ОБ АСИМПТОТИКЕ СКАЧКА СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СПЛАЙНА

Б. С. Киндалев (Новосибирск)

Пусть в узлах равномерной сетки $x_i = a + ih$, $i = 0, \pm 1, \dots$; $h = (b - \text{a})/N$ заданы значения $f(x_i)$ периодической с периодом $(b - \text{a})$ функции $f(x)$. Символами $\widetilde{C}^n$, $n = 0, 1, \dots$, и $\widetilde{C}^{-1}$ будем обозначать соответственно классы $(b - \text{a})$-периодических, n раз непрерывно дифференцируемых и кусочно-непрерывных на всей вещественной оси функций. Через $S(x)$ обозначим $(b - \text{a})$-периодический полиномиальный сплайн степени $n \geq 0$ класса $\widetilde{C}^{n-1}$ с узлами $\bar{x}_i = x_i + h(1 + (-1)^n)/4$, $i = 0, \pm 1, \dots$, интерполирующий в узлах сетки x_i функцию $f(x)$.

Рассматривается задача об асимптотическом разложении погрешности $(S^{(n)}(\bar{x}_i + 0) - S^{(n)}(\bar{x}_i - 0))/h - f^{(n+1)}(\bar{x}_i)$ по степеням шага h.

Теорема. *Если* $f(x) \in \widetilde{C}^{n+6\hat{n}+7}$, *то*

$$\frac{S^{(n)}(\bar{x}_i + 0) - S^{(n)}(\bar{x}_i - 0)}{h} - f^{(n+1)}(\bar{x}_i) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2\hat{n}+1} a_{j,n} h^{2\hat{n}+2+2j} f^{(n+2\hat{n}+3+2j)}(\bar{x}_i) + O(h^{6\hat{n}+6}),$$

где

$$a_{j,n} = \frac{(-1)^{n+1} B_{2(\hat{n}+1+j)}(\varkappa_n)}{n!(2\hat{n} - n + 1 + 2j)!2(\hat{n} + 1 + j)}, \ j = 0, \dots, \hat{n};$$

$$a_{j,n} = \frac{(-1)^{n+1} B_{2(\hat{n}+1+j)}(\varkappa_n)}{n!(2\hat{n} - n + 1 + 2j)!2(\hat{n} + 1 + j)} +$$

$$+ \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{j-\hat{n}-1} \frac{(\hat{n} + 1 + k)^{-1}(j - k)^{-1} B_{2(\hat{n}+1+k)}(\varkappa_n) B_{2(j-k)}(\varkappa_n)}{4(2\hat{n} - n + 1 + 2k)!(2(j - k) - n - 1)!},$$

$$j = \hat{n} + 1, \dots, 2\hat{n} + 1;$$

$$\varkappa_n = \begin{cases} 0, & n - \text{нечетное}, \\ 1/2, & n - \text{четное}, \end{cases}$$

$B_{2l}(\cdot)$ — *полиномы Бернулли,* $\hat{n} = [n/2]$, $[\cdot]$ — *целая часть числа.*

Отметим, что ранее автором [1, 2] найдено асимптотическое разложение погрешности с коэффициентами, насчитывающимися по рекуррентной формуле. В сформулированной теореме эти коэффициенты указаны в явном виде.

Среди возможных применений асимптотического разложения скачка старшей производной сплайна отметим:

а) построение схем повышенной точности для решения краевых задач [3];

б) алгоритмы повышения точности приближения сплайнами [1], [4].

[1] *Киндалев Б.С.* О точности приближения периодическими интерполяционными сплайнами нечетной степени// Методы сплайн-функций в численном анализе. (Вычислительные системы, вып. 98). - Новосибирск, 1983. -С.67-82.

[2] *Киндалев Б.С.* Асимптотика погрешности и суперсходимость периодических интерполяционных сплайнов четной степени// Сплайны в вычислительной математике (Вычислительные системы, вып. 115). – Новосибирск, 1986. – С. 3-25.

[3] *Киндалев Б.С.* Решение периодической краевой задачи для дифференциального уравнения $2m$ - го порядка с использованием сплайна степени $2m-1$ // Интерполяция и аппроксимация сплайнами (Вычислительные системы, вып. 147). – Новосибирск, 1992. – С.68-83.

[4] *Kindalev B. S.* Asymtotics of error for interpolating splines of even degree. // Constructive theory of functions$'$84. – Sofia, 1984. – P.445-450.