О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В. В. Богданов (Новосибирск)[1]

Задачу о неотрицательном решении линейной системы уравнений $Ax = d$ с неотрицательной правой частью иногда удается свести некоторым равносильным преобразованием к задаче с монотонной матрицей. Тогда достаточным условием неотрицательности решения является неотрицательность правой части преобразованной системы. В случае трехдиагональных систем с неотрицательными элементами и диагональным преобладанием по строке В.Л. Мирошниченко [1] предложено приведение матрицы системы к M-матрице с сохранением строчного диагонального доминирования, что обеспечивает монотонность преобразованной матрицы. Обобщение этого преобразования для систем с матрицами, удовлетворяющими ослабленным якобиевым условиям, предложенное Ю.С.Завьяловым [2], также касается только тех систем, которые имеют диагональное преобладание по строкам.

Доклад посвящен вопросу о достаточных условиях положительности решения трехдиагональной системы с диагональным преобладанием по столбцам.

Рассматривается трехдиагональная система $Ax = d$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ & 0 & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

которая имеет диагональное преобладание по столбцам

$$a_i > |b_{i-1}| + |c_{i+1}|, \quad i = 1, \ldots, n, \quad b_0 = c_{n+1} = 0 \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Интеграционных проектов СО РАН № 1

и удовлетворяет условиям

$$c_{i+1}b_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Соотношения (2) позволяют представить матрицу A в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ C_2 & A_2 & B_2 & & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ & 0 & & C_l & A_l \end{pmatrix},$$

где все A_i — квадратные невырожденные M-матрицы порядков n_i, $0 \leq n_i \leq n$, $i = 1, \ldots, l$, $\sum n_i = n$, каждый блок B_k — $n_k \times n_{k+1}$-матрица, с положительным элементом $(B_k)_{n_k,1}$ и нулевыми на остальных местах, а каждая $n_{k+1} \times n_k$-матрица C_{k+1} имеет, соответственно, единственный ненулевой элемент $(C_{k+1})_{1,n_k} > 0$.

Умножая исходную систему на блочно трехдиагональную матрицу

$$G = \begin{pmatrix} E_1 & -B_1A_2^{-1} & & 0 & \\ & \cdots\cdots\cdots & & & \\ & -C_iA_{i-1}^{-1} & E_i & -B_iA_{i+1}^{-1} & \\ & & & \cdots\cdots\cdots & \\ & 0 & & -C_lA_{l-1}^{-1} & E_l \end{pmatrix},$$

где E_i — единичные матрицы размерностей n_i, получим эквивалентную систему $GAx = Gd$, матрица которой оказывается монотонной, что позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема. *Для того, чтобы система уравнений $Ax = d$, удовлетворяющая условиям (1), (2), имела неотрицательное решение $x \geq 0$, достаточно выполнения условий $d \geq 0$ и $Gd \geq 0$.*

[1] *Miroshnichenko V.L.* Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of functions'84. – Sofia, 1984. – P.610-620.

[2] *Завьялов Ю.С.* О неотрицательном решении системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. мат. журн. – 1996. – Т.37, № 6. – С.1303-1307.

E-mail: bogdanov@math.nsc.ru