ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ТЕТРАЭДРОВ В ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ

Н. В. Байдакова (Екатеринбург) [1]

В докладе речь пойдет о зависимости оценок приближения функций и их производных интерполяционными сплайнами от геометрических характеристик треугольников и тетраэдров, входящих в триангуляцию. Эта задача сводится к аппроксимации на одном треугольнике или тетраэдре и в таком виде изучается многими авторами (см., напр. ссылки в [1] и [2]).

Рассмотрим сначала функцию двух переменных. Обозначения: Δ – треугольник в R^2, $z = (x,y) \in R^2$; a_i $(i = 1,2,3)$ – вершины Δ; n_i $(i = 1,2,3)$ – единичная нормаль к стороне $[a_i, a_{i+1}]$, где $a_4 = a_1$; τ, σ – единичные векторы, направленные вдоль $[a_2, a_3]$, $[a_2, a_1]$; α, β, θ – углы при вершинах a_1, a_2, a_3; $\gamma(\varphi) = \max\{1, \operatorname{ctg}\varphi\}$. На каждой из сторон $[a_i, a_{i+1}]$ выделим множество точек $\{b_{ik}^j\}_{j=1}^k$, $k = 1, \ldots, m$, при каждом k делящих сторону, на которой они лежат, на $k+1$ равных отрезков. Без ограничения общности будем полагать $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$; пусть $0 < \alpha \le \beta \le \theta$, откуда следует, что диаметр Δ равен $a + b = H$.

Обозначим через W^r класс функций $f(x,y)$, у которых в Δ непрерывны все производные $D^k_{\xi_1,\ldots,\xi_k} f(x,y), k = 0, 1, \ldots, r$ для произвольных направлений $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Пусть $f(x,y) \in W^{4m+2}$ и $e(x,y) = f(x,y) - P_{4m+1}(x,y)$, где $P_{4m+1}(x,y)$ – полином степени $4m+1$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\frac{\partial^n e(a_i)}{\partial x^{n-l} \partial y^l} = 0, \quad 0 \le n \le 2m, \quad 0 \le l \le n, \quad i = 1,2,3;$$

$$\frac{\partial^k e(b_{ik}^j)}{\partial n_i^k} = 0, \quad 1 \le k \le m, \quad 1 \le j \le k, \quad i = 1,2,3;$$

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 99-01-00140 и Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (проект 00-15-96035)

$$\frac{\partial^{i_1+i_2}e(a_2)}{\partial\sigma^{i_1}\partial\tau^{i_2}} = 0, \quad i_1, i_2 \geq m+1, \quad 2m+2 \leq i_1+i_2 \leq 3m.$$

Теорема. *Существует константа K, зависящая только от f и m, такая, что для любой точки $(x,y) \in \Delta$ справедливы оценки:*

$$\left|\frac{\partial^n e(x,y)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right| \leq KH^{4m+2-n}[\gamma(\beta)]^{\max\{1,j-2m\}}[\gamma(\alpha)]^{\min\{j-1,2m\}}, \quad (1)$$

где $1 \leq j \leq n, 1 \leq n \leq 4m+1$.

В случае $m=1$ данная теорема доказана Ю.Н.Субботиным. Часть оценок (1) неулучшаема с точностью до константы K. Оценки приближения самой функции ($n=0$) следуют из более ранних результатов Сьярле и Равьяра (см. ссылку в [1]).

Оценки типа (1) могут быть получены и для многочленов других степеней с аналогичными интерполяционными условиями. В частности, можно подобрать такие интерполяционные условия для многочлена третьей степени $P_3(x,y)$, что в оценках, подобных (1), для $P_3(x,y)$ все множители $\gamma(\alpha)$ будут заменены на $\gamma(\beta)$.

Найденные интерполяционные условия для $P_3(x,y)$ используются для того, чтобы построить непрерывный интерполяционный сплайн в R^3 при триангуляции области на произвольные тетраэдры. При этом оценки приближения функции трех переменных и ее производных таким сплайном в некоторых случаях оказываются в каком-то смысле лучше оценок из [2], а в других случаях являются более точными, чем известные общие оценки Сьярле и Равьяра, но более грубыми, чем оценки в [2].

[1] *Baidakova N.V.* On some interpolation process by polynomials of degree at most $4m+1$ on the triangle// Russian Journal of numerical analysis and mathematical modelling. – 1999. – V.14, №2. – P. 87-107.

[2] *Zenisek A., Zlamalova J.* The finite element method with Semiregular Hermite cubic tetrahedral elements// Algoritmy 2000: 15-th Conf. of Scientic Computing. Vysoke Tatry – Podbanske, Slovakia. Sept. 10-15. – 2000. – P.420-429.

E-mail: baidakova@imm.uran.ru