ЯВНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Имамов (Наманган, Узбекистан)

Пусть в области Ω евклидова пространства R^m точек $x = [x^{(1)}, \dots, x^{(m)}]$ со стандартной нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $(x,x) = (x^{(1)})^2 + \dots + (x^{(m)})^2$, заданы интерполяционные узлы $x_i = [x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}]$ и значения $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, некоторой непрерывной функции.

Ю. С. Завьялов поставил следующую задачу: найти интерполяционные формулы $I_n(f, x)$ такие, что $I_n(f, x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, и обобщающие классические одномерные формулы Ньютона и Лагранжа.

1. Вводятся разделенные разности $f(x)$ относительно точек $x_0, \dots, x_k$ порядка $k \geq 1$:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{|x_k - x_{k-1}|}$$

Обобщенная формула Ньютона и ее остаток имеют вид

$$\begin{aligned} I_n(f; x) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k] \cdot |x - x_0| \dots |x - x_{k-1}|, \\ R_n(f; x) &= f(x) - I_n(f; x) = \\ &= f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \cdot |x - x_0| \dots |x - x_n|. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Если D — выпуклое замкнутое множество, $f(x)$ дифференцируема k раз в D, т. е. $f(x) \in C^k(D)$, то найдутся единичные направления $e_1, \dots, e_k \in R^m$ и точка $c \in D$ такие, что*

$$f[x_0, \dots, x_k] = D_{e_1, \dots, e_k} f(c),$$

где $D_{e_1, \dots, e_k} f(x)$ - производная $f(x)$ по направлениям $e_1, \dots, e_k$.

Следствие. *Если $f(x) \in C^{n+1}(D)$, то существует число $M_{n+1} > 0$ такое, что*

$$|R_n(f; x)| \leq M_{n+1} |x - x_0| \dots |x - x_n|.$$

2. Обобщенная формула Лагранжа. Пусть

$$v_i(x) = \prod_{j \neq i} |x - x_j|^{\alpha}, \quad u_i(x) = v_i(x) / \sum_{i=0}^{n} v_i(x), \quad \alpha > 0,$$

$$L_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) u_i(x).$$

В силу условий $u_i(x_i) = 1$, $u_i(x_j) = 0$, $j \neq i$, $L_n(f;x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, формула $L_n(f;x)$ является положительной, осредняющей, а система $\{u_i(x)\}$ — разбиением единицы. В формуле для $L_n(f;x)$ вместо $f(x_i)$ можно взять значение в точке x_i произвольной фунции $F_i(f;x)$, аппроксимирующей $f(x)$ вблизи этой точки с некоторым порядком р ≥ 0. Например, в качестве $F_i(f;x)$ можно использовать локальную формулу интерполяции, отрезок формулы Тейлора.

Для остаточного члена $R_n(f;x) = f(x) - L_n(f;x)$ получена «лемма о функциях со сгущающимся семейством нулей» (термин В.А.Василенко), являющаяся обобщением теоремы Безу и частным случаем теоремы Л.Шварца о делении функций.

Лемма. *Пусть* $g(x) \in C^{n+1}(D)$, $D \supseteq \mathrm{conv}(x_0, \ldots, x_n)$, $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. *Тогда найдется набор направлений* $H_1 \in R^m, \ldots, H_{n+1} \in R^m$ *и точка* $c \in R^m$ *такие, что*

$g(x) = |x - x_0| \ldots |x - x_n| \{g^{(1)}(c) H_1 + \ldots + g^{(n+1)}(c) H_{n+1}\}$,

где $g^{(i)}(x)$ — *градиент функции* $g(x)$ *порядка* $i = 1, \ldots, n+1$.

Теорема 2. *Если* $f(x) \in C^{n+1}(D)$, $D \supseteq \mathrm{conv}(x_0, \ldots, x_n)$, *то существует число* $M_{n+1} \geq 0$ *такое, что*

$$|R_n(f;x)| \leq M_{n+1} |x - x_0| \ldots |x - x_n|.$$

[1] *Barnhill R.E.* Representation and approximation of surfaces. // Mathematical Software III. – New York: Acad. Press, 1977. – P.69–120.

[2] *Имомов А.* Интерполяция операторов. // Научные сообщения. № 1-2. – Фергана: ФерГУ, 1977. – С.57–62.

E-mail: namdu@uzpak.uz, azam@fremail.ru, namsu@namsu.silk.org