно упорядоченное множество и неравенство $a \leqslant b$ влечет $fa \leqslant fb$. Если $B \subseteq A$, $C \subseteq A$ и $b \leqslant c$ ($b \geqslant c$) для любых $b \in B, c \in C$, то будем говорить, что множества $B$ и $C$ сравнимы. Легко понять, что цикл в связном линейно упорядоченном унаре имеет длину 1, т.е. является петлей.

**Теорема.** *Пусть* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \coprod \mathcal{A}_2$ *— линейно упорядоченный унар,* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ *— связные унары.*

(1) *Если* $\mathcal{A}_1$ *содержит петлю, то унары* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *сравнимы.*
(2) *Если* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *без петель, то выполняется одно из условий:*
   (a) $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *сравнимы;*
   (b) *для любого* $a_1 \in A_1$ *существуют* $k \in \omega$ *и* $a_2 \in A_2$ *такие, что* $a_1 < a_2 < f^k a_1$*;*
   (c) *для любого* $a_2 \in A_2$ *существуют* $k \in \omega$ *и* $a_1 \in A_1$ *такие, что* $a_2 > a_1 > f^k a_2$*.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026 г.).*

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток (Россия)*
*E-mail: chekanov.sg@dvfu.ru*

## A Typed Core Calculus for Three-Regime Semantics

M. E. Abishev, D. Z. Berkinbayev, K. M. Tulenbaev, A. K. Kunanbayev

We present a many-sorted core calculus for three-regime semantics. The order $P \preccurlyeq N \preccurlyeq F$ is an order of value-level informational openness: exact archived values, controlled present carriers, and explicit open continuations. It is neither physical time nor a partition of a global state into three phases. Interface changes are upward and explicit. We prove monotone regime growth, isolation of past terms, canonical coercion forms, concrete soundness, stability under externally indexed primitive families, and strong completeness of an associated universal modal fragment over monotone parametric frames [**1, 2**].

Two conservative companions are added. First, a finite-dimensional classical quantum model realizes the pure core while retaining uncertainty carriers and outcome labels. Second, an effect interface places the calculus inside a Ch1 state space $\Omega_1$ with a passive Past archive, active ordered Now fibres, and a normalized Future kernel over compatible layers. Physical fixation is an external state transformer and not a pure term $N \to P$; it is distinct from physical thickening; and no primitive Past-Past or autonomous Past-Future writer is admitted. CPTP and tensor compatibility are properties of the physical quantum layer, while no-signaling requires local or semicausal instruments and cannot be inferred from arbitrary CPTP dynamics. The paper separates proved core results, realization axioms, and physical theorems.

**Theorem.** *Let $\{I_i^A\}$ be an instrument on $A$ and extend every branch by $\mathcal{I}_i^A \otimes B$. If the observer on $B$ has no access to the classical outcome $i$, then its nonselective marginal is unchanged. Conditional subensembles may depend on $i$, but this does not enable signalling unless the outcome is communicated.*

*Third author is supported by the grant BR31714735 SC MSEH RK.*

### References

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.
[2] B. F. Chellas, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 1980.

*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty (Kazakhstan)*
*E-mail: abishevme@gmail.com*

*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty (Kazakhstan)*
*E-mail: daulet9432@gmail.com*

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty (Kazakhstan)*
*E-mail: tulen750@hotmail.com*

*Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty (Kazakhstan)*
*E-mail: kunanbayev@math.kz*

## On variations of rigidity for circular orders

A. B. Altayeva, B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov

Let $M := \langle M, < \rangle$ be a linearly ordered structure. If we connect two endpoints of the set $M$ (possibly, they may be $-\infty$ and $+\infty$) then we obtain a circular ordering. More formally, a *circular ordering* is described by a ternary relation $K$ satisfying the following conditions:

(c0) $\forall xyz(K(x,y,z) \to K(y,z,x))$;
(c1) $\forall xyz(K(x,y,z) \wedge K(y,x,z) \leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$;
(c2) $\forall xyz(K(x,y,z) \to \forall t(K(x,y,t) \vee K(t,y,z)))$;
(c3) $\forall xyz(K(x,y,z) \vee K(y,x,z))$.

According to **[1]**, for a set $A$ in a structure $M$, $M$ is called *semantically $A$-rigid* if any *$A$-automorphism* $f \in \mathrm{Aut}(M)$ is identical. A structure $M$ is called *syntactically $A$-rigid* if $M = \mathrm{dcl}(A)$. A structure $M$ is called *$\forall$-semantically / $\forall$-syntactically $n$-rigid* (respectively, *$\exists$-semantically / $\exists$-syntactically $n$-rigid*), for $n \in \omega$, if $M$ is semantically / syntactically $A$-rigid for any (some) $A \subseteq M$ with $|A| = n$. The least such $n$ that $M$ is $Q$-semantically / $Q$-syntactically $n$-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, is called the *$Q$-semantical / $Q$-syntactical degree of rigidity*, it is denoted by $\deg_4^{Q\text{-sem}}(M)$ and $\deg_4^{Q\text{-synt}}(M)$, respectively. For a structure $M$ we denote by $\deg_4(M)$ the tetrad

$$(\deg_4^{\exists\text{-sem}}(M), \deg_4^{\exists\text{-synt}}(M), \deg_4^{\forall\text{-sem}}(M), \deg_4^{\forall\text{-synt}}(M)).$$

In works **[2, 3]** variations of rigidity for various structures were studied. Here we present the following theorem.

**Theorem.** *Let $M = \langle M, K \rangle$ be an infinite countable circular ordering. Then only the following values for $\deg_4(M)$ are possible:*

(1) $(0,0,0,0)$;
(2) $(1,1,m,m)$, where $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(3) $(m,m,\infty,\infty)$, where $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(4) $(\infty,\infty,\infty,\infty)$.

