И.В. Ашаев, Г.Ч. Мавликасова

Об одном варианте Σ-определимости алгебраических систем

В [АБМ93] была введена формализация вычислимости, обобщающая машину Л.Блюм, С.Смейла и М.Шуба [BSS89] на произвольную алгебраическую систему. Ю.Л. Ершовым было предложено понятие Σ-определимости алгебраических систем [Ерш96]. Однако, так как не всякая Σ-функция является вычислимой в смысле [АБМ93], то из Σ-определимости системы $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ не следует, что класс BSS-вычислимых над $\mathcal{A}$ функций можно транслировать в в класс функций, BSS-вычислимых над $\mathcal{B}$.

В данной работе предлагается вариант Σ-определимости, который избавлен от этого недостатка. Достигается это путем наложения дополнительных ограничений на используемые формулы.

Пусть σ и τ – конечные сигнатуры. Нам потребуется язык L_R – фрагмент логики $L_{\omega_1\omega}$, в котором разрешены счетные конъюнкции и дизъюнкции по рекурсивно перечислимым множествам формул. В языке L_R выделим класс формул Σ^0, состоящий из формул вида $\bigvee\limits_{i\in I} \varphi_i$, где φ_i – бескванторные формулы первого порядка.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \sigma\rangle$ – алгебраическая система, $P \subseteq A^n$ – предикат. Скажем, что P является Σ^0-предикатом, если он определим в $\mathcal{A}$ Σ^0-формулой, P является Δ^0-предикатом, если P и $A^n \setminus P$ Σ^0-предикаты. Функцию $f : A^n \to A$ назовем Σ^0-функцией, если найдется Σ^0-формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ вида $\bigvee\limits_{i\in I} \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ & $(y = t_i(x_1, \ldots, x_n)$, где φ_i – попарно несовместные бескванторные формулы, t_i – термы сигнатуры σ, которая выделяет отношение $f(x_1, \ldots, x^n) = y$. Аналогично, функция f является Δ^0-определимой, если она Σ^0-определима, а также отношение $f(x_1, \ldots, x^n) \neq y$ выделяется Σ^0-формулой указанного вида.

Определение. Система $\mathcal{A}$ сигнатуры σ Δ^0-определима в системе $\mathcal{B}$ сигнатуры τ, если найдутся

1) Δ^0-определимое множество $B_A \subseteq B^k$;

2) для каждого предикатного символа $P^{(n)}$ сигнатуры σ Δ^0-предикат $P^\star \subseteq B_A^{kn}$ в системе $\mathcal{B}$;

3) для каждого функционального символа f из σ $Delta^0$-функция $f^\star : B_A^k n \to B_A^k$ в $\mathcal{B}$;

4) для каждого константного символа $c \in \sigma$ кортеж замкнутых термов $c^\star = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ сигнатуры τ,

при этом система $\mathcal{A}$ изоморфна системе $\langle B_A, P^\star, f^\star, c^\star \mid P, f, c \in \sigma\rangle$.

Поскольку каждая Σ^0-формула эквивалентна некоторой Σ-формуле HF-логики, то это частный случай Σ-определимости.

Теорема. Если система $\mathcal{A}$ Δ^0-определима в системе $\mathcal{B}$, то класс вычислимых над $\mathcal{A}$ функций можно эффективно транслировать в класс функций, вычислимых над $\mathcal{B}$.

References

[АБМ93] Ашаев И.В., Беляев В.Я., Мясников А.Г. *Подходы к теории обобщенной вычислимости*// Алгебра и логика. 32. N 4 (1993). С. 349–386.

[BSS89] L. Blum, M. Shub, S. Smale. *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines* //Bull. Amer. Math. Soc. 1989. V.21. N1. P.1–46.

[Ерш96] Ершов Ю.Л. *Определимость и вычислимость.* – Новосибирск: Научная книга, 1996.