СПЛАЙНОВЫЕ ВСПЛЕСКИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.А.Блатов (Самара)

Пусть функция $K(x, y)$ имеет все производные до r-го порядка включительно $(1 \leq r \leq m)$ и справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^r K(x,y)}{\partial x^s \partial y^{r-s}} \right| \leq C \frac{1}{|x-y|^{-r}}.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) + \int_a^b K(x,y) u(y) dy = f(x)$$

с заданной функцией f и неизвестной функцией u. Сложности численного решения уравнений такого вида (особенно многомерных) традиционными численными методами связаны с тем, что матрицы, получающиеся при их дискретизации оказываются заполненными, т.е. состоящими из ненулевых элементов.

Рассмотрим метод Бубнова-Галеркина на базе полуортогональных сплайновых всплесков степени $m-1$. Зафиксируем некоторые натуральные n_0 (из условия $2^{n_0} > 2m+1$), $k > n_0$ и будем искать решение в виде разложения по базисным всплескам

$$u = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \phi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j,n_0+i} \,.$$

Выбирая функции $\phi_{j,n_0}(y), \psi_{j,n}(y),\ \ n_0 + 1 \leq n \leq k$ в качестве пробных и тестовых в методе Бубнова-Галеркина, получим систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей порядка $2^k + m - 1$, большинство элементов которой имеют вид

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y) \psi_{j,p}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy.$$

Для классических систем функций в методе Галеркина эти числа оказываются, в основном, ненулевыми и недостаточно малыми, чтобы ими можно было пренебречь и рассматривать матрицу системы, как разреженную. Получим оценки упомянутых чисел при использовании всплесков.

Теорема. *Найдется не зависящая от k константа $C > 0$, такая, что справедливы оценки*

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x,y) \psi_{j,n}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy \right| \leq C 2^{-2n} (1 + |l - j|)^{-m},$$

$$-m+1 \leq l \leq 2^{n-1} - m, \ -m+1 \leq j \leq 2^{n-1} - m, \ n_0 + 1 \leq n \leq k;$$

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x,y) \psi_{j,n+s}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy \right| \leq$$

$$\leq C 2^{-(2n+s(m+1))} (1 + |l - j/2^s|)^{-m},$$

$$-m+1 \leq l \leq 2^{n-1} - m, \ -m+1 \leq j \leq 2^{n+s-1} - m,$$

$$1 \leq s \leq k - n, \ n \leq k.$$

Полученные оценки позволяют пренебрегать малыми элементами и рассматривать матрицу системы, как разреженную.

E-mail: blatow@ssu.samara.ru