*This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22685890).*

### References

[1] S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2024, Vol. 47, pp. 119–136.
[2] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 11, pp. 5837–5844.
[3] I.A. Sakharov, A.A. Stepanova, *Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars* // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2026, Vol. 23, No. 1, pp. 517–531.

*International Information Technology University, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: vip.altayeva@mail.ru, b.kulpeshov@kbtu.kz, sudoplat@math.nsc.ru*

## Iterating strongly ($< \lambda$)-closed stationary $\lambda^+$-cc forcing, or definability matters

M. Džamonja

**Abstract.** The technology of proving independence axioms in set theory depends on iteration theorems, which sometimes can also be translated into forcing axioms. In this talk we give an iteration theorem correcting a technology that many people have used since 1980, leading to contradictions in the literature. The difference between that technology and the correct one is the understanding of the notion of definability.

Assume $\lambda > \aleph_0$ satisfies $\lambda^{<\lambda} = \lambda$. A forcing $\mathbb{P}$ is *stationary $\lambda^+$-cc* if, for every sequence $\langle p_\alpha : \alpha < \lambda^+ \rangle$ of conditions, there exist a club $E \subseteq \lambda^+$ and a regressive function $f$ on $E$ such that whenever $\alpha, \beta \in E \cap S^N_\kappa$ and $f(\alpha) = f(\beta)$, the conditions $p_\alpha$ and $p_\beta$ are compatible. This property implies the ordinary $\lambda^+$-chain-condition and is the combinatorial engine behind several higher analogues of Martin's axiom, beginning with Shelah's work in [**1**].

A forcing is *strongly ($< \lambda$)-closed* if there is a function which assigns to every increasing sequence of length $< \lambda$ a common upper bound. In other words, the closure is witnessed by a fixed formula, which is the distinction from the ordinary ($< \lambda$)-closure. This becomes invisible once a forcing axiom is assumed, but it is essential for an iteration theorem: leading to an eventual forcing axiom: upper bounds must be chosen uniformly so that supports can be controlled through the iteration.

**Theorem.** *Let $(\mathbb{P}_\zeta, \dot{\mathbb{Q}}_\zeta) : \zeta < \zeta^*$ be an iteration with supports of size $< \lambda$, where each $\dot{\mathbb{Q}}_\zeta$ is forced to be both stationary $\lambda^+$-cc and strongly ($< \lambda$)-closed. Then the limit $\mathbb{P}_{\zeta^*}$ is continuously strongly ($< \lambda$)-closed and stationary $\lambda^+$-cc.*

Here "*continuously*" means that the witnessing upper-bound function does not enlarge supports: if $p = \langle p_i : i < \tau \rangle$ with $\tau < \lambda$, then $\sup(h(p)) = \bigcup_i \sup(p_i)$. This continuity is what makes the stationary chain condition survive at limit stages.

The theorem is an iteration theorem, not a forcing axiom. Passing from one to the other is not automatic: a forcing that appears in the extension and satisfies the local hypotheses need not have been among the iterands. In this applications gap is usually harmless, because the relevant posets are already present in the ground model or are named explicitly along the iteration.

The result is a cleaned-up version of Shelah's Theorem 1.1 in [**1**]. That statement assumed ordinary ($< \lambda$)-closure, a size restriction on the individual posets, and the well-met condition (any two compatible conditions have a least upper bound). The well-met hypothesis has a complicated later history: it was dropped in some applications, reinstated in others, and discussed in contradictory terms in subsequent papers of Shelah and of Baldwin–Kolesnikov–Shelah. The argument given here does not use well-metness. In fact the point is not well-metness, but the fact that the original theorem of Shelah does not preserve closure, since the only an ordinary, unwitnessed closure is assumed on the iterands.

Strong closure plus continuous choice of upper bounds at limits is enough. The same argument covers the applications that had previously been justified by a "countable parallel closure" variant, which is therefore unnecessary for those posets.

Our proof proceeds by induction on the length of the iteration. Two-step iterations are handled by combining two regressive functions on a common club (after pulling names for the second-coordinate witnesses down to ground-model functions via density). At limits one uses the continuous upper-bound function together with Fodor's lemma on the supports, or a diagonal intersection of clubs when the cofinality is $\lambda^+$.

References

[1] S. Shelah, *A weak generalization of MA to higher cardinals*, Israel J. Math. **35** (1980), 192–200.

*Logique Consult, Liège (Belgium)*

## Fragments of theoretical sets and Jonsson extensions of $K_T$-normal theories

M. T. Kassymetova, O. I. Ulbricht, G. E. Zhumabekova

Let $L$ be a countable first-order language of signature $\sigma$, let $T$ be a Jonsson $L$-theory, and let $C_T$ be the semantic model of $T$.

We present the basic definitions within which these results were obtained.

**Definition 1.** (Yeshkeyev A.R.) [**1**] *Let $X \subseteq C_T$. We call $X$ a Jonsson set of the theory $T$ if the following conditions hold:*

1) *$X$ is an $\Delta$-definable set;*
2) *$cl(X) = M \in E_T$, where $E_T$ is the class of existentially closed models of $T$.*

**Lemma 1.** (Yeshkeyev A.R.) *For every Jonsson set $X$, its fragment $Fr(X)$ is a Jonsson theory.*

**Definition 2.** (Yeshkeyev A.R.) *Let $X$ be a Jonsson set of a Jonsson theory $T$. The set $X$ is called a theoretical set if the following condition holds: the universal closure of the existential formula defining $X$ (see Condition 1 of Definition 1) constitutes a finitely axiomatizable Jonsson theory.*

The fragment of a theoretical set of a Jonsson theory is defined analogously to the fragment of a Jonsson set.

**Definition 3.** (Yeshkeyev A.R.) [**2**] *Let $T$ be a Jonsson theory. The Kaiser class $K_T$ of $T$ is the following class of $L$-structures:*

$$K_T = \{A \mid A \in \mathrm{Mod}(T) \text{ and } \mathrm{Th}_{\forall\exists}(A) \text{ is a Jonsson theory}\}.$$

**Definition 4.** (Yeshkeyev A.R.) [**2**] *A Jonsson theory $T$ is called $K_T$-normal if, for every model $M \in K_T$, the semantic model $C_{\mathrm{Th}_{\forall\exists}(M)}$ of the fragment of $M$ is an existentially closed submodel of $C_T$.*

The following results were obtained within the framework of the notions described above.

**Theorem 1.** *Let $T$ be a $K_T$-normal Robinson theory, let $X \subseteq C_T$ be a theoretical set of $T$, and let $Fr(X) = \mathrm{Th}_{\forall\exists}(M)$ be the fragment of $M$, where $cl(X) = M \in E_T$. Then $Fr(X) = K_T^0$.*

**Theorem 2.** *Let $T$ be a $K_T$-normal Jonsson theory, let $X \subseteq C_T$ be a theoretical set of $T$, and suppose that $T \subseteq T'$, where $T'$ is a Jonsson theory in the language $L$. Then $X$ is a theoretical set of $T'$.*

All undefined notions can be found in [**1**].

### References

[1] Yeshkeyev A.R. *Theories and their models.* Karaganda, 2024. [in Russian].

[2] Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Kassymetova M.T. *On the Kaiser Class of a Jonsson Theory.* Symmetry 2025, 17, 870. https://doi.org/10.3390/sym17060870

*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda (Kazakhstan)*
*E-mail: mariushaad@mail.ru, ulbricht@mail.ru, galkatai@mail.ru*

## An Alternative Set Theory

I. B. Kazakov

I am working on my own alternative set theory. First of all, let me describe its ontology. My theory considers the objects called atoms. The collection of atoms is structureless and absolutely infinite, i.e. of a cardinality of a proper class. Therefore, it is a collection of *inaccessible cardinality* that its cardinality is uncountable, regular, and strong limit. In addition to atoms, my theory considers objects called $n$-sets. A 0-set is a synonym for an atom. An $(n+1)$-set is a collection of $n$-sets. For any collection of $n$-sets there exists a unique $(n+1)$-set, containing them and only them as elements. We can formalize the presented ontology using the many-sorted logic. So, the alphabet of the theory contains the typed variables $x^n, y^n, z^n$ etc, for any non-negative integer variable $n$. It contains symbols $\in$ and $=$. It also contains constants, logical connectives, parentheses and quantifiers like in a first-order language. There are two types of atomic formula: $x^n = y^n$ and $x^n \in y^{n+1}$. The notion of a formula, of a free and of a bound variables, and the rules of inference are the same as of first-order logic. It is easy to notice that there are two different ontological aspects. The first aspect that I call *formal* is about what $n$-sets is present. So, the principles of formation of $n$-sets are called *formal axioms*. The second aspect that I call *material* is about how many atoms are there. So, the *material axioms* are statements about the quantitative properties of the collection of all atoms.

The formal axioms of the theory are: the axiom of extensionality **F0**, the axiom of comprehension **F1** and the axiom of choice **F2**.

**F0.** $\forall x^{n+1}, y^{n+1}(\forall a^n(a^n \in x^{n+1} \leftrightarrow a^n \in y^{n+1}) \rightarrow x^{n+1} = y^{n+1})$

**F1.** Let $F[x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \ldots, x_k^{n_k}, y]$ be a formula of the theory, where $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \ldots, x_k^{n_k}$ and also $y$ are free variables of $F$. Then the instance of the axiom is:

$$\forall x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \ldots, x_k^{n_k} \exists! z^{n+1} \forall y^n (y^n \in z^{n+1} \leftrightarrow F[x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \ldots, x_k^{n_k}, y]).$$

**F2.** For any family of non-empty sets there exists a set such that it has a unique common element with any set from the family.

All of the classical set-theoretic contradictions can be carried out in the theory, including the notion of equinumerosity by the corresponding formula. Using this formula, we can also define the formulae for the quantitative characteristics of the collection of all atoms, so we can express the material axioms: the axiom of infinity **M1** [$V^1$ is uncountable], the axiom of replacement **M2** [$V^1$ is a collection of a regular cardinality] and the axiom of powerset **M3** [$V^1$ is a collection of a strong limit cardinality].

There are three tasks to do in this theory. The first task is to construct binary relation on $V^1$ that is a ZFC model. The second task is to propose the unified material axiom **M*** such that **M1**, **M2** and **M3** can be replaced by it. The third task is to propose a new formal axiom **F3** beyond comprehension and choice.

*Plekhanov Russian University of Economics, Moscow (Russia); Bauman Moscow State Technical University, Moscow (Russia)*
*E-mail: i.b.kazakov@mail.ru*

## On variations of algebraicity for relatively free algebras

L. N. Khakimova, S. V. Sudoplatov

We consider generalizations of rigidity degrees [**1, 2**] of structures $\mathcal{M}$, which form correspondent algebraicity degrees [**3**] replacing singleton-orbits of elements over subsets $A \subseteq M$ by finite orbits, possibly with upper natural estimations for their cardinalities, and replacing definable closures dcl by algebraic ones acl, again possibly with upper natural estimations $m$ for sets of solutions of used formulas, i.e. with the operators $\mathrm{acl}_m$, and obtaining the following tuples of degrees for the structure $\mathcal{M}$:

$$\deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \left(\deg_{\mathrm{alg}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{alg}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{alg}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{alg}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})\right),$$

$$\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \left(\deg_{m,\mathrm{alg}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{m,\mathrm{alg}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \deg_{m,\mathrm{alg}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{m,\mathrm{alg}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})\right),$$

for $m \in \omega \setminus \{0\}$.

The values for degrees of algebraicity are described for relatively free algebras, i.e. free extensions [**4**] of given algebras:

**Theorem.** *For any free extension $\mathcal{A}'$ of an algebra $\mathcal{A}$ and $m \in \omega \setminus \{0\}$, $\deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}') = \deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ and $\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}') = \deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$.*

**Corollary.** *For any free algebra $\mathcal{A}$ with a generating set $X \neq \emptyset$ and $m \in \omega \setminus \{0\}$ the following equalities hold:*

*1) $\deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = (0,0,0,0)$ if $X$ is finite, and $\deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = (\infty,\infty,\infty,\infty)$ if $X$ is infinite;*

*2) $\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = (0,0,0,0)$ if $|X| \leq m$, $\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = (|X|-m, |X|-m, \infty, \infty)$ if $m < |X| < \omega$, and $\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = (\infty,\infty,\infty,\infty)$ if $X$ is infinite.*

A series of examples distinguishing degrees in $\deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}')$ and $\deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$, as well as in $\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{A}')$ and $\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$, is obtained for non-free extensions $\mathcal{A}'$ of $\mathcal{A}$.

*This research has been funded in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project No. FWNF-2026-0032).*

### References

[1] S.V. Sudoplatov, Variations of rigidity // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2024, Vol. 47, pp. 119–136.

[2] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 11, pp. 5837–5844.

[3] S.V. Sudoplatov, Variations of algebraicity // Preprint, 2026. 17 pp.

[4] O. V. Belegradek, The model theory of locally free algebras // Amer. Math. Soc. Transl., 1999, Vol. 195, No. 2, pp. 117–143.

*Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: l.khakimova@g.nsu.ru, sudoplat@math.nsc.ru*

## On variations of algebraicity for compositions of structures

B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov

We consider generalizations of rigidity degrees [**1, 2**] of structures $\mathcal{M}$, which form correspondent algebraicity degrees [**3**] replacing singleton-orbits of elements over subsets $A \subseteq M$ by finite orbits, possibly with upper natural estimations for their cardinalities, and replacing definable closures dcl by algebraic ones acl, again possibly with upper natural estimations $m$ for sets of solutions of used formulas, i.e. with the operators $\mathrm{acl}_m$. Thus we have the following tuples of degrees for the structure $\mathcal{M}$:

$$\deg_{4,\mathrm{alg}}(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \left(\deg_{\mathrm{alg}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{alg}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{alg}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\mathrm{alg}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})\right),$$

$$\deg_{4,m,\mathrm{alg}}(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \left(\deg_{m,\mathrm{alg}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{m,\mathrm{alg}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \deg_{m,\mathrm{alg}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{m,\mathrm{alg}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})\right),$$

for $m \in \omega \setminus \{0\}$. The dynamics for degrees of algebraicity is described for $E$-definable compositions $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ of structures $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ [**4**]. In particular, we have the following:

**Theorem.** *For any structure $\mathcal{M}$ and a structure $\mathcal{N}$ in the empty signature the composition $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ satisfies the following properties:*

1) *$\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is semantically (syntactically) algebraic iff $\mathcal{M}$ is semantically (syntactically) algebraic and $\mathcal{N}$ is finite;*

2) *$\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ has a positive natural degree of algebraicity iff $\mathcal{M}$ has a positive natural correspondent degree of algebraicity and $\mathcal{N}$ is finite;*

3) *$\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ is absolutely finitely non-algebraic, i.e. with all infinite algebraicity degrees, iff $\mathcal{M}$ is absolutely finitely non-algebraic or $\mathcal{N}$ is infinite.*

Since for any linearly ordered structure $\mathcal{M}$ its operator of algebraic closure is reduced to and coincides with the operator of definable closure, in such a case the characterizations in Theorem are reduced to rigidity degrees. We have a similar reduction to the operator $\mathrm{acl}_m$ if $|N| \leq m$.

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26194247) and in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project No. FWNF-2026-0032).

### References

[1] S.V. Sudoplatov, Variations of rigidity // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2024, Vol. 47, pp. 119–136.

[2] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 11, pp. 5837–5844.

[3] S.V. Sudoplatov, Variations of algebraicity // Preprint, 2026. 17 pp.

[4] D.Yu. Emelyanov, B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, Algebras of binary formulas for compositions of theories // Algebra and Logic, 2020, Vol. 59, No. 4, pp. 295–312.

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakh-British Technical University, Almaty (Kazakhstan), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz, sudoplat@math.nsc.ru*

## On variations of algebraicity for abelian groups

In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov

We consider generalizations of rigidity degrees [**1, 2**] of structures $M$, which form corresponding algebraicity degrees [**3**] replacing singleton-orbits of elements over subsets $A \subseteq M$ by finite orbits, possibly with upper natural estimations for their cardinalities, and replacing definable closures dcl by algebraic ones acl, again possibly with upper natural estimations $m$ for sets of solutions of used formulas, i.e. with the operators $\mathrm{acl}_m$, and obtaining the following tuples of degrees for the structure $M$:

$$\deg_{4,1}\mathfrak{A}(M) \equiv (\deg_1^{\mathrm{sem}}(M), \deg_1^{\mathrm{synt}}(M), \deg_\omega^{\mathrm{sem}}(M), \deg_\omega^{\mathrm{synt}}(M)),$$

$$\deg_{4,m,\mathrm{alg}}\mathfrak{A}(M) \equiv (\deg_{1,m,\mathrm{alg}}^{\mathrm{sem}}(M), \deg_{1,m,\mathrm{alg}}^{\mathrm{synt}}(M), \deg_{\omega,m,\mathrm{alg}}^{\mathrm{sem}}(M), \deg_{\omega,m,\mathrm{alg}}^{\mathrm{synt}}(M)),$$

for $m \in \omega \setminus \{0\}$. The values for degrees of algebraicity are described for a series of standard, i.e. Szmielew abelian groups [**4, 5**]. In particular, we have the following:

**Theorem.** *For any abelian group* $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^k}^{(\gamma_p)} \oplus \bigoplus \mathbb{Z}_p^{(\delta_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\varepsilon)} \oplus \mathbb{Q}^{(e)}$ *the following possibilities hold:*

(1) $\deg_{4,1}\mathfrak{A}(\mathcal{A}) = (0,0,0,0)$ *if each* $\alpha_{p,n}$ *and* $\beta_p$ *is finite, and all* $\gamma_p$ *and* $\varepsilon$ *equal zero;*
(2) $\deg_{4,1}\mathfrak{A}(\mathcal{A}) = (1,1,2,2)$ *if each* $\alpha_{p,n}$ *and* $\beta_p$ *is finite, and* $\varepsilon + \sum_p \gamma_p = 1$*;*
(3) $\deg_{4,1}\mathfrak{A}(\mathcal{A}) = (m,m,\infty,\infty)$ *if each* $\alpha_{p,n}$ *and* $\beta_p$ *is finite, and* $\varepsilon + \sum_p \gamma_p = m \in \omega \setminus \{0\}$*;*
(4) $\deg_{4,1}\mathfrak{A}(\mathcal{A}) = (\infty,\infty,\infty,\infty)$, *otherwise.*

In some special cases the operator of algebraic closure is reduced to and coincides with the operator of definable closure, reducing the characterizations in Theorem to rigidity degrees. A similar reduction is found for the operators $\mathrm{acl}_m$.

*This research has been funded in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project No. FWNF-2026-0032).*

### References

[1] S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity* // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2024, Vol. 47, pp. 119–136.
[2] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 11, pp. 5837–5844.
[3] S.V. Sudoplatov, *Variations of algebraicity* // Preprint, 2026. 17 pp.
[4] P.C. Eklof, E.R. Fischer, *The elementary theory of Abelian groups* // Annals of Mathematical Logic, 1972, Vol. 4, pp. 115–171.
[5] Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin, *Mathematical Logic*, Moscow, Fizmatlit, 2011. 356 p. [in Russian]

*Novosibirsk State Technical University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: pavlyuk@corp.nstu.ru, sudoplat@math.nsc.ru*

## On algebras of types via their preservations

T. E. Rajabov, S. V. Sudoplatov

We continue to study possibilities of various preservations of properties [**1, 2, 3**], define algebras of types as a generalization of algebras of formulas [**4, 5**], and consider structural properties of these algebras. Defining a (multi)algebra $\mathcal{A}$ of types for a complete theory $T$ we fix a family $S \subseteq S(T)$ of types with pairwise disjoint sets of free variables, a family of (in)complete types $F$ connecting realizations of types in $S$ and forcing types of these realizations, and a family $C$ of compositions for types in $F$. Here we assume that, similarly to algebras of binary formulas, compositions collect all types in $F$ forcing these compositions. Thus, $\mathcal{A}$ consists of the triple $\langle S, F, C\rangle$ and the marking function $f$ whose domain consists of some tuples in $\bigcup_{n\in\omega} F^n$ and values in $P(F)$ collecting types forcing corresponding compositions. We denote the tuple $\langle S, F, C, f\rangle$ by $\mathcal{A}(T)$.

Varying the attributes in $\mathcal{A}(T)$ a hierarchy $\mathcal{H}(T)$ of algebras arises, including subalgebras and super-algebras obtained by restrictions and extensions of the attributes $S, F, C$, respectively. Expanding and extending models of a theory $T$ the richness of $\mathcal{H}(T)$ can be unboundedly increased starting with the almost domestic (with finitely many values for $f$) algebras $\mathcal{A}(T)$:

**Theorem 1.** *An algebra $\mathcal{A}_0(T) = \langle S, F, C, f\rangle$, where $F$ consists of all unions of types in $S$, is uniquely defined up to isomorphism by the cardinality of $S$. If there are finitely many extensions $\mathcal{A}(T) = \langle S, F', C', f'\rangle$ in $\mathcal{H}(T)$ iff there are finitely many types in $F'$ with at least two completions and all these types have finitely many completions.*

**Corollary.** *Any algebra $\mathcal{A}(T) = \langle S, F', C', f'\rangle$ is unique with respect to $S$ iff each type $p(\bar{x})$ in $F'$ forces a complete type $q(\bar{x})$, and iff types in $S$ do not have nontrivial links.*

The hierarchy $\mathcal{H}(T)$ can be naturally extended by algebras with replacements of forcing types for compositions $C$ by consistent ones.

*This research was carried out within the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2026-0032.*

### References

[1] Sudoplatov S.V. *Formulas and properties, their links and characteristics* // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, Issue 12. 1391. – 16 p.

[2] Rajabov T.E., Sudoplatov S.V. *On kinds of preservations for properties* // Traditional international April mathematical conference. Collection of abstracts. – Almaty: IMMM, 2025. – P. 281–282.

[3] Rajabov T.E., Sudoplatov S.V. *Kinds of preservations for properties* // arXiv:2509.21876 [math.LO], 2025. – 15 p.

[4] Sudoplatov S.V. *Classification of countable models of complete theories. Part 1.* – Novosibirsk : Edition of NSTU, 2018. – 326 p.

[5] Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. *Algebras of binary formulas.* – Novosibirsk : Edition of NSTU, 2023. – 330 p.

*Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia)*
*E-mail: temurboy246@gmail.com, sudoplat@math.nsc.ru*

## Holographicity of relational reducts of the Picard Painlevé VI solution set

I. Tungushbayeva

We study holographicity and its weak variants for finite relational reducts of the Picard equation $\mathcal{P}_{V(0,0,\frac{1}{2})}$. For a binary structure and each $|S| < 2$, these properties require a finite set $B$ and, respectively, an automorphism $h$ with $h(S) \subseteq B$, a self-embedding with $h(S) \subseteq B$, or a self-embedding with $S \subseteq h(B)$ **[1, 2, 3]**.

Freitag and Nagloo **[4]** study algebraic relations between Painlevé solutions, including the Picard case. Let $(M, \theta)$ be a countable differentially closed field of characteristic zero, with $\theta t = 1$. Let $E_t : v^2 = u(u-1)(u-t)$ be the Legendre elliptic curve, $G = E^2(M)$ its Manin kernel, and $\pi : E(M) \to \mathbb{P}^1(M)$ the quotient by $P \mapsto -P$. The scalar Picard solution set is $X = \pi(G \setminus E_t[2])$ **[5, 4]**. For $m, n \geqslant 1$ and $T \in G$, define $C_{m,n,T}(a, b)$ by $[m]P - [n]Q = T$ for some $P, Q \in G \setminus E_t[2]$ with $\pi(P) = a$ and $\pi(Q) = b$.

**Theorem 1.** *For every finite reduct $\mathcal{A} = \langle X; C_{m_i,n_i,T_i}\rangle_{i=1}^{s}$, the following are equivalent: $\omega$-categoricity, holographicity, weak holographicity, $\omega$-cohomologicity, and the condition $m_i = n_i$ with $T_i$ torsion for all $i$. Otherwise, the union of all finite parameter-free existentially definable unary subsets of $\mathcal{A}$ is infinite.*

**Theorem 2.** *If $T \in G$ is nontorsion, $C_T = C_{1,1,T}$, and*

$$S_T(x, y) \iff C_T(x, y) \wedge \neg C_T(x, x) \wedge \neg C_T(y, y),$$

*then $(X, S_T)$ is weakly cohолographic, but neither $\omega$-categorical nor (weakly) holographic. Its minimum prototype cardinality for weak cohomologicity is 4.*

Among the 32 symmetric irreflexive parameter-free quantifier-free binary relations definable in $(X, C_T)$, exactly 16 yield $\omega$-categorical reducts with all three holographicity properties, exactly 2 are weakly cohолographic but not weakly holographic, and the other 14 satisfy none. The two exceptional relations are $S_T$ and its irreflexive complement. All these reducts have strongly minimal theories.

### References

[1] B. Kasynkhanuly and A. S. Morozov, *On holographic structures*, Siberian Math. J. **60** (2019), 312–318.
[2] B. Kasynkhanuly and A. S. Morozov, *On weakly holographic structures*, Siberian Math. J. **63** (2022), 1091–1101.
[3] N. A. Bazhenov, B. Kasynkhanuly, and A. S. Morozov, *On weakly cohолographic structures*, Siberian Math. J. **66** (2025), 641–649.
[4] J. Freitag and J. Nagloo, *Algebraic relations between solutions of Painlevé equations*, J. London Math. Soc. **111** (2025), no. 6, e70190.
[5] Yu. I. Manin, *Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbb{P}^2$*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **186** (1998), 131–151.

*Buketov Karaganda National Research University, Karaganda (Kazakhstan)*
*E-mail:* tungushbayeva.i@kornu-buketov.edu.kz

## Hierarchical extensions of closure operators via families of operations

I. K. Uktamaliev

Let $\mathcal{M} = \langle M, L\rangle$ be a structure, $\mathrm{cl} \in \{\mathrm{acl}, \mathrm{dcl}\}$, and let $\mathcal{F} \subseteq L$ be a non-empty family of operations of arity at least 1. Variations of algebraic closure were studied in **[2, 1]**; here we iterate cl along the operations of $\mathcal{F}$, which generalizes the construction of **[3]** for semigroups.

For $X \subseteq M$ let $\mathrm{St}_{\mathcal{F}}(X)$ be the set of all $x \in M$ such that $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, x, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in X$ for some $k$-ary $f \in \mathcal{F}$, some $i \leq k$ and some $a_j \in X$. We put $\mathrm{cl}_0^{\mathcal{F}}(A) = \mathrm{cl}(A)$ and $\mathrm{cl}_{n+1}^{\mathcal{F}}(A) = \mathrm{St}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A))$.

**Proposition.** *For all $m, n \in \omega$ and $A, B \subseteq M$:*

(1) $\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A) \subseteq \mathrm{cl}_{n+1}^{\mathcal{F}}(A)$ *and* $A \subseteq \mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A)$;
(2) *if* $A \subseteq B$, *then* $\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A) \subseteq \mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(B)$;
(3) *if* $B \subseteq \mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A)$, *then* $B \subseteq \mathrm{cl}_{n+1}^{\mathcal{F}}(A_0)$ *for a finite* $A_0 \subseteq A$;
(4) *if* $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$, *then* $\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A) = \mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(B)$; *in particular,* $\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}_{n+1}^{\mathcal{F}}(A)$;
(5) $\mathrm{cl}_{m+n}^{\mathcal{F}}(A) \subseteq \mathrm{cl}_m^{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A))$.

The family $\mathcal{F}$ is called *cl-additive* if equality holds in (5) for all $m, n \in \omega$ and all $A \subseteq M$. We also consider the closed extensions $\widehat{\mathrm{cl}}_0^{\mathcal{F}}(A) = \mathrm{cl}(A)$, $\widehat{\mathrm{cl}}_{n+1}^{\mathcal{F}}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{St}_{\mathcal{F}}(\widehat{\mathrm{cl}}_n^{\mathcal{F}}(A)))$, and the directed distance $r_X(A, B) = \min\{m \mid B \subseteq \mathrm{cl}_m^{\mathcal{F}}(A)\}$ for $A \subseteq M$ and non-empty $B \subseteq M$ with $\min \varnothing = \omega$.

**Theorem.** *The following conditions are equivalent:*

(1) $\mathrm{St}_{\mathcal{F}}(C)$ *is cl-closed for every cl-closed set* $C \subseteq M$;
(2) *all sets* $\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A)$, $n \in \omega$, $A \subseteq M$, *are cl-closed;*
(3) $\mathrm{cl}_n^{\mathcal{F}}(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_n^{\mathcal{F}}(A)$ *for all* $n \in \omega$ *and* $A \subseteq M$;
(4) $\mathcal{F}$ *is cl-additive;*
(5) $r_{\mathcal{F}}(A, B) \leqslant r_{\mathcal{F}}(A, C) + r_{\mathcal{F}}(C, B)$ *for all* $A \subseteq M$ *and non-empty* $B, C \subseteq M$.

*In this case* $d_X(x, y) = \max\{r_X(\{y\}, \{x\}), r_X(\{x\}, \{y\})\}$ *is a well-defined extended metric on* $M/E$, *where* $xEy \iff \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.

### References

[1] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, *Almost quasi-Urbanik structures and theories*, Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. **117** (2025), no. 1, 104–117.
[2] S. V. Sudoplatov, *Algebraic closures and their variations*, arXiv:2307.12536 [math.LO], 2023.
[3] I. K. Uktamaliev, *Pregeometries on some finitely generated commutative semigroups*, Sib. Elektron. Mat. Izv. **22** (2025), no. 1, 735–750.

*Namangan State Pedagogical Institute, Namangan (Uzbekistan)*
*E-mail:* i.uktamaliev@alumni.nsu.ru

# VIII. Авторский указатель

Abishev M. E., 236
Aleev R. Zh., 176
Altayeva A. B., 237
Amaglobeli M. G., 26
Badaev S. A., 28
Basheyeva A. O., 29
Bazhenov N. A., 28
Beklemishev L. D., 30
Berkinbayev D. Z., 236
Bredikhin D. A., 107
Buturlakin A. A., 177
Chekhlov A. R., 214
Chitaia I. O., 121
Danchev P. V., 214
Daniyarova E., 31
Das A., 108
Dudkin F. A., 33
Dzamonja M., 238
Farakhutdinov R. A., 109
Goncharov S., 34
Greshnov A. V., 178
Gubarev V. Yu., 215
Iskakov A. M., 28
Kalmurzayev B. S., 28
Kassymetova M. T., 240
Kazakov I. B., 241
Khakimova L. N., 242
Kogabaev N. T., 122
Kondrat'ev A. S., 179
Kondrat'ev A. S., 35
Kopylov Ya. A., 180
Kulpeshov B. Sh., 237
Kulpeshov B. Sh., 243
Kunanbayev A. K., 236
Malinin D., 181
Mamontov A. S., 220
Maslova N. V., 182
Maslova N. V., 183
Melnikov A. G., 28
Mikaelian V. H., 184
Minigulov N. A., 179
Mogilnykh I. Yu., 185
Monastyreva A. S., 216
Myasnikov A. G., 26
Nasybullov T. R., 186
Naurazbekova A., 217
Nirova M. S., 179
Omanadze R. Sh., 121
Pavlyuk In. I., 244
Rajabov T. E., 245
Romanov A. M., 187
Ruzimov J. O., 117
Rybakov V. V., 36
Saidov S. S., 188
Sangare B., 189
Savelyev A., 190
Selivanov K. V., 183
Seliverstov A. V., 123
Semenov A. L., 37
Shestakov I. P., 218
Skuratov R. V., 191
Sorbi A., 38
Speranski S. O., 124
Sudoplatov S. V., 237
Sudoplatov S. V., 242
Sudoplatov S. V., 243
Sudoplatov S. V., 244
Sudoplatov S. V., 245
Tikhonov S. V., 219
Tsiovkina L. Yu., 192
Tulenbaev K. M., 236
Tungushbayeva I., 246
Uktamaliev I. K., 247
Ulbricht O. I., 240
Umirbaev U., 39
Vasil'eva A. Yu., 193
Vasilevich A., 181
Wang R., 194
Yeshkeyev A., 40
Zhelyabin V. N., 220
Zhou W., 195
Zhumabekova G. E., 240
Zinchenko M., 86
Абраменко А. R., 42
Авдонина Л. В., 43
Агриколянский Д. А., 44
Алаев П. Е., 111
Анисимов Л. Е., 45
Арсланов М. М., 12
Атабекян В. С., 126
Багавиев Р. Р., 112
Базаров Б. Б., 46
Башмаков С. И., 88
Белов А. Я., 13
Белоусов И. Н., 127
Беняш-Кривец В. В., 128

Борисов Е. В., 89
Бородин А. Н., 211
Бородин А. Н., 129
Бородин А. Н., 131
Бородин А. Н., 132
Бородин С. О., 130
Брылякова Е. В., 90
Будкин А. И., 133
Бучинский И. М., 134
Бушакова Ю. А., 88
Валенко О. П., 47
Васильев А. В., 135
Вербовский В. В., 223
Веретенников Б. М., 136
Викентьев А. А., 224
Воробьев А. Д., 48
Воробьев Н. Н., 137
Воробьев Н. Т., 138
Вялый М. Н., 119
Гвоздев Р. И., 139
Глушкова В. Н., 49
Гончаров М. Е., 197
Горбунов И. А., 91
Городняя Л. В., 50
Грекович К. В., 92
Гречкосеева М. А., 14
Гусев С. В., 15
Гутор А. Г., 198
Дадажанов Р. Н., 113
Дашкова О. Ю., 140
Дворкин Л. В., 93
Доценко Н. А., 52
Дудкин Ф. А., 141
Дурнев В. Г., 142
Дурнев В. Г., 145
Дуткин С. Ю, 53
Евтягин А. Л., 143
Емельянов Д. Ю., 225
Ефремов Е. Л., 226
Ефремов Е. Л., 235
Ешкеев А. Р., 227
Ешкеев А. Р., 228
Желябин В. Н., 16
Журавлев Е. В., 199
Журтов А. Х., 144
Зайцева У. Д., 95
Зенков В. И., 127
Зеткина А. И., 142
Зеткина А. И., 145
Зиновьева М. Р., 146
Зубарев А. Ю., 54
Зубков М. В., 114
Избасаров А. А., 229
Исаев И. М., 200
Исаева А. К., 227
Искра А. Л., 147
Каморников С. Ф., 148
Кановей В. Г., 17
Касымов Н. Х., 115
Кислицин А. В., 200
Климин В. С., 155
Ковалёв К. А., 116
Кондренко К. П., 55
Коровина К. С., 49
Косарев Н. С., 56
Кравцова О. В., 149
Кравцова С. С., 57
Кудайбергенов К. Ж., 18
Кудинов О. В., 19
Кудряшова М. И., 96
Кузнецов А. А., 150
Кукарцев А. М., 151
Кулешов М. А., 152
Кулпешов Б. Ш., 229
Кулпешов Б. Ш., 230
Курсов В. В., 201
Лексина А. А., 58
Логинова В. С., 202
Логинова В. С., 153
Лоновенко Д. Д., 97
Лукьянов М. С., 154
Лыткина Д. В., 144
Мазуров В. Д., 144
Малышев В. О., 59
Малышев С. Б., 231
Манцивода А. В., 20
Мартышкина М. Н., 203
Махнев А. А., 155
Мельникова Е. В., 60
Миллер В. А., 232
Минготт Фернандез М. М., 98
Миронов В. С., 62
Монахов В. С., 156
Москалюк В. А., 63
Мусина Н. М., 228
Назаров А. К., 64

Немцев И. С., 65
Неталиева Е. К., 230
Нещадим М. В., 211
Нещадим М. В., 131
Нещадим М. В., 132
Новиков И., 157
Нужин Я. Н., 158
Нужин Я. Н., 159
Нужин Я. Н., 160
Нужин Я. Н., 161
Огилько Д. С., 66
Павлинов Д. А., 204
Пальчунова О. Д., 67
Панасенко А. С., 205
Петренко Н. А., 68
Петров Е. П., 206
Петров К. А., 99
Петруть Т. С., 159
Пожидаев А. П., 208
Пожидаев А. П., 16
Поляков А. А., 101
Поляков Н. Л., 233
Попова В. А., 69
Попова Н. В., 227
Проценко Н. А., 102
Пчелинцев С. В., 209
Ревин Д. О., 162
Репеев Р. Ю., 210
Рыбаков В. В., 99
Рыбаков М. Н., 91
Рябов Г. К., 21
Савельев Д. М., 70
Сахаров И. А., 234
Свирский Б. С., 71
Селиванов К. В., 97
Сенашов В. С., 174
Симонов А. А., 211
Симонов А. А., 131
Симонов А. А., 132
Скок Д. С., 163
Скресанов С. В., 22
Слепченко С. В., 72
Соколов Е. В., 164
Соколовская А. М., 160
Сорокина В. Н., 165
Сорокина М. М., 165
Сохор И. Л., 166
Стайнова А. А., 138
Степанова А. А., 226
Степанова А. А., 235
Степанова А. А., 23
Сучков Н. М., 167
Сыроежкин Е. М., 73
Таламбуца А. Л., 24
Тауснев Д. А., 168
Тимошина К. Д., 227
Тихомолов Я. А., 74
Ткачев А. И., 169
Трофимук А. А., 170
Троянская Е. Н., 161
Трушков С. В., 75
Тютянов В. Н., 148
Углев А. Р., 103
Усиков А. В., 171
Файзрахманов М. Х., 118
Фильберт М. А., 76
Фиткулин И. Р., 77
Ходзицкий А. Ф., 212
Хорьяков И. С., 78
Цуканов М. А., 79
Чеканов С. Г., 226
Чеканов С. Г., 235
Черепанов М., 81
Шарапов А. С., 104
Шахова С. А., 172
Шашков О. В., 213
Швидефски М. В., 25
Шевлякова А. М., 82
Шепелев В. Д., 173
Шеремет М. С., 83
Шиманогов И. Н., 119
Шлепкин А. А., 168
Шлепкин А. А., 174
Шлепкин А. К., 168
Шульгина-Таранчук А. С., 228
Щедрикова З. К., 120
Юн В. Ф., 106
Ядова А. П., 141
Якобсон А. А., 84
Яковлев Н. Е., 